

國立台灣師範大學數學系

105 學年度大學申請入學指定項目甄試試題

筆試二 填充題

說明與注意事項：

- (甲) 本試卷共十題 (共兩頁)，每題 10 分，合計 100 分。
- (乙) 作答時間 90 分鐘 (下午 3 : 30 ~ 5 : 00)。
- (丙) 請將答案寫在答案本內，否則不予計分。
- (丁) 答案需註明題號，但不需寫計算過程，答案若為分數請化為最簡分數。
- (戊) 交卷時答案本與本試卷一併交回。

- 一、若正實數 x, y 滿足 $x + y = 6$ ，則 $2 \log_{10} x + \log_{10} y$ 的最大值為 _____。
- 二、設實數 a, b 滿足 $a - b > 0$ 且 $ab = 3$ 。若空間中三向量 $\vec{A} = (5, b, a)$ 、 $\vec{B} = (b, 1, 0)$ 和 $\vec{C} = (a, 0, 1)$ 所張成的平行六面體體積為 18，則 $a - b =$ _____。
- 三、在坐標平面上圓 $x^2 + y^2 - 10x + 6y = -9$ 與兩直線相切於 A, B 兩點，且此兩直線相交於點 $P(-2, -4)$ 。若 A 點的坐標為 $(1, 0)$ ，則 B 點的坐標為_____。
- 四、有三數其平均值為 5，標準差為 $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ 。已知此三數加入 x 後平均值仍為 5，標準差為 σ 。若再加入 y ，這五個數的標準差仍為 σ ，則 $(x - y)^2 =$ _____。
- 五、一袋中有 2 個黑球，1 個白球。每次自袋中隨機取出 1 個球後，就補進一個黑球。這樣操作 3 次後所取出的黑球個數之期望值為_____。(化成最簡分數)

六、設 Q_1, Q_2 為以原點 $O(0,0)$ 為圓心的單位圓和 x 軸的兩交點。若上半圓上兩點 P_1 和 P_2 滿足 $\angle P_1OP_2 = 45^\circ$ ，則 $\triangle P_1OQ_1$ 和 $\triangle P_2OQ_2$ 面積和的最大值為_____。

七、數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 0$ 且

$$a_n = \frac{1}{2 + a_{n-1}} \quad (n \geq 2).$$

已知將 a_n 寫成最簡分數 $a_n = \frac{r_n}{s_n}$ 後，數列 $\langle r_n \rangle$ 會滿足一個遞迴關係式

$$r_n = ar_{n-1} + br_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

試求數對 $(a, b) =$ _____。

八、設多項式 $f(x) = x^2 + x - 3$ 且 c 為實數。若 $f(f(x))$ 及 $f(x) \times f(x)$ 除以 $x - c$ 有相同的餘式，則此餘式為_____。

九、同一平面上有 L_1, \dots, L_{100} 共 100 條相異直線。若直線 L_{4k} ($k = 1, \dots, 25$) 都互相平行；直線 L_{4k-1} ($k = 1, \dots, 25$) 都通過某個定點，則這 100 條直線的交點最多有_____個。

十、若橢圓 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 和開口向上的拋物線 $y = cx^2 + d$ 交於相異三點，則 c 的範圍為_____。