微積分乙 (二) 期中考試題

1. 假設空間中一質點 (particle) 在時間 t 處的位置函數 (position function) 為

$$\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \ln 4,$$

其中 $\mathbf{r}(t)$ 為一向量 (值) 函數。請回答下列問題：

(a) (5 分) 該質點在時間 $t = 1$ 處的速率 (speed) 為何?

(b) (5 分) 該質點在時間 t 處的加速度 (acceleration vector) 為何?

(c) (5 分) 試求由 $\mathbf{r}(t)$ 所生成曲線的弧長 (arc length)。

2. (25 分) 判斷是否為收斂或發散的級數，並給出你 (妳) 的理由。

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{\sqrt{n^3+5}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{\sqrt{e^n + \ln n}}$ (c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{2016}}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos^{-1}(\frac{1}{n+1}) - \cos^{-1}(\frac{1}{n+2}) \right)$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

3. (10 分) 求解下列微分方程式 (differential equation)

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -32\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = 8\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}'(0) = 6\mathbf{i} + 7\mathbf{j}.$$

4. 考慮極坐標曲線 C_1： $r = 3 + 3\cos\theta, 0 \le \theta \le \pi$ 和 C_2： $\theta = \pi$。

(a) (5 分) 試求曲線 C_1 與 C_2 所圍成的區域面積。

(b) (10 分) 試求曲線 C_1 的弧長。

5. (10 分) 求 $f(x) = \ln(2 + x)$ 的馬克勞林級數 (Maclaurin series)。

6. (10 分) 試求冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (4x+1)^n}{5n+6}$ 的收斂半徑 (radius of convergence) 與收斂區間 (interval of convergence)。

7. 考慮下列平面上的參數曲線 (parametric curve)

$$x = \ln(\sec t + \tan t) - \sin t, \quad y = \cos t, \quad 0 \le t \le \pi/3.$$

(a) (10 分) 求上述曲線對 x 軸旋轉所得的旋轉體表面積。

(b) (5 分) 假設 y 是 x 的可微分函數，試求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi/4}$。

8. (加分題，5 分) 對於所有 $x \in \mathbb{R}$，試證明

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$