微積分乙 (二) 期末考試題

2022.06.01

考試規範：
1. 本試卷共十一大題（共一頁），配分請見各題，合計 110 分。
2. 禁止翻閱書本、筆記和查詢相關資料。
3. 禁止使用手機、計算機及電腦等電子用品計算題目和獲得答案。
4. 所有題目的解答都要有計算過程, 無計算過程不給分。

1. 求下列各積分值。(18 分)

(a) $\displaystyle\int_0^3\int_0^2 (4-y^2)\,dydx$ (b) $\displaystyle\int_{-2}^2\int_{|y|}^2 e^{x^2}\,dxdy$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)\,dxdy$

2. 已知函數 $z=x^2+\dfrac{y}{x}$, $x=u-2v+1$, $y=2u+v-2$, 求偏導數 $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ 在 $u=0$, $v=0$ 的值. (6 分)

3. 求曲面 $x^2+y^2+2z^2=23$ 在點 $P(1,2,3)$ 的切平面方程式和過 P 點的法線參數式. (8 分)

4. 求 $f(x,y)=x^3+y^3-xy$ 的相對極值. (6 分)

5. 求 $f(x,y)=3x^2y+4x$ 在 $(-1,4)$ 處的最大方向導數. (6 分)

6. 設 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

(a) 當 (x,y) 沿著直線 $y=x$ 趨近原點時, $f(x,y)$ 的極限值. (4 分)
(b) 求偏導數 $f_x(0,y)$. (4 分)
(c) 求偏導數 $f_{xy}(0,0)$. (4 分)

7. 阿杰 想訂製一個容積為 12 立方公尺的無蓋長方體箱子, 已知底面的費用為每平方公尺 3000 元, 四個側面的費用為每平方公尺 1000 元, 試求長、寬、高為多少公尺時, 費用為最少？(不計材料厚度) (10 分)

8. 求積分 $\displaystyle\iint_R e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dxdy$, 其中 R 為 xy 平面上頂點為 $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$, $(0,1)$ 的梯形區域. (10 分)

9. 求極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^2}$ 的值, 若極限不存在, 試說明理由. (7 分)

10. 設 S 是由柱面 $x^2=y$, $x^2=8-y$ 與平面 $z=0$, $y+2z=8$ 所圍之立體.

(a) 用三重積分表示 S 的體積. (5 分)
(b) 求 S 的體積. (6 分)

11. 考慮積分 $A=\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdydx.$

(a) 將 A 改寫成圓柱坐標 (cylindrical coordinates) 的積分式. (5 分)
(b) 將 A 改寫成球面坐標 (spherical coordinates) 的積分式. (5 分)
(c) 求 A 的積分值. (6 分)