109學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（一）　　編號：______

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共五題**計算證明題**，滿分為四十九分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、設 $f(x)=x^2-37x+5$，將 $f(1), f(2), \ldots, f(202)$ 分別除以 202，共有幾種可能的相異餘數？
(11分)

（若 m 為整數，n 為正整數，且存在整數 q 及 $0\le r<n$ 的整數 r，使得 $m=nq+r$，我們就定義 m 除以 n 的餘數為 r。例如：因為 $-5=3\cdot(-2)+1$，其中 $0\le 1<3$，1 就稱為 -5 除以 3 的餘數。）

二、設圓 C_1, C_2 外切於點 P，它們的一條外公切線與 C_1, C_2 的切點分別是 A, B，X 是 C_1 上的動點，直線 $\overleftrightarrow{XP}$ 與 C_2 交於點 P, Y。令 K 為直線 $\overleftrightarrow{AX}, \overleftrightarrow{BY}$ 的交點，求點 K 的軌跡。
(11分)

（當 $X=P$ 時，直線 $\overleftrightarrow{XP}$ 定義為過 P 且與其所在圓的切線；同理當 $X=A$ 時，直線 $\overleftrightarrow{XA}$ 定義為過 A 且與其所在圓的切線；當 $B=Y$ 時，直線 $\overleftrightarrow{BY}$ 定義為過 B 且與其所在圓的切線。）

三、設 $a_1=1,\ a_n=\dfrac{3}{4}a_{n-1}+\dfrac{5}{4a_{n-1}^3}$，其中 $n=2, 3, 4, \cdots.$
(5分)

證明：對所有正整數 $n,\ n\ge 2,\ 2\ge a_n>\sqrt[4]{5}$ 均成立。

四、已知 $x\ge 0,\ y\ge 0$，且 $x+y=1.$
(11分)

證明：$(1+x^3-y^3)(1-x^3+y^3)(1-x^3-y^3)\ge 48x^3y^3.$

五、從 $1, 2, 3, \cdots, 2020$ 中選取一些相異的數，使得若 x 被選取，則 $20x$ 不被選取，試問在這條件下最多可選取幾個數？
(11分)