

109 學年度北一區（花蓮高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（一）試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 46 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一：已知實數 r 讓方程式

$$\sqrt{x^2 - r} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$$

有實數解，求 r 的所有可能值(或範圍)。

(12 分)

問題二：在坐標平面上，三角形 ABC 的頂點 A, B, C 都是格子點（即坐標都是整數的點），且令三邊邊長分別為 a, b, c ，面積為 L 。

已知 $(a+b)^2 < 8L+1$ ，證明：三角形 ABC 為等腰直角三角形。

(11 分)

《背面尚有試題》

問題三：無窮等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的每一項都是有理數，而且前三項可表為

$$a_1 = x^2 + 3x - 6;$$

$$a_2 = 2 - 2x;$$

$$a_3 = x^2 - 3,$$

其中 x 為實數。回答下列問題：

(1) 求 x 的所有可能值。 (7分)

(2) 承(1)，求 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的值。 (4分)

問題四：若 a, b 為三角形的兩邊之邊長，且 A, B 為其對應角，則將

$$\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

表為 a, b 的公式，並證明之。

(12分)

《試題結束》