

# 國立臺灣師範大學數學系

## 103 學年度轉系、輔系、雙主修考試試題

### Part I 微積分

1. Find the following integrals. (14 pts)

$$(a) \int \sec^3 \theta d\theta \quad (b) \int \frac{e^{2z}}{e^{2z} + 3e^z + 2} dz$$

2. Find the tangent to the curve  $x^y = y^x$  at the point  $(1, 1)$ . (6 pts)

3. Let  $f$  be a real-valued function defined by

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Is  $f$  differentiable at  $x = 0$ ? Give your reasons. (10 pts)

4. If two real-valued functions  $f$  and  $g$  are defined by

$$f(x) = \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}}, \quad g(x) = \ln(x - 1)$$

for all  $x > 1$ , find the horizontal asymptote for  $f(x)/g(x)$ . (14 pts)

5. Prove that  $x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0$  has *exactly* one real root. (6 pts)

### Part II 高中數學

#### 6. 單選題 (共 5 小題，每題 7 分)

(1) 多項式函數  $x^3 - 3x^2 + 6x - 5$  的圖形，在  $x = 1$  附近最靠近下列哪個函數的圖形？

- (A)  $-1$  (常數函數)
- (B)  $3x - 1$
- (C)  $3x - 4$
- (D)  $-3x + 2$
- (E)  $-3x - 1$

- (2) 學校開了12班微積分，供大一489名新生修習。請問學生人數最多的班，至少有多少人？  
 (A) 40      (B) 41      (C) 48      (D) 49      (E) 60
- (3) 直角三角形的三邊長分別為5,12,13。其內切圓圓心與外接圓圓心的距離為多少？  
 (A)  $\frac{\sqrt{29}}{2}$       (B)  $\frac{\sqrt{37}}{2}$       (C)  $\frac{7}{2}$       (D)  $\frac{\sqrt{65}}{2}$       (E)  $\frac{\sqrt{85}}{2}$
- (4) 坐標空間中，三點 $A(1,2,-1)$ , $B(0,3,-2)$ , $C(-1,-1,1)$ 所圍成的三角形面積為何？  
 (A)  $\frac{1}{2}$       (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       (C)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       (D) 1      (E)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- (5) 按照以往對球員的表現，評估甲、乙兩球隊對戰時，甲隊獲勝的機率為0.6，乙隊獲勝的機率為0.4。現在兩隊要進行三戰兩勝的系列賽，請問甲隊在系列賽勝出的機率，最接近下列哪一個選項？  
 (A) 0.65      (B) 0.70      (C) 0.75      (D) 0.80      (E) 0.85

**填充題 (共3題，每題5分)**

7. 將坐標空間的點視為位置向量的終點。  
 若 $(3,3,2) = a(5,2,1) + b(2,1,5) + c(1,5,2)$ ，則實數數組 $(a,b,c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
8. 設 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 為兩等差數列，其首 $n$ 項之和的比為 $(7n-2):(4n+27)$ 。則對應項之差 $|a_n - b_n|$ 達到最小值時，項數 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
9. 設 $\theta$ 為銳角，且 $\sin \theta = \frac{1}{3}$ 。則 $\tan 3\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。