109 學年度北二區 (新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
(數學科口試參考答案)

口試一： 給定正整數 a,n, 是否必能找到數列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 滿足

$$1+\frac{1}{a}=\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)?$$

【證】是的. $1+\frac{1}{a_i}=\frac{a_i+1}{a_i}$, 因此只要讓前後分數的分子分母對消即可. 項數可以放大調整.
例如給定 $a=3$, 則

$$\begin{aligned}\frac{4}{3} &= \frac{4}{3}\\ \frac{4}{3} &= \frac{7}{6}\cdot\frac{8}{7}\\ \frac{4}{3} &= \frac{10}{9}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{12}{11}\\ \frac{4}{3} &= \frac{13}{12}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{15}{14}\cdot\frac{16}{15}\end{aligned}$$

註: 如果學生兩題答題非常順利, 本題可以繼續追問
(相當困難) 給定正整數 a,n, 證明只有有限多組 $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 使得

$$1+\frac{1}{a}=\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right).$$

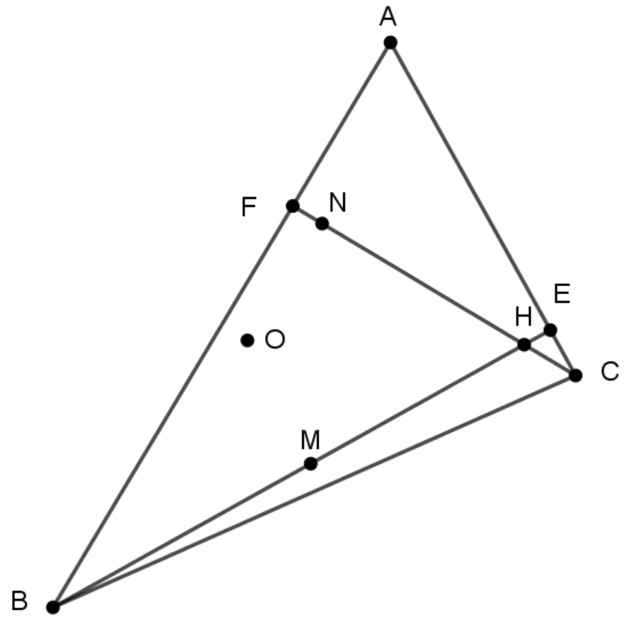
證明:　必須加強命題: 對於每個正有理數 r, 證明只有有限多組 $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 使得

$$r=\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right).$$

可以用數學歸納法. $n=1$ 對固定的 r 至多一個解, 成立. 設 $n-1$ 成立. 則考慮 n 時: $r\le 1$ 顯然沒有解. $r\ge 1$ 時不失一般性令 a_1 為 $a_1,\ldots,a_n$ 中的最小值. 則 $r\le(1+\frac{1}{a})^n$, 故 $a_1\le\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}$, 因此 a_1 的值只有有限多個.

對每個 a_1 的取值, 由歸納假設, 知只有有限多組 $a_2,\ldots,a_n$ 滿足 $r\frac{a_1}{1+a_1}=\prod_{i\ge 2}^{n}(1+\frac{1}{1+a_i})$, 即 $r=\prod_{i\ge 1}^{n}(1+\frac{1}{1+a_i})$. 因此由數學歸納法成立.

口試二：已知$\triangle ABC$中，$\angle A = 60°$，$\overline{AB} > \overline{AC}$，點 O 為外心，且兩條高$\overline{BE}, \overline{CF}$交於 H 點。若點 M,N 分別在線段$\overline{BH}, \overline{HF}$上，且$\overline{BM} = \overline{CN}$，則$\frac{\overline{MH}+\overline{NH}}{\overline{OH}}$的值為＿＿＿＿＿。



【解】

(1). $\angle BHC$
$= 180° - \angle HBC - \angle HCB$
$= 180° - (90° - \angle C) - (\angle 90° - \angle B°)$
$= 180° - (180° - \angle C - \angle B)$
$= 180° - \angle A = 120°$

(2). $\angle BOC = 2\angle A = 120°$

故 B,C,H,O 四點共圓。

(3). $\overline{BO} \cdot \overline{CH} + \overline{OH} \cdot \overline{BC} = \overline{BH} \cdot \overline{OC}$

(4). 設$\triangle ABC$外接圓半徑為 r，則$\overline{BC} = 2r \cdot \sin A = \sqrt{3} \cdot r$，

且$\overline{BO} = \overline{OC} = r$

(5). 代入(3)得

$\overline{CH} + \sqrt{3} \cdot \overline{OH} = \overline{BH}$

(6). $\frac{\overline{MH}+\overline{NH}}{\overline{OH}} = \frac{(\overline{BH}-\overline{BM})+(\overline{CN}-\overline{CH})}{\overline{OH}} = \frac{\overline{BH}-\overline{CH}}{\overline{OH}} = \sqrt{3}$