

國立台灣師範大學數學系

104 學年度大學申請入學指定項目甄試試題

筆試二 填充題

說明與注意事項：

- (甲) 本試卷共十題 (共兩頁)，每題 10 分，合計 100 分。
- (乙) 作答時間 90 分鐘 (下午 3 : 30 ~ 5 : 00)。
- (丙) 請將答案寫在答案本內，否則不予計分。
- (丁) 答案需註明題號，但不需寫計算過程，答案若為分數請化為最簡分數。
- (戊) 交卷時答案本與本試卷一併交回。

1. 甲、乙、丙和其他七人圍圓桌而坐，甲、乙、丙三人兩兩不相鄰之機率為多少？
2. 設資料 $X = (-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4)$ ，而 $i = 1, 2, 3, 4$ 時，資料 $Y_i = ((-4)^i, (-3)^i, (-2)^i, (-1)^i, 0^i, 1^i, 2^i, 3^i, 4^i)$ 。令 r_i 代表資料 X 和資料 Y_i 的相關係數， $i = 1, 2, 3, 4$ 。請寫出 r_1, r_2, r_3 與 r_4 的大小關係 (例如 $r_1 < r_2 = r_3 < r_4$ 或 $r_4 < r_3 < r_2 < r_1$)。
3. 三位數中數字不重覆且為 15 的倍數共有多少個？
4. 同時滿足下列條件的五次多項式共有幾個？
 - (a) x^5 項的係數為 1，其他係數為實數；
 - (b) 有 5 個相異根；
 - (c) 所有根都在集合 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 1 + i, 1 - i, -1 + i, -1 - i, i, -i\}$ 中，其中 $i = \sqrt{-1}$ 。

5. 橢圓 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ 上的點到直線 $y = \frac{1}{3}x - 5$ 之最短距離為何?
6. 設平面上兩直線 $L_1: x + 7y - 2 = 0$ 與 $L_2: 2x - y - 4 = 0$ 相交於 P 點。若圓 C 通過 P 點且分別與直線 L_1 和 L_2 相交於 $A(9, -1)$ 和 $B(0, -4)$ 兩點，則所有位於圓 C 內部，且坐標皆為整數的點，共有多少個?
7. 已知 $\frac{\pi}{8} < \theta < \frac{\pi}{4}$ ， $\sin(4\theta) = \frac{3}{5}$ ，且 $G = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ ，則 G^8 的反矩陣為何?
8. 已知空間中一平面通過 $(\frac{2}{3}, 2, 0)$ 和 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ 兩點，且與直線
- $$\begin{cases} x = \frac{26}{3} - \frac{2}{3}t, \\ y = -6 - 2t, & t \text{ 為實數,} \\ z = 4 + t, \end{cases}$$
- 平行。若此平面的法向量與 z -軸的夾角為 θ ，則 $\sin \theta$ 之值為何?
9. 已知常數 $a > 1$ ，求函數 $f(x) = 2a(\sin x + \cos x) - \sin x \cos x - 2a^2$ 的最大值為多少?
10. 已知 $\triangle ABC$ 的三邊長滿足 $\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = 3\overline{AB}^2$ ，求 $\sin C$ 的最大值。