微積分乙 (二) 期末考試題

注意事項：無計算過程或說明不給分。總分 100 分，加分題 5 分。

1. 計算下列逐次積分(疊代積分)(iterated integral):

   (a) $\int_0^1 \int_{2x}^2 4e^{y^2} dydx$ (6 分)

   (b) $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-y^2}} (x^2+y^2) dxdy$ (6 分)

   (c) $\int_0^1 \int_{-2y}^{2y} 4(x+2y)e^{x-2y} dxdy$ (8 分)

2. 求函數 $f(x,y) = x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 - 2x + y$ 所有的相對極小值(local minima)、相對極大值(local maxima) 及鞍點(saddle points)。 (10 分)

3. 考慮函數 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$，求在曲線 $x = \cos t$，$y = e^t$ 上一點 $(1,1)$ 處的導數 $\frac{df}{dt}$ 值。 (10 分)

4. 考慮函數 $h(x,y) = e^x \sin y$ 及其定義域上一點 $P\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$。

   (a) 求 h 在點 P 處沿方向 $\vec{\mathbf{v}} = -\vec{\mathbf{i}}$ 的方向導數(directional derivative)。 (5 分)

   (b) 求 h 在點 P 處遞增最劇烈的方向。 (5 分)

5. 空間中兩個曲面 $F: x^2+z^2 = 25$ 與 $G: y^2+z^2 = 25$ 及其中交點 $P(3,3,4)$。

   (a) 求曲面 F 在點 P 處的切平面方程式。 (6 分)

   (b) 求曲面 G 在點 P 處的法線方程式。 (6 分)

   (c) 求曲面 F 與 G 的相交曲線在在點 P 處的切線方程式。 (8 分)

6. 方程式 $x \ln y + y^2 z + z^2 = 6$ 中 z 是由獨立變數 x 與 y 所組成的函數，假設偏導數(partial derivative)均存在，試求偏導數 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 在點 $(0,1,2)$ 處的值。(10 分)

7. 考慮半徑爲 5 的一個球面 $x^2+y^2+z^2 = 25$。

   (a) 使用二重積分(double integral)求出此球的表面積(surface area)。(10 分)

   (b) 使用圓柱座標(cylindrical coordinate)或球面座標(spherical coordinate)求出此球的體積(volume)。 (10 分)

8. (加分題，5 分) 計算極限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2}$。