106學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科決賽筆試（一）參考解答

一、設 n 與 p 都是正整數。試證：若多項式 $f(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + p$ 可以分解為兩個次數不小於1的整係數多項式之乘積，則 p 不是質數。

【參考解答】

首先，證明：$f(x) = 0$ 的每一個根 α 都滿足 $|\alpha| > 1$。

令 $g(x) = (x-1)f(x)$，則 $g(x) = x^{n+1} + (p-1)x - p$。

若 α 為 $f(x) = 0$ 的根，則 $g(\alpha) = 0$，即 $\alpha^{n+1} + (p-1)\alpha - p = 0$。

假設 $|\alpha| \le 1$，則

$$1 \ge \left|\alpha^{n+1}\right| = \left|(p-1)\alpha - p\right| \ge p - (p-1)|\alpha| \ge p - (p-1) = 1。$$

由此得到 $|\alpha| = |(p-1)\alpha - p| = 1$。可令 $\alpha = a + bi$，其中 $a^2 + b^2 = 1$，則

$$1 = |(p-1)\alpha - p| = |(p-1)a - p + (p-1)bi|。$$

因此，$((p-1)a - p)^2 + (p-1)^2 b^2 = 1$，即 $(p-1)^2(a^2+b^2) - 2p(p-1)a + p^2 = 1$。

又 $a^2 + b^2 = 1$，得 $p(p-1)(1-a) = 0$；故 $p = 0,1$ 或 $a = 1$。當 $a = 1$ 時，$b = 0$，即 $\alpha = 1$，矛盾！(因為 $f(1) = n + p \ne 0$)。

令 $f(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + p = h(x)k(x)$，其中 $h(x)$ 與 $k(x)$ 都是次數不小於1的整係數多項式。因為 $f(x)$ 的最高次項係數等於1，不失一般性可設 $h(x)$ 與 $k(x)$ 的最高次項係數都等於1。

若 $h(x) = 0$ 的根為 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，而 $k(x) = 0$ 的根為 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\ell$，則 $m, \ell \ge 1$，$m + \ell = n$，且 $h(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_m)$，而 $k(x) = (x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_\ell)$。

因 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 與 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\ell$ 都是 $f(x) = 0$ 的根，故

$$|h(0)| = |\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m| > 1，且 |k(0)| = |\beta_1\beta_2\cdots\beta_\ell| > 1。$$

於是可知，$p = f(0) = h(0)\cdot k(0)$ 不是質數。

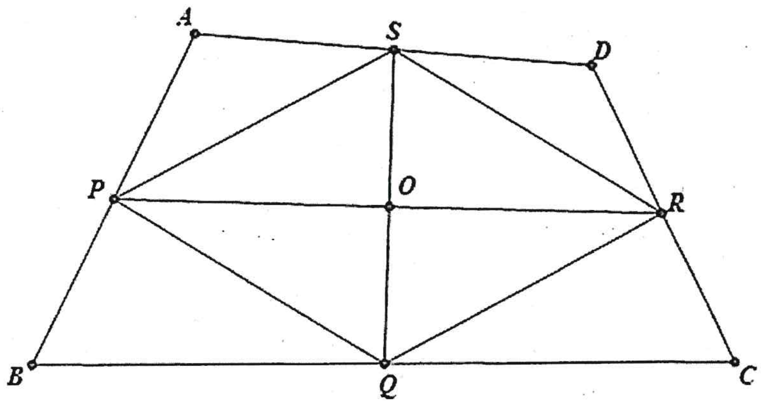
二、已知凸四邊形 $ABCD$ 的周長為10，對角線 $\overline{AC} = \overline{BD} = 4$。試問四邊形 $ABCD$ 最大可能的面積為多少？

【參考解答】

如圖，取 P、Q、R、S 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ 的中點，則 $PQRS$ 為平行四邊形，且 $\overline{PQ} = \overline{SR} = \dfrac{\overline{AC}}{2} = 2$, $\overline{SP} = \overline{RQ} = \dfrac{\overline{BD}}{2} = 2$; 所以 $\overline{PQ} = \overline{SR} = \overline{SP} = \overline{RQ} = 2$, 因而 $PQRS$ 為菱形，因而其兩對角線互相垂直。設 $PQRS$ 兩對角線交於點 O.

因為 $\overline{PR} \le \dfrac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}$, $\overline{QS} \le \dfrac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}$, 所以 $\overline{PR}+\overline{QS} \le \dfrac{\overline{AD}+\overline{BC}+\overline{AB}+\overline{CD}}{2} = 5.$

設 $x=\overline{PO}=\dfrac{1}{2}\overline{PR}$, $y=\overline{QO}=\dfrac{1}{2}\overline{QS}$，則菱形 $PQRS$ 的面積為 $2xy$，且其為四邊形 $ABCD$ 面積的一半。由於 $x+y\le\dfrac{5}{2}$，且 $x^2+y^2=\overline{PO}^2+\overline{QO}^2=\overline{PQ}^2=4$, 所以 $2xy\le(\dfrac{5}{2})^2-4=\dfrac{9}{4}$. 因此四邊形 $ABCD$ 最大可能的面積為 $\dfrac{9}{2}$。當 $ABCD$ 為兩相鄰邊長分別為 $\dfrac{5+\sqrt{7}}{2}$ 與 $\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}$ 的矩形時等號成立。



三、設 n 為正整數. 今有 $2n$ 張紙牌, 分別寫上號碼 $1,2,3,\cdots,2n$. 將這些紙牌牌成一列: $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$ ，不妨將此種排列記為 S. 對於此種牌型 S 中的 i 號牌和 $2n+1-i$ 號牌中間所夾的紙牌張數記為 f_i ，並令

$$|S|=f_1+f_2+\cdots+f_n.$$

例如,當 $n=2$ 且排列 S:1324, 則 $f_1=2, f_2=0$, 因此 $|S|=f_1+f_2=2$.
回答以下的問題

(1) 證明: 對於任何排列 S, $|S|$ 必為偶數.

(2) 給定 n, 證明 $|S|$ 的最大值為 $n(n-1)$. 並求出滿足 $|S|=n(n-1)$ 的所有可能的 S 的數目.

【參考解答】

(1) 使用歸納法證明. $n=1$ 時, 顯然 $|S|=0$. 假設 $n=k$ 時, $|S|$ 必為偶數. 考慮 $n=k+1$, 將號碼 1 和 $2k+2$, 2 和 $2k+1,\cdots$, $k+1$ 和 $k+2$ 配對. 對於任何排列 S : $a_1,a_2,\cdots,a_{2k+2}$ ，一定形如:

$$S: i,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,a_j,\ 2k+3-i,\ a_{j+2},\ \cdots,\ a_{2k+2}$$

其中 $a_2,a_3,\cdots,a_j$ 中有 m 組配對號碼.

如果將 S 中的 i 和 $2k+3-i$ 抽離, 則剩下的牌型 (記為 S^1) 可視為$n=k$ 的一種排列. 現在不難發現

$$|S|=|S^1|+(j-1)+(j-1-2m) \qquad (*)$$

上式中的 $j-1$ 是 i 和 $2k+3-i$ 中間所夾的牌的張數, 而 $j-1-2m$ 則是號碼 $2k+3-i$ 所提供的. 將上面 (*) 整理可得

$$|S|=|S^1|+2(j-1-m) \qquad (**)$$

由歸納法假設 $|S^1|$ 為偶數, 因此 $|S|$ 亦為偶數, 得證!

(2) 在 (1) 的證明中, (**) 中的 $j-1-m$ 恰為 $a_2, a_3, \cdots, a_j$ 中不同號碼的紙牌數目, 所以 $j-1-m$ 至多為 k , 因此

$$|S| \leq |S^1| + 2k$$

由此不難得到 $(n=k+1)$ 時,

$$|S| \leq 2(1+2+\cdots+k) = n(n-1)$$

顯然排列 S : 1, 2, $\cdots$, n, $n+1$, $n+2$, $\cdots$, $2n$ 可得 $|S| = n(n-1)$. 故 $|S|$ 的最大值為 $n(n-1)$.

接著討論哪些排列 S 使得 $|S| = n(n-1)$. 如同先前將 1 和 $2n$, 2 和 $2n-1, \cdots$, n 和 $n+1$ 分別配對, 將 “1” 視為隔板, 對於任何排列 S , 將 “1” 置於 S 的正中間, 也就是在 “1” 的左右兩邊各有 n 張牌. 若在 “1” 的左邊有一組配對 $(i, 2n+1-i)$, 則在 “1” 的右邊必有一組配對 $(j, 2n+1-j)$. 因此可設 S 排列如下:

$$\cdots, i, \cdots, 2n+1-i, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots, j, \cdots, 2n+1-j, \cdots$$

現在將 $2n+1-i$ 和 j 互換位置, 可得另一種新的排列 S^1, 顯然 $|S^1| > |S|$.
反之, 若在 “1” 的兩邊皆無任何一組配對, 也就是任何配對的兩邊各分別在 “1” 的兩邊, 則可用歸納法證明 (類似(1)的證明), 其 $|S| = n(n-1)$.
因此, 使得 $|S| = n(n-1)$ 的排列 S 必定是任何配對的兩邊分別在 “1” 之兩邊, 此種 S 恰有 $2^n(n!)^2$ 個.