

國立台灣師範大學數學系

105 學年度大學申請入學指定項目甄試試題

筆試一 計算證明題

說明與注意事項：

- (甲) 本試卷共五題（共兩頁），合計100分。
- (乙) 考試時間：共120分鐘（下午1：20～3：20）。
- (丙) 請將計算或證明過程依序寫在答案本上，否則不予計分。
- (丁) 交卷時答案本與本試卷一併交回。

- 一、 (1) 滿足 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 7$ 且 $x_6 \leq 3$ 的非負整數解 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ 共有幾組解？

(5 分)

- (2) 試問：有多少個多項式函數 $f(x)$ 同時滿足以下四個條件：

1. 多項式 $f(x)$ 的係數都是非負的整數，
2. 多項式 $f(x)$ 的次數 $\deg(f(x))$ 滿足 $5 \leq \deg(f(x)) \leq 10$ ，
3. 函數 $y = f(x)$ 的圖形對稱於 y 軸，
4. $f(1) = 7$ 且 $f(0) \leq 3$ 。

(15 分)

- 二、 設 c, d 是不同時為 0 的實數，且函數 $f(x) = \frac{x}{cx+d}$ 。

- (1) 當 $c = 2016, d = -1$ 且 $a \neq \frac{1}{2016}$ 時，求函數值 $f(f(f(f(a))))$ 。

(5 分)

- (2) 找出所有滿足下列條件的實數 c, d ：

「對任何實數 x ，當 $x \neq -\frac{d}{c}$ 及函數值 $f(x) \neq -\frac{d}{c}$ 時，等式

$$f(f(x)) = x$$

恆成立。」

(15 分)

三、設實數 a 與 b 滿足：對任何實數 θ ，不等式

$$|\sin^2\theta + a\cos\theta + b| \leq 3$$

恆成立。

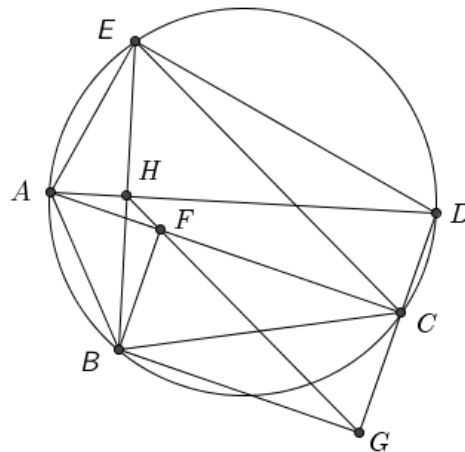
- (1) 寫出滿足題意的所有點 (a, b) 的條件。 (15 分)
- (2) 在坐標平面上畫出滿足題意的所有點 (a, b) 之區域。 (5 分)

四、設 $\langle a_n \rangle$ 為正整數數列，且滿足

1. 對所有的正整數 m 與 n ，等式 $a_{m \times n} = a_m \times a_n$ 恆成立；
2. 存在正數 B 使得：對所有 $m < n$ 的正整數 m 與 n ，不等式 $a_m < Ba_n$ 恆成立。

- (1) 求 a_1 的所有可能的值。 (4 分)
- (2) 證明：對任意正整數 n ，不等式 $a_n \leq a_{n+1}$ 恆成立。 (8 分)
- (3) 已知 $a_2 = 2$ ，求 a_3 的所有可能值。 (8 分)

五、圓內接五邊形 $ABCDE$ 中， \overline{AD} 是外接圓的直徑， \overline{BE} 垂直 \overline{AD} 於 H ，過點 H 作平行於 \overline{CE} 的直線，與直線 \overline{AC} 、 \overline{DC} 分別交於點 F 、 G ，如下圖所示：



- (1) 證明 A 、 B 、 F 、 H 四點共圓。 (10 分)
- (2) 證明四邊形 $BFCG$ 是一個矩形。 (10 分)