

國立臺灣師範大學數學系

105 學年度轉系、輔系、雙主修考試試題

Part I 高中數學

一、單選題 (共 4 題，每題 5 分；合計 20 分)

1. 分式方程式 $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \cdots + \frac{1}{x-10} = 0$ 共有幾個實根？
(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12
2. 將一張厚度為 0.1 公分的紙不斷對摺，每次對摺後的厚度成為對摺前的兩倍。請問：如果可能的話，至少需對摺多少次，才會使紙的厚度超過地球的直徑 (約 12,800 公里)？(註： $\log_2 10 \approx 3.322$)
(A) 23 (B) 26 (C) 28 (D) 31 (E) 34
3. 坐標空間中，設 C 為以 $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$ 等 8 個點為頂點的單位正立方體。請問 C 在兩平行平面： $x + y + z = 1$ 、 $x + y + z = 2$ 之間的區域，其體積為多少？
(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{5}{6}$
4. 下列哪一個數，可以寫成兩個整數的平方和 (即形如 $a^2 + b^2$ 的數)？
(A) 655 (B) 665 (C) 675 (D) 685 (E) 695

二、填充題 (共 4 題，每題 5 分；合計 20 分)

5. 坐標平面上，設 Γ_1 是以原點為圓心、半徑為 4 的圓；圓 Γ_2 的方程式為 $x^2 + y^2 - 16x + 8y + 76 = 0$ 。若點 $P(3, \alpha)$ 分別向 Γ_1 、 Γ_2 所引的切線段等長，則 $\alpha =$ _____。
6. 設 A, B 為實數。若 $\frac{2x-3}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$ 對所有不等於 1、-3 的實數 x 均成立，則數對 $(A, B) =$ _____。
7. 所有滿足向量外積 $(2, -1, 1) \times \vec{v} = (4, 10, 2)$ 的向量 \vec{v} 中，其最小長度為 _____。
8. 反覆投擲一均勻銅板，直到出現第 5 次正面時停止；令隨機變數 X 為投擲的次數。則 X 的期望值為 _____。

三、計算證明題 (共 1 題 10 分)

9. 對所有正整數 n ，定義 $a_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ 。試證明： $a_n < 2$ 對所有 n 均成立。(註：利用 $e \approx 2.71828$ 的事實，有循環論證之嫌，故不得採用。)

Part II 微積分

1. (12 points) Find the following integrals.

(a) $\int \frac{2x + 2}{(x^2 + 1)(x - 1)^3} dx.$

(b) $\int_1^e \frac{dy}{y\sqrt{1 + (\ln y)^2}}.$

2. (8 points) The region enclosed by the x -axis, the line $x = \frac{\pi}{2}$ and $y = \sin 2x$ is revolved about the vertical line $x = -1$ to generate a solid. Find the volume of the solid.
3. (6 points) Let f be a real-valued function defined by

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x} & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

Find the tangent to the graph of $f(x)$ at the origin.

4. (8 points) Find a function f and a number a such that

$$2 + \int_a^{\sqrt{x}} \frac{f(t)}{t^2} dt = \ln(\sqrt{x} + 1).$$

For all $x > 0$.

5. (10 points)

(a) Prove that $e^x \geq 1 + x$ if $x \geq 0$.

(b) Use the result in part (a) to show that $e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ if $x \geq 0$.

6. (6 points) Find the value of p for which the integral $\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ converges. Give your reasons.