陸、筆試試題及參考解答

107 學年度全國高中數學科能力競賽決賽

筆試試題（一）

注意事項：

(1) 時間分配：2 小時（13:30～15:30）。

(2) 配分：每題皆為 7 分。

(3) 不可使用計算器。

一、設 n 為大於 1 的正整數，對於數列 $a_1, a_2, ..., a_n$，我們定義 $|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|$ 為此數列的“絕對長度”。今給定 $2n$ 個兩兩相異的實數，將此 $2n$ 個實數任意排成一列，共有 $(2n)!$ 個可能的數列：

(1)證明：若 $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ 是其中絕對長度最大的數列，則

(i) $a_{2i-1}<a_{2i}, i=1,2,\ldots,n$；$a_{2i}>a_{2i+1}, i=1,2,\ldots,n-1$

或

(ii) $a_{2i-1}>a_{2i}, i=1,2,\ldots,n$；$a_{2i}<a_{2i+1}, i=1,2,\ldots,n-1$。

(2)將 $1, 2, ..., 2n$ 任意排成一數列，求所有可能的數列之絕對長度的最大值。

二、設 $\Delta A_1A_2A_3$ 的重心為 G，三邊的中點為 M_1, M_2, M_3，M_1 在 A_2A_3 上，其餘類推。設有一點 P，它與 A_1 在直線 A_3M_3 的同一側，且滿足 $PA_3 /\!/ A_1M_1$ 及 $\Delta PA_3M_3 \sim \Delta A_1A_2A_3$。已知 $\angle A_1GA_2$ 與 $\angle A_3$ 互補，證明：$\Delta A_1A_2A_3$ 是正三角形。

三、設有理數數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 滿足 $a_n = 2018a_{n-1}(1-a_{n-1})$，$n \geq 1$。已知存在相異兩正整數 i, j，使得 $a_i = a_j$，求 a_0。