109 學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（一）【解答】

一、【解】

設 $a,b \in \mathbb{N}$, $1 \le a,b \le 202$, $a \ne b$, 且 $f(a) \equiv f(b) \pmod{202}$.

$f(a) \equiv f(b) \pmod{202} \Leftrightarrow a^2 - 37a + 5 \equiv b^2 - 37b + 5 \pmod{202}$

$\Leftrightarrow (a-b)(a+b-37) \equiv 0 \pmod{202}$，有以下 4 種情況：

Case 1. $\gcd(a-b, 202) = 1$

則 a,b 有相異的奇偶性，此時 $a+b=37$ 或 $a+b=239$，即 $b=37-a$ 或 $b=239-a$.

Case 2. $\gcd(a-b, 202) = 2$

則 a,b 有相同的奇偶性，此時 $a+b=138$ 或 $a+b=340$，即 $b=138-a$ 或 $b=340-a$.

Case 3. $\gcd(a-b, 202) = 101$

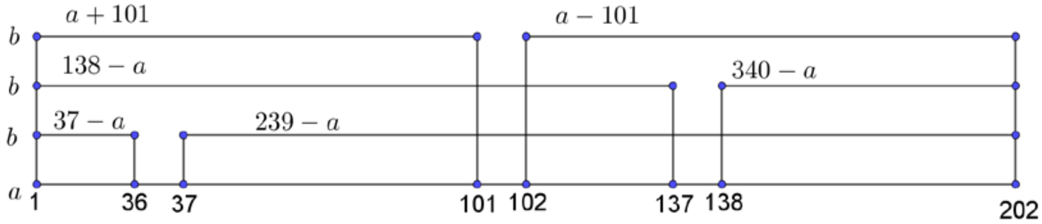
則 a,b 有相異的奇偶性，此時 $a-b=101$ 或 $a-b=-101$，即 $b=a-101$ 或 $b=a+101$.

Case 4. $\gcd(a-b, 202) = 202$

由於 $-201 \le a-b \le 201$, 這個情況不會發生。

對於每一個正整數 a，若考慮 b 必須滿足 $1 \le b \le 202$，

上述的解 b 會存在的情況如下圖：



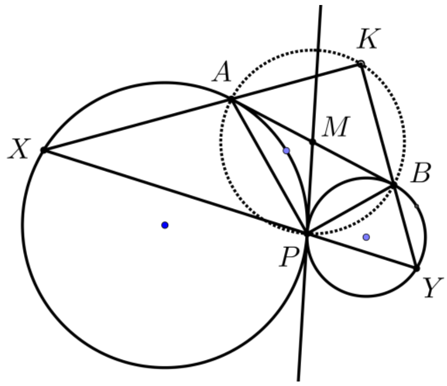
也就是每一個 a 會恰與 3 個 b 滿足 $f(a) \equiv f(b) \pmod{202}$,

但可注意到當 $b=138-a$ 時，b 可能等於 a，

此時 $a=69$ 或 $a=170$，而其餘情形 a 與此 3 個 b 兩兩均相異(奇偶性不同)。

因此，所有的相異 k 值有 $\dfrac{202-2}{4}+1=51.$

二、【解】



設 M 是 AB 上一點使得 PM 是它們的公切線，則 $AM=PM=BM$， 得 ΔAPB 的外接圓 C 是以 AB 為直徑且圓心是 M， 且 $\angle APB=90^\circ$. 所以

$$\measuredangle AXP+\measuredangle PYB=\measuredangle BAP+\measuredangle PBA=90^\circ,$$

得 $\measuredangle AKB=\measuredangle XKY=90^\circ$, 即 K 是在圓 C 上。

反之，若點 K 是在圓 C 上， AK, BK 分別與 C_1, C_2 交於點 X, Y. 需證 X, P, Y 共線。但

$\measuredangle APX=\measuredangle(AP,PX)=\measuredangle(AA,AX)=\measuredangle(AB,AX),$

$\measuredangle YPB=\measuredangle(YP,PB)=\measuredangle(YB,BB)=\measuredangle(YB,AB),$ 　　所以

$\measuredangle APX+\measuredangle YPB=\measuredangle(YB,XA)=\measuredangle BKA=90^\circ.$

X, P, Y 共線。

注意，若 $K=A$， AK 理解為過點 A 對圓 C 的切線，情形 $K=B$ 亦同。當 $K=P$, X, Y 皆是 P， XP, YP 理解為切線 MP 。總結 K 的軌跡是圓 C.

三、【解】

$n\ge 2$

$$a_n=\frac{3}{4}a_{n-1}+\frac{5}{4a_{n-1}^3}$$

$$=\frac{1}{4}a_{n-1}+\frac{1}{4}a_{n-1}+\frac{1}{4}a_{n-1}+\frac{5}{4a_{n-1}^3}\ge\sqrt[4]{a_{n-1}^3\cdot\frac{5}{a_{n-1}^3}}=\sqrt[4]{5}$$

因為 a_n 皆為有理數，所以 $a_n>\sqrt[4]{5}.\ \forall\ n\ge 2.$

現在 $a_2=\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=2.$

假設 $\sqrt[4]{5}<a_k\le 2.$ 那麼

$$a_{k+1}=\frac{3}{4}a_{k-1}+\frac{5}{4a_{k-1}^3}\le\frac{3}{4}\cdot 2+\frac{5}{4(\sqrt[4]{5^3})}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\sqrt[4]{5}\le 2$$

由數學歸法知 $\sqrt[4]{5}<a_n\le 2\ \forall\ n\ge 2.$

四、【解】

改寫$1-x^3-y^3=(x+y)^3-x^3-y^3=3xy(x+y)=3xy$，故

$1+x^3-y^3=2x^3+(1-x^3-y^3)=x(2x^2+3y).$

對調x, y得$1+y^3-x^3=y(2y^2+3x)$. 因而

$$\begin{aligned}&(1+x^3-y^3)(1+y^3-x^3)(1-x^3-y^3)\\&=xy(2x^2+3y)(2y^2+3x)(3xy)\\&=3x^2y^2(4x^2y^2-6(1-x^3-y^3)+9xy+6)\\&=3x^2y^2(4x^2y^2-9xy+6).\end{aligned}$$

令 $xy=t$, 由算幾不等式得$\sqrt{xy}\le\dfrac{(x+y)}{2}=\dfrac{1}{2}$, 即$0\le t\le\dfrac{1}{4}$.

此時欲證不等式等價於$4t^2-9t+6\ge16t$。

考慮函數 $f(t)=4t^2-25t+6=(t-6)(4t-1)$，

很明顯當$0\le t\le\dfrac{1}{4}$時，$f(t)\ge0$，且 $f(1/4)=0$。因此$4t^2-9t+6\ge16t$。得證。

五、【證明】

考慮集合$A_i=\{i, 20i, 400i\}, 1\le i\le5$

$A_j=\{j, 20j\}, 6\le j\le101$

$A_k=\{k\},\ \ 102\le k\le2020$

則$S=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2020\}$可被這些集合組

$\{A_i : 20\nmid i\ \ 且\ \ 1\le i\le2020\}$分割

這些集合組中 3 個元素有 5 個，

2 個元素有 91 個，

1 個元素有$2020-202+5$個。

設S中選取k，但$20k$不被選取最多元素的集合為A.

則A包含所有 1 個元素的集合，2 個元素的集合只能選 1 個，

3 個元素的集合只能選最大的數和最小的數共 2 個。

因此集合A的個數為$2020-91-5=1924$。