

109 學年度臺北市（陽明高中）

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試（一）試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷繳回。
4. 將作答過程填寫在答案卷內。

【問題一】試求滿足 $y = \frac{7x^3 - 2x^2 - 21x + 62}{3x^3 + x + 1}$ 的所有整數解 (x, y) 。
(12 分)

【問題二】給定正實數數列 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ ，並將它重新排成一列

$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7$ 。若 $(a_1 + \frac{1}{b_1}) \times (a_2 + \frac{1}{b_2}) \times \cdots \times (a_7 + \frac{1}{b_7}) \leq 128$ ，試

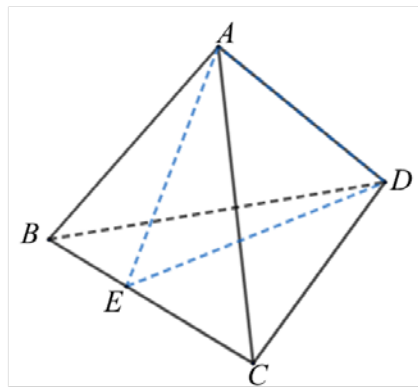
證：數列 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ 中至少有一項的值等於 1。

(12 分)

<背面尚有試題>

【問題三】 設 p, q 均為正整數，其中 $q \geq 2p \geq 4$ 。假設某一國家想在 p 個無人島中建設 q 個城市，每個無人島至少設置兩個城市，若要求每兩個位在不同島的城市之間都要有一條連通的直達航線，試問此國家最少需要設置多少條直達的航線。
(12 分)

【問題四】 設 $ABCD$ 為正四面體，各稜的長度均為 2。若點 E 在稜 \overline{BC} 上，將正四面體 $ABCD$ 分成兩個四面體 $ABDE$ 與 $ACDE$ ，它們的內切球半徑分別為 r_1, r_2 ，且滿足 $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 4\sqrt{6} + 4\sqrt{3}$ 。已知滿足此條件的點 E 有兩個，分別為 E_1, E_2 ，試求 $\overline{E_1E_2}$ 的長度。
(13 分)



<試題結束>