109 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題

第 6 區(屏東高中) 口試(一)

A. 試證明任意 9 個相異的正整數中，必可找出四個相異的數 a,b,c,d，使得 $20|a+b-c-d$ 成立。

【參考解答】

$20|a+b-c-d$ 成立等同 於$a+b$ 與 $c+d$ 除以 20 的餘數相同。
考慮 9 個相異的正整數，除以 20 之後若有 7 種以上的餘數，則取出 7 個餘數不同的數。考慮此 7 數任取兩數相加，若有兩組數除以 20 的餘數相同，則為所求。若否，則每組數的餘數皆不相同，故共有 21 種餘數，矛盾。
而若除以 20 之後只有 6 種以內的餘數，可知必有兩數的餘數相同，設為a 與 c。扣除此兩數之後，仍有 7 個數，故另有兩數的餘數相同，設為 b 與 d。可得出 $a+b$ 與 $c+d$ 的餘數相同，即為所求。

B. 試證明存在 8 個相異的正整數，其中任意四個相異的數 a,b,c,d，$20|a+b-c-d$ 均不成立。

【參考解答】

若有 8 個數，其中任意四個相異的數 a,b,c,d，$20|a+b-c-d$ 均不成立。
由先前討論可知此 8 個數除以 20 之後恰有 6 種餘數，且其中有 3 個數的餘數相同。
設有 3 個數的餘數為 1。可設有一個數的餘數為 2 與另一個數的餘數為 3。
但因 1+4 = 2+3，剩餘數字的餘數皆不為 4。
再設一個數的餘數為 5。
因 1+6 = 2+5，1+7 = 3+5，剩餘數字的餘數皆不為 6 或 7。
再設一個數的餘數為 8。
因 1+9 = 2+8，1+10 = 3+8，2+11 = 5+8，1+12 = 5+8，剩餘數字的餘數皆不為 9,10,11 或 12。
可設最後一個數的餘數為 13。
故，若取 21, 41, 61, 22, 23, 25, 28, 33，則此 8 個數其中任意四個相異的數a,b,c,d，$20|a+b-c-d$ 均不成立。

109 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題

第 6 區(屏東高中)　口試(二)

求證：$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$，$n$ 為正整數。

【參考解答】

1. [引理]:

$$C_k^n\left(\frac{1}{n}\right)^k < C_k^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k \text{，} 2 \le k \le n \text{，n, k 為正整數。}$$

引理證明：

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= \frac{1}{k!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
&< \frac{1}{k!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^k = RHS
\end{aligned}$$

2. 證明本題，

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = C_0^n + C_1^n\left(\frac{1}{n}\right)^1 + \cdots + C_n^n\left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&< C_0^{n+1} + C_1^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\right)^1 + \cdots + C_n^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\right)^n + C_{n+1}^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \text{RHS}
\end{aligned}$$

故原式得證。