

國立臺灣師範大學數學系

104 學年度轉系、輔系、雙主修考試試題

Part I 高中數學

一、多重選擇題(共 4 題，每題 5 分；合計 20 分)

1. 設空間向量 $\vec{u} = ((1, 2, 3) \times (4, 5, 6)) \times (-1, 1, 0)$ ，其中“ \times ”表示外積。請問 \vec{u} 與下列哪些向量垂直？
(A) $(1, 2, 3)$ (B) $(4, 5, 6)$ (C) $(-1, 1, 0)$
(D) $(1, 1, 1)$ (E) $(1, -2, 1)$
2. 坐標空間中有一個長方體，其中有一個頂點為 $A(1, 2, 3)$ ；與 A 有稜邊相連的三個頂點坐標分別是 $(4, 5, 6)$, $(3, -2, 5)$, $(5, 2, -1)$ 。請問下列哪些選項中的點，也是這個長方體的頂點？
(A) $(6, 1, 8)$ (B) $(10, 1, 4)$ (C) $(7, 2, 1)$
(D) $(8, 5, 2)$ (E) $(9, 4, 3)$
3. 已知 $\log_{10} 2 \approx 0.3010$, $\log_{10} 17 \approx 1.2304$ 。請問下列哪些整數的最高位數字是 1？
(A) 17^5 (B) 17^{10} (C) 17^{20}
(D) 17^{50} (E) 17^{100}
4. 設二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形通過平面上的三個點 $(1, \log_{10} 1)$, $(2, \log_{10} 2)$, $(3, \log_{10} 3)$ 。請選出正確的選項。
(A) $a < 0$ (B) $b > 0$ (C) $c > 0$
(D) $b^2 - 4ac > 0$ (E) $a + b > 0$

二、填充題(共 4 題，每題 5 分；合計 20 分)

5. 考慮坐標平面上的兩直線 $L_1: x + 2y = 1$, $L_2: 3x + 7y = 3$ 以及一點 P 。在 L_1 選取一點 Q_1 ，量得向量 $\overrightarrow{Q_1P} = (-6, 2)$ ；又在 L_2 選取一點 Q_2 ，量得向量 $\overrightarrow{Q_2P} = (-3, 0)$ 。則 P 點的坐標為 _____。
6. 將「人人為我 我為人人」八個字排成一列，其中任兩個「人」字皆不相鄰的排法有 _____ 種。
7. 設三角形 ABC 的三邊長分別為 $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 5$, $\overline{CA} = 6$ 。若 O 點為三角形 ABC 的外心，則 $\cos \angle AOB =$ _____。
8. 無窮級數和 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+3)} =$ _____。

三、計算證明題(共 1 題 10 分)

9. 費氏數列 (Fibonacci sequence) 的定義是：

$$F_1 = F_2 = 1; \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \forall n \geq 3.$$

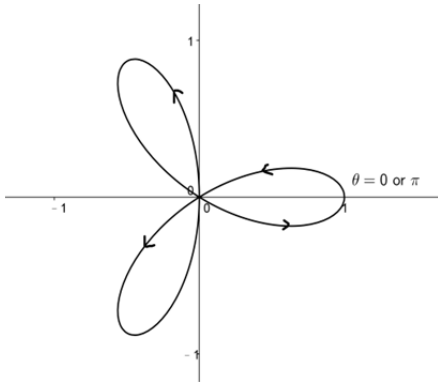
試證：「 F_k 是 7 的倍數」的充要條件是「 k 是 8 的倍數」。

國立臺灣師範大學數學系

104 學年度轉系、輔系、雙主修考試試題

Part II 微積分

1. Find the interval of convergence for the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^n \cdot (2n)!} x^n$. (10 pts)
2. Sketch the graph of the function $f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$ (including intercepts, critical points, points of inflection, concavity and asymptotes of the graph). (15 pts)
3. Find the area of the region inside the three-leaved rose $r = \cos(3\theta)$. (5 pts)



4. Find the following integrals.

(a) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x^3}} dx, 0 < x < 1$ (5 pts)

(b) $\int \sin(3x)\cos(5x)dx$ (5 pts)

(c) $\int \frac{x^2+4x+1}{x^3+3x^2-x-3} dx$ (10 pts)