107 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

筆試試題（一）【參考解答】

一、【參考解答】

(1)設 $a_1,a_2,\ldots,a_{2n}$ 是其中絕對長度最大的數列，以下將證明“$a_i<a_{i+1}<a_{i+2}$”和“$a_i>a_{i+1}>a_{i+2}$”不可能發生，因此只可能是(i)或(ii)。

若 $a_i<a_{i+1}<a_{i+2}$，則考慮新數列 $b_1,b_2,\ldots,b_{2n}$ 如下：

$$b_j=a_j,1\le j\le i$$

$$b_j=a_{j+1},i+1\le j\le 2n-1$$

$$b_{2n}=a_{i+1}$$

於是 $b_1,b_2,\ldots,b_{2n}$ 的絕對長度為

$$\left\{|b_1-b_2|+\cdots+|b_{i-1}-b_i|\right\}+\left\{|b_i-b_{i+1}|+\cdots+|b_{2n-2}-b_{2n-1}|\right\}+|b_{2n-1}-b_{2n}|$$

$$=\left\{|a_1-a_2|+\cdots+|a_{i-1}-a_i|\right\}$$

$$+\left\{|a_i-a_{i+2}|+|a_{i+2}-a_{i+3}|+|a_{i+3}-a_{i+4}|+\cdots+|a_{2n-1}-a_{2n}|\right\}+|a_{2n}-a_{i+1}| \text{ 這裡}$$

$$=\left\{|a_1-a_2|+\cdots+|a_{i-1}-a_i|\right\}$$

$$+\left\{|a_i-a_{i+1}|+|a_{i+1}-a_{i+2}|+\cdots+|a_{2n-1}-a_{2n}|\right\}+|a_{2n}-a_{i+1}|$$

用到（$\because a_i<a_{i+1}<a_{i+2}$）

$$|a_i-a_{i+2}|=|a_i-a_{i+1}|+|a_{i+1}-a_{i+2}|$$

因此新數列 $b_1,b_2,\ldots,b_{2n}$ 比原數列 $a_1,a_2,\ldots,a_{2n}$ 的絕對長度大，所以“$a_i<a_{i+1}<a_{i+2}$”不可能發生。同理，可證“$a_i>a_{i+1}>a_{i+2}$”不可能發生。

(2)設此 $2n$ 個數為 $e_1<e_2<\cdots<e_{2n}$. 由(1)可知，僅須考慮(i)或(ii)的情形。

若(i)發生，則 $a_1,a_2,\ldots,a_{2n}$ 的絕對長度為

$$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_{2n-1}-a_{2n}|$$

$$=a_2-a_1+a_2-a_3+a_4-a_3+a_4-a_5+\cdots+a_{2n-2}-a_{2n-1}+a_{2n}-a_{2n-1}$$

$$=\left\{2\left(a_2+a_4+\cdots+a_{2n-2}\right)+a_{2n}\right\}-\left\{a_1+2\left(a_3+\cdots+a_{2n-1}\right)\right\}$$

此種情形的最大值顯然是當

$$\{a_2,a_4,\ldots,a_{2n-2}\}=\{e_{2n},e_{2n-1},\ldots,e_{n+2}\},\ a_{2n}=e_{n+1},$$

$$a_1=e_n,\ \{a_3,a_5,\ldots,a_{2n-1}\}=\{e_{n-1},e_{n-2},\ldots,e_1\}$$

此時的絕對長度為

$$2\left(e_{n+2}+e_{n+3}+\cdots+e_{2n}\right)+e_{n+1}-e_n-2\left(e_1+e_2+\cdots+e_{n-1}\right)$$

類似的，當(ii)發生時，絕對長度的最大值亦為上值，且發生在

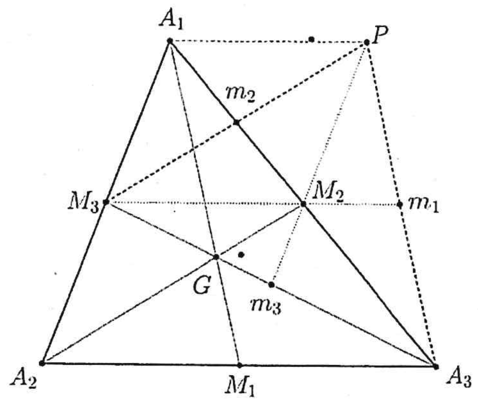
$$a_1=e_{n+1},\ \{a_3,a_5,\ldots,a_{2n-1}\}=\{e_{2n},e_{2n-1},\ldots,e_{n+2}\},$$

$$a_{2n}=e_n,\ \{a_2,a_4,\ldots,a_{2n-2}\}=\{e_{n-1},e_{n-2},\ldots,e_1\}$$

今有 $e_i=i,\ i=1,2,\cdots,2n$. 所以絕對長度的最大值為

$$2[(n+2)+(n+3)+\cdots+2n]+(n+1)-2[1+2+\cdots+(n-1)]-n$$
$$=2n^2-1$$

二、【參考解答】



參考右圖，設 $\Delta A_1A_2A_3$， 三邊長為 a_1,a_2,a_3， 中線長為 m_1,m_2,m_3.

(1) 因 $\Delta PA_3M_3 \sim \Delta A_1A_2A_3$， $\angle M_3PA_3=\angle A_3A_1A_2$， 由此知 P,A_1,A_3,M_3 共圓。因此

$$\angle M_3A_3A_2+\angle A_1PM_3=\angle M_3A_3A_2+\angle A_1A_3M_3$$
$$=\angle A_1A_3A_2=\angle PM_3A_3.$$

得 $A_1P \parallel A_2A_3$. 又因 $PA_3 \parallel A_1M_1$， $A_1P=M_1A_3=M_2M_3$， 所以知 $A_1PM_2M_3$ 為平行四邊形，其對角線 M_3P 及 A_1M_2 互相平分。故 $M_3P \parallel A_2M_2$. 由此得

$$PA_3=A_1M_1=m_1,\ PM_3=A_2M_2=m_2.$$

(2) 觀察 $\Delta A_1A_2A_3$ 與 ΔPM_3A_3（中線三角形）的面積比為 $4:3$：

$[PM_2M_3]=[A_1M_2M_3],[A_3M_2M_3]=[M_1M_2M_3],[PM_2A_3]=[A_3M_1M_2]$.

由 $\Delta PA_3M_3 \sim \Delta A_1A_2A_3$ 得 $\dfrac{m_1^2}{a_3^2}=\dfrac{m_2^2}{a_2^2}=\dfrac{m_3^2}{a_1^2}=\dfrac{3}{4}$. 記 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積 $[A_1A_2A_3]$ 為 Δ.

易知 $[GA_1A_2]=\frac{1}{3}\Delta=\frac{1}{6}a_2a_3\sin\angle A_1$， 而

$$[GA_1A_2]=\frac{1}{2}GA_1\cdot GA_2\cdot\sin\angle A_1GA_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}m_1\cdot\frac{2}{3}m_2\sin\angle A_3$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a_3\cdot\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a_2\cdot\sin\angle A_3=\frac{1}{6}a_2a_3\sin\angle A_3.$$

比較得 $\angle A_1=\angle A_3$. 所以 $a_1=a_3$. 但由 $m_2^2=\frac{1}{4}(2a_1^2+2a_3^2-a_2^2)$ 得 $2a_2^2=a_1^2+a_3^2$（另兩中線長公式所得亦是此等式），故 $\Delta A_1A_2A_3$ 必為正三角形。

三、【參考解答】

設 $j>i$。首先可注意到此數列為有理數列，而由於 $a_i=a_j$，此數列最後會形成循環數列，且對所有自然數 $m\geq i$，均有 $a_m=a_{m+(j-i)}$。我們有以下三種可能情況：

Case 1. 若存在 $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，使得 $a_n<0$，則 $2018(1-a_n)>2018>1$，可得 $2018a_n(1-a_n)<a_n$，即 $a_{n+1}<a_n$。因此，數列中若有一項小於 0，則此數列最終必不成循環，也必不滿足條件。

Case 2. 若存在 $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，使得 $a_n>1$，則 $a_{n+1}<0$，呈上討論可知，此數列亦不滿足條件。

因此我們只需考慮 a_n 恆在 $[0,1]$ 的情況。

Case 3. a_n 恆在 $[0,1]$。

i）很明顯的 $a_0=0$ 或 $a_0=1$，均滿足題目條件。

ii）設 $a_0=\dfrac{q_0}{p_0}$，其中 $p_0,q_0\in\mathbb{N}$，$p_0\geq 2$，$p_0>q_0$，且 p_0，q_0 互質。則

$a_1=\dfrac{2018\cdot q_0(p_0-q_0)}{{p_0}^2}$，令 $p_1=p_0^2$，$q_1=2018q_0(p_0-q_0)$，則 $a_1=\dfrac{q_1}{p_1}$。利用歸納法，可得 $a_k=\dfrac{q_k}{p_k}$，$k\in\mathbb{N}$，其中 $p_k=(p_{k-1})^2=p_0^{2^k}$、

$q_k=2018\cdot q_{k-1}(p_{k-1}-q_{k-1})$。

我們先證明 p_0 與 2018 不互質。若 $(p_0,2018)=1$，由於 p_0 與 q_0 互質，很明顯的 p_0 與 $2018q_0(p_0-q_0)$ 也互質，因此 $(p_1,q_1)=1$ 且 $(p_1,2018)=(p_0^2,2018)=1$。再次利用歸納法可知，對所有自然數 k，均有 $(p_k,q_k)=1$，且 $(p_k,2018)=1$，即 $\dfrac{q_k}{p_k}$ 均為最簡分數，然而此時分母 $\{p_k\}$ 為嚴格遞增數列，此與此數列最終必循環的性質相矛盾。因此 $(p_0,2018)>1$。

接著我們證明 $p_0 \le 2018$。設 $d=(p_0,2018)>1$，可注意到由於

$2018=2\times 1009$ 且 $(p_0,q_0)=1$，因此

$(p_1,q_1)=(p_0^2,2018q_0(p_0-q_0))=(p_0^2,2018)=(p_0,2018)=d$。若

$p_0>2018$，則 $p_1/d=p_0^2/d>2018p_0/d\ge p_0$，設 a_n 化為最簡分數可表為

$\dfrac{\tilde{q}_n}{\tilde{p}_n}$，則 $\tilde{p}_1=p_1/d,\tilde{p}_0=p_0$，且 $\tilde{p}_1>\tilde{p}_0>2018$。利用歸納法可知，若

$p_0>2018$，且 a_n 化為最簡分數可表為 $\dfrac{\tilde{q}_n}{\tilde{p}_n}$，則 $\tilde{p}_n$ 為嚴格遞增數列且

$\tilde{p}_n>2018$，此與此數列最終必循環的性質相矛盾。因此 $p_0\le 2018$。

由前兩段討論可知，$(p_0,2018)>1$ 且 $2\le p_0\le 2018$，即

$a_0=\dfrac{2k-1}{2^l},\dfrac{m}{1009}$ 或 $\dfrac{2m+1}{2018}$，其中 $l=1,2,\ldots,10$，$k=1,2,\ldots,2^{l-1}$，$m=1,2,\ldots,1008$，$m\ne 504$。

由函數 $f(x)=2018x(1-x)$ 的對稱性及遞增性可看出，由於 $f\left(\dfrac{1}{1009}\right)>1$ 且

$f\left(\dfrac{1}{2^{10}}\right)>1$，只有 $a_0=\dfrac{1}{2018}$ 及 $\dfrac{2017}{2018}$ 時，a_1 才會在 $[0,1]$ 內。

當 $a_0=\dfrac{1}{2018}$ 時，$a_n=\dfrac{2017}{2018}$，$n\in\mathbb{N}$。

而當 $a_0=\dfrac{2017}{2018}$ 時，$a_n=\dfrac{2017}{2018}$，$n\in\mathbb{N}$。

兩者均可使數列滿足題目要求之條件。

綜上討論，可知可能的 a_0 為 $0, 1, \dfrac{1}{2018}$ 及 $\dfrac{2017}{2018}$。