109 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（台南區）　　　筆試（二）{參考解答}

一、假設 S 是個包含 10 個相異兩位數整數的集合。證明一定可以從 S 中找出兩個不同的子集使得它們的元素總和一樣。

【參考解答】:

S 的子集的元素總合最小可能為 0(空集合)，最大可能為 99+98+⋯+90=945，所以總共有 946 種可能(事實上更少)，但是總共有$2^{10}=1024$這麼多種子集。所以由鴿籠原理可知至少有兩個不同的子集的元素總合一樣

二、求方程式$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\frac{3}{13}$的所有整數解。

（提示：$x^2-xy+y^2=\frac{1}{4}((x+y)^2+3(x-y)^2)$）

【參考解答】：因為 $x^2-xy+y^2=\frac{1}{4}((x+y)^2+3(x-y)^2)$，所以

令 $(x+y)=a,(x-y)=b$，則原方程式可以整理為

$$\frac{4a}{a^2+3b^2}=\frac{3}{13}\Leftrightarrow 52a=3(a^2+3b^2)$$

由上式可知 $a>0$ 且 a 為 3 的倍數。設 $a=3k$，k 為正整數，則

$$52\mathrm{k}=3(3k^2+b^2)$$

所以 k 是 3 的倍數。設 $k=3m$，m 為正整數，則 $52m=27m^2+b^2$。

由 $52m-27m^2=b^2\geq 0$ 可知 $m=1$，因此 $k=3\Longrightarrow a=9,b=\pm 5$。

解聯立方程組 $\begin{cases}x+y=9\\x-y=\pm 5\end{cases}$ 可得原方程式的整數解為 $(x,y)=$ $(7,2),(2,7)$。

三、已知$a^3+8b^3+12ab=8$，且$a<0$，$b<0$，求 $a+2b$ 之值為何？

【參考解答】

$a^3+8b^3+12ab-8=(a+2b-2)(a^2+4b^2+4-2aqb+2a+4b)=0$

$a+2b-2=0$ 或 $a^2+4b^2+4-2ab+2a+4b=0$

$2a^2+8b^2+8-4ab+4a+8b=0$

$(a+2)^2+(2b+2)^2+(a-2b)^2=0$

$a=-2$，$b=-1$ 故 $a+2b=-4$

四、設 $f(x)=ax^2-(a-b)(x-1)+c$，$a\neq 0$。 若$|x|\leq 1$，則$|f(x)|\leq 2$。當$|x|\leq 1$時，試求$|bx+2a|$的最大值。

【參考解答】 $f(0)=a-b+c$， $f(1)=a+c$， $f(-1)=3a-2b+c$

$$a=\frac{1}{2}[f(-1)+f(1)-2f(0)]$$

$$b=f(1)-f(0)$$

$$\begin{aligned}|bx+2a|&=|(x+1)f(1)-f(0)(x+2)+f(-1)|\\&\leq 2[|x+1|+|x+2|+1]\\&\leq 12\end{aligned}$$