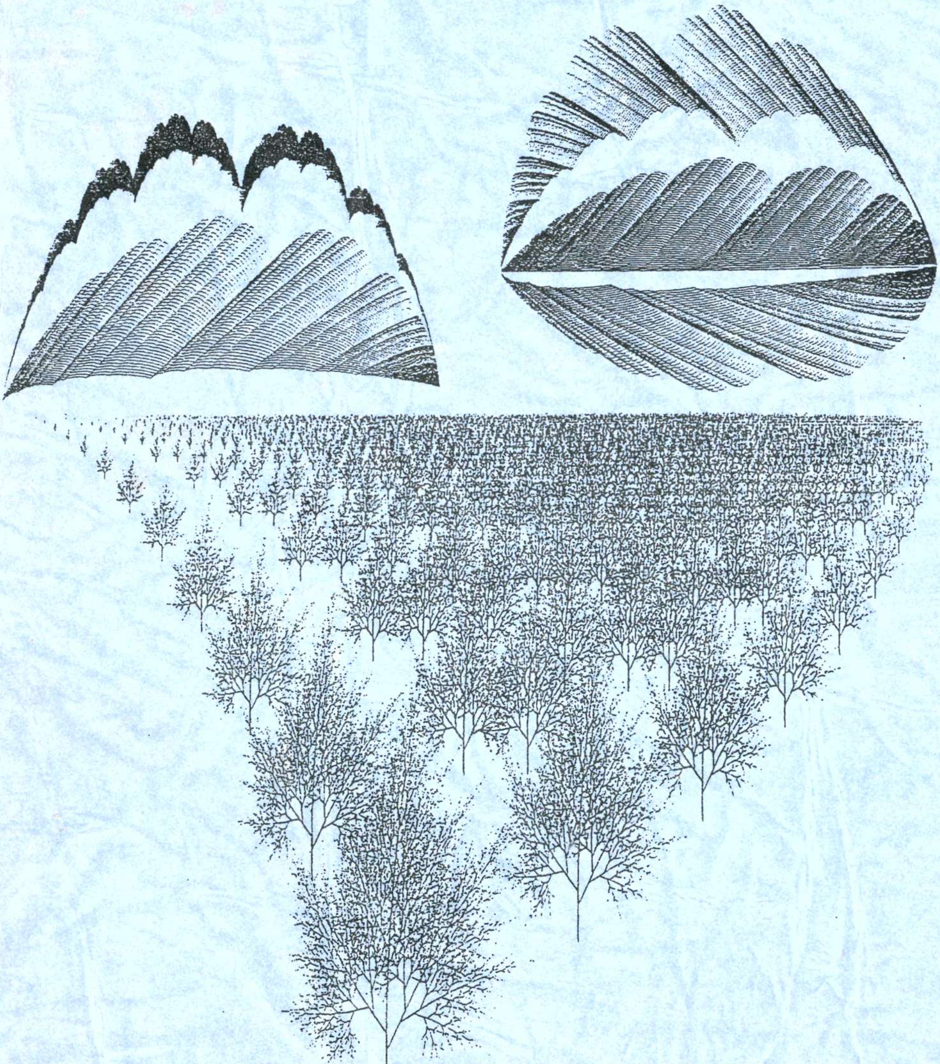
師大數學

24



序

系主任

本系成立於民國三十五年八月，首由張儒林教授擔任系主任，當時招收數學系及四年制專修科各一班，同學三十餘人，教授三位，助教一位，到民國四十五年為配合原來擴校計劃在頭份設三年制專修科，民國四十七年又增設夜間部專修科，民國四十八年停止招日間部專修科，而又將夜間部專修科改制為五年制數學系，為了要培育更高級之數學教育研究人員，於民國五十九年，成立了研究所碩士班，並於今年八月開始奉准成立研究所博士班。四十多年來經歷了各任系主任管公度、潘璞、李新民、康洪元、范傳坡、常法徽、顏啓麟及各任所長李新民、林義雄、呂溪木、李恭晴、顏啓麟之辛勞籌劃與系、所各位教授之苦心經營下，數學系、所，日益茁壯，已由原來每屆僅有十餘位同學，發展至每屆約一百二十名新生入學，目前每年約招收近百位新生；歷年來畢業人數已達三千四百餘人，多各有成就；其中獲得碩士學位肆佰餘人，具博士學位者將近二百人，或執教於高等學府，或繼續高深學術研究，餘則多服務於中等學校，都能秉持誠正勤樸之校訓，平時諄諄教學、熱誠服務、堅守崗位，頗獲好評。

現本系共有專兼任教師四十五人，學生十二班共有三百六十五名同學，圖書逾兩萬册，雜誌百餘種，個人電腦六十部，電算室一大間。六十四年夏由本部遷於現址，環境煥然一新，出國學成系友相繼返校，互相砥勵，奠定良好的研究風氣，並擴展了研究領域；今日數學系之師生，更能孜孜不息，為美好遠景奮發努力。

近年來國內外科學發展甚速，對數學之需要更切，本系之任務更日益增大，除肩負數學教育之發展及中等數學教育之輔導外，亦兼具數學學術及數學教育研究之重任。為增強研究風尚，本系二十三年前創辦師大數學年刊，以供師生發表數學及研究心得，切磋琢磨，提高學習及研究興趣。本刊屢經負責同學之精心策劃及全體師生系友之共同支持，漸茲茁壯，除至表感謝外，今後請更不吝珠璣，源源賜稿，善珍此片園地，使本刊前程更能散發絢爛光芒。

陳昭地

七十九年五月

寫在前頭

這一期主要分成四個部份：

第一部份是一些數學的老前輩對數學的看法，對於想認識數學形而上學的人來說可提供參考。

第二部份由一些淺談混沌的文章組成，“走馬看花”以圖爲主，目的在使同學“看看”而已，而“亂相中的規則”與“希爾伯特第十六問題”都是易看又頗有內容的介紹性文章“渾沌與亂流”一文則稍微不容易看。

第三部份是兩篇頗有新意的作品及Putnam 數學競試題目。

第四部份是：教，學心得及訪問錄，師大的老本行教育。

本來還有一篇不錯的文章，有關於數學教育，可惜工作太大，希望下期能夠完成刊載出來。

目 錄

數學之心

—本文取自數學傳播12卷1期—

一、前　　言

數學到底包含了些什麼？公設（如平行公設）嗎？定理（如代數基本定理）嗎？證明（如Godel對不確定性—— indecidability——的證明）嗎？概念（如集合與類別—— clases ）嗎？定義（如Menger對維度所下的定義）嗎？理論（如典範理論—— category theory ）嗎？公式（如Cauchy 的圍道積分公式—— contour integral formula ）嗎？方法（如接續逼近法——method of successive approximations ）嗎？

這些當然都是很重要的，少了這些東西，數學必定就不存在了。然而，當我們說這些東西都不是數學之心（換句話說，這些東西都不是數學裡最重要的內容）時，這種說法是絕對站得住脚的。我個人的看法是，數學家存在的原因是要解決問題。所以數學裡包含的，事實上就是問題及其解答（what mathematics really consists of is problems and solutions ）。

從大部分數學家的嘴裡講出來的時候，「定理」是個令人尊敬的字眼，「問題」則不一定如此。這些職業數學家偶而也會提到「問題」這個字眼，但他們多半把「問題」當作是給學生做的比較低級的練習，經過這樣的訓練之後，學生以後才有能力去證明較高級的「定理」。當然，讀者也一定理解到這段情緒化的言外之意，絕對是反對這種說法的。

自然數的加法交換律和說明多項式方程式在複數體內一定有解的代數基本定理，同樣是定理，但我們對這兩定理的感覺却迥然相異。前者是顯然的

(trivial)：即接近基本的定義，容易了解，證明也單純；後者則被公認爲是相當深的結果：敍述不顯然，證明時要用到似乎很遙遠的概念，結果也有許多令人驚訝的應用。

在一種名叫「tic-tac-toe」（註 2 ）的簡單遊戲中找出必勝的策略，以及對 Riemann zeta 函數找出所有的零點（ zeros ），同樣是問題，但這兩個問題却是天地之差。前者是顯然的，即任何人了解了定義之後就可以隨手給出答案，幾乎不需要動什麼大腦，所以給出答案後沒有什麼成就感，而其結果也無法得到有趣的推論。後者則是相當深而難的：雖然有許多人想要找出答案，但到目前爲止，還沒有人能解答，即使是已知的部分結果，都是許多數學家經過九牛二虎之力才得到的，部分的結果也已使我們能對相關的數學內容提供了重要的洞察力，若 Riemann 的猜測能得到肯定的答案，則我們可以得到許多不單純的推論。

由以上的討論知道，定理也可能是淺顯的，而問題則可能深奧的。因此，相信數學之心是由問題組成的看法，也有足以令人信服的理由。

【註釋】

註 1. 本文取材自 The American Mathematical Monthly, 87. 1980. P. 519 ～ 524：原文題目爲 The Heart of Mathematics：著者 P.R. Halmos 目前任教於美國 Indiana 大學數學系，爲該系的 Distinguished Professor ——譯者。

註 2. tic-tac-toe 是在如右圖的 3 行 3 列的格子上玩的遊戲，兩人輪流在格子內打○或×，先在某行某列或斜線連成 3 個一排者勝。可以算是五子棋的幼稚型態，美國的小學常在數學課內將此遊戲當作介紹邏輯概念的初學活動——譯者。

	×	
×	○	
	○	

數學雜談 ——數學之難以想像

本文爲小平邦彥在 1988 年 5 月日本學習院大學講稿潤飾而成

我長年從事數學的研究，年輕時只知埋頭拼命學習，別的什麼也不想，近來却總是悶心自問，自己一生與之打交道的數學到底又是什麼呢？想起來，數學這門學問中有種種難以想像之處。今天就說說“數學之難以想像”。

數學是清晰明確的學問

數學乃是按照嚴密的邏輯而構成的清晰明確的學問。要是那麼清晰明確的話，理應誰都能懂的了。那爲什麼又有弄不懂數學的學生呢？有人認爲那是教育方法不好，抑或教師不好；但跟著同一個“壞”老師學的却又有成績很好的學生，事實看來並非如此簡單。

數學是　昧模糊不知所云的學問

本雜誌的“閒談”（ Tea Time ）專欄中每期都刊載活躍在第一線的各界人士關於數學的隨筆，拜讀了這些文章便可知道，許多人或者因爲不喜歡數學而弄不懂它，或者因爲弄不而不喜歡數學。對於不喜歡數學的人來說，數學似乎是一門曖昧模糊不知所云的奇妙學問，假如作個民意測驗，大多數意見無疑將是“數學是曖昧模糊不知所云的學問”。

數學對數學家來說也很難理解

那麼要說我們這些數學家是否就清晰明白地懂得數學了呢？當然大學本科水平的數學是清楚明白的，但是數學實際上分成許多專門領域，要想閱讀

並清晰明白地理解與自己專業毫無關係的領域的書或論文，一般情況幾乎是不可能的。

就我來說，對數理邏輯或數學基礎論就怎麼也弄不明白，距今 15 — 16 年前，正是東大學潮時期，當時我想了解自己從未接觸過的數學基礎論到底是什麼學問，買了一本美國研究生院一年級研究生用的數理邏輯教科書來讀。我想，數理邏輯是邏輯上最嚴密的數學，只要一步一步跟著其論證走就總會明白的吧，就下決心開始了學習，結果却稀里糊塗一點也不明白。由此便灰心喪氣了。雖然學得相當努力，自己還覺得好歹明白了哥德爾的不完全性定理，而科恩（ Cohen ）的強迫法（ forcing ）却始終也弄不明白。因爲這是研究生院一年級的教科書，要是年輕時學，是應該能明白的。想想也怪了，稍微上了點年紀就怎麼也學不會了。要說學習，其實也只是一運作筆記，一邊認眞循著定理的論證過程走，這在年輕時和上了年紀都是一樣的。相同的做法，年輕時學得懂，上了年紀就弄不明白，這種現象眞是難以想像。那麼，爲什麼年輕時理應明白的數學到上了年紀就弄不懂了呢？所謂懂得數學，究竟是怎麼回事呢？

數 學 直 覺

就我所見，理解數學定理，就是“看到”定理描述的數學現象。所謂“看到”當然不是眼睛看到，而是根據某種感受而理解。我稱這種感覺爲數學直覺。正如我一開始所說的，數學就必須根據數學直覺掌握具體的數學現象，光靠邏輯會一事無成。這是顯而易見的，例如大學數學系一年級學生的微積分講義中，其基礎 $\varepsilon-\delta$ 的論證法就很難學懂。“對於任意的正數 ε，存在某個正數 δ……”的 $\varepsilon-\delta$ 論證法邏輯上簡單明了，所謂不懂，不是邏輯上不明白，而是不能具體地掌握其數學內容。

數學直覺是純粹的感覺，所以數學直覺的敏銳程度如同聽覺的敏銳程度一樣，與頭腦的好壞沒有關係。實際上，智力遲鈍的小孩中有心算的天才（13 秒鐘求出 $\sqrt[3]{465483375}$），也有連簡單的算術都不會而雇傭幾名計算人員成爲富翁的高手①，還有不會算賬的名作家②，大千世界眞是形形色色

。世上普遍認爲數學好的人就腦子聰明，這恐怕是因爲數學成績好有利於升學考試的緣故吧！

【註釋】

① P.S. Churchland, Neurophilosophy. The MIT Press, 1986 pp.232—233。

② 副島羊吉郎：數學ぎちいほな　生れる。講談社，昭和53年，13—17頁。

數學直覺與人類的進化

那麼通過教育能把數學直覺力培養到什麼程度呢？這是數學教育的重要問題，但數學直覺的個人差別似乎非常之大。其理由看看人類的進化過程就明白了。人類是進化極其迅速的生物，在過去300萬年間，人腦的大小增加一倍；盡管如此，從1萬年前到現在却幾乎沒有變化。大約4000多年前埃及與克里特島的文明很發達，人類最高的智慧柏拉圖、基督、釋迦則出現在2000年以前；由此便可知道，人腦的構造從1萬年前起就幾乎沒有變化。因此人類的數學直覺從1萬年前起也沒有變化。

對於1萬年前居住在洞穴，用棍棒與野獸作戰的人類，數學直覺是近乎毫無用處的一種感覺。生物是按照自然淘汰而進化過來的，自然淘汰就是淘汰對生存不利的個體。因此，自然淘汰對於與生存毫無關係的無用的感覺不起作用，所以數學直覺力並沒有發展，但差距却拉開了。數學直覺的個人差別很大，不喜歡數學的人很多，具有足以成爲數學家的敏銳數學直覺的人非常之少，這些也就很自然了。

與聽覺一樣，數學直覺的敏銳程度首先是先天的，其次則靠訓練。我學習數學基礎論怎麼也不明白就是由於年輕時沒有訓練，因而對基礎論缺乏數字數學直覺。

數學是人類精神的自由創造物

集合論的創始人數學家Georg Cantor（1845—1918）一語道破“數

學的本質在於自由”，在現代數學中凡是可以想像的東西數學家都可以完全自由地去思索。所以可以說數學是人類精神的自由創造物。

自由馳想的嚴物有複數，初中學習的二次方程式

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

其解的公式為

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

以此來解二次方程

$$x^2 + 2x + 5 = 0 \qquad (1)$$

則

$$x = -1 \pm \sqrt{-4}$$

麻煩的是$\sqrt{-4}$，也就是平方後為－4的實數並不存在，因此只能發揮自由想像力，考慮平方後為－1的數 $= \sqrt{-1}$。這樣，(1)的解就為$x = -1 \pm 2i$，形如$u + iv$（u、v是實數）的數就是複數。

複數在16世紀已為Cardano①等使用，18世紀其應用大大發展。盡管如此，正如虛數這一名稱所表明的，複數還被認為是為了計算方便而導入的虛構的數，把複數看作是與實數同樣的實際存在的數，則是在Gauss（1777—1855）發現複數的幾何表示以後的19世紀後半葉。

數學與自然科學

數學被廣泛應用於物理學、天文學等自然科學，簡直起了難以想像的作用。而且有許多情況說明，自然科學理論中需要的數學遠在發現該理論以前就由數學家預先準備好了，這是難以想像的現象。

一個很好的例子是由Heisenberg（1901—1976）、Schrodinger（1887—1961）等創立的量子力學中的複數。按量子力學，粒子狀態由波動函數$\Psi = \Psi(t, x, y, z)$表示，Ψ遵循Schrodinger方程。

$$ih\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left(\frac{h}{2m}\triangle + V\right)\Psi$$

$$\triangle = \frac{\partial^3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$V = V(x, y, z)$ 是作用在粒子上的力場的勢，$\Psi = \Psi(t, x, y, z)$ 是取複數值的函數，方程左邊乘著虛數單位 $i = \sqrt{-1}$，這樣，在量子力學中本質上就是用複數，而複數早在 16 世紀就準備好了。

另一個例子是愛因斯坦的廣義相對論（1915）中的Riemann空間，Riemann（1826—1866）論述幾何基礎、導入Riemann空間的概念是在1854年，所以廣義相對論所需要的Riemann空間是60年前準備好的。

廣義相對論的基本方程的解有早已知道的Schwarzschild解

$$ds^2 = \left(1 - \frac{m}{\gamma}\right)dt^2 - \frac{1}{1-\dfrac{m}{\gamma}}d\gamma^2 - \gamma^2\left(d\theta^2 + \sin\theta d\varphi^2\right)$$

$(\gamma, \theta, \varphi)$ 是空間球坐標 (2)

這是設想恒星的總質量集中於原點0時的解，以0爲圓心半徑爲m的球爲黑洞。m是與恒星質量成比例的長度，就我們的太陽而言約3公里，太陽半徑約700萬公里，質量增得很大，所以即使到太陽中央也沒有黑洞。這樣，黑洞就被認爲實際並不存在，它只出現在Schwarzschild解的公式(2)中，但最近，隨著天體觀測的進步，我們知道了在宇宙的那邊存在著黑洞。

【註釋】

① Cardano是發現三次方程解法的意大利數學家。

廣義相對論是愛因斯坦根據純粹思考發現的，以前連做夢也沒有想到在其基本方程的解的公式中會出現黑洞，幾十年後却實際找到了，這實在是難以想像的。

看到數學在自然科學中起著如此難以想像的作用，自然想到在自然界的背後確確實實存在著數學現象的世界，物理學是研究自然現象的學問，同樣，數學則是研究數學現象的學問。所以我們只是認爲數學有助於自然科學。

數學雖說是人類精神的自由創造物，但決不是人們隨意杜撰出來的，數學乃是研究和描述實際存在的數學現象。人們都說數學是自然科學的語言，但很難設想在簡單的語言中就會有預補黑洞的能力。我認爲應該是這樣一種根本上的關係，即數學是自然科學的背景。

什麼是數學

這是自古以來的疑難問題，現代的主流思想是Hilbert（1862—1943）的形式主義。

形式主義

如果引進記號→（如果）、V（或）、∧（和）、¬（非）、∀（一切的）、∃（存在），那麼數學文章就可以全部用記號和公式來寫，而公式本來就可以用記號來寫，所以最終數學文章就成了記號的排列，形式主義認爲，數學是遵循一定規則而將本身沒有意義的記號排列起來的遊戲。

Hilbert 在這樣將數學看作遊戲時，想要通過證明遊戲不管進行到哪兒都不會出現式子 1 ＝0 ，來表明數學是相容的，即無矛盾的。

對於數學的相容性，Godel（1906—1978）在1931 年證明了“任何包含自然數論的相容的形式體系都是不完全的，其自身的相容性不可能證明”。這是Godel 的不完全性定理。Weyl（1885—1955）似乎是深刻領會了不完全性定理，寫了這樣的意思：“數學的眞正基礎、眞正意思本來就不是那麼容易弄明白的。數學與音樂一樣是人類創造活動的產物，其成果由歷史來左右，因此要將其在客觀上合理化談何容易”，①但是現代舞台上的數學家，除了基礎論的專家外，對此問題似乎毫不關心。

實在論

數學的對象是獨立於我們這些思考數學的人的一種實際存在，這就是實在論。Godel 將他的數學思想表述如下：

“集類（classes）和概念（concepts）可以認爲是獨立於我們

的定義和構造法的實際存在。

可以認爲，假定這種實際存在，和物理學家假定物體的存在同樣是正當的。爲了得到滿意的物理學就需要物體，同樣的，爲了得到滿意的數學就需要這種實際存在”②。

Godel 的思想是徹底的是實在論，剛才我說的“數學是研究自然界背後實際存在數學現象的學問”也是實在論。不過 Godel 的是深思熟慮後的實在論，我的只是簡單的感想而已。

Godel 還有如下的表述：

“我們對集合論的對象有著某種感性認識（ perception ）。這種感性認識告訴我們集合論的公理是正確的。我想沒有任何理由認爲這種感性認識即數學的直覺較之五感③更不可信賴”④。

這種對於集合論對象的感性認識大概就是我先頭說的數學直覺。

發明還是發現

數學中的所謂發現是發現人想出來的呢，還是找到的呢？我雖然發現過二、三個定理，但我感到那不是我想出來的，只不過是徘徊徜徉在數學現象的世界時偶爾找到了遺留在那兒的定理。數學中最好不說發明了新定理，而說發現了新定理，因爲發現過新定理的許多數學家與我一樣，感到是找到了遺留的定理。

發現與發明的區別只要將數學與音樂比較一下就很清楚。假如貝多芬像舒伯特那樣在 31 歲就去世 ，那麼貝多芬的第九交響曲就不會存在，所以第九交響曲是貝多芬想像出來的，而不是他找到的。也就是說貝多芬是發明而不是發現。

與此相反，數學的重要定理，例如 Cauchy（ 1789—1857 ）定理，即使沒有 Cauchy 一定也會有另一個數學家在 19 世紀結束前發現的。因爲一定會有某個人找到它，所以定理在被找到之前並已存在於某處了。

定理早就存在於某處，這就是實在論的思想。如果看到我們不說發明了而說發現了新定理，那麼除了基礎論的專家外，多半數學家盡管其方針原則

是形式主義，但其本意恐怕還是實在論。

拉拉雜雜談了這麼多，以上就是我對數學的感想。

（陳治中譯　陳培德校）

【註釋】

① H. Weyl : Philosphy of Mathematics and Natural Science, Princeton Univ. Press, 1949,

② Kurt Codel : Russell's Mathematical Logic in Philosophy of Mathematics, Prentice-Hall, 1964 , pp.211 — 232 。

③ 視覺、聽覺、嗅覺、味覺、觸覺——譯註。

④ Kurt Godel : What is Cantor's Continuum problem ? in Philosophy of Mahtematics，同上，pp.258 — 273 。

⑤ 木村資生：生物進化き考元す，岩波新書。1988 ，263 — 264 頁。

談談同學學科學的幾個問題

學科學需要熱誠，更需要持久的熱誠

—本文齡自華羅庚科普選集—

如果說科學是有止境的，到達了之後可以休息，那是無稽之談。科學是精益求精，日新月異，永遠前進的。科學成就是由一點一滴積累起來的。唯有長時期的積聚才能由點滴滙成大海。科學本身在經常不斷地考驗自己，在經常考驗中把人類的經驗積累起來，這樣，才會解決更大的問題，才會更完整地解決問題。

“一曝十寒”固然要不得，就是“一曝一寒”也要不得，我們需要不斷地鍛鍊，不斷地提高；我們需要經常地緊張工作；我們需要有持久的熱誠。經驗告訴我們，在科學領域裏，成功的科學家幾乎沒有一個不是辛勞的耕耘者。不少例證說明，科學上的重要發現，是在科學家腦海中反覆深思達二三十年之久方始成熟的。因而要想順手揀來偉大的科學發明是不可想像的；唯有由於持久熱誠所支持着的不斷努力，才是能有所成就的唯一的可靠保證。

學科學要有雄心，但不能越級而進，更不能鑽牛角尖

古語說得好，“登高必自卑，行遠必自邇。”如果我們不從頭做起，按部就班，那我們是不可能提到應有的高度的。

科學是累積性的東西，如果第一步不了解，第二步就會發生困難，而第三步更跟不上去，也許原來的目的想跳過一步，求快，但結果呢？反而搞成了不能前進。我曾見過好高騖遠的人的失敗的情況：對初級課程自以為念過了，懂得了，而高深的却鑽不進去，很窘。我以為學科學的要點在於一步不懂，不要輕易地去跨第二步；並要有堅持性，一天不懂再研習一天。只有這樣，科學的寶塔才會逐漸建築得又高又大，不然有如沙上建塔，必塌無疑。

唯有按部就班地前進，唯有步步踏實地鑽研，才可化雄心為現實。在這樣基礎上生長的雄心，才不是幻想，才不是白日夢。

學科學要能創造，但也要善於接受已有的成果

研究科學最寶貴的精神之一，是創造的精神，是獨立開闢荒原的精神，科學之所以得有今日，多半是得力於這樣的精神，在"山窮水盡疑無路"的時候，卓越的科學家往往另闢蹊徑，創造出"柳暗花明又一村"的境界。所以獨立開創能力的培養，是每一個優秀科學家所必須具備的優良品質之一（注意：獨立不是孤立）。獨立開創與拒不接受他人的經驗並無絲毫相同之處。科學的工作如接力賽跑，人愈多，路程也便會跑得愈遠。我所理解的"開創"，應當是基本上了解了前人成果之後的開創工作。因爲在愈高的基礎上努力，所得的結果也更高。如三分角、永動機的研究者，如果肯吸收前人的經驗，就不會白白浪費精力與時間。因爲這兩個問題的結論，正是建築在若干世紀以來科學家們的無數次失敗的經驗之上的，我們又何苦、更又何必再走回頭路呢？

但學習前人的經驗，並不是說要拘泥於前人的經驗，我們可以也應當懷疑與批評前人的成果。但懷疑和批評必須從事實出發，必須從了解旁人出發，如此才可以把新的結論建築在更結實的基礎上面。

一個人的生命是有限的、短促的，如果我們要把短短的生命過程使用得更有效力，我們最好是把自己的生命看成是前人生命的延續，是現在共同生命中的一部份，同時也是後人生命的開端。如此地繼續下去——整體般地繼續下去，科學就會一天比一天更光明燦爛，社會也就會一天比一天更美好繁榮。總之，我們要善於總結及利用前人的經驗，再在已有的經驗上進一步地提高——發展性或創造性的提高，更爲後人開闢道路。

自修是能達到學習目的的，毅力和耐心是成功的保證

自修是學習方法之一。我們可以肯定地說：任何一個人如果養成了自修的習慣，都是終身受用不盡的。但如果因爲強調自修而放棄參加一起學習的機會，也是不正確的態度。曾經有些青年說：在學校裏要學的科目太多，進度很慢，還是在家裏自修好一些。這種看法當然是不妥當的。自修只能看作

是在正規學習進行中的輔助辦法，在無法參加正規學習時候的代替辦法。必須知道，在學校裏學習有很多優點：第一，是能夠得到系統的、全面發展的爲現代公民所需要的常識；第二，是水平高於我們的教師會較快地帶我們上路，並且能夠及時指出容易被我們忽略的要點和關鍵所在，又能夠幫助我們解釋疑難，減少暗中摸索的時間；第三，有檢查有考核，易於暴露和及時糾正我們學習中的缺點；第四，和同學在一起，可以互相幫助，互相鼓勵。所有這些，都不是用自修的方法能夠得到的。但同時也應當培養自修的習慣，這樣，一來可以補助學習的不足，二來準備在不能參加學習的時候，能掌握“自修”這一重要的學習方法。

自修是一種比較艱苦的學習方法，但它的優點是無論何人、何時、何地都可以採用。只要我們能按部就班，不懈不怠，繼之年月，它是可以幫助我們達到科學的光輝的頂點的。凡是具備了普通語文修養的人，就可以運用自修來擴大自己的知識範圍。就我所熟悉的數學而言，只要我們肯於自修，便能夠使我們進入數學的堂奧。

但是由於沒有督促檢查，沒有老師指引，自修往往自流，以致有始無終。我個人就有過一些痛苦的經驗：由於急躁，想一蹴而成，我常常逾規前進，在最初一個時期看來似乎很有成績，但一旦運用時却發現運用不靈，而是一鍋夾生飯。這時，前進不行，回頭又不甘心，這種情況幾乎 我喪失信心，中途而止。夾生飯重新回鍋是件極不愉快的事。我想，一定有不少苦心自修的人有過同樣苦痛的經驗。因此，無論自修那一門課，最重要的是避免焦躁，循序前進，才是上策。如果不幸和我有相同的經驗，唯一補救辦法就是重新從頭做起。自修時的另一缺點是往往自以爲通，自以爲懂，書上的習題會做，書上的定理會背，但若干年後回顧一下，以往所謂的通和懂不過是浮面的、形式上的了解，一遇到原則性的變化就墮入五里霧中，摸不着頭腦了。這一缺點，雖然可能是學習過程中極難避免的，但如果自修時能夠認眞思考，仍可能減輕它的嚴重性。另一方面也有一些人，對原理、原則談來似乎瞭解了，但在具體應用時百無一能。此外，虎頭蛇尾、有始無終、“一曝十寒”等毛病就不在話下了。

總之，我覺得，自修能有成績的主要關鍵在於毅力和耐心。應當正確地認識爲了什麼在自修，也應當正確地認識“自修”較“學校學習”爲艱苦，所需要的時間更多，圖快貪多是自修成功的敵人，必須用“涓涓不息，而成江河”的態度，持之有恒，行之有素，才能夠完成自修所要達到的目的。

和同學們談談學習數學

數學是一門非常有用的科學。在日常生活裏，我們也到處要用到數學。你們現在學的算術、代數、幾何，都是數學裏極基本的一部份，應當學好它。

數學的用處還不只這些。加里寧曾經說過，數學是鍛鍊思想的“體操”。體操能使你身體健康，動作敏捷。數學能使你的思想正確，敏捷。有了正確、敏捷的思想，你們才有可能爬上科學的大山。所以，不論將來做什麼工作，數學都能給你們很大的幫助。

有的同學說，“數學的重要我知道，可是太難了。我看見數學就頭痛，對它實在沒有興趣。”

數學眞的很難嗎？我看不是。數學旣然是思想的“體操”，那也就和普通的體操一樣，只要經常鍛鍊，任何人都可以達到一定的標準。拿跳高來說，任何人只要經過適當的鍛鍊，都能跳過一米二。數學也一樣，只要經常鍛鍊，經常練習，就能達到一定標準，並不需要任何天才。

以我自己來說。我在小學裏，數學勉強及格。初中一年級的時候，也不見得好。到了初中二年級才有了根本上的改變。因爲我那時認識了這一點：學習就是艱苦的勞動，只要刻苦鑽研，不怕困難，沒有解決不了的問題。旁的同學用一小時能解決的問題，我就準備用兩小時解決。是不是別人一小時的工作，我一定要用兩小時呢？那也不見得；由於我不斷地刻苦練習，後來別人要花一小時才能解決的問題，我往往只要用半小時，甚至更短的時間就解決了。

不怕困難，刻苦練習，是我學好數學最主要的經驗。我就是這樣學完了基礎的數學。這一寶貴的經驗，直到今天，對我還有很大的用處。我和其他數學家研究問題的時候，當時雖然都懂了，回來我還要仔細地思考研究一遍

。我不輕視容易的問題，今天熟練了容易的，明天碰到較難的也就容易了。我也不害怕難的問題，我時刻準備着在必要時把一個問題算到底。我相信，只要辛勤勞動，沒有克服不了的困難。

還有些同學說："數學就是太枯燥，又是數目字，又是公式，一點沒有趣味。"數學是不是很枯燥，很沒有趣味呢？我想：你們既然知道國家建設需要數學，怎麼還會感覺數學沒有趣味呢？其實，數學本身，也有無窮的美妙。認爲數學枯燥無味，沒有藝術性，這看法是不正確的。就像站在花園外面，說花園裏枯燥乏味一樣。只要你們踏進了大門，你們隨時隨地都會發現數學上也有許許多多趣味的東西。我現在舉個極簡單的例子："我家有九個人，每人每天吃半兩油，一個月（以三十天算）共吃幾斤幾兩？"這個問題，我想你們都會算，算式是：$\frac{1}{2} \times 9 \times 30 \div 16$。但是如果你們動一動腦筋：每人每天半兩，每人每月不是一斤差一兩嗎？九人每月吃油就是九斤差九兩，即八斤七兩。算起來豈不又快又方便？你們還可以把一個月當三十一天，用上面兩個方法算一算，比較一下，就知道數學是個怎樣有趣、怎樣活潑的一門科學了。

同學們，在長知識的時候，數學是你學習其他科學有力的助手，我希望你們把數學學好！只要不怕困難，刻苦練習，一定學得好。

脚踏實地與加快速度

正因爲科學工作是一個長期的艱苦的事業，所以不僅要有頑強性和堅持性，而且必須注意科學的方法和步驟，脚踏實地地循序漸進。向科學進軍好比爬梯子，也要一步一步地往上爬，既穩當又快。如果企圖一脚跨上四、五步，平地登天，那就必然會摔交子，碰得焦頭爛額。我這說是不是保守思想呢？是否違反了"又多又快又好又省"的原則呢？我覺得，循序漸進是和加快速度不矛盾的，正因爲循序漸進，基礎打得好，所以往後才能保證順利完成。過去有些中學生，自命爲天才，一年跳幾級，初中未讀完就不耐煩了，跳班去讀高中，這是很危險的事，雖然暫時勉強跟得上，但因爲基礎打得不

紮實，將來進一步研究的時候就會有很大的困難。有些青年不但怕難，而且很輕視容易，初中算術還沒學好就想跳一跳去學代數。他大概認爲算術太簡單，沒有必要多學，結果到了學代數的時候，却發現有許多東西弄不懂，造成很大的困難。其實我們通常的所謂困難，往往就是我們過於輕視了容易的事情而造成的。我自己從前就有過這樣的痛苦經驗。看一本厚書的時候，頭一、二章總覺得十分容易，一學就會、馬虎過去，結果看到第三、四章就感到有些吃力，到第五、六章便啃不下去，如果不願半途而廢，就只好又回過頭來再仔細溫習前面的。當然，我所謂要循序漸進，打好基礎，並不是叫大家老在原地方踱步打圈子，把同一類型的書翻來覆去看上很多遍。譬如過去有些人研究數學，把同樣程度的幾本微積分都收集起來，每本都從頭到尾看，甚至把書上的習題都重複地做幾遍，這是一種書呆子的讀書方法，毫無實際意義，這樣做當然就會違反“快”的原則。我個人的看法是：打基礎知識的時候，同一類型的科學，只要在教師的指導下選一本好書認眞唸完它就可以了（在這種基礎上再看同一類型的書時只不過吸收其中不同的資料，而不是從頭到尾精讀）；然後再進一步看高深的書籍。循序漸進決不能意味着在原來水平上兜圈子，而是要一步一步前進；而且要盡快地一步一步前進。

談到補基礎知識的問題，目前在大學裏有這樣兩種看法：一種看法是一面工作，一面研究，一面補基礎；另一種看法是打好基礎再研究。這兩種做法當然都可以達到循序漸進的目的。但究竟那一種方法最好，則必須結合自己的具體環境和條件來決定，不能機械硬搬。我以爲在有良好導師進行具體輔導的情況下，不妨一面補基礎一面做研究工作，這樣不致走什麼彎路，而且可以很快前進。若沒有導師指導，那就必須先打好基礎，因爲基礎不好，又沒有人指導，將來在進行研究專題時，發現自己基礎知識不夠，就往往會弄得半途而廢或事倍功半。但即使沒有導師，打基礎的時間也不會花得太久。聽說有些大學畢業的學生，擔任教師二、三年，在制定個人計劃時還準備用十年時間來打基礎，爭取副教授水準，這實在是完全不必要的。依我個人的看法，一個大學三年級肄業而出來工作的同學，拿二、三年時間補基礎就夠了。當然指的是辛勤努力的二、三年，而不是一曝十寒的二、三年。

熟能生巧

最後，我想順便和大家談談兩個方法問題。我以爲，方法中最主要的一個問題，就是“熟能生巧”。做任何東西都要熟，熟了才能有所發明和發現。但是我這裏所說的熟，並不是要大家死背定律和公式，或死記人家現成的結論。不，熟的不一定會背，背不一定就熟。如果有人拿過去讀過的書來唸十遍、二十遍，却不能深刻地理解和運用，那我說這不叫熟，這是唸經。熟就是要掌握你所研究的學科的主要環節，要懂得前人是怎樣思考和發明這些東西的。譬如做一個實驗，需要經過五個步驟，那你就要了解爲什麼非要這五個步驟不可，少一個行不行，前人是怎樣想出這五個步驟來的。這樣的思考非常重要，因爲科學研究的目的在於發明或發現一些東西。如果人家發明一樣東西擺在你前面，你連別人的發明過程都不能了解，那你又怎樣能夠進一步創造出新東西呢？好比瓷器，別人怎樣燒出來的，我們都不理解，那我們怎能去發明新瓷器呢？有人說：牛頓發明萬有引力定律，是由於偶然看見樹上一個蘋果落地，靈機一動的結果，這眞是胡說八道。蘋果落地的事實，自有人類以來便已有了，爲什麼許多人看見，沒有發現而只有牛頓才發現萬有引力呢？其實牛頓不是光看蘋果落地，而是抓住了開普勒的天體遠行規律和伽利略的物體落地定律，經過長期的深思熟慮，一旦碰到自然界的現象，便很容易透視出它的本質了。所以對關鍵性的定理的獲得過程，必須要有透徹的了解及熟練的掌握，才能指望科學上有所進展。再申明一下，這裏談的關鍵並不是指各種問題的關鍵，而是你所研究的工作中的主要關鍵。

其次，關於資料問題。研究工作既然要廣泛吸取前人的經驗，那就必須佔有充分資料。如果是一個空白的科學部門，這門科學過去還沒有或很少有人研究過，那查資料就會發生很大的困難。在這裏我想與其談一些空洞的原則讓大家去摸，不如講得具體些，但是愈具體錯的可能性就愈大，希望大家斟酌着辦，不要爲我這建議所誤。我覺得，如果有導師指導的話，那他就可以告訴你這門科學過去有誰做過，大致有些什麼資料或著作（具體材料他也不可能知道），然後你可按這線索去尋找，這樣做當然還比較好辦。如果沒

有導師，只派你一個人去建立這個新部門，那應該怎麼辦呢？我想首先要了解這門科學在世界上最有權威的是那些人或那些學派，然後拿這些人近年來發表的文章來看。起初很可能看不懂，原因大致有兩種：第一，他所引證的教科書，過去我們沒有唸過，這很好，從這裏知道我們還有那些基礎未打好，需要補充；第二，他引證了許多旁人的著作。這些著作我們不一定全部要看，但可以從這位科學家提供的線索開始，按他引證的書一步步擴大，以他研究的基礎一步步前進。這樣時間也不致花得太長，有的花一、二年，有的三、五年就可以知道個輪廓了。

取法務上，僅得乎中

同樣一件事，反映各不同。努力向上者，取其積極面，自暴自棄者，取其消極面。

宋朝有一位蘇洵——蘇老泉，到二十七歲的時候才發憤讀書，終於成為一位大文學家。

這故事告訴我們：刻苦學習，不要怕晚嫌遲，不要說我年紀一把，還學出個啥名堂來。更不是告訴我們：我年紀還輕呢！今年不過二十歲，用什麼功來！再過五年才發憤，豈不比蘇老泉還早二年嗎？

發憤早為好，苟晚休嫌遲，最忌不努力，一生都無知。

*　　*　　*　　*　　*

元朝有位王冕——王元章，他是一位大畫家。他從小貧窮，不能從師學習，買了紙筆和顏料，在放牛的時候，看著荷花臨摹起來，經過刻苦鍛鍊，終於自學成為一位大畫家。

這故事告訴我們：如果沒有老師，不要怕，只要刻苦自勵，自學也是可以有所成就的。但是並不是說：我何必在校學習呢？自學不也很好嗎？不也可以成為王冕嗎？

自學的習慣是要養成的，而且是終身受用不盡的好習慣，但不要身在福中不知福！有老師的幫助而不知道這幫助的可貴。不明不白處，老師講解，不深不透處，老師追查。更重要的是，從老師處可以學得深鑽苦研的、失敗

的和成功的經驗，學習了他成功的經驗，長知識，可以在這基礎上更深入地下去；學得了他失敗的經驗，長閱歷，可以知道天才出於勤奮的道理，知道成功從失敗中來的道理。

*　　　*　　　*　　　*　　　*

獨創精神不可少，這是我們建設前人所未有的事業的時代青年必有的本領，但接受前人的成就也是十分必要的。不走或少走前人已走過的彎路是加快速度的好方法，老師盡他的力量向上帶，帶到他能帶到的最高處。我們在他們的肩膀上更上一層，一代勝似一代。

對“懂”的要求

做學問功夫，基礎越厚，越牢固，對今後的學習就越有利，越容易登高峯，攻尖端，得心應手地廣泛用。有人說，基礎寬些好，但到底多寬才好？有人爲此而雜覽群書。我的看法，打好基礎的第一要求是：對於一些基本的東西，要學深學透，不要急於看力所不能及的書籍。什麼叫學深學透？這就是要經過“由薄到厚”、“由厚到薄”的過程。

首先是“由薄到厚”。比如學一本書，每個生字都查過字典，每個不懂的句子都進行過分析，不懂的環節加上了注解，經過這一番工夫之後，覺得懂多了，同時覺得書已經變得更厚了。有人認爲這樣就算完全讀懂了。其實不然。每一章每一節、每一字每一句都懂了，這還不是懂的最後形式。最後還有一個“由厚到薄”的過程，必須把已經學過的東西咀嚼、消化，組織整理，反覆推敲，融會貫通，提煉出關鍵性的問題來，看出了來龍去脈，抓住了要點，再和以往學過的比較，弄清楚究竟添了些什麼新內容、新方法。這樣以後，就會發現，書，似乎“由厚變薄”了。經過這樣消化後的東西，就容易記憶，就能夠得心應手地運用。

例如學數學，單靠記公式就不是辦法，主要是經過消化，搞懂內容。“三角學”的公式很多，但主要的並沒幾個，其他公式都是由這些推出來的。其中主要的一個 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$， 也不是新的，而是“幾何學”上講過的商高定理。

越 學 越 快

也許有人覺得，這樣書是讀“深”了，但“廣”不起來；也許有人覺得，這樣學習可能進度慢了。其實不然，這樣會愈學愈快。基礎好了，以後只不過是添些什麼新東西的問題，而不是再把整本書塞進腦子裏去的問題。這樣學，就把“廣”化爲“添”，添些本質上所不知道的東西，而不是把“廣”化爲“堆”，把同樣的貨物一捆一捆地往上堆。這樣消化着學，是深廣結合的學法，是較有效率的學法。學了之後，鞏固難忘，那就不必說了。

打好基礎的另一辦法是經常練，一有機會就練，苦練活練，不要放過任何一個機會。比如說，學數學，最好不僅以會做自己學校裏的試題爲滿足，旁的學校的試題也拿來做做，數學競賽的試題也拿來做做；讀報紙了，看到五年計劃要求某種產品增加一倍，也不妨算算每年平均增加的百分比是多少。

老師沒有講過的

在打基礎的同時，還必須注意培養獨立思考的能力。一切事物都在不斷向前發展着，我們用老方法來處理新問題，必然有時不適合，或者不可能。針對新的問題，我們就必須獨闢蹊徑，創造新的辦法來處理。老師沒有講的，書上查不到的，前人未遇到的問題，就要靠我們獨立思考來解決。

培養獨立思考的第一步，還是打好基礎，多做習題，肯動腦筋，深透地了解定理、定律、公式的來龍去脈，但最好再想一下，那些結論別人是怎樣想出來的，如果能看得出人家是怎樣想出來的，那麼自己也就有可能想出新東西來了。

勤能補拙，熟能生巧

最後，我想談一談天才與學習的關係問題。有些人自己信心不足，認爲學習好需要天才，而自己天才不夠；又有一些人，自高自大，覺得自己有才能，稍稍學習就能夠超過同輩。實質上，這兩種看法都有問題。當然，我們不否認各人的才能不一樣，有長於此的，有短於彼的，但有一樣可以肯定：

主動權是由我們自己掌握的，這就是努力。雖然我的資質比較差些，但如果用功些，就可能進步得快些，並且一般地講，可以超過那些自以爲有天才而幹勁不足的人。

學問是長期積累的，我們不停地學，不停地進步，總會積累起不少的知識。我始終認爲：天才是“努力”的充分發揮。惟有學習，不斷地學習，才能使人聰明；惟有努力，不斷地努力，才會出現才能。我想用一句老話來結束這篇文章：“勤能補拙，熟能生巧。”

“由薄到厚”和“由厚到薄”

科學是老老實實的學問，不能有半點虛假浮誇。不知就不知，不懂就不懂，不懂的不要裝懂，而且還要追下去，不懂，不懂在什麼地方；懂，懂在什麼地方。老老實實的態度，首先就是要紮紮實實地打好基礎。科學是踏實的學問，連貫性和系統性都很強，前面的東西沒有學好，後面的東西就上不去；基礎沒有打好，搞尖端就比較困難。我們在工作中經常遇到一些問題解決不了，其中不少是由於基礎未打好所致。一個人在科學研究和其他工作上進步的快慢，往往和他的基礎有關。關於基礎的重要，過去已經有許多文章談過了，我這裏不必多講。我只談談在科學研究工作中發現自己的基礎不好後怎麼辦？當然，我們說最好是先打好基礎。但是，如果原來基礎不好，是不是就一定上不去，搞不了尖端，是不是因此就喪失了科學研究的信心了呢？當然信心不能喪失，但不要存一個蒙混過關的僥倖心理。主要的是在遇到問題時不馬馬虎虎地讓它過去。碰上了自己不會的東西有兩種態度：一種態度是“算了，反正我不懂”，馬馬虎虎地就過去了，或是失去了信心；另一種態度是把不懂的東西認眞地補起來。補也有兩種方法：一種是從頭唸起；另一種方法，也是大家經常採用的，就是把當時需要用的部份盡快地熟悉起來，缺什麼就補什麼（慢慢補得大體完全），哪方面不行，就多練那方面，並且做到經常練。在這一點上，我們科學界還比不上京劇界。京劇界的一位老前輩有一次說過：“一天不練功，只有我知道；三天不練功，同行也知道；一月不練功，觀衆全知道。”這是說演戲，對科學研究也是如此，科學的

積累性不在戲劇之下，也要經常練，不練就要吃虧。但是如果基礎差得實在太多了，還是老老實實從頭起，不要好高騖遠，還是回頭是岸的好，不然會出現高不成低不就的局面。

有人說，基礎、基礎，何時是了？天天打基礎，何時是夠？據我看來，要眞正打好基礎，有兩個必經的過程，即“由薄到厚”和“由厚到薄”的過程。“由薄到厚”是學習、接受的過程，“由厚到薄”是消化、提煉的過程。譬如我們讀一本書，厚厚的一本，加上自己的注解，就愈讀愈厚，我們所知道的東西也就“由薄到厚”了。但是，這個過程主要是個接受和記憶的過程，“學”並不到此爲止，“懂”並不到此爲透。要眞正學會學懂還必須經過“由厚到薄”的過程，即把那些學到的東西，經過咀嚼、消化，融會貫通，提煉出關鍵性的問題來。我們常有這樣的體會：當你讀一本書或是看一叠資料的時候，如果對它們的內容和精神做到了深入鑽研，透徹了解，掌握了要點和關鍵，你就會感到這本書和這叠資料變薄了。這看起來你得到的東西似乎比以前少了，但實質上經過消化，變成精煉的東西了。不僅僅在量中兜圈子，而有質的提高了。只有經過消化提煉的過程，基礎才算是鞏固了，那麼，在這個基礎上再煉，那就不是普通的練功了；再唸書，那就不是一本一本往腦裏塞，而變成爲在原有的基礎上添上幾點新內容和新方法。經過“由薄到厚”和“由厚到薄”的過程，對所學的東西做到懂，徹底懂，經過消化的懂，我們的基礎就算是眞正的打好了。有了這個基礎，以後學習就可以大大加快。這個過程也體現了學習和科學研究上循序漸進的規律。

有人說，這樣踏踏實實、循序漸進，與雄心壯志、力爭上游的精神是否有矛盾呢？是不是要我們只搞基礎不攻尖端呢？我們說，踏踏實實，循序漸進地打好基礎，正是要實現雄心壯志，正是爲了攻尖端，攀高峯。不踏踏實實打好基礎能爬上尖端嗎？有時從表面上看好像是爬上去了，但實際上底子是空的。雄心壯志需要有步驟，一步步地，踏踏實實地去實現，一步一個脚印，不讓它有一步落空。

百感交相——Feeling for Math.

常聽到周遭人對數學抱怨、發問、談論，而本身也身在數學中的你（妳）或許也想分些別人的感觸吧！記得徐老先生“自摸”（自摩）輸大便是霉，故蒐集了全系（烏托邦的理想）的“非林”（ feeling ）讓同學們分享數學的美，也藉此讓大家做些心靈的交流。

每一個問題也許答案是嚴肅的、嬉笑怒駡的，但請放鬆心情，但好好的感受它，（尤其是從一題）或許你會因此而觸發一些感覺，你可以將它記下，可能在二十年後你的孩子有問題時可供作參考，或者百年後故宮也許將會珍藏起來。再不然投稿“師數”或“數靈”、“系訊”嗎！要不然寫在日記上佔佔篇幅嗎！

1　你覺得什麼“東西”是數學。希望你有千奇百怪的答案。

※ $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[k]{\dfrac{\ell^{2k}+[\ \ell gk\pi\ ]\ (\bmod\ 3)}{\int_0^k |\tan k|\ dx}} = ?$ ※

※標準美女的身材是肚臍到脚底的1.618倍，也就是黃金分割

※轉不成魔術方塊把它拆了※然後排列組合。

※如何塡卡使得筆友最多。※　猜選擇題答案。※　明牌。※

※公費調整。※　要不要相信今天的天氣預報呢？　※

※數學就是生活。※　簡單的東西用繁雜的證明。　※

※數學就是計算。※　Objeet and structures and Dperation　※

※就是一群無聊但智慧很高的人，設計的遊戲，不論如何細分，總有它的規則，愈聰明的人愈會。

※宇宙。※　賭博。※　爲了數物量能發展出來的學問。※

※煩惱的東西。※　Mathematic is trouble。　※

※凡是數學的東西就是數學，絕錯不了。※　“三角習題”。　※

※目前是讓國中生恨的牙癢癢的就是數學。※　邏輯推演。　※

※Math 者，仰之彌高，鑽之彌堅，忽焉在前，忽焉在後。前後左右，莫如東西南北中發白者也。※

※是一種“精算”事業加“奇妙空間”。※

※很 trivial 的東西，卻偏偏用 non-trivial 的東西去證明。※

※理論讀起來（洋）^{2}（灑）^{2}要用時卻搜索枯腸的愛恨交織的東西。※

※就是比實際的東西，用簡單的數演算出來。※

※外殼上看起來冷冰冰，但她一旦融入人類感情與感覺將散發出美麗的光芒，她的熱足以溫暖世界上每一顆受創的心。※

※與數量有關連的全部。※　不會說。※　令人又愛又怕的。※

※天天在用的“東西”。※　我看不懂的“東西”。※　以比重測定黃金純度。※

※具體又抽象。※　虛虛實實，實實虛虛，　字朦朧；理朦朧。※

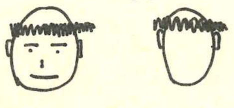
※不清的學問。※花錢買東西。※一些抽象的符號及觀念的集合。※

※一些令人難以想像的天才定理，天才證明。※

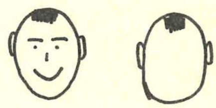
※使人頭痛的東西。※　“錢”的代名詞。※　數學：嗯………不是東西。※

※ Idon't know。※　就是讓你想得頭變成“地中海”

前　　後　　　　　　前　　後



or“孤島”



※Math 是種能使錢變得很多的東西。※　談玄。※　算錢。※

2. 你認為好的數學應具備什麼特質？

※趣味性、益智性、賭博性、藝術性&萬流歸宗的本質（怎麼算都對）。※

※ I don't know。※　※　？　※　易學；不太抽象，能激發腦力。※

※與生活週遭事物，感覺結合，容易使人了解親近，進而喜歡它。※

※眞、善、美。※　一看就懂，再看難以忘懷。※

※邏輯與幻想空間皆備。※　看似虛渺，實是分明。※

※造就"賭神"。※　應用廣泛或者能應用而產生高科技。※

※具一般性可與日常生活中的現象哲理相印證。※

※好用、耐用、實用、廣用。※　共通性、延展性。※

※簡單、深刻、易懂。※　簡明精確，平易近人。※　有系統。※

※當學習者對她絕望時，及時予他以一線生機，再度充滿希望。※

※敍述簡明、嚴謹，最重要是能令人感到其之所以被重視的理由。※

※使人覺得實在不白老一遭。※　有發展性。※　娛樂、趣味、賭博、變化。※

※以簡馭繁。※　特質？沒有概念。※　哲中學。※　完美無缺。※

※集所有美好形容詞於一身。※　簡單、清晰有創造性。※

※乍看之下不懂，再看還是不懂，考試後就懂了。怎看之下沒用，用看還是沒用，臭蓋時就用了。※

※你看，我有什麼特質？※沒有太多符號，繁鎖的文字敍述。※

※使人陷入一種不知的我的領域中。※

3. 在你經驗中哪些題材（Math）曾令你悸動？什麼數學才算漂亮（××定理、公設、架構，最好附帶說明。）

※不違背三不政策：不難懂、不難背、不難拿分數。※

※在排列組合中，算出來你在10年後還活著的機率是多少。※

※完整的證明讓人看得懂；又好像不懂。※

※簡單、清晰、內容深刻，如公費調整2219→2222，代數基本定理。※

※所學有限耶！※　？　※沒有。※　Never！※　no！※　無。※　不知道。※

※沒感覺。※　幾何。※

※Every group（G，·）is isomorphic to a subgroup of it's symmeteric group (S(G) , 。)※

※數學是一種美、一種藝術，在於擁有強烈動機和成就感的人才有的感覺，美在哪裏？在它的過程，那是種追求完美的喜悅和驕傲。可惜敝人所知有限。※

※數學歸納法，超限進歸。※ Math is never beautifal 。※

※悸動倒是沒有，都是小 case 。只要看得懂的，都很深究。例如：畢氏定理、尤拉公式………等。※

※忘了吔！大四了，年紀老得足以忘了它的存在。※

※只要 beautiful 就一定會悸動，而什麼算 berutiful ？

1.老師敍述的確實且生動且直趨Koy point 。

2.令我有一定程度的"感動"。※

※ Probabrlity ，Topology ※ 有趣。※ 所有數學都面目可憎。※

※ Set theory ;念了它，我才稍明的"數學"向以成一學門學門。※

※ $\ell_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\varepsilon} = +\infty$ ， $\ell_{\varepsilon \to 0-} \frac{1}{\varepsilon} = -\infty$ ε 任意接近。

相差些微卻有天壞之別！※

※只要是數學就 beautiful 。※ 黃金分割，尤其是人，美極了。※

※1 + 1 = 2 。※ 二元一次方程的標準化一經自己思考，錯誤嘗試，終於得出可能正確的結果，那種愉悅的心情，不可言喻。※

※ beautiful 的數學——別人不會，我會。哈！※

※畢氏定理——一個人本身條件（ a^2 ）＋外在因素（ b^2 ）＝身份地位（ c^2 ）※

4. 你想對數學 or 對他人說數學如何？（讚嘆！抱怨！諷刺皆可）

※學數學的神經都有問題。※

※數學是從最簡單的問題出發，研究到宇宙最深的哲理。※

※看似浩瀚無窮，

想似無限廣大，

學則不著邊際，

重要是一無用處。※

※　難　※

※只可遠觀不可褻玩，我要轉系！！※

※ I love you。※

※數學其實是一種蠻引人入勝的科目，有時陷溺進去，融入其中後便捨不得抽身（不過這種經驗不多）。只要肯在基礎上多下功夫，數學便可覺得輕鬆。※

※數學是一種令人難以了解的東西，我對你又愛又恨。※

※收斂，發散，$n \to \infty$　※

※數學難矣哉！※

※ $\lim_{n\to\infty}$（奇怪）^{n} ※

※莫名我就喜歡你，深深地愛上你，沒有理由沒有原因………。數學是門富深的學問，也可使用於生活中。（平鳳）大家一起來認識它吧！

太難了，非常人所能接受。

在我還未認識數學天地有多大的此時，我要感謝數學給我的一片心靈空間，雖說Gauss，Lagrange 等偉大數學家都已退居幕後，且吾所能做的，也不過是單純地將他人畢生心力轉化為自己能吸收的東西，但我所愛的，就是這份單純，這種無拘無束，不受外物干擾的心靈活動。

沒有清晰的頭腦，不要輕易嘗試，後果很痛苦。

太理論性了。

屬於天才唸的東西。

其實數學蠻有趣的。

大部分枯燥乏味，但仍有些部份蠻有趣或能幫助我們建立邏輯思考的方向。

數學！我對妳又愛又恨又痴又狂。

再研究，研究

數學有很多方面，最好早點弄清楚，自己想學什麼，乘早打算，眞的，畢

業前再想已經晚一步了！！

飽食終日無所事事，不有讀數學者乎，爲之猶賢乎哉。

數學眞是一門深入淺出，博大精深的學門。

唉！三聲無奈！七分感嘆！

改行！

仰之彌高，鑽之彌堅。

幹！

數學，唉！人在出生時，就幾乎已註定誰該學數學，就好像有人是運動天才一樣，各種球的敏感程度，常使同儕嘖嘖稱奇，又能怨嘆什麼呢？不過「勤能補拙」確實不可否認。

不好玩，因爲在研究數學時，從沒有想到糊塗。

唉！不予置評。

爲何要經過一長的痛苦歷程（如背證明）才能爬上數學殿堂的一小步，那不是普通人做得到的。

"三角習題"別人解不開。

喂！你很無聊哦！

清涼有勁，頭昏腦脹

　　高微、代數、幾何、拓樸　　吔！

數學呀數學　數學裡有個我　隨風飄過

從沒有找到眞正的我　一片白茫茫遙遠的數學

像霧般朦朧地掩住了我　我要隨風飄出數學

勇敢地走出那空虛寂寞。

傻瓜才念數學，下輩子我不能也不會再唸數學了！

對數學：一失足成千古恨，再回頭已百年身。

對別人：不要學了數學就忘了國文。（問卷調查不甚通暢，且有錯字含→含，讚→讚，曾→曾）

有數學觀念又方便實用，多好！

試前問助教，解答何處尋，

只在此世中，雲深不知處。

（試前眼朦朧，試後淚朦朧。）

話説從頭

編輯部

目前臺灣通行的期刊中在科學方面有，科學眼、牛頓、科學月刊。也曾刊過關於混沌、動力系統理論、碎形方面的文章，列舉如下供同學參考。

牛　　頓　　七十五年十一月第四三期

科學眼

(1)七十四年五月十三期　　　　神奇奧妙的流體世界

飛機機身穿越空氣所造成的氣流、水流，等這一些現象中的紊亂現現。

(2)七十四年七月第十五期　　　自然界的逸散結構

介紹了自然界中的混沌現象。

(3)七十四年八月第十六期　　　實驗數學的新效用

科學月刊

(1)七十八年五月第二〇卷第五期　亂中有序談混沌力學

(2)七十四年十月第十六卷第十期　碎形先鋒

(3)七十五年三月第十七卷第三期　什麼是碎形學

(4)七十八年五月第二〇卷第五期　從碎形幾何導向新的熱理論

另外在，物理會刊，一九八九年，十一卷，二期，也有一篇碎形學（Fractal）其中對碎形學做了基本的介紹。

以上介紹了一些通俗性的文章供同學參考，在底下我們將盡量以圖示的方法，介紹一些〝東西〞以供同學們走馬看花之用。各位看倌，咱們看下去吧！

卷首

釋意：

Fractal：

碎形是Mandelbrol所定義的 。當n維直角坐標空間內的點集的幾何維數（恆爲非負整數）小於它的測量維數時，此種點集即稱爲碎形。它是由fract和al兩個字根造出來的。 fract可以是fraction（非理數）或fracture（破裂），al是物體之意，例如mortal 。（＊讀者可參考凡異出版的殘形一書）。

State ， state space

在物理系統中 state指在特定時間t時資料（ imformation ）一般在牛頓力學體系中所用的state指質點在某時刻的位置及速度。而 state space指所有state所成的集合。如在牛頓力學系統中的state space爲$R^3 \times R^3$的點對（X，U）X表示位置，U表示速度。

Dynamical system ， Discrete dynamical system

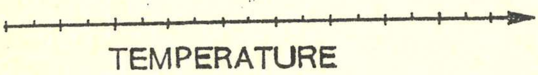
籠統的說動力系統是在空間δ中所有的在特定時刻的信息描述。。而其嚴格的數學定義是：

ϕ是一個C^1映射 ，$\phi : R \times \delta \to \delta$ ，此處δ是歐氏空間中的開集，將$\phi(t, x)$記成$\phi_t(x)$，而$\phi_t : \delta \to \delta$滿足

(1) $\phi_o : \delta \to \delta$是單位映射（ identity ）

(2) $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s} \quad \forall \quad s, t \in R$，。是合成運算

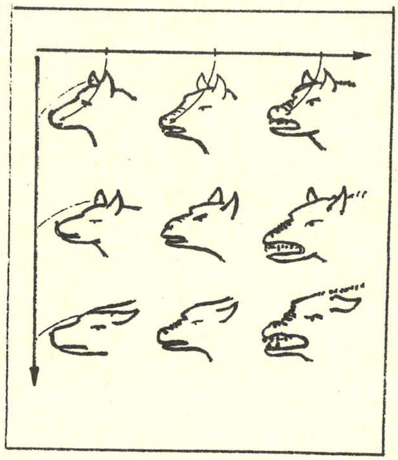
而令 $f(x) = \frac{d}{dt} \phi_t(x) \mid_{t=0}$ 那麼方程$x = f(x)$的解$x(t) = \phi_t(x_o)$，$x(o) = x_o$因此每一個動力系統都定義了一個微分方程。當取得特定的時刻t_1，t_2，…………，t_n，……時便是變成了離散的情形。

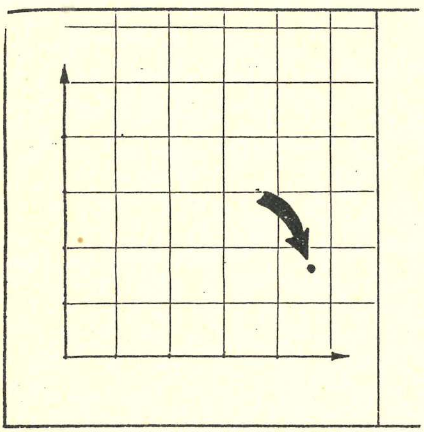


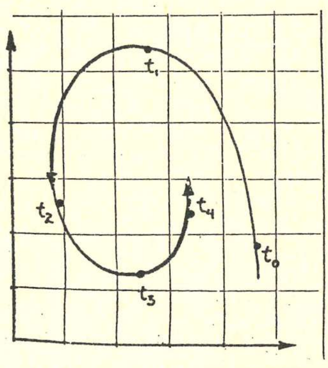
在此例中狀態（ state ）空間爲一實數線，這是最簡單的狀態空間之一。

這是具有兩個參數的狀態空間，其中一個參數是耳朵的生長情形另一個則是尖牙的暴露程度。

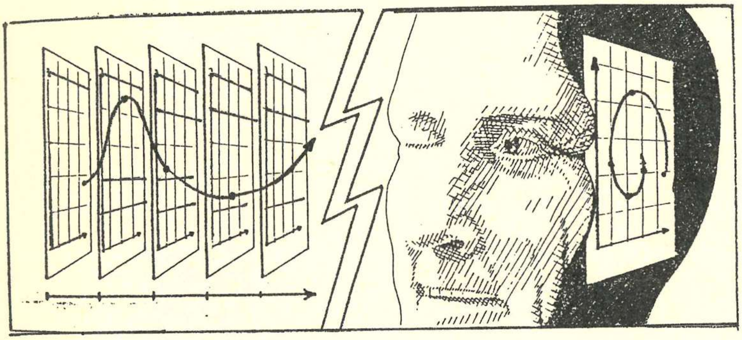
空間中的一點就表示了某一時刻的「狀態」。



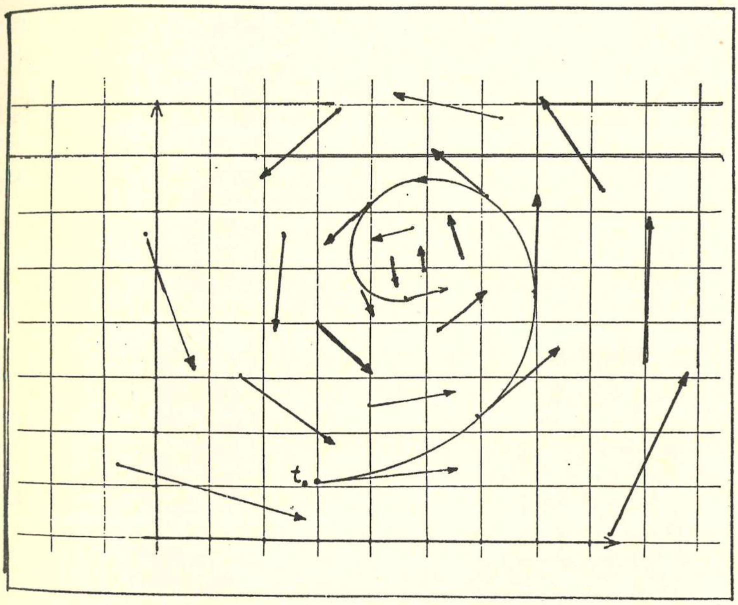




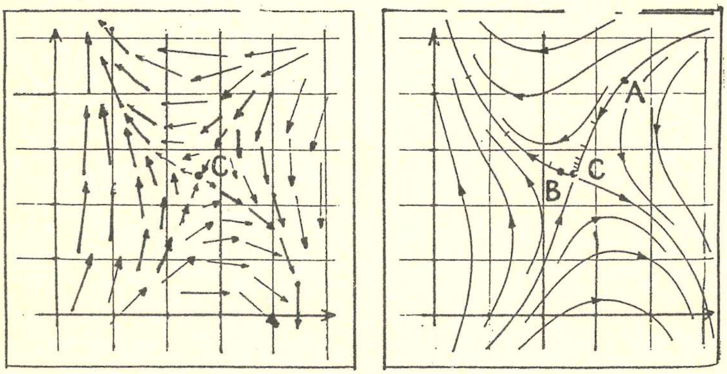
狀態空間中的點隨著時間的運動軌道稱爲軌跡（ trajectory ）或軌線



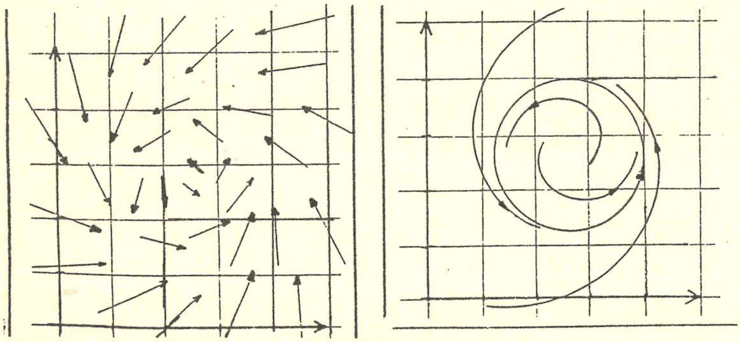
這是將狀態空間中的軌線，加以時間軸的描繪，所想像的圖形。

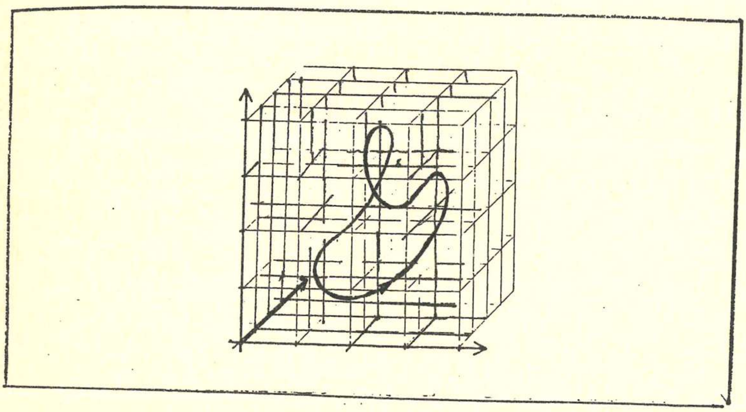


給定一個狀態空間及動力系統（平滑向量場），假如有一曲線其上每一點的切向量恰為該向量場所給定在該點處的速度向量，那麼，該曲線便是所謂的軌線或積分曲線。

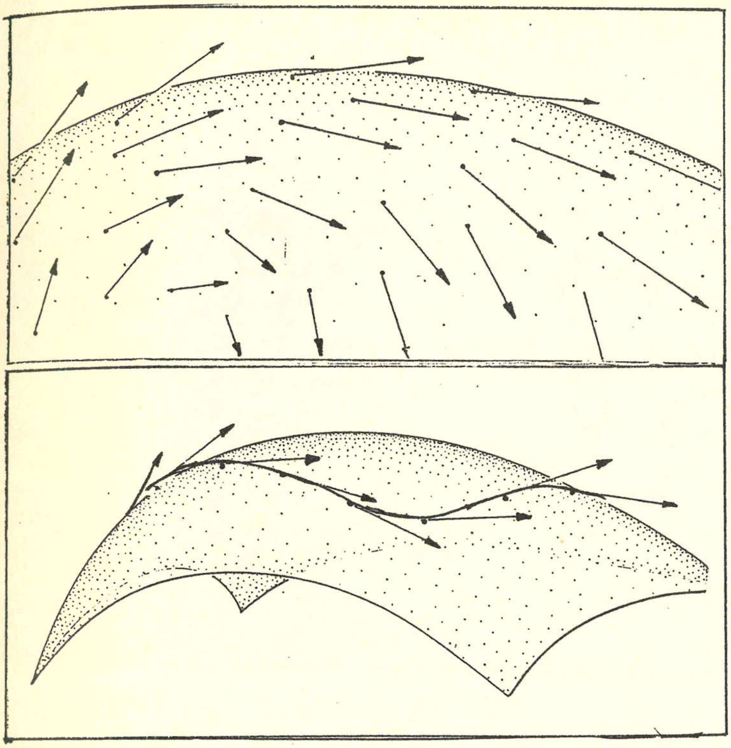


這裏是兩個關於動力系統，及軌跡的描繪例子





這是在3D空間中一個封閉的週期軌道。



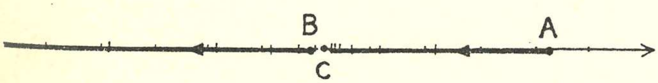
有時狀態空間可能是平滑的曲面，如左邊兩圖，是平滑面上的向量場及軌線。

極限集

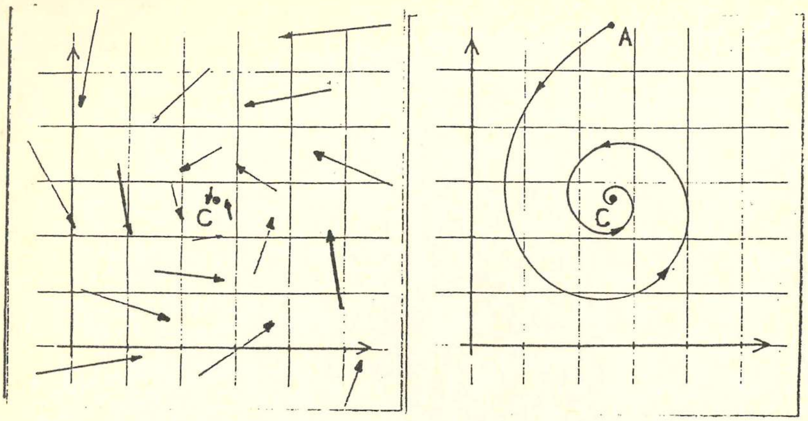
一個狀態隨著時間變化的最終狀態或最原始狀態，記成 L_ω 或 L_α。

$L_{\omega}(x) = \{ y \in w \mid \lim_{n \to \infty} \phi_{t_n}(x) = y \}$ $t_n < t_{n+1}$，$t_n \to \infty$，$\phi_t(x_0)$ 是以 x_0 為初始值的軌跡在時刻 t 時的狀態。同法 $t_n > t_{n+1}$ $t_n \to -\infty$ 時定義 $L_\alpha(x)$。

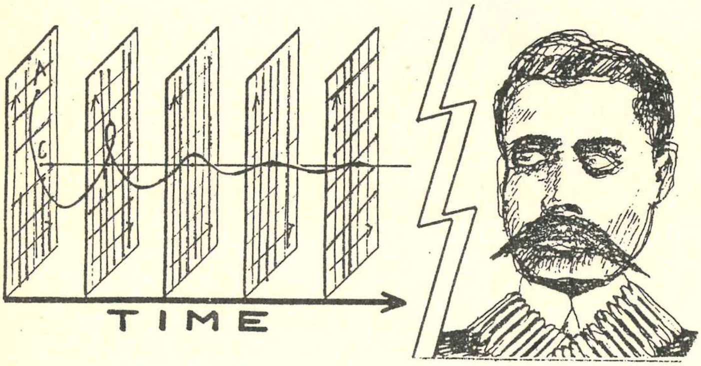
$\because \omega$ 是希臘字母中最後一字，而 α 是希臘字母的第一字，L 是 ℓimct 的縮寫。



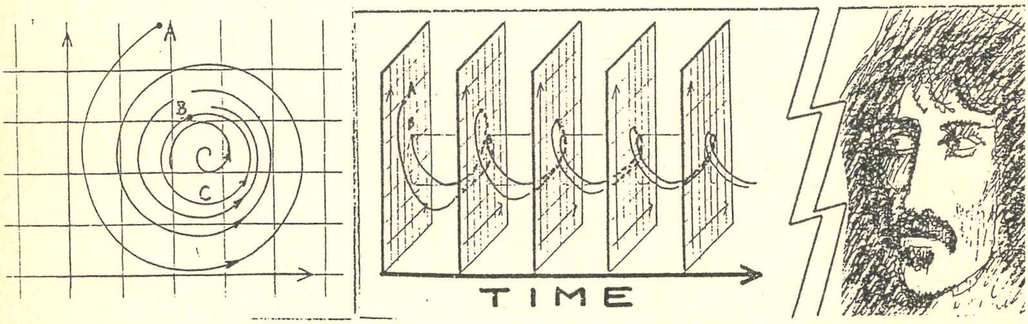
一維的情形，如左圖中 C 點變是極限點。

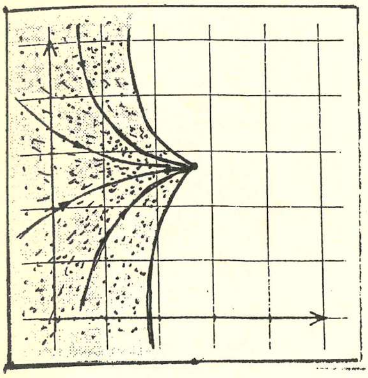


二維極限點例。

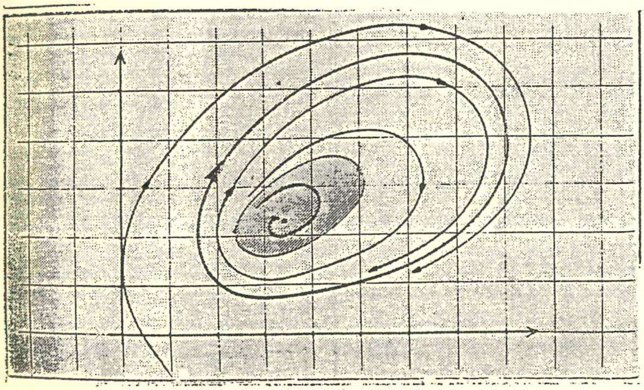


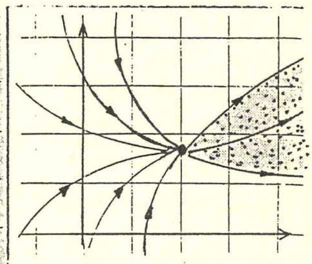
有時極限集可能是個環（ cycle ）如下圖



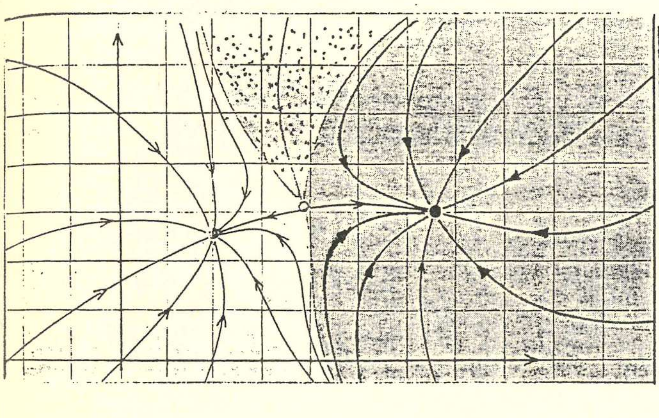


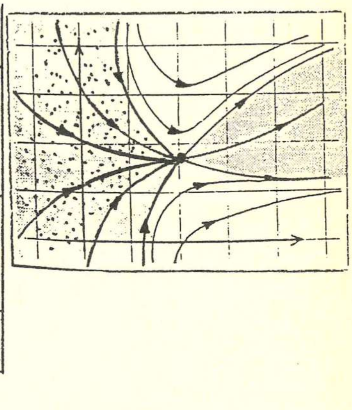
當我們啓動一個實驗裝置後，我們會經過一些不規律性的過濾狀態（稱之爲 start-up 轉換）逐漸轉變到穩定的動態平衡（亦包括靜態）這裏列舉了二維的吸引子，然而二維的概念却仍可推廣到其它維度。在 start-up 轉換終止後，所有會終止在平衡態（極限集）的初值點構成了所謂的 in set。





上圖中的點是陰影部份的 α—極限點





吸引子是有一個 open inset 的極限集。即當 inset 是其極限集的開鄰域時該 inset 便稱之 open inset。吸引子的 inset 又叫盆(basin)。通常一個系統中不只有一個吸引子，所以相位空間，將會被分成不同的盆，分割邊界就稱爲 separatrix，即盆以外的所有點。

給定常係數的線性微分方程組：

$$\frac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{nn}x_n$$

改寫成

$$\frac{dx}{dt}=Ax(t) \qquad A=(a_{ij})_{n\times n} \qquad x=(x_1(t),\cdots,x_n(t))$$

看看 2 維的情形

$$\frac{dx}{dt}=Ax(t) \quad , \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$D(\lambda)=\det(A-\lambda I)$ 的兩個根 λ_1 , λ_2

(一) λ_1 , λ_2 是兩實根，則可以找到 P，2×2 可逆方陣使得

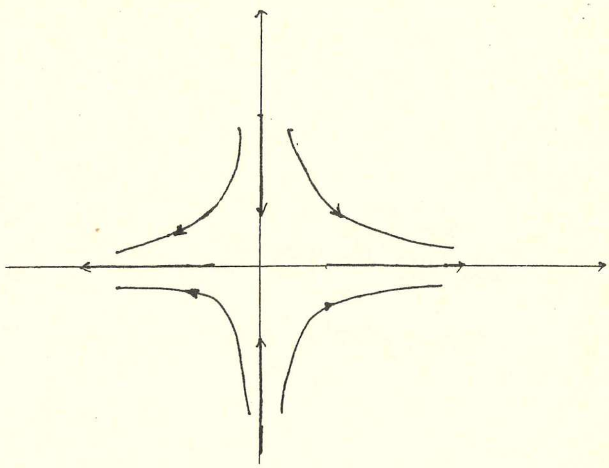
$PAP^{-1}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$，此時做一個轉換 $x'=P^{-1}x$

(1)就變成

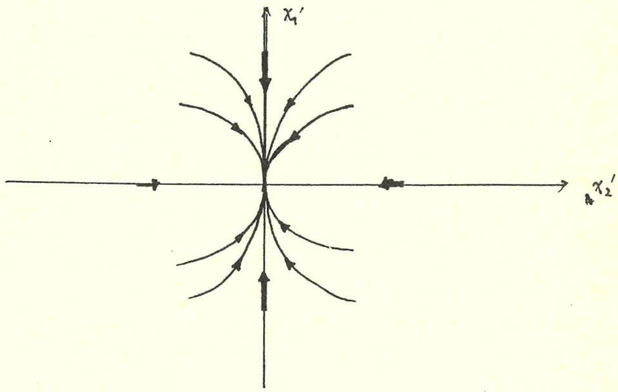
$$\frac{dx'}{dt}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} x' \qquad (2)$$

即 $\begin{cases} \dfrac{dx_1'}{dt}=\lambda_1 x_1^1 \\ \dfrac{dx_2'}{dt}=\lambda_2 x_2' \end{cases}$ 解爲 $\begin{cases} x_1'(t)=e^{t\lambda_1}x_2'(0) \\ x_2'(t)=e^{t\lambda_2}x_2'(0) \end{cases}$

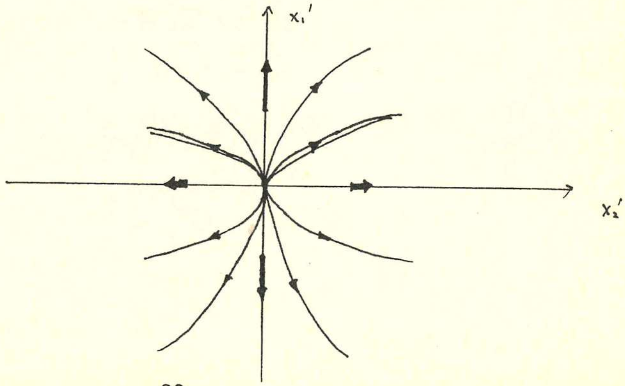
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ 時



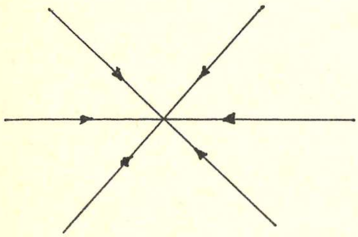
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ 時

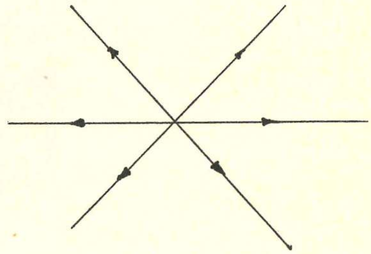


$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ 時

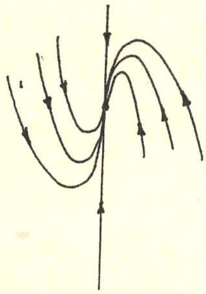


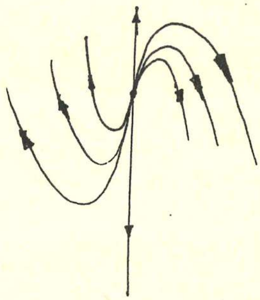
$\lambda_1=\lambda_2<0 \quad PAP^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ $\lambda_1=\lambda_2>0 \quad PAP^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$





$\lambda_1=\lambda_2<0 \quad PAP^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 1 & \lambda_2\end{pmatrix}$ $\lambda_1=\lambda_2>0 \quad PAP^{-}{}_{1}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 1 & \lambda_2\end{pmatrix}$

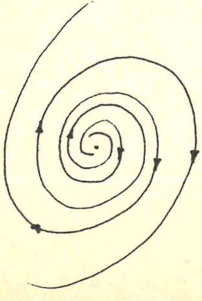


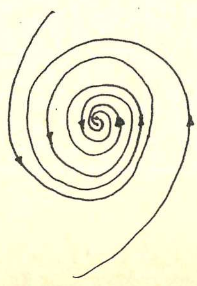


㈡λ_1，λ_2為虛根的情形，那麼可找到方陣P（可逆）使得

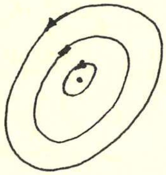
$$PAP^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda & -\mu\\ \mu & \lambda\end{pmatrix} x'(t),\ x'(t)=P^{-1}x(t)$$

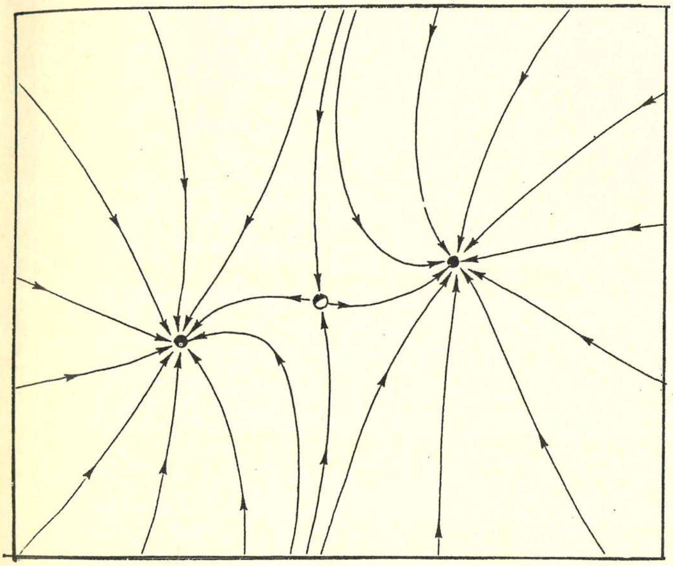
$\lambda,\ \mu>0$ 時 $\lambda<0<\mu$

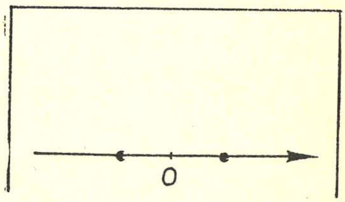


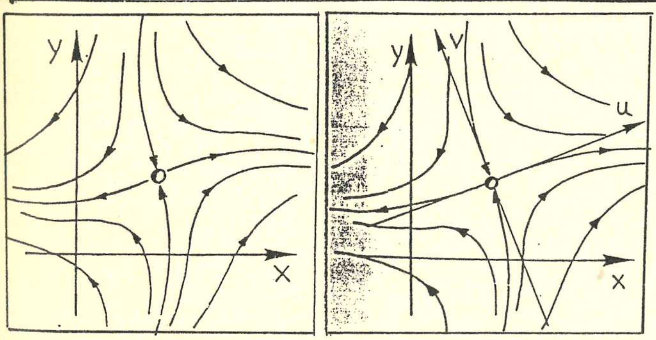


$\lambda = 0$ ，$\mu > 0$ 時





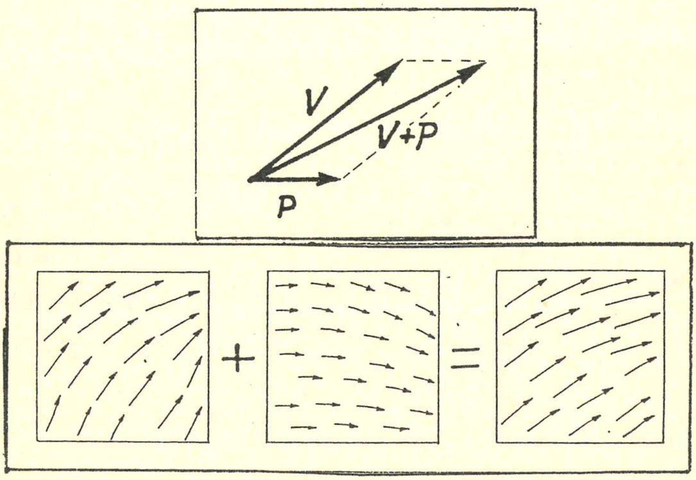




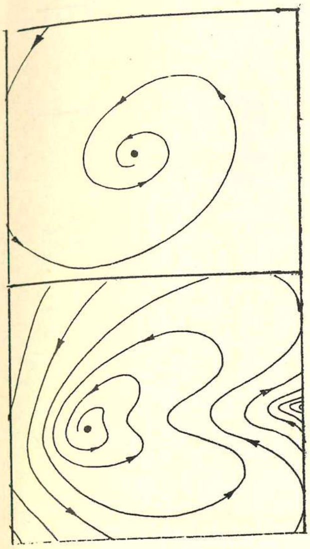
特徵指數（ charactevistic exponents ）標示圖，特徵指數在線性系統中如同上述的特徵根 λ_1，λ_2 。

Structural Stabilify

在動力學的數學理論中，有一個重要的概念：結構的穩定性。當一"強的"向量場被擾動時，系統的某一些特徵仍將保持不變。

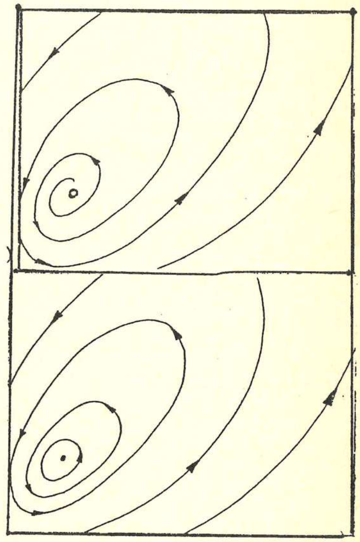


①，②是同一組
③，④亦是
從①到②經過連續的變形所以是否拓樸等價。(topological equivalent)但③與④則不是。



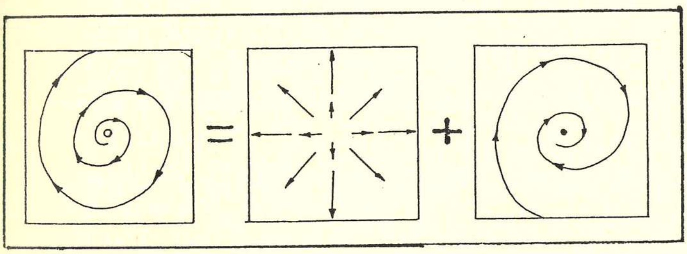
①

②

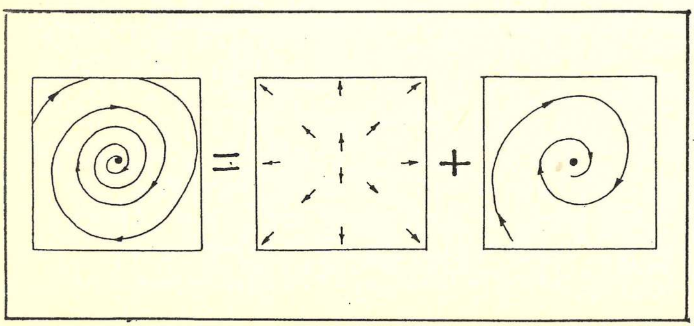


③

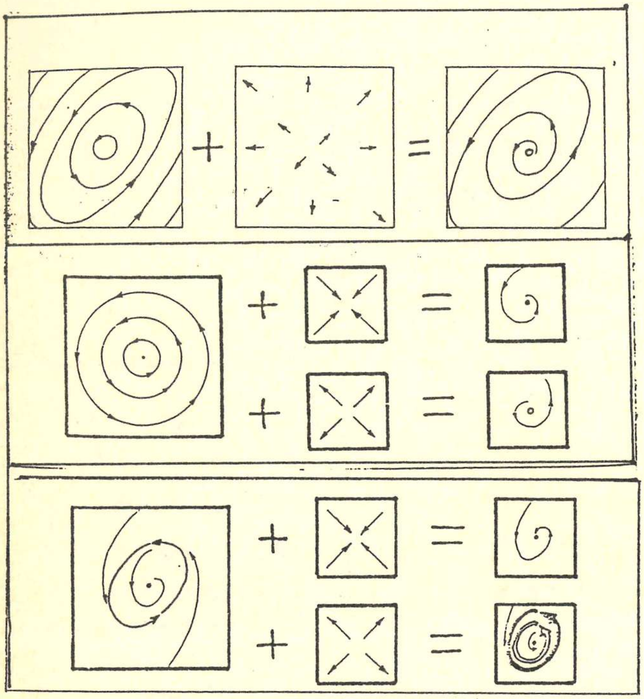
④

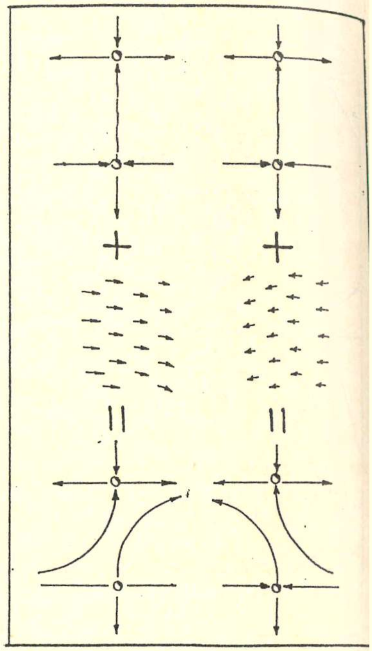


一個"弱的"螺旋向量場，遇上一"強的"擾動，結果螺旋向外。失去了原先向心的特徵。



一個"強的"螺旋向心場，遇上一"弱的"擾動，結果特徵不變。





亂相中的規則

作者：陳文典

—感謝物理系陳文典老師的幫忙—

渾沌現象（ chaotic phenomena ）是八〇年代統計物理學研究的熱門主題。一個動力學系統若含有非線性的作用機制，經常引發出極繁複的演化行為，拜近年計算機的功能的發揮，使這類的問題得以利用計算機作模擬實驗，藉以探測它的行為模式。具有相同數學特性的問題，不只發生在物理現象，實際上生物、化學、醫學、經濟、政治……等各方面都有，所以與其說它是一個「新」的研究領域，更確切的說應是更面對「眞實問題」的研究嘗試。這類問題的探討有專門形成一門學問的趨勢，稱之為 Synergetics（總相學）。由數學的角度視之則是同一的，唯落相到不同的科學領域而已。

一、引　言

當我們面對一個情境（ or 稱一個系統）時，想著手去研究它時第一步就是設法去描述此一系統。這兒所謂「描述」包括，如何去界定系統的各「屬性」名稱，如何評斷那一屬性在當階段的演變是處於主導地位或是次要地位，其次，進一步的去探測屬性的改變，對系統的影響，以及探測屬性間的相關關係。例如描述一容器內的氣體系統，則溫度、壓力、體積乃是描述的變數，而比熱，可壓縮性乃是該氣體的屬性，由改變變數來探測屬性，也可由屬性來探測變數間的相關性質。

由於能力所限，一般研究一個系統都是以限定的某時某一情境為前提，探討鄰近時空情境的微變情形為限。例如要研究一杯熱茶的冷熱變化，設茶的現狀以 $|\Psi>$ 符號來表示，茶水的質量 m，水溫 t，室溫 t_r，茶杯質料及

形狀G，大氣中的水蒸氣壓V_r，風吹手握等，次要的干擾因素X_1，X_2……等，爲了避免文字的繁瑣，以符號表示即

$$< m , t , t_r , G , V_r ; X_1 , X_2 \cdots\cdots \mid \Psi >$$

或寫成Ψ（m，t，t_r，G，V_r；X_1，X_2…）。若略去次要因素，把X當成控制變因固定之，則狀態簡化成Ψ（m，t，t_r，G，V_r）。若是針對某一杯水的此時此地情境來研究，把水量m，茶杯G及室內水蒸氣壓V_r，當成參數，溫差$x = t - t_r$ 爲水溫冷却的主要變因，於是，以此杯水的溫度變化爲唯一考慮的變因，簡化成$\Psi(x)$，其中m，G，V_r均視爲固定參數。更進一步的，我們這一研究中，溫度也是有局限的，約在100℃到室溫20℃之間若是我們把情境設在100℃左右，則因水正處於沸騰的氣相與液相轉換之際，情況將大大的不同，或是處於0℃附近則也是因爲熔解或凝固而使$\Psi(x)$呈現很不同的性質。要是我們暫且擱下這種敏感的情境，把研究情境限制在狀態變化很平均的情況下（套一句數學人的話，$\Psi(x)$爲可微分函數），我們約略可以得到這杯水溫度變化的情況爲：

$$-\frac{\triangle x}{\triangle t} \propto x \quad 或 \quad x = x_0 e^{-\alpha t}$$

其中t爲時間，$\alpha = \alpha$（m，G，V_r）爲參數，x爲溫差$t - t_r$。這是我們在一般熱力學上所探討的設限題目；「以某特定情境爲基準，當系統的變化均勻時，對變因做微量的擾變，看系統的變化性質爲何？藉此來探討系統的各種屬性」。這類在限制情境下所得到的系統之屬性變化，規則性的知識累積，以及由這些知識歸納和形成的理論，可稱之爲「線性現象論」的熱力學。

若是情境很特殊地，剛剛處之於「突變」的節骨眼，系統的變化雖不再「均勻」但是仍不離由A相轉換到B相的範疇，這類的演變可稱之爲「相轉換現象」。可想而知，在此情境的狀態函數$\Psi(x)$ 是「不可微分」的函數。不過，經過近年的努力（尤其是一九七〇～一九八〇年間再歸元理論的提出展拓及應用）物理學家對熱的相轉換現象，都已有相當的了解了。

另外，有一種突變的情境（或強調的說是「劇變」），則是一個系統演

化到最後可能是一發不可收拾的爆炸或混亂，或是進入一個多狀態的輪替更換，或是在某一領域裡做不可預測的變換。諸如此類的系統演變，往往所涉及的變因其對系統的影響是非線性的，而演變實況的複雜性，也非單純地從函數 $\Psi_{(x)}$ 或其動力學方程式作分析可以得知。目前這類系統的研究，大半藉助計算機的模擬實驗，再由此實驗所顯示的現象，導引分析的思維。

1980 年後，這類非線性的動力學系統，以其複雜或幾近混亂不可預測的演變過程，確實吸引了許多研究者。當然，若是一個系統的演變毫無規則性，則也無從研究起。所以有關系劇變下演變的規則性探討，以及對引發這些規則的機制之內涵理論，成為近年統計物理的研究主題。這類演變現象統稱為渾沌現象（ Chaotic phenomena ）。

二、渾沌現象

我們說一個情境渾沌，意是混亂，不可預測，看不出規章。當然，若是一個系統的演化毫無規則性，則也無從研究起。所以，這類問題研究的主旨，在於「亂中有序」並探討這些「序」和「動力變因」之間的因果關係。

1978年Mitchell J. Feigenboum 在統計物理期刊上發表了一篇非線性，回遞差分方程式的系統演化行為之探討。

$$X_{n+1} = X \quad \lambda \quad X_n (1 - X_n)$$

其中 λ 參數在〔 0 ～ 4 〕域，而X在〔 0 ～ 1 〕間。在這「簡單」的方程式 $X_{n+1} = f (x_n ; \lambda)$ 之中，他發現給定一個 λ 值，不管始值 x_0 為何，演變到最後，x 值與 x_0 值無關。而當參數 λ 增加時，終極的 x 狀態的應變是有規則性的：

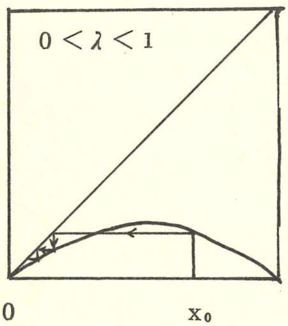
• 當 $0 < x < 1$ 時

不管起始 x_0 在〔 0 ， 1 〕之間的那一個值，演變到最後 x 必為零。這表示系統有一穩定的瑣解 0（見圖一）。

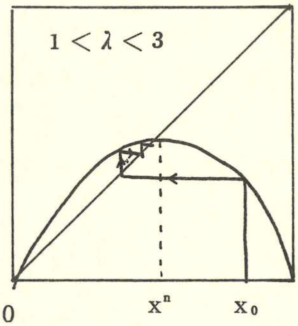
• 當 $1 < x < 3$ 時

在 $\lambda = 1$ 之後，0 解變為不穩定解，而另有 $x^* = \frac{x-1}{x}$ 之穩定終結解，

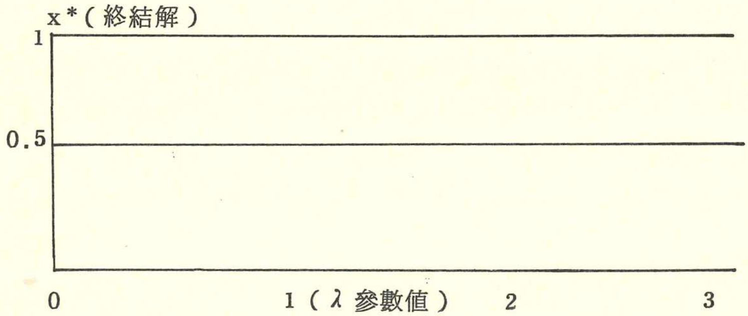
一切原始的 x_0，演變則最後都落到 x^*（見圖二）（見圖三）。



（圖一）



（圖二）



（三）

• 當 $3 < \lambda < 4$ 時

在 $\lambda = 3$ 之後 $x^* = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}$ 變成不穩定解，

而穩定終結解不再是唯一的，而是隨著 x 的增加，作 2，2^2，2^3，……2^m……週期性的由（$x_1{}^*$，$x_1{}^*$……$x_{2^m}{}^*$）交替變換，直到 $\lambda = 3.5700$（見圖四）

圖四中，$3 < \lambda < x_1$ 域中任一 x 值，使 $x_{n+1} = f(x_n; \lambda)$ 演變到最後必

落入（ $x_1^*(\lambda)$ ， $x_2^*(\lambda)$ ）兩值，且是交替出現的，在 $\lambda_1 < \lambda' < \lambda_2$ 域中任一 λ' 值，演變到最後必落入（ $x_1^*(\lambda^1)$ ， $x_2^*(\lambda^1)$ ， $x_3^*(\lambda^1)$ ， $x_4^*(\lambda^1)$ ）四值，且是交替出現的（見圖五），依次類推當 λ 增加時，圖四分叉愈多，當 λ_n

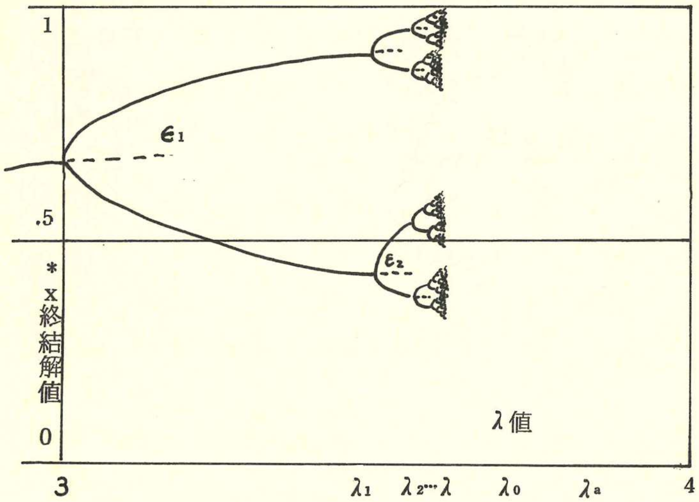


圖　四

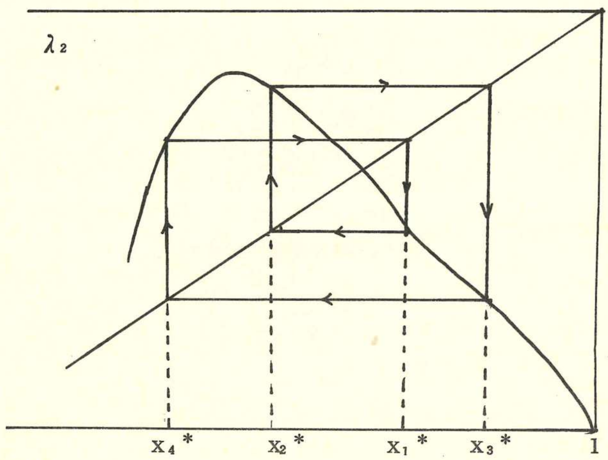


圖　五

$\lambda_n < \lambda < \lambda_{n+1}$ 時，系統最後在固定的 2^n 點在週期性輪換的出現。Feig - enbaum 由此發現了一個通則：

【通則 1】參數在 $3 < \lambda < \lambda_\infty$ 之間由漸增而引發的二分叉的末態週期演化，設 λ_n 爲呈現 2^n 週期性變化之最大值，則 λ_1 ，λ_2 ……間有比例規則性其比值 8 爲：

$$\delta = \lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 4.6692016091 \cdots\cdots$$

同時，若我們取 $3 < \lambda < \lambda_1$ ，$\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ ，$\lambda_2 < \lambda < \lambda_3$ ……（見圖四，所引發的終結解來看，其「圖形」具有「自我相似性」，若我們隨意的選取和 $x = 0.5$ 交叉的分叉圖來比較（圖四），定義∈爲分叉圖上兩終結解之差（即分叉的寬度），則 Feigenbaum 發現另一通則，即

【通則 2】終結解的分叉衍化，具有自我相似性，若將次階分叉圖形放大 α 倍，則與前階分叉圖形相同比值 α 爲

$$\alpha = \lim \left| \in_n / \in_{n+1} \right| = 2.5029078751 \cdots\cdots$$

以以兩個通則顯示 $x_{n+1} = f(x_n ; \lambda)$ 在趨向渾沌的過程中，參數 λ 與終結狀態，$\{x_i\}$ 具有複雜但準確的規則性，如此重大的突破性發現，打開了非線性動力系統研究的另一扇門。

若是 x 超過 3.5700 ……，終結解 $\{x_i\}$ 週期性變化仍在，唯情況特殊在 $\lambda_c = 1 + \sqrt{8}$ 時，$x_{n+1} = f(x_n ; \lambda_c)$ 呈現了奇數終結解（x_1^*，x_2^*，x_3^*）的週期變化解，若我們用 $x_{n+3} = f(f(f(x_n ; \lambda_c), \lambda_c), \lambda_c)$ 在作圖（圖六），且研討 $\lambda - \lambda_c = \triangle$ 而△很小時的系統演化過 程（圖七），顯示了系統在邅向另外一個巨變（Catas trophy）前先進入 一個「擬穩態」的狀態。若 $\triangle \to 0$ ，這一擬穩定狀態留駐得愈久這種趨向災變的模式稱爲「暫穩型」演化（ intermittency):

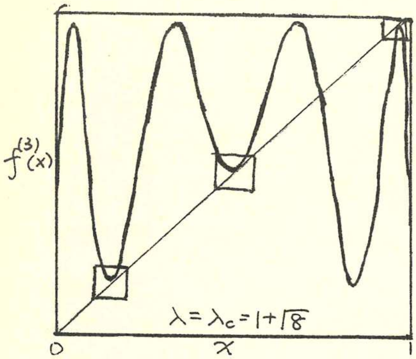


圖　六

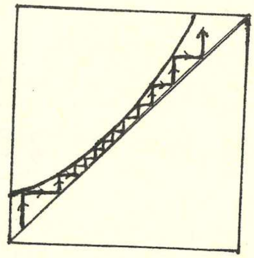


圖　七

系統在$\lambda=4$時演變是完全的渾沌在x〔0，1〕間出現的機率雖不均勻但却是連續性的機率密度。

$$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

由這一「簡單」系統的演變行爲，其內藏的漁變行爲是如此的豐富而規則，這是不可能單純由$\lambda x(1-x)$的函數去分析得之的，另外，尙由其他多種系統的硏究歸納演變的情形，獲得一個概念。

【概念】一系統演變成渾沌狀態的過程有多種，如雙分叉衍變，(period doubling bifurcation)，暫穩型漸變(infermifency)，Hopf bi bifouration 等。

這一敍述在說明其演變過程並非隨意而毫無章法，而其演變型式則羅列可能未全。

三、吸引區的碎形結構

一個系統「可允許的」存在狀態分佈在相空間R中(例如$x_{n+1}=\lambda x_n(1-x_n)$的R爲〔0～1〕，但是，在某一特定$\lambda$值之下，系統演變到終結可能僅落到某一特定的(例如$1<\lambda<3$之下，$x^*=\frac{\lambda-1}{\lambda}$)，

或某些特定的狀態，合終結狀態的集合S，則S⊆R。

即使在完全渾沌的情況下，分佈在R域內的機率也不均勻，而且呈現一些空間分佈上的結構。這些終結解稱之爲吸引子（ attrators ），研究它們在相空間的分佈及時間上的相關分佈在統計上具有極大價值。

在統計物理理論上，系集理論有一基本的假設：「一個孤立熱力等系統Ψ（ P（壓力），T（過度）……），其N個粒子狀態可符合此一熱力系參數P、T……條件之下的狀態組成一相空間R，任一微觀狀態發生的機率均相等」。此一假設在非線性動力等系系統研究的發現後，令人不敢再存信賴。

由此吸引子並不函蓋全部R域及分佈不均的發現，引發幾個問題。

1.要如何建構一有效的語言，來描述碎形幾何結構。

2.系統的碎形幾何分佈在統計上如何再評估。

3.動力學機制與這些碎形結構之間的相關性如何。

由渾沌現象引發的碎形幾何也成爲一門令人興奮的問題，人們發現這一共具的數學通性，原本存在於大自然界中，而且是最傳眞的，反而一般大家所熟知的連續均勻的幾何體是簡化的，特殊的事例。

結　　論

本文是介紹性的文章，目的僅是介紹晚近（一九八〇年後）非線性動力系系統的研究引發的許多有趣而令人深省的問題，至於非線性動力系系統蘊藏的豐富內在結構如何，目前僅可說是曙光一露。它將在未來的世代裡成爲研究的重要課題是必然的。更何況我們不是正處於一個渾沌或將渾沌的進動環境和時代中嗎？心理上的呼應將吸引更多的人投入此一研究領域中。

渾沌與亂流

自從 Reynolds 1883 年發表了他的著名實驗[1]以來，層流向湍流的轉捩一直是流體力學探索的一個基本問題， 1971 年，Ruelle 和 Takens[2]提出湍流可能用奇怪吸引子解釋，引起人們對渾沌（ chaos ）和湍流之間的關係的興趣。這方面系統的介紹可見專著（3），（4）。1983 年國際理論和應用力學聯合會（ IUTAM ）在日本京都召開流體中湍流和和渾沌的討論會， 1984 年又在蘇聯新西伯利亞召開第二次層流－湍流轉捩的討論會[3]，這裏介紹渾沌理論對於闡明湍流機理可能有某些幫助。

1.非線性動力學系統理論和轉捩理論在歷史上的聯系

1929 年，Andronov[6] 指出物理（廣義的，可指自然、工程、社會）上的自激振動是和數學上的極限環相關係的。極限環的最簡單例子是二維系統 $d\rho^2/dt=\rho^2(a^2-\rho^2)$，$d\varphi/dt=\omega$，其中 ρ，φ 是極座標；這個系統有一個穩定的極限環 $\rho=a$，對應於物理上出現持久的振幅為有限值 a，頻率為 ω 的振盪過程。線性理論只能說明平衡態的不穩定性，而這種非線性理論進一步說明失穩後可能有持久振動。 1944 年，Landau 提出一種湍流發生的模型[7]，認為流動中平衡態失穩後，不斷地產出各種頻率的自動振盪。如果這種頻率個數無限多，而且又互相不可通約，就導致湍流。從 Landau 指出的振幅方程 $d|A|^2/dt=\alpha|A|^2+\beta|A|^4$（$\alpha$，$\beta$ 為常量）的形式也可看出它和自激振動理論之間的關係。1963 年，Lorenz[8] 給出第一個渾沌模型；即 $dx/dt=-10x+10y$，$dy/dt=28x-y-xz$

，$dz/dt=-8z/3+xy$，它的解最終都趨向於一個時大時小貌似無規則的非周期性解。這個例子揭示了三維系統不同於二維系統，它的定常解（數學上的吸引子）除了熟知的平衡態（不動點）、周期解（極限環）外，還可能是渾沌態（奇怪吸引子）。正是在這種新的認識基礎上，Ruelle和Takens[2] 才提出，湍流的發生可能並非象 Landau 模型那樣，而直接表現爲系統中出現一個低維的奇怪吸引子，不妨把這個歷史過程寫成一個“式子”：Andronov（1929）比Landau（1944）等於Lorenz（1963）比Ruelle＋Takens（1971）。

連續介質力學或者高維的力學中，往往吸收簡單動力學體系中的一些概念和結果，渾沌理論原是非線性振動理論的續篇，它遲早也會在各種流動的轉捩機理中得到應用。

2.流動的流體是一個高維的動力學系統

動力學系統（ dynamical system ）也可說是一種演化過程，即系統的將來狀態由當前的狀態所確定。由牛頓運動定律支配的經典力學當然是動力學系統，其他如生態、化學反應、物價等問題，也可能用動力學系統（動態系統）作解釋。這種系統通常用常微分方程組 $dx/dt=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 來表示，$\boldsymbol{x}$ 是向量，表示系統的狀態，有時也可用另一種數學模型　　映射來表示：$\boldsymbol{x}_{n+1}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_n)$，其中$n=0,1,2,\cdots$　，是離散的時間。有些常微分方程組可變換爲映射來研究。上述 Lorenz 方程中，可取平面｜$z=27$　，設積分軌線由上而下穿過這平面的點座標是（x_n，y_n），於是同一軌線下一次再由上而下穿過這平面的點（x_{n+1}，y_{n+1}）將是（x_n，y_n）的確定函數，從而一個三維的常微分方程組變換成爲一個二維的映射。這種辦法在渾沌理論中稱爲取 Poincaré 截面。當前，一維映射的性質已大致清楚，但對二維映射（對應於三維常微分方程組）的一般性質，還不清楚。

流體的流動方程由動力學規律和本構關係確定，因而也是一個動力學系統，但這種系統的維數極高，粗糙些說，一維流動是 ∞^1 維，而二維的流動將是 ∞^2 維，等等；即流動不僅有隨時間的變化，還有空間上的分布。有關

的數學式子是偏微分方程組而不是常微分方程組。因此，用低維動力學系統的渾沌理論來解釋高維的流動，自然還存在著困難和疑問。

3.渾沌是動力學系統可能的一種定常狀態

以往人們只熟悉兩種定常狀態：平衡態和周期運動。稍後，還注意到概周期過程，例如 $\sin t+\sin(\sqrt{2}t)$ ，但它可認爲是幾種周期過程的疊加，Landau 模型也屬於此。渾沌則是現在認識到的另一種定常狀態，有些確定性系統的解具有對於初值的敏感依賴性，由於在實驗或計算中初值不可能無限精確，初始信息隨著運動（或計算）又會逐漸喪失，其後果使系統表現爲具有內在的隨機性，長期運動是貌似隨機的，這種過程類似於平穩隨機過程，不同的是渾沌雖長期不可預測，在短期內則是可預測的，等同於計算機中的僞隨機數序列，渾沌不是一種暫態，而是一種定態。在物理（廣義的）上能被觀察到的渾沌必然是（在某種意義上）穩定的，它不因爲系統參量的微小變化而發生運動性態的根本變化。這種穩定性往往和物理上的耗散性（在流體中起源於流體的粘性）有關，渾沌對應於數學上吸引的“奇怪不變集合”，即奇怪吸引子（在保守系統的渾沌中沒有奇怪吸引子），正如平衡態和周期解也只有在穩定的情況下才能在物理上觀測到，在實驗或計算中可重複實現。

確定性系統中之所以出現渾沌定態，其關鍵在於非線性。最簡單的一維非線性映射中就可以出現渾沌，例如 $x_{n+1}=2x_n \pmod 1$，$0\leqslant x_0<1$。這個系統可說是“處處”不穩定（特征值爲 2，任意微小的誤差每迭代一次就增大到兩倍），但在整體上又被框住（ x_n 在 0，1 之間），所有周期解都不穩定，唯一的出路是渾沌這種定態，從這樣的觀點看來，如果從 Navier - Stokes 方程 $\partial v/\partial t+(v\cdot\nabla)v=-\nabla p/\rho+f+\nu\Delta v$ 出發分析流體運動，湍流（如當作渾沌的話）起源於非線性項 $(v\cdot\nabla)v$。

渾沌理論的出現，溝通了經典的分析力學和機率論的統計力學，說明了由確定性向隨機性的過度。如果說，確定性的分析方法適用於層流，而統計方法適用於已充分發展的湍流，那麼渾沌理論可能更適用於說明由層流向流的轉捩。

4.低維系統通向渾沌的路徑多種多樣，流動轉捩的形式將更爲繁複

在穩定性和轉捩問題中，經常關心的是流動的 Reynolds 數（或其他參量）變化時，流動會不會有定性的變化。翻譯爲動力學系統語言，一個含參量 λ 的動力學系統 $dx/dt=f(x;\lambda)$ 的性態（特別是其定態）是怎樣隨 λ 的變化而改變的，λ 在跨越什麼臨界值時會開始“進入”渾沌。在低維系統中，進入渾沌的“路徑”已經是多種多樣的，激勵的形式不同，路徑也就不同，耗散系統中的渾沌和保守系統中的渾沌也很不一樣。

一種路徑是經過周期倍化（ period doubling ）分叉進入渾沌。當參量 λ 改變跨越 λ_0 時，開始出現某一頻率爲 ω 的周期定態，當 λ 繼續改變，依次跨越 λ_1，λ_2，λ_3，…時，開始出現頻率爲 $\omega/2$，$\omega/4$，$\omega/8$，… 的周期解，而後在越跨 $\lambda^*=\lim_{\infty}\lambda_n$ 時進入渾沌。在流體的熱對流問題中，已發現有這種由周期倍化進入湍流的實例，有系統也通過分頻進入渾沌，但路徑不一樣，分頻比的序列不是上述的１，２，４，８，…，而是１，３，５，７，…或者２，４，６，８，…，有的更是有個別數字錯位的奇數或偶數序列，更有經過有限次分頻就進入渾沌的。

許多低維例子說明，有時對同一個參量，系統可能有幾種定態（各種周期的周期解、渾沌態等）共存，每一定態有其相應的“吸引區”。當參量改變（例如增大）時，可能發生突跳（ jump ），由一種定態變爲另一種定態；而且在參量由此再按相反方向改變（減少）時，並不在原先先臨界值處突跳回原來定態，而有滯後現象發生，在流動中也常有這類非線性現象，這是一種迂回的路徑。

渾沌現象中常有無限多層次的自相似結構，在一維映射 $x_{n+1}=\lambda x_n(1-x_n)$（參量 $\lambda\in[0,4]$）中，解的定態依賴於參量 λ，在渾沌區（$3.57<\lambda\leqslant 4$）中有各種周期解的“窗口”，而這種窗口中又有渾沌區，區中又有窗口，如此反復無窮，又如二維保守映射中，假若把渾沌解比喻爲“水”區，規則解爲“陸”地，則在全局圖案中往往是海中有島，島內有河，島外有島，河中有島，是無窮多層次的一幅水陸交錯圖。這種無窮多層次

結構正好是湍流的一個特點，大渦漩中又有小渦漩。另外，一維映射 $x_{n+1} = \lambda x_n(1-x_n)$ 在 λ 略小於 $1+2\sqrt{2}$ 時，時間序列 $x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$ 中出現“一陣清晰、一陣紊亂”的間歇現象，使人聯想到接近臨界 Reynolds 數時流動中出現的間歇湍流，以上都說明路徑的光怪陸離。

5.對各種流動中轉捩的研究

Lorenz 方程[8] 起源於 Bénard對流，即一薄層液體的熱對流問題，目前在熱對流轉捩問題的研究中，和渾沌理論聯系較多，可參見 Busse 在文獻（3）或文獻（4）中的文章，或 Gollub 在文獻（4）中的文章。

同軸兩圓筒間的流動即 Taylor 問題，也是考慮得較多的問題，已發現有多種多樣的分叉現象，見文獻（3）中 Diprima 和 Swinney 的文章。Belayev 等考慮了類似的同軸兩圓球面間的流動，見文獻（3）中他和合作者的文章，文獻（3）和（4）中還介紹了其他流動，如間歇湍流和地球物理學中的流動。

關於剪切湍流和 Poiseulle 流動，較多的研究是關於二維的 Tollmien-Schlichting 波怎樣誘導出三維次諧波的分叉問題和所謂二次失穩即有限幅值周期解的不穩定性問題，分離流和轉捩的統一研究分析等，見文獻（5），看來較多涉及非線性動力學中次諧波、分叉、內共振等問題，而與渾沌解的直接聯繫還較少。

Holmes[9]提出用渾沌理論解釋渦漩破裂導致湍流的機理，最近有人[10]提出所謂 ABC 模型：$dx/dt = A\sin z + C\cos y$, $dy/dt = B\sin x + A\cos z$, $dz/dt = C\sin y + B\cos x$ ，用以模擬流場的轉捩，在理想流體方面， Aref 指出，四個以上平面點渦即可導致渾沌，其綜述見文獻（11）。

總之，渾沌與湍流之間的聯繫的研究還只是開始，渾沌理論還只能為轉捩提供一些定性的、機理性的解釋。

從牛頓到混沌

譯者：洪　士　薰

牛頓的想法至今仍被用來解決實際問題，並且面臨了新的挑戰，混沌——關於動力系統非週期解外觀上詭異而紊亂的結構。

在牛頓原理創立了三百年後的今天，牛頓力學的廣泛應用是令人咋舌的，牛頓所完成關於運動及系統轉換的分析，在蛋白質排列，工程學上，銀河運行模型上的應用是有目共睹的。

傳統上動力學的重要性在於其預知能力，牛頓的體系在於天體運作甚至其存在的預測上，有著令人驚異的成功。然而只要有混沌的現象出現，這種長時間的預知能力便喪失了，即使所預測的系統是簡單，清晰而完整的描述。

動力系統的理論

在牛頓以微積分為基礎的動力學創立之後，很快的就變成了所有科學理論的典範。在愛因斯坦革命性的相對論補足了牛頓動力學的缺陷後，波耳的量子論緊接著動搖了基礎物理的核心，牛頓的古典決定論雖然經過這麼大的動盪，古典力學、微分方程仍被廣泛使用在大尺度的物理模型上（有別於量子力學的小尺度）。

在運動的數學模型的研究中，許多新的領域裏，牛頓的方法仍值得一試。諸如心臟的律動的探討、雷射發光源的穩定性、傳染病蔓延的研究等。這些廣泛的現象，可用牛頓的方法轉化成數學的微分方程系統，而加以研究在生態學及經濟學上，動力系統理論的主要貢獻是本質上的洞察——即是促成我們對真實世界的認識的明喻。

隨著電腦的出現，可能你會以為動力系統的數學理論將因而遜色。但在你瀏覽過通行的期刊後，將會發現——非線性動力學是應用數學中發展最快的領域之一——這個事實。實驗者利用電腦去分析變化多端的複雜行為，以了解大量獨立變數所呈現高維度系統在相空間中所有軌跡所呈現的"趨勢"。

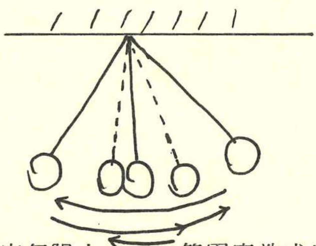
事實上用以描述眞實世界行爲的非線性方程，其確實的解是難以算出的。然而只要給定位置和速度的起始條件，在適當的方法下，藉由電腦的數值運算，很容易獲得近似解。

但眞實系統的初值條件可能不夠精確，這是一個大問題。由於初值條件對於非線系統，有決定性影響，所以我們又多了一個沈重的負擔。要從所有起始條件中找出所有可能的軌跡動向，以便決定運動的規律，同時對系統發展時所有可能的缺失有所警覺，我們將把注意力放在工程學中一種阻力造成能量耗散的系統上，也進一步列舉近年來的發展。

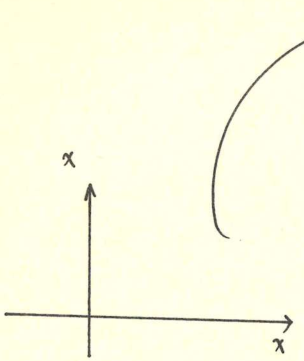
耗散動力學

在耗散系統中，相空間的體積隨著時間而逐漸衰退。這一體積的收縮，簡化了軌道長時間的拓樸結構，如此一來複雜動力系統所產生的高維度相空間，能被分解成低維度子空間中的運動來加處理。特別是接近於初期不穩定中，有很多實數是可以被捨棄的，這樣我們便可從比原運動方程簡單得多的簡化方程中獲得相同的基本特徵。

耗散系統在經過長時間的變化後，通常會有所謂的吸引子出現。如靜止平衡點（ ε_x ： $x = -x$ 在 $x(0) = 0$ 時， 有一解 $x = 0$ 即爲靜止平衡點）是吸引子中穩定又簡單的例子，在該點附近所有的運動軌跡，終將收斂到那一點，簡單如單擺的擺動，在考慮阻子的因素下，振幅會逐漸減少。

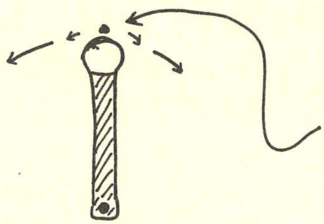


在這個例子中，空氣阻力………等因素造成能量散失，使單擺振幅減少，最後擺錘將靜止於鉛垂方向。在由位置及速度所構成的二維相空間中，運動的軌跡是螺旋狀收斂於靜止點。



這種現象就稱為點吸引子，吸引了所有鄰近區域內的暫時性運動。

在（ x ， x ）一坐標系上所有可能的起始值，所分佈的空間是相位圖像的依據，而以剛體為擺臂所做成的單擺，則具有另一平衡點，該點有鉛錘反方向上。

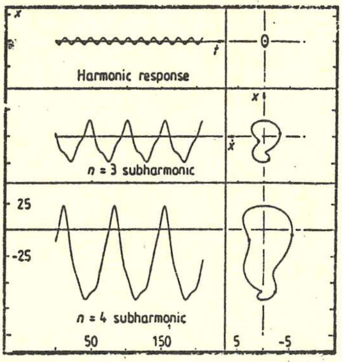


源自此不穩定平衡點的任何輕微擾動，都將使單擺離開這個靜止的不穩定狀態，系統最後將會趨近於穩定的靜止點。

另一個例子是鋼片受電磁鐵（電源為交流電）的作用，將做規則的振盪，這便是另一種吸引子，週期吸引子或稱循環吸引子（ cyclic attractor ）。

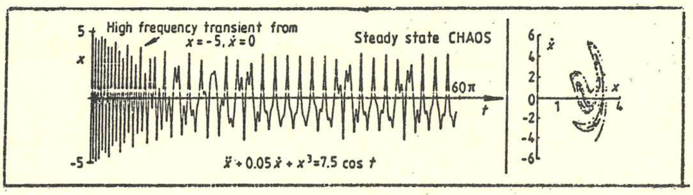
這一試驗暗示著非線性的共振。在經過衝擊——瞬間袋退這一程序後，一個穩定的振盪便產生了，然而若受到一個大的擾動，便會獲得一個新的、穩定的，然而振幅較大的振盪。（這兩種狀態皆能以電腦數值加以模擬。）不同的初值可能導致相異的定態，因此在同一系統中可以同時存在許多的吸引子。動力系統中偶爾也出現週期解，當振盪的週期是作用力週期的倍數，便是所謂弱調和解，在實際情形中弱調和解會造成振幅的增大，須加以避免。圖一中顯示了三個半浸於海中的平台，受海潮週期性衝擊下，位移變化的

情形。



在受同樣的海潮週期性的衝擊下，弱調和解的振盪產生較大的位移，使得固定平台用的鏈子損害較嚴重。

第三種吸引子是混沌吸引子，這一類型的解，其外觀上是毫無秩序可言的，但在對相空間做全域的研究後，仍會發現，其實軌跡仍是有根本的秩序可循的。

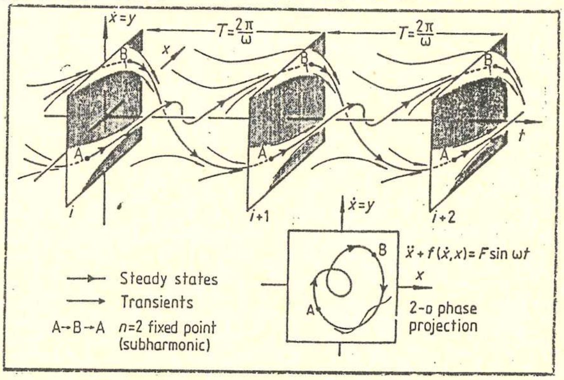


圖二是一個擬正弦曲線振動的例子。像這樣的混沌運動是非線性系統中的"常客"，甚者在Duffing與Van der Pof 的振子中所發現的混沌現象，更是古典常微分方程中最大的缺撼。分析家及實驗者，應該會對此種非週期性解，混亂的現象，也可能出現在他們的模型中，而有所覺悟吧！

上述三種吸引子是可以並存的，模擬實驗時，由於初值的取捨所產生的誤差，可能導致一些難辯眞僞的廻異結果，所以初值條件給定後，其軌跡的發展，需仔細詳查一翻，值得慶幸的是，對於某些會趨近於某一穩定狀態(吸引子)的區域，已有方法可以鑑別，而這些區域便是所謂的吸引盆(Fractal basin)。

在動力學上有一重要的工具是關於振子的 stroloscopic抽樣，以法國數學家Henri Pioncore 來命名它，對於軌跡每經一個週期後就做一次觀

察（關於系統的狀態如位置、速度……）。例如調和振盪以 Pioncare 截口的重複數列表示。



圖三中的弱調和振盪以重複點列A，B，A，B，A，B，……。來表示混沌解則無法如圖三那般以簡單的重複點列表示，然而點列却遵循某種基本模式（見圖二）。

上述用點列來描述的方法，有助於對各種週期及混沌解的了解。而利用電腦做軌跡的逆向運動，也有助於找出控制盆邊界的不穩定狀態（ repellor 和 saddle ）。

混沌學的黎明

在實驗動力學（利用電腦模擬來試驗的動力學）中比較有名的是Haya Shi 和他的學生Ueda。他們的貢獻是在非線性電路的研究中，創先使用電腦及 Pioncare 變換的方法去討論相空間中 driven 振子的拓樸特徵，然而 Lorenz 然 1963 年在美國由氣象學（最近極熱門）上的一個問題中，提出了簡單Ray Eeight-B′enard對流模型中一個特殊混沌吸引子的例子。到現在物理中衆多的混沌現象都已被發現了，如氦一超流體的磁化；Josephson 的滙流點；帶等量陰、陽離子的氣體中。

在混沌吸引子中，兩個相對的初值，其軌跡呈指數性分離（即 $|x(t)-y(t)|\simeq e^{kt}$ ）最後變得毫不相干。因此長時間的預測幾乎是不可能的，因為這將決定性地依賴於系統對初值受微擾的敏感程度。這一點與古典力

學中良好的行爲大相逕庭。而「相鄰初值，其軌跡的指數性分離」這一性質是混沌與（擬）週期運動分類的依據。

因軌線被壓縮到吸引子中的趨勢，較散開的趨勢大。所以系統的所有狀態在相空間中所佔的體積將會縮收。而由於相鄰初值的軌跡在吸引子中的逸散與混亂，使得其間的相互關係減損。所以我們必須承認在混沌系統中預測能力有限，像這樣一個誤差存在於眞實世界中是可想而知的，而牛頓力學的精確度是有限的。

有時彼此相鄰近的軌線也有分離的現象，這時便形成了兩個相離的吸引盆。這樣的分離未必是單純的形式，可能是邊界碎裂的碎形盆（Fractal basin）而碎形盆正可用來處理一些三維度耗散系統造成的複雜混沌現象。

當邊界毫無規則地破碎時，任何預測都變得極爲困難，因爲任給定一靠近此邊界，精確度不高的初值，通常難以判斷其軌跡運動方式，事實上這是工程及物理學上普通遭遇的問題，決定性系統長時間的預知能力，喪失在混沌與破碎邊界中。

如果我們相信混沌現象在大多數非線性動力系統中自然地出現，那麼我們便會體認到混沌學將在明日物理中扮演重要的角色了！

Hilbert 第十六問題

譯者：大 隻 港

『一個大時代的結束，除了讓我們勉懷過去之外，也得以展望未知的將來。』

1900 年，巴黎，在國際數學家會議（ICM）之前一個著名的講習會上，數學家 David Hilbert 說了上面那句話。他強調特殊問題在數學研究上的重要性，並列舉了他本身最感興趣的 23 個問題 。時至今日，大部份的 Hilbert 問題都有解答了，這也正好說明目前的數學已經漸趨成熟；另一方面，還有少數的幾個問題仍然頑強屹立，當然包括數學家既愛又恨的 Riemann 假設（第 8 問題）。Hillert 第 16 問題可分爲兩個相似但很不相 關的部份：(1)一條代數曲線可以有多少不同的分枝曲線；(2)平面上的微分方程可以有多少個極限環（Limit cycle）。關於第 2 部份，最近有一些重要的發展。

我們先來仔細地回顧一下這個問題的由來，然後再看看最近的情況。十九世紀末，數學家開始對非線性的微分方程產生濃厚的興趣，他們特別喜歡探討形如 dy／dx ＝Y／X的微分方程，其中X和Y都是x，y的多項式。一般來講，我們不可能寫出這些方程的顯式解，不過，Henri Poincar'e 發現透過拓樸學的考量，可以得到一大堆關於解的訊息。

把方程式重寫一個系統：

$$\frac{dx}{dt} = X \text{、} \frac{dy}{dt} = Y$$

其中 t 是一個新的變數，可以想成代表時間。當 t 改變時，解（x（t），y 描繪出平面上的一條曲線。當然，這條曲線決定於初始條件（x 10），y（

(0)),我們現在全盤考慮所有可能的初始條件,得到一系列的解曲線稱爲始條件,得到一系列的解曲線,稱爲方程式的相圖(phase portrait)。相圖告訴我們所有可能的解曲線的幾何圖形,爲「定性研究」提供一個有力的工具。

Poincar'e 替微分方程重新建立一套基礎的研究方法,他確立了相圖的一些基本的拓樸性質,所謂的極限環,乃指出現在相圖中的一條封閉曲線——一個迴路,它對應於微分方程的一個週期解,代表這個系統不斷地重覆同樣的行爲,有眞確的物理意義,因而其重要性得到 Poincar'e 的極力肯定。(實際上,要嚴格定義極限環,須要一些技術性的細節,從略。)

如果已知多項式X和Y的次數,那麼,我們的系統最多可以有幾個極限環呢?這就是Hilbert 第16 問題的第2部分了。在Hilbert提出這個問題的時代,甚至不曉得是否只有有限個的極限環,直到H. Dulac 在一篇冗長的論文中才提出肯定的答案(Bulletin de la Societ'e Math'ematique de France , 51, 45—188 ; 1923),其關鍵在於證明不可能有無限個極限環聚集在相圖中的一個單點附近。

經過一些時日,Moscow大學的Yu. S. Il'yashenko 在Dulac用來證明他的主要定理的一個引理中發現錯誤(Uspekhi Mat. Nauk., 37,127, 1982),因此,好戲又要上演了,目前,經過一番努力, Il'yashenko 修正 Dulac論文中的一些結果,而在較嚴苛的條件之下證明了極限環個數的有限性。其中,他證明如果X, Y皆爲2次多項式,則在任何有界區域裡面的極限環個數都是有限的;同時,對「幾乎所有」2次多項式而言,整個上也只出現有限個極限環。不過,他在證明過程中用到了奇異點理論(singularity)與正規型理論(normal forms)裡的一些最近發展出來的工具。

確立對高次多項式的極限個數的有限性,應該是解決Hilbert 第16問題關鍵性的一步,但Hilbert要得不只是這樣:他想知道確實的數目。說得明白一點,令H(n)表示n次多項式X, Y產生之極限環的個數的極大值,到目前爲止我們還不知道H(n)是否爲有限值。另一方面,在所有已知的例子裡, H(n)不僅是有限,而且小得可憐。顯然,在人們所猜測的和

已知的結果之間，仍然存有巨大的鴻溝。

N.N. Bautin (Mat. Sbornik, 30 181-196 ; 1952) 找到一組 2 次多項式X，Y，其所對應的系統有 3 個極限環，因此，

$$H(2) \geqslant 3$$

這個結果後來被史松齡 (Scient. Sinica. 23, 153-158 ; 1980改良，他找出一個有 4 個極限環的例子，所以，

$$H(2) \geqslant 4$$

這個例子是 $X = -y - 10x^2 + 5xy + y^2$，$Y = x + x^2 - 25xy$ 的一個 (非常複雜) 的擾動 (perturbation)。

到目前爲止，關於H (n) 最好的結果是：

$$n \geqslant 4 \Rightarrow H(n) \geqslant \frac{1}{2}(n^2 + 5n - 14),$$

$$n \geqslant 9 \Rightarrow H(n) \geqslant \frac{1}{2}(n^2 + 5n - 26),$$

$H(3) \geqslant 5$，$H(5) \geqslant 14$，$H(7) \geqslant 27$。

前面兩個結果是屬於N.F Otrokov (Mat. Sbornik, 34, 127-144 ; 1954)，關於H (3) 的是K.S Sibirskii (Different. Uravneniya, 1, 53-66 ; 1965) 及史松齡 (Acta Math. Sinica, 4, 300-304, 1975) 所證明的，最後兩個式子可以從 Il'yashenko (Mat. Sbornik, 78, 360-373 ; 1969) 的一般性結果得到。

非線性微分方程在所有科學分支中都極爲重要，同時也是數學研究最沿的工作之一，從目前對它們所做的分析裡，得到關於一般現象前所未有的瞭解；其次，對特定的微分方程，透過電腦的數值計算，可以提供非常詳盡的資料。儘管如此，Hilbert 第 16 問題却優雅地介於其間：所牽涉到該類微分方程 (由 n 次多項次多項式X，Y所定義) 過於特殊，以致一般的方法無法用上；但由於含有太多的自由參數，讓數值分析的方法徒嘆無奈。不僅如此，Hilbert 問題所要的是整個相圖的全域訊息，而大部份有用的一般性結果都是局部性的。

數學家以爲 2 個變數的微分方程應該是很簡單的，對特定的方程，或者只針對局部行爲而言，這或許是對的。Hilbert 第 16 問題的屹立不倒，說

明含有多個參數的微分方程族的全域行爲，幾乎可以說是無法征服的。因此，對Hilbert在1900年之講習會開始所說的下面這段話，又怎能沒有同感呢？

「揭開隱藏在未來之中的面紗，探索以後世紀的發展前景，誰不高興呢？下一個世代的數學領導者將努力於甚麼樣的特定目標呢？在新紀元廣濶、豐滿的數學思想範疇裡，會產生甚麼新方法、新結果呢？」

（譯自：Ian Stewart, Hilbert Sixteenth Problem, Nature, 326 (1987), 248.）

譯　註

㈠史松齡舉出的例子是：

$$\frac{dx}{dt}=\lambda x-y-10x^2+(5+\delta)xy+y^2$$

$$\frac{dy}{dt}=x+x^2+(-25+8\varepsilon-9\delta)xy$$

其中$0<-\lambda\ll-\varepsilon\ll-\delta\ll1$，他並給出$\delta$，$\varepsilon$，$\lambda$的具體數值，得到（1，3）分佈的4個極限環，即形如：

㈡其實，陳蘭蓀，王明淑（Acta Math. Sinica, 22, 751-758, 1979）也與史松齡同時獨立地舉出另一個具有4個極限環的例子。

$$\frac{dx}{dt}=-y-\delta_2x-3x^2+(1-\delta_1)xy+y^2$$

$$\frac{dy}{dt}=x\left(1+\frac{2}{9}x-3y\right)$$

他們的極限環也呈（1，3）分佈，（$0<\delta_2\ll\delta_1\ll1$）

三我們補上Stewert漏掉的一些故事情節：

(一) 1956年，蘇俄數學家 I. G. Petrovskii, E. U. Landis 「證明」

$$H(2)=3$$

可惜，過了不久，他們發現證明有誤，但仍堅信 $H(2)=3$，到史松齡的例子出現之後，「謠言」徹底瓦解。

(二) R. Bamon (Publ. IHES, 64, 111-142, 1987)證明在沒有 Il'yasenko 要求的嚴苛條件之下，平面2次系統的極限環個數是有限的，也就是說，他完全證明了

$$H(2)<\infty$$

(三) 在數學家爲H(2)是否有限爭辯不休的同時，秦元勛 (On Integral Surfaces defined by O.D.E, 1985)突然宣佈他證明了

$$H(2)=4$$

可能是來得太過驚人，或是其證明過於複雜，以致得不到其他數學家的重視與承認。後來，史松齡 (Bull. London Math. Soc. 20 (1988) 597-599) 發現其證明中有兩個錯誤，更是雪上加霜，更精彩的是，最近，秦氏又宣稱他找到 $H(2)=4$ 的一個直觀的證明，好戲又要開鑼了。

(四) 2次系統鬧得天翻地覆的同時，最近已經有不少探討3次系統的文章了，值得一提的是，蘇俄數學家 I.S. Kukles 在1944年證明的一個結果，最近又被兩個中國人 (Bull. London Math. Soc. 22 (1990) 1－4) 推翻了，節目果然愈來愈精彩。

四歲月無情，曾幾何時，歷盡滄桑的Hilbert 第16問題 快要過百歲誕辰了，距離完全解決的終點還有那麼那麼那麼那麼那麼那麼那麼那麼那麼那麼那麼那麼那麼那麼那麼那麼 (共16 個) 的遙遠，Hilbert 地下有知，會有甚麼感想呢？

五有興趣的讀者，建議您參考：

N.G. Lloyd, Limit Cycles of Polynomial Svstems , (London Math. Soc. Lecture Note Series 127, 192-234, 1988)

葉彥謙，Theary of Limit Cycles, (Trans. Math. Monographs 66, 1986, AMS)

認識——喬治・波里雅

本文節目數學傳播12卷四期

我們齊集這兒對波里雅表達悼念，他是一位偉大的數學家、極優秀的老師和作家、受尊敬的同事以及我們大多數人所敬愛的朋友。他的活動超過75年之久，已經對數學的許多分枝產生重大的影響。這兒只提出其中一些：複變分析、解析數論、機率論、組合學、幾何和應用數學。合作者包括數學黃金時代一些最偉大的數學家，也證明他在交友和愉快合作的天份。他的好朋友 Jaques Hadamard 寫了一本書「Psychology of Mathematical Invention」，在這本書中，他把數學家分成兩種類型：第一類型數學家找到一些尚未知道而等著人發現的定理和觀念；第二類型數學家則隨自己心意建立一套邏輯結構，而隨之尋求結論。第一型通常熱衷藝術，特別是音樂；第二型較嚴格但有些單調乏味。兩種類型對我們的科學都是主要且必需的。喬治・波里雅肯定是屬於第一類型的，他研究的原動力是尋求美與發明的樂趣。你可以經由一個人日常工作以外的活動判斷他的智力特徵。波里雅非常喜愛哲學和文學。有些作家我們會尊敬甚至欽佩他；有些則會喜愛他。波里雅偏愛的第二類作家有Voltaire, Anatole France和Heinrich Heine 。他們在文學方面的特徵就像波里雅在數學方面的思想特徵：機智、煥發和輝煌。他以和Heine 同樣的生日（十二月十三日）為榮。附帶一提，他創立「十三生日俱樂部」，而俱樂部中包括某月十三日生日的朋友、同事。這是個非常可笑的事情，但仍引發許多熱烈的慶祝會。他生活中主要的興趣與愛好當然是數學。有很多人聽過關於他為何選讀數學的一則笑話：「我要成為物理學家不夠機靈

，要成爲哲學家又過於靈巧了，所以我選擇了數學（I was not smart enough to become a physicist, and too smart to be a philosopher, so I chose mathematics）」。這當然不是事實而只是顯示他喜愛靈巧的諷刺詩。數學吸引他是受到老師兼朋友，如Fej'er，Fr'ed'eric和Marcel Riesz 以及其他活躍的布達佩斯數學家團體所影響。一旦他嚐到了發現的樂趣，再也無法讓他離開。他希望教人們去體驗他的感覺，這使他成爲一位傑出的演講者和作家。在最後幾年，他的視力變得很差，閱讀非常吃力，所以他買了一架閱讀機，印出來的文字出現在像電視螢幕的東西上，大而明亮。所以他再度開始以極大的熱情閱讀。他所閱讀的資料很多都是自己的論文和書。他告訴我：「你知道，當我年輕時是絕頂聰明的。」這不是自負或驕傲。他是重溫發現的時刻並且再度享受它們。你可以瞭解他在啓發術方面——發現的藝術與嗜好——投注大部分的時間和興趣。啓發術有許多倡導者，如笛卡兒、萊布尼茲、Helmoltz 、Poincar'e 和阿達馬。但波里雅是今天最傑出的代表。他這種興趣使學生有極大的收益。當然，他們欣賞他一流的教學——基於幫助學生自己發現他要教給他們的東西的原理。波里雅以多種文字寫或與人合寫的論文超過250篇。他的著作全集（共四大册）最近將由M.I.T.出版社印出。他的書目前仍然具有影響力。他和Hardy及Littlewood 合寫「Inequalities 」；和終生的朋友Gabor Szego" 合寫「Theorems and Problems of Analysis 」以及「Isoperimetric Inequalities」和Latta合寫「Complex Variables」。他獨自寫了「如何解題（How to slove it）」、「Mathematics and Plausible Reasoning」、「Mathematical Discovery 」一、二册。「Mathematical Methods in Science 」。他是一位卓越的解說家，每本書都是不朽的，今天仍在出版和使用中。今年九月我正式在馬里蘭大學參加「function theory」的會議（有來自許多國家和大學的學者參加），接到從史丹福打來的電話，告訴我喬治已過世了。我把這個消息告訴會議中的同僚時，每個人不禁告訴我波里雅的書（特別是「Theorem and Problems」是如何深深的影響他們對數學的生涯和品味。

我記得有一次和喬治對談，我們聊到關於偉大的丹麥物理學家波爾(Niels Bohr)，他創造了理論物理的完全新的觀點，並且發現很難把這種觀念傳達給他的同僚。他的觀點被人指爲難以瞭解。他引用德國詩人Schiller的詩句「寬度展現明晰，深處留住眞理(In der Breite liegt die Klarheit, in der Tiefe wohnt die Wahrheit)爲自己辯解。喬治知道也喜歡這個引句，但堅信數學的眞理和明晰是可以兼顧的，而且他一生的作品使這個信念更爲鞏固。他早期曾爲Adolf Hurwitz(後來成爲他最親近的人，全集也由他主編)吸引來到蘇黎世(Zürich)。我想是Hermann Weyl 吧，他稱Hurwitz 爲數學中的格言家。Hurwitz 的每一篇論文都像一塊美玉：如水晶般的清澈，美麗且深奧。難怪喬治爲他所吸引，因爲這也是他的格調啊！在數學之外，他的見解和觀念也有很大的影響力。思想心理學方面的書經常提到他。讓我提一提Arthur Koestler，他對啓發術非常有興趣。他寫了一本「The Sleep Walkers」，這本書遵循現代天文學創立人和「The Act of Creation」(此書研究創造心理學)的思考歷程。有一次，他特地來到史丹福找喬治討論這個題材。荷蘭工程師兼藝術家Escher曾向波里雅請教他「對稱羣」的作品。「對稱羣」在Escher的圖書作品佔有重要的地位。波里雅經常被稱爲古典數學家，這句話對是因爲他的論文和書富有古典的美和優雅，而不是因爲他不夠現代。眞的！他懂得也喜愛歐拉(Euler)的作品和十八、九世紀主要的大師，但他遠超過他們。他小心保存舊有的成果而且對數學的趨勢和風尙有點謹愼。關於這方面的明顯證據是他在蘇黎世和朋友兼同事Hermann Weyl 有名的打賭。本世紀初，在數學基礎眞實性的危機中，荷蘭數學家Brouwer 在數學基礎中作了一些深入的探討並且對一些數學推論的邏輯提出懷疑，特別是「間接證明法」。他和Weyl 創立了一個數學學派，稱爲「直觀論(intuitionism)」。Weyl 跟波里雅打賭，在他們開會之後五十年內數學會完全被這個觀點所修正。他們把這句話擺進密封文件中，準備五十年後打開。波里雅很容易地贏得了這場打賭。他的確相當保守，在他四十

年的Palo Alto 居所，他從沒學習過駕駛。這方面還有一件極類似的趣事。有四分之一世紀之久，他不喜歡搭飛機旅行，而由於他在這個國家及海外廣泛的旅行，這是一個極大的障礙。1964 年，他在蘇黎世，我們那時在倫敦有一個關於「函數論」的討論會。在他接到參加的邀請函時，要作地面旅行時間已不容許，他對數學的喜愛克服了對飛行的厭惡。在抵達倫敦時，他帶著極大的驚喜告訴我，空中旅行事實上是很愉快的，因此，75歲以後他變得熱衷空中旅行，而且橫越大陸和大西洋許多次。順便一提，他那次討論會被邀請給個演講，他講有關「我爲何沒有證明黎曼猜測」。這是個不用準備但非常有趣的演講，眞正的是他的典型。

他的成就帶給他許多榮譽和盛名。我無法列舉他所有的榮譽博士學位，僅提出他是：美國藝術及科學研究院、國家科學研究院、匈牙利科學研究院的會員和法國科學研究院通訊會員——這個研究院有非常嚴格的制度而且我們可以追溯每個席位的歷史。這給喬治極大的樂趣去追踪他的席位到第一位擁有者——牛頓（Isaac Newton）。在我們的數學圖書室只有一個人的肖像畫陳列出來，那就是波里雅。在史丹福大學只有一幢建築是以數學家的名字命名的。那就是波里雅學院，這是數值分析學系的校舍。

喬治波里雅過了長而富有創意且快樂的一生。對科學充滿熱忱，友情的溫馨、藝術的品味，他充分地享受了一生。當中最重要的事是他和夫人Stella 長達67年的快樂婚姻。她給予他支柱、講究且溫暖的家，而這些對有活力、創造力的生活是多麼地需要。我們對失去喬治都深感悲傷，但Stella 的哀痛更甚過我們。一位善良而優雅的人已離我們而去。但是他的作品會繼續影響我們的科學。我們會永遠存著愛戴之心懷念他。

（本文是1985 年10月30日M.M.Schiffer 在史丹福大學爲波里雅追悼儀式的發言）

最短路徑之探討

指導老師：陳創義

作　　者：楊守民

前　言

當你在照鏡子時，是否發現你到鏡面的距離跟鏡中的你到鏡面的距離是一樣的？這就是鏡射原理，基於這距離相等的概念，便可應用到日常生活中，譬如說你要由甲地過河到對岸辦事，再過河回到乙地，橋應造在何處，所走的路徑才會最短就是這一類問題的應用。接下來我們所要探討的主題就是如何在直綫上找到點，使得A點經直綫上的一點再到B點，其間的路徑最短。

壹、單一直綫L

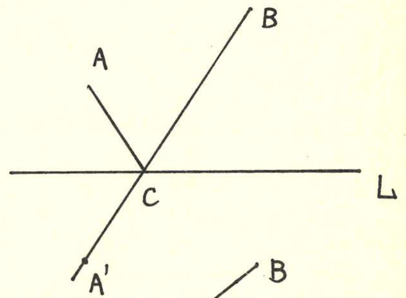
一A、B在L的同側

求法：任取A、B一點，設爲A點

A對L鏡射得A′點

連接A′B交L於C點

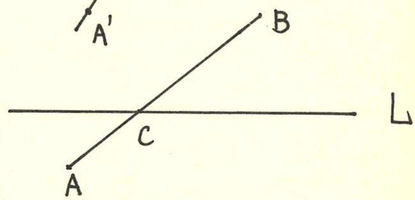
C點即爲所求。



二A、B在L的異側

求法：連接A、B兩點交L於C點

C點即爲所求。



貳、任意兩直綫L_1、L_2

(一)L_1、L_2平行

一A、B在平行綫之間

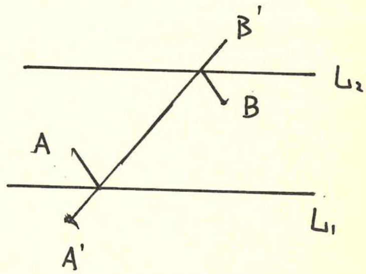
求法：取距L_1較近的點，設爲A點

A對L_1鏡射得A′點

B對L_2鏡射得B′點

連接A′B′交$L_1$$L_2$於C、D兩點

CD兩點即爲所求

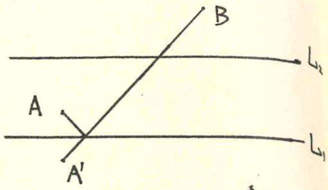


二、A在L_1L_2之間，B在L_1外側

求法：A對L_2鏡射得A'點

連接$A'B$交L_1，L_2於C，D兩點

C，D即爲所求。



三、A，B在L_1的同一外側

求法：任取其中一點，設爲A點

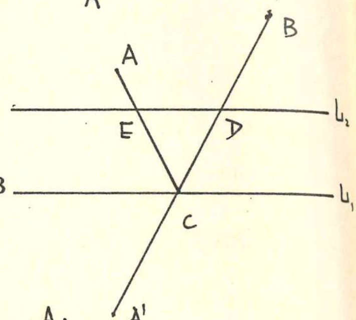
A對L_2鏡射得A'點

連接$A'B$交L_1，L_2於C，D兩點

C，D即爲所求。

討論：$\because AE+EC+CB=AC+CD+DB$

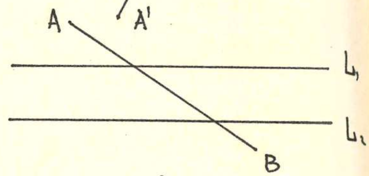
故E，C兩點亦合於所求。



四、A，B分屬L_1L_2之外側

求法：連接AB交L_1，L_2於C，D兩點

C，D即爲所求。



(二)L_1L_2相交於O點

一、A，B在L_2的異側而在L_1的同一側

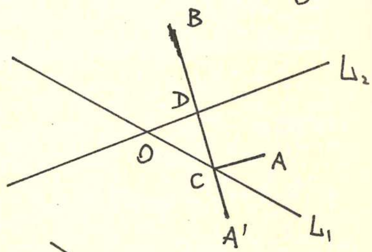
求法：取$\angle Aom$，$\angle Bon$較小者

，設$\angle Aom$較小

A對L_1鏡射得A'點

連接$A'B$交L_1，L_2於C，D兩點

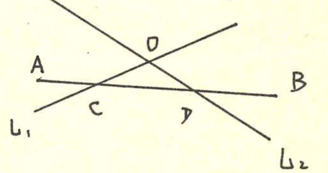
C，D即爲所求。



二、A，B分屬對頂象限

求法：連接AB交L_1，L_2於一點或兩點

此種點即爲所求。

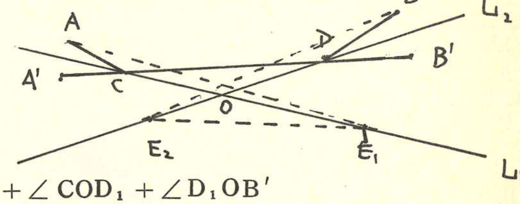


三、A，B在同一象限內

設$\varphi_1=\angle AOC_1$，$\varphi_2=\angle D_1OB$　使得$\varphi_1+\varphi_2\leq\angle C_1OD_1$

設$\alpha=\pi-\angle C_1OD_1$

(1) $\varphi_1 + \varphi_2 \leq \alpha$



求法：A對 L_1 鏡射得 A' 點

B對 L_2 鏡射得 B' 點

則 $\angle A'OB' = \angle A'OC_1 + \angle COD_1 + \angle D_1OB'$

$= \varphi_1 + \angle C_1OD_1 + \varphi_2 \leq \pi$

故連接 $A'B'$ 交 L_1，L_2 於C，D兩點

C，D兩點即爲所求。

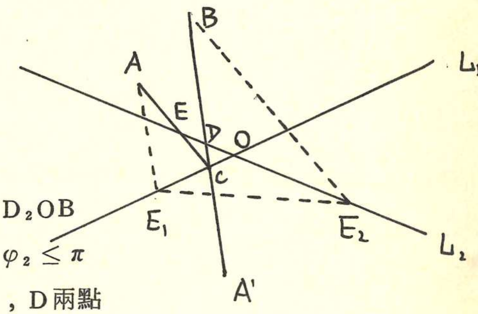
證明：在 L_1 上任取 E_1 點，L_2 上任取 E_2 點異於C，D

則 $AE_1 + E_1E_2 + E_2B = A'E_1 + E_1E_2 + E_2B'$

$> A'B' = AC + CD + DB$

故經C，D爲最短路徑。

(2) $\varphi_1 \geq \varphi_2 + \alpha$ 或 $\varphi_2 \geq \varphi_1 + \alpha$



設 $\varphi_2 \geq \varphi_1 + \alpha$

求法：A對 L_2 鏡射得 A' 點

則 $\angle A'OB = \angle A'OD_2 + \angle D_2OB$

$= \alpha + \varphi_1 + \pi - \varphi_2 \leq \pi$

故連接 $A'B$ 交 L_1，L_2 於C，D兩點

$AC + CD + DB$ 爲最短路徑。

證明：在 L_1 上任取 E_1 點，L_2 上任取 E_2 點異於C，D

則 $AE_1 + E_1E_2 + E_2B = A'E_1 + E_1E_2 + E_2B$

$> A'B$

$= AC + CD + DB$

註：C，E點亦合於所求。

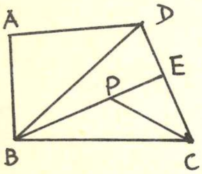
(3) $\varphi_1 + \varphi_2 > \alpha$ 且 $\varphi_1 < \varphi_2 + \alpha$ 且 $\varphi_2 < \varphi_1 + \alpha$

求法：取 $AO + OB$ 爲最短

引理：一凸多邊形 $A_1A_2 \cdots\cdots A_n$，若P爲此多邊形內部一點

則 $A_1P + PA_2 < A_2A_3 + \cdots\cdots + A_{n-1}A_n + A_nA_1$

證明：我們只證明四邊形的情形



$\because AB + AD > BD$……………①

$BD + DE > BP + PE$………②

$PE + EC > PC$……………③

①+②+③得 $AB + AD + DE + EC > BP + PC$

故 $AB + AD + DC > BP + PC$

其他多邊形皆同理可推得

證明：OC_1 上任取一點 E_1，A 對 L_1 鏡射得 A' 點

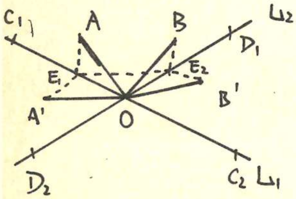
OD_2 上任取一點 E_2，A 對 L_2 鏡射得 A'' 點

OC_1 上任取一點 E_3，B 對 L_1 鏡射得 B' 點

OD_2 上任取一點 E_4，B 對 L_2 鏡射得 B'' 點

①若取 E_1，E_2，$\because \angle C_1OD_1 + \varphi_1 + \varphi_2 > \angle C_1OD_1 + \alpha$

$= 180°$



故 O 在 ▱ $A'E_1E_2B''$ 內

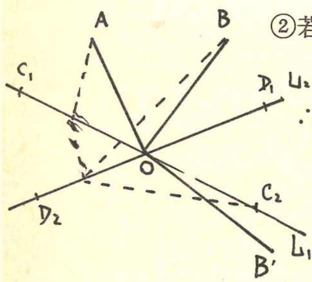
$\therefore AE_1 + E_1E_2 + E_2B$

$= A'E_1 + E_1E_2 + E_2B''$

$> A'O + OB''$（由引理）

$= AO + OB$

②若取 E_1，E_4，$\because \varphi_1 + \alpha + \pi - \varphi_2 > 180°$



故 O 在 ▱ AE_1E_4B'' 內

$\therefore AE_1 + E_1E_4 + E_4B$

$= AE_1 + E_1E_4 + E_4B''$

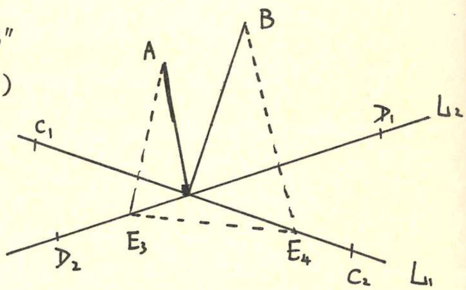
$> AO + OB''$（由引理）

$= AO + OB$

③若取 E_2，E_3

理由同②

④若取 E_3，E_4



$AE_4 + E_4E_3 + E_3B > AO + OB$（由引理）

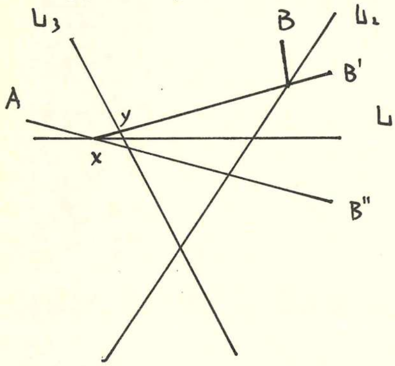
因此 O 點合於所求

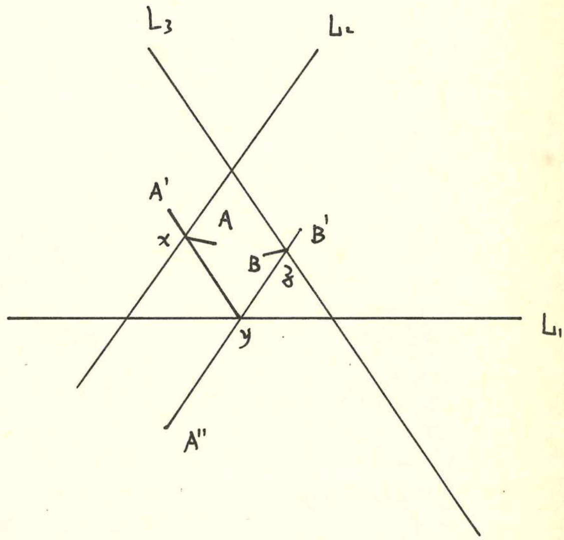
註：當$\alpha \geq \frac{\pi}{2}$時　$\Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 \leq 90^\circ \leq \alpha$

因此無上述②③之情況出現

附：兩相交之三直綫L_1 L_2 L_3的情況，其求解的一個大方向是要將A B分別映至對頂的區域以求連綫時和三直綫皆有交點，讀者可自行研究。

例：x、y、z點合於所求





佛法與數學

何謂數學？Cantors說：「數學是以萬物爲研究對象的學問，是人類自由思想的創造物。」因此它的發展乃源於日常生活、自然現象中累積的知識，也就是說，它的整個演進乃是：

理想化（定義、公設）　（法則、公式）推廣
簡　化（名詞、名稱）　（定理、定律）

直觀 $\xrightarrow{\text{抽象化}}$ 數學概念 $\xrightarrow{\text{邏　輯}}$ 數學體系 $\xrightarrow{\text{檢　　驗}}$ 應用→直觀

由於它發展於「直觀」，因此整個人類的生活就與它脫離不了關係。無論在何地，「數」與「形」的概念形成，是可預料的，而佛法裡也不乏數的概念，如六波羅　、八萬四千法門；及「恒河沙數」之無限大觀念，「盡虛空」之無窮概念。但是它却止於此，有數却無數學的精神，對於一個自稱「究竟圓滿」的學問、思想體系—佛法，對數學却如此不重視，原因爲何？佛與西方哲學家皆發現了在現實的社會中，各種關係都不斷地在變動，所以不能呈現出最後的眞理。但却導致了兩種完全不同的看法：西方哲學家認爲：目前的實體世界是理想世界之不充實的表現，所以唯有理想的世界是值得研究的。所以各種關係不斷地在蛻變，以求達到理想的世界。我們所能得到的顚撲不破的知識只是一些純粹可以認知的模式，因此他們建立起一個烏托邦，迫切需要一種確定的知識——數學，使得他們能在浩瀚多變的知識領域中尋出眞理並緊握它們……。

而佛　却提出了：諸行無常、諸法無我、涅槃寂靜三法印，認爲一切皆因緣合和，無一可取，只有先從心上下功夫，方不會被外境所轉，而起煩惱

，也就是說：唯有符合此三法印者才是正法，它的基礎建立在：沒有任何一件是恒久不變的，也沒有任何一件事或物是可完全自主的，所以他不像西方哲學容企圖去創造一理想世界，因此，由「因緣」所建立起來的佛法體系，與數學幾乎是風馬牛不相及了。

同樣地觀察到無常的現象，因為西方哲學家的執著、提起，而重視數學，使其蓬勃發展起來，又因為佛　的不執著、放下，而使得他研究萬物，自然現象的方向，幾乎與數學絕緣。

佛法的整個思想體系，雖然與數學無關，但並不表示佛　完全漠視數學，學佛即在於斷惡、修善、度衆生，而度衆生的菩薩要具「五明」，即一切世間的技藝能力，以便攝受大衆。但由於諸多佛弟子，只注意修行，注意內心，使得對世間法的不重視，閉門造車，攝受力相對地減小了，而引人非議。

由於佛法的印證皆以三法印為主，無其它確定之知識可遵循，也缺乏邏輯的觀念，因此在一些哲學性理念的演繹時，顯得不夠嚴謹，而令人有迷信之感，因而無法契入。假使佛法上也能有數學之精神——思想經濟化系統化、擴張性推廣化、應用化，相信它將更令人信服，更多人接受它。

雖然如此，佛法的基礎：三法印——諸行無常、諸法無我、涅槃寂靜，仍是合乎一切現象的。儘管數學家們努力在使數學趨於理想，讓其放在任何時間、任何地點皆恒常不變，但是還是不夠完美。由於（非歐幾何）的發現，可見嚴謹性是因時而異的，昨日的「嚴謹」，今日會被視為「欺騙」，而今日以為是「嚴謹」，也許明日又被視為「欺騙」！有位數學家說得好，他說：「所謂嚴謹，只是迄當天的程度為止。」不正是符合「三法印」？！

由於無邏輯觀念，使得佛經上的許多說法無法取信於人們，使得度衆生的大乘佛法擴展成效不佳，對於不重視世間法的佛弟子，似乎應該深省之！

參　考　資　料

數學史上册　九章出版社　作者：Maris Kline

為什麼要學數學　凡異出跟社

淺談對局論

節自數學漫談

一、前　　言

線性計劃（ Linear programming ）已經成爲近代理論及應用數學的一種重要工具。與線性計劃有密切關係的對局論爲數學領域裏新發展的一門學問，藉著數學模式（ Mathematical model ）的分析討論在一項有規則的競賽中如何於對方竭盡所能對抗的情況下，求取最大的利益。小而棋橋，大而至於軍事、政治、外交、商業及其他方面的各種問題，對局論均可廣泛應用。

二、俾斯麥群島海戰如何得名

西元1943年二至三月間，日本運輸補給護航船隊集結新不列顛島的拉布爾等候調動前往支援新幾內亞島東岸萊伊據點的日軍。麥克阿瑟將軍命令當時西南太平洋區同盟國空軍指揮官肯尼將軍負責攔截並給以此護航船隊最大的破壞。

當時日軍指揮官今村均將軍有調派駐在新不列顛島北方或者島南方船隊兩種可能的戰略。每條航線都需要三天的時間。可能對雙方都有利的氣象報告指出北航線有雨可見度低而南航線却可望是晴朗的天氣。

針對敵情，肯尼將軍也有兩種可能的行動對策，他可以集中較多的搜索機在北航線或南航線，使得轟炸力量足以擊潰在任何一條航線上被發現的日本船隊。換句話說，他的任務是找到日本船隊，使其暴露在炸彈下的天數儘可能的多；而今村均將軍却希望轟炸下的暴露最小。雙方各應採取何種行動

路線呢？

考慮了天氣、戰力機動性等有關的因素，肯尼將軍可以畫出一個 2 × 2 表格指出在搜索機如何佈署的情況下可以給日本船隊幾天的轟炸。分析的情形如下：

1. 肯尼戰略——搜索機集中北航線。

①船隊北駛

天氣阻礙搜索，但由於搜索機的適當集中，可以得到兩天的轟炸戰果。

②船隊南駛

護航船隊在晴朗的天氣下，目標明顯，但是由於有限的搜索機群，只能期望兩天的轟炸戰果、

2. 肯尼戰略——搜索機集中南航線

①船隊北駛

低可見度與搜索機佈署不當限制了只能估計得到一天的轟炸戰果

②船隊南駛

一切順利——好天氣、大量的搜索機群——船隊將受到三天的轟炸

將這些資料加以整理成：

		今村均戰略（船隊航向）	
		北駛	南駛
肯尼戰略	北航線	2 天	2 天
（搜索機集中）	南航線	1 天	3 天

我們可以將其表為一 2 × 2 之賠付矩陣（ Pay-off matrix 留待下文解釋）：

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

此矩陣的列對應於肯尼想得到最大戰果的戰略，而行則對應今村均損失最小的戰略。我們必須假設今村均將軍也能寫出同樣的矩陣來幫助他決定採取什麼戰略。

以對局論的觀點來看，如果一場有規則的競賽（或者說是賭博）終了，與賽者之間有賠付（ Pay-off ）存在時，假設每一與賽者 p_i 得到某一 v_i 量的賠付（想像爲錢，v_i 可爲正、負或零；$v_i > 0$ 表示 p_i 贏了 v_i 那麼多錢，$v_i < 0$ 代表 p_i 輸了 v_i 那麼多錢，$v_i = 0$ 則 p_i 沒有輸贏），如果最後所有相對賠付量加起來總計爲零（某一個人輸了多少錢，必有另一個人贏了他那麼多錢），即假設有 n 個與賽者，而 $\sum_{i=1}^{n} v_i = v_1 + v_2 + \cdots\cdots + v_n = 0$ 的話，那麼這場競賽我們就稱之爲計零競賽（ Zero-sum game ），比方說在一場賭博中賭場老板如果在賭客所下的賠注中抽取了酬金，那麼最後賭客間的輸贏總和將少於原先賭客所拿出來的錢數總和，總計賠付量就不會是零了，這場賭博就不能稱之爲計零競賽。顯然，如果肯尼將軍給以日本船隊一天的轟炸，日本船隊即要蒙受一天轟炸下的損害，所以這可視爲是肯尼與今村均兩人之間的計零競賽。

現在我們請這兩位指揮官各自坐在他們的大本營裏，今村均對於擺在眼前的這個矩陣將感到頭痛了，因爲不管他採取何種戰略，他的船隊都將被發現而遭到損害，這是沒有贏的戰爭，船隊在敵方轟炸下只暴露一天就値得慶幸了，比較了矩陣第一行與第二行的元素——北駛與南駛的賠付——今村均注意到他不該選南駛的戰略，如果他選了，船隊可能受到兩天或三天的轟炸，然而如果他的船隊北駛，頂多遭到兩天或者一天的轟炸，於是矩陣的第二行被畫掉了成爲：

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

身為一個精明的戰略家，肯尼也會畫出相同的矩陣，此 2×1 矩陣的兩列代表他的兩種可行戰略，一行代表日本船隊必須北駛的事實。

問題簡單多了，好像經過數學家的計算一樣，日本船隊眞的採取北駛的路線，肯尼將軍也確實派遣了大批機群在北航線上，於是“俾斯麥群島”海戰就在那裏發生了。

這只是在雙方指揮官都採取單純戰略（ Pure strategy ）的情況下才會產生的結果，他們甚至沒有考慮其他可利用的戰略——例如擲骰子或銅板——來作決定就都採取了北方的航線，我們即將知道這也是因為前述的 2×2 賠付矩陣中包含了一個鞍點（ Sadle point ）——矩陣中的一個元素為其所在之列中元素的最小值，所在行中元素的最大值——的緣故。

三、單純戰略與鞍點

假設在一場兩人之間計零競賽中，以 a_{ij} 代表甲選取戰略 i ，乙選取戰略 j 的情況下乙付給甲的賠付，如果甲有m種可行的戰略，乙有 n 種，則 a_{ij} 可以排列成一 $m \times n$ 矩陣

$$A = (a_{ij})$$

a_{ij} 可為零、正或負數，A中第 i 列的每個元素依次各代表甲的戰略 i 在乙用 $j = 1 , 2 , \cdots\cdots , n$ 各種戰略對抗下甲從乙所得到的賠付。矩陣A就是所謂的賠付矩陣，代表甲在各種情況下所得到的賠付量，藉這個矩陣可知甲要儘可能贏取最大的勝利，而乙是要儘量阻止甲可能的最大勝利，求取最小的損失。也即是甲要大化戰果，乙要小化損失，所以甲可稱為強與賽者（ Maximizing player ）或列與賽者（ Row player ），乙可稱為弱與賽者（ Minimizing player)或行與賽者（ Column player ）。如果甲選取某一戰略 i 。那麼不管乙怎麼對抗，他都至少可從乙獲得這麼多的賠付：

$$\min a_{ij}$$

即矩陣A第 i 列元素中的最小元素，如果甲夠聰明的話，他必會在所有可行的的戰略中選取能使所得的賠付成爲最大值

$$\max \min a_{ij}$$

的特定戰略 γ 。同樣地，如果乙選取某一戰略 j ，那麼不管甲如何攻擊，他付出的賠付都不會大於

$$\max a_{ij}$$

他也有理界選取這樣的一個戰略 k 使得損失爲最小值

$$\min_{j} \max_{i} a_{ij}$$

如果存在一個元素 a_{rk} 使得

$$a_{rk} = \max_{i} \min_{j} a_{ij} = \min_{j} \max_{i} a_{ij}$$

那麼 a_{rk} 就稱爲這場競賽的鞍點。在此種情況下，甲的最佳戰略爲 γ ，而乙的最佳戰略爲 k ，甲從乙得到的賠付量就是此鞍點元素的數值。

前述俾斯麥海戰問題中賠付矩陣爲：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

肯尼將軍選取第 1 種戰略（ $i = 1$ ）時

$$\min_{j} a_{1j} = \min(a_{11}, a_{12}) = \min(2, 2) = a_{11}$$
$$= 2 \ (= a_{12})$$

選取第 2 種戰略（ $i = 2$ ）時

$$\min_{j} a_{2j} = a_{21} = 1$$

因爲肯尼將軍（強與賽者）可以任意選取戰略 1 或 2 ，他想要大化戰果，經過比較之後，他必然會選取第 1 戰略，此時

$$\max_{i} \min_{j} a_{ij} = \max(a_{11}, a_{21}) = a_{11} = 2$$

同理可知

$$\min_{j} \max_{i} a_{ij} = a_{11} = 2$$

所以 $a_{11} = 2$ 是鞍點：這也是爲什麼雙方指揮官都採取北方航線戰略（ $\gamma = 1$, $k = 1$ ）的緣故了。

有些問題並非如此單純，事實上也並不是每個矩陣都有鞍點，因此，我們接著要討論運用混合戰略（ Mixed strategy ）的情形。

四、混合戰略的運用

如果在一場遊戲中強與賽者甲與弱與賽者乙雙方除了運用前述的單純戰略外，再以計算概率的方式巧妙地隨意混合選取戰略，是否可以達到所期望的較好的成果呢？我們且來看看錢幣配對的遊戲（ Matching pennies ）。

在將錢幣做了一次移動以後，甲猜正面（梅花）或反面（壹圓）乙（並不知道甲猜了什麼）也可以猜正面或反面，如果他們所猜相同的話，甲從乙得到正 1 單位的賠付；不同的話，甲得到負 1 單位（即甲付給乙 1 單位的賠付），我們得到這樣一個賠付矩陣

		乙的選擇	
		正面	反面
甲的選擇	正面	1	－1
	反面	－1	1

首先我們必須知道這個矩陣有沒有鞍點？因爲

$$-1 = \max \min a_{ij}$$

$$\neq \min \max a_{ij} = 1$$

所以這個矩陣沒有鞍點。既然猜正面或反面所得的結果相同，那麼甲何妨試試其他的戰略看看能否得到比單猜正面（或單猜反面）所得的賠付－1 更好一點的成果？於是就運用混合戰略而牽涉到機運的問題了，我們知道甲猜正面或反面的機率都是 1／2，如果乙猜正面，那麼我們可以算出甲的期望值（概率乘上每列相對應的賠付加起來的和）爲

$$\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}(-1)=0$$

如果乙猜反面

$$\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}(1)=0$$

因此甲的期望值爲零。如果我們假設甲猜正面的概率爲 x，反面的概率爲 $1-x$，$0\leqslant x\leqslant 1$。乙猜正面，甲的期望值爲

$$E_H = x(1)+(1-x)(-1)$$
$$= 2x-1$$

若乙猜反面，甲的期望值爲

$$E_T = x(-1)+(1-x)(1)$$
$$= 1-2x$$

因爲 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$時 $E_H<0$；而$\frac{1}{2}<x\leqslant 1$時 $E_T<0$，因此證明了，甲只有採取猜正或反面概率均爲½的戰略來得到最大期望值零了（下文我們將以另法證明此爲甲之最佳混合戰略無誤）。在這類情況下，機運決定了每一與賽者將用何種戰略，因此甲乙雙方都無法預料對方會採取什麼戰略來對抗，我們也就無法像雙方都採用單純戰略的情形一樣斷言此等遊戲的結果了。雖然如此，我們仍然可以有某種方法來判斷此等遊戲是不是公平的；對甲或乙比較有利？或者雙方是在機會均等的條件下公平競爭？

我們必須再引進以如下方法定義的賠付函數（ Pay-off function）來代表強與賽者甲的數學期望值：

$$E(X,Y)=X^TAY^T$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i a_{ij} y_i$$

式中A爲 $m\times n$ 賠付矩陣

$$A=(a_{ij})=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

X^T 及 Y^T 各代表

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

及 $Y=(y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n)$ 的轉置矩陣（ Transpose ）。例如將賠付矩陣A中之行與列互換則得其轉置矩陣

$$A^T=(a_{ji})=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots\cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots\cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

文中爲書寫方便起見經常以 $X^T=(x_1, x_2\cdots\cdots, x_m)$ 代替表示X。X及Y分別爲甲乙雙方採取混合戰略（ $X_1, \cdots, x_m$ ）及（ $y_1, y_2, \cdots\cdots y_n$ ）的同量表達方式，當然此時限定了甲乙可行的戰略各爲m及n種 ；x_i 表示甲選取第 i 種戰略之概率，y_i 則爲乙選取第 j 種戰略的概率；$x_i \geqslant 0$ ，$y_j \geqslant 0$ 且

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \ , \ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

單純戰略也可視爲混合戰略的特殊情形，例如在俾斯麥海戰問題中肯尼及今村均的戰略各爲採用 $X=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 及 $Y=(1, 0)$ 的情形。

應用這個定義，假設有一場遊戲賠付矩陣

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

若甲乙各選取由 $X^T=(x_1, x_2, x_3)$ 及 $Y=(y_1, y_2, y_3)$ 所定義的混合戰略，那麼 $E(X, Y)$ 就是矩陣的乘積

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

或者

$$E(X, Y)=(x_2-x_3)y_1+(-x_1+x_3)y_2+(x_1-x_2)y_3$$

如果 $X^T=(0.1, 0.4, 0.5)$ 而

$Y=(0.3, 0.3, 0.4)$ 則

$E(X, Y)=-0.03$

因此若甲乙各採取這樣的混合戰略，甲的期望賠付爲一個單位量的 -0.03（負號表示他必須付出）。假設以

$$\max_X \min_Y E(X, Y)=\upsilon$$

表示甲採取混合戰略（x_1, x_2, ……, x_m）對抗乙從 1 到 n 的每一種單純戰略 y_j，至少都可得到 υ 那麼大的期望戰利（Expected winnings）；υ 爲一實數，以後我們將稱之爲競賽價值（The value of the game）。同樣的，乙也可以儘量使甲的期望戰利不超過

$$\min_Y \max_X E(X, Y)=u$$

u 也爲一實數。如果有使得 u 與 υ 相等的向量 X^* 及 Y^* 存在的話即

$$\max_{X^*} \min_{Y^*} E(X^*, Y^*)=\min_{Y^*}$$

$$\max_{X^*} E(X^*, Y^*)=\upsilon$$

那麼我們就有了所謂一般化鞍點（Generalized saddle point）了。在這種情形下，甲的最佳戰略爲採用 X^* 定義出來的（x_1^*, x_2^*, …… x_m^*）混合戰略，也就是說他最好採用第一種戰略概率爲 x_1^*，第二種戰略概率爲

$x_2{}^*$……第m種戰略概率爲 $x_m{}^*$ 巧妙選取的混合戰略，而乙最好採用由 Y^* 所定義出來的混合戰略。對局論的基本定理證明了在兩人之間計零遊戲中，這樣的 X^*及 Y^*恒存在，而此類問題化爲數學模式就成爲 X^* ，Y^*及競賽價值 υ（$=u$）使得

$$E(X^*, j) \geqslant \upsilon, \quad j = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, m$$

$$E(i, Y^*) \leqslant \upsilon, \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad y_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

的解了。於是我們可以重新考慮錢幣配對的遊戲，假設甲的混合戰略爲

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 所定義，那麼他至少可以有 υ 那麼大的競賽價值，以數學式 子表示就是

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant \upsilon \\ -x_1 + x_2 \geqslant \upsilon \end{cases}$$

（不等式左端是由 X^T 與此遊戲的賠付矩陣相乘產生出來的），也即是由

$$E(X, j) \geqslant \upsilon, \quad j = 1, 2$$

得到的兩個式子。υ 的值不必受到正負號的限制，$\upsilon > 0$時表示此遊戲對甲比較有利，$\upsilon < 0$ 時對乙較有利，而 $\upsilon = 0$ 時雙方機會均等，表示此遊戲是公平的。我們再加上

$$\sum_{i=1}^{2} x_i = 1, \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2$$

的條件，問題就變成求下列式子的解了：

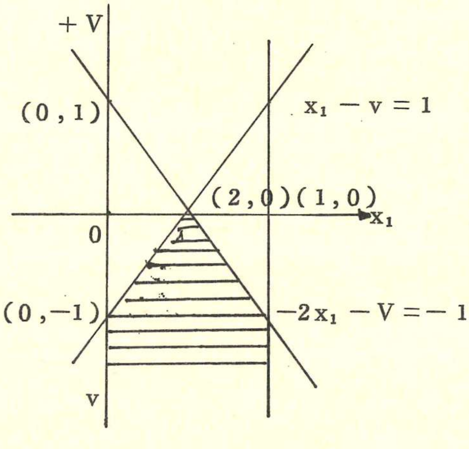
υ 值越大越好，即 $\upsilon \rightarrow$ 最大值

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 &\geqslant \upsilon \\
-x_1 + x_2 &\geqslant \upsilon \\
x_1 + x_2 &= 1 \\
x_1 \qquad &\geqslant 0 \\
x_2 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

很快的可以把問題化成：

$$
\begin{aligned}
2x_1 - \upsilon &\geqslant 1 \\
-2x_1 - \upsilon &\geqslant -1 \\
0 \leqslant x_1 &\leqslant 1
\end{aligned}
$$

本質上這是一個線性計劃的問題，我們可用畫圖法來求解，參閱圖一，畫橫

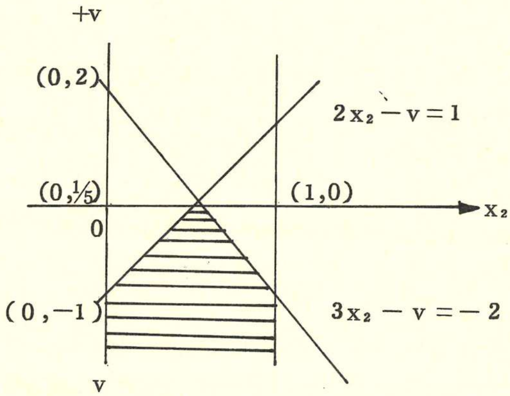


圖一：錢幣配對問題的圖形解法

線的部份包含所有合適的解，而欲使 υ 有最大值的最佳解則只有 $x_1 = \frac{1}{2}$，$\upsilon = 0$ 的點了，此時 $x_2 = \frac{1}{2}$。我們考慮乙的觀點時，若乙的混合戰略爲 $Y = (y_1, y_2)$ 所定義，則問題爲求解：

$$
\begin{aligned}
&\upsilon \rightarrow \text{最小值} \\
&y_1 - y_2 \leqslant \upsilon \\
-&y_1 + y_2 \leqslant \upsilon \\
&y_1 + y_2 = 1 \\
&y_1 \geqslant 0 \\
&y_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

得到結果爲 $y_1 = ½$，$y_2 = ½$，$\upsilon = 0$，所以甲乙雙方的最佳戰略均爲（½，½）所定義——第一及第二種戰略都以概率爲½的方式混合選取。由 $\upsilon = 0$ 可知道這個遊戲是公平的。



最後，我們考慮另一個遊戲看看是否公平

圖二：樸克遊戲的圖形解法

一天，阿聰在商展會場的幾個江湖郎中攤位上輸光了口袋裏的錢正長噓短嘆的當兒，猛然看到一個玩撲克牌的攤位，研究了遊戲規則之後不禁心中暗喜，於是急急忙忙直奔阿呆家裏借頭寸去也，阿呆久聞阿聘每賭必輸之名，豈可胡亂投資，因此先要阿聰把遊戲方法說出來研究研究，阿聰說：我穩贏的嘛！道出了規則：甲（擺攤位的人）乙（阿聰）各有三張牌，甲有一張方塊小 2，一張方塊Ａ，一張黑桃Ａ，乙也有一張方塊Ａ，一張黑桃Ａ，第三張牌却是黑桃小 2，甲乙同時攤開一張牌來，如果花色相同的話甲贏，否則乙贏，如果二張小 2 同時

出現，雙方平手，其他情形贏的人牌的點數即他贏得的錢數。阿聰說完，見阿呆猛搖其頭，問為什麼？於是阿呆說出一番道理來，首先他指出這是一個每人均可有三種戰略的兩人之間計零遊戲，接著畫出了這樣的賠付矩陣

乙（阿聰）戰略

$$
\text{甲（擺攤位的人）戰略}\quad
\begin{array}{c}
 \\ \blacklozenge \\ \spadesuit \\ 2\blacklozenge
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \blacklozenge & \spadesuit & 2\spadesuit \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

顯然，甲不會攤開方塊A，因為這對他沒有好處，針對甲永遠不考慮攤開A的情況，比較得失，阿聰可以省去攤開黑桃小2的戰略，於是得到 2×2 的矩陣

$$
\begin{array}{c}
 \\ \spadesuit \\ 2\blacklozenge
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \blacklozenge & \spadesuit \end{array} \\
\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

我們可以很容易的看出這個矩陣沒有鞍點。若 x_2 及 x_3 表示甲攤開黑桃A及方塊小2的概率（$x_1=0$），這個遊戲的數學模式成為求解：

$$
\begin{aligned}
&\upsilon \rightarrow \text{最大值} \\
&-x_2+2x_3 \geqslant \upsilon \\
&x_2-x_3 \geqslant \upsilon \\
&x_2+x_3 = 1 \\
&x_2 \geqslant 0 \\
&x_3 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

化簡後成為

$$
\begin{aligned}
&-3x_2-\upsilon \geqslant -2 \\
&2x_2-\upsilon \geqslant 1 \\
&0 \leqslant x_2 \leqslant 1
\end{aligned}
$$

參閱圖二可知，甲的最佳戰略爲由 $x_1 = 0$ ，$x_2 = 3/5$，$x_3 = 2/5$所定義的混合戰略（ 0 ，3/5 ，2/5 ），同法求得阿聰的最佳戰略爲（ 2/5 ，3/5 ，0 ），即使如此，我們由 $\upsilon = 1/5 > 0$ 可知阿聰如果再去賭的話，又要輸了。阿聰終於恍然大悟，原來俗語說“ 百賭神仙輸 ”果眞有其道理在啊！

五、後　　記

以上我們所討論的僅限於兩人之間有限戰略的計零競賽，此外，可有兩人之間非計零競賽、兩人以上與賽者之間的計零或非計零競賽種種情形，此類問題也可藉分析彼此兩者之間計零競賽類似方法或者尋求其他的數學模式求解，分析起來就更加復雜了，至於非計零競賽問題因可化爲計零競賽問題，一旦計零競賽問題可以解決，非計零競賽問題也就迎刄而解了。

The William Lowell Putnam Math. Competition 49（附解）

譯者：方天佑

一九八八年十二月三日所舉行的第四十九屆 William Lowell Putnam 數學競試的下列結果，已經根據指導條例況定出來了，這個每年一次的競試係由 William Lowell Putnam 獎勵基金會爲了提升學識而支持的，是 Putnam 女士爲了紀念她先生所設立，而且是在美國數學協會的協助下舉行的。

首獎五〇〇〇美元是頒給 Harvard 大學數學系，得獎隊伍的成員爲 David J. Moews, Bjorn M. Poonen, and Constantin S. Teleman;

次獎二五〇〇美元是頒給 Princeton 大學數學系，得獎隊伍的成員爲 Daniel J. Bernstein, David J. Grabiner Matthew D. Mullin;

每人得報金二〇〇美元。

三獎一五〇〇美元是頒給 Rice 大學數學系，得獎隊伍的成員爲 L. Bray, Thomas M. Hyer John W. Mcintosh 每人得獎金一五〇美元。

四獎一〇〇〇美元是頒給 Watevloo 大學數學系，得獎隊伍的成員爲 Frank M. D'Ippolito. Colin M. Springer Mihh-Tue Vo;

金一〇〇美元。

五獎五〇〇美元是頒給 California Inarirurw of Technology 數學系，得獎隊伍的成員 William P. Cronn, Robest G. Southworth, Glenn P. Tesler 每人得獎金五〇美元。

根據字母順序排列，這五個最高等級的個人競試者是 David J. Grabiner, Princeton Jeremy A. Kahn, Haruard Daved J.

Moews, Haruard大學；Bjorn M. Poonen, Harvard大學，及Ravi D. Vakil, Toronto 大學，每人被美國數學協會指派爲 Rutnam 的特別會員，而且每人由 Putnam 獎勵基金會頒發美金五〇〇元。

根據字母順序排列下六個最高等級的個人是William P. Cross, California Institute of Technology; Serge Elnitsky, Carleton 大學；Karl M. Westerberg, Carnegie-Mellon大學；Glen T Whitney, Harvard 大學；Sihao Wu, Tale 大學，以及 Joshua R. Zucker Stanford 大學，每人獲頒獎金二五〇美元。

下列隊伍，依字母順序排列，受到嘉許，Broun 大學的隊成員爲Peter H. Golds, Kevin S. McFarland, Darid J. Morin; Berkeley I-Lin Kuo, Jordan Lampe, 及 David P. Moulton; Carnegie-Mellon 大學隊成員爲 Petrou I. Hadjicoutas, Joseph G. Keane, and Karl M. Westerberg; Stanford 大學隊成員爲 Jchn C. Loftin. John A. Overdeck, and Joshua R Zucker及 Yale 大學隊成員爲Moses G. Klein, Rohert S Maning, 及 William N. Nelson.

下列三十八個個人，他們獲得嘉許，若以他們名字字母順序排列爲：

1. Tomas R. Amoth, Oregon State 大學
2. Tibor Beke, Armand Hammer United World 大學
3. Daniel J. Bernstein, Prmceton 大學
4. David T. Blackston, Massachusetts Institute of Technology
5. Hubert L. Bray, Rice 大學
6. Jackson A. Bross, Massachusetts Institute of Technology
7. Timothy K. Callahan, Chicago 大學
8. William Chen. Washington 大學
9. David Cook. Harvard 大學
10. Matthew M. Cook, Illino , Urbana-Champaign 大學
11. Peter H. Golde, Brown 大學
12. Thomas R. Hagedorn Prmceton 大學
13. Graydon H. Hazenberg, Waterloo 大學
14. Thomas M. Hyer, Rice 大學

15. Joseph G.Keane, Carnegie-Mellon 大學
16. Moses G. Klein, Yale 大學
17. Matthew A. Klimesh, Michigan 大學
18. Ann Arbtr Tal N. Kubo, Harvard 大學
19. John W. McIntosh, Rice 大學
20. Christopher J. Monsour, Maryland 大學
Park 大學
21. David P Moulton, California 大學
22. Matthew D. Mullin, Prmcdton
23.. Du Ngugen, Ottawa 大學
24. John A. Overdeck, Stanford 大學
25. David L. Petry, Oregon 大學
26. Edward R. Ratner, California Institute of Technology
27. Raymond M. Sidney, Harvard 大學
28. Stephen A. Smith, Waterloo 大學
29. Robert G. Southworth, California Institute of Technology
30. Colm M. Sprmger, Waterloo 大學
31. Constantin S. Teleman, Harvard 大學
32. John S. Tillinghast, California 大學
33. Davis, Minh-Tue Vo, Waterloo 大學
34. Erick, Wepsic, Harvard 大學
35. Chnsopher S. Wilson, Stanford 大學
36. David Bruce Wilson, Massachusetts Institute of Technology
37. John H. Woo, Haruard 大學
38. Japheth L. M. Wood, Washington 大學

1. Baylor
2. Adrian Tanner
3. British Columbia 大學
4. Wayne J. Broughton
5. Brown 大學
6. David J. Morm
7. California Institute of Technology
8. Ian Agol
9. Earl A. Hubbell

10. Russell A. Manmg
11. Glenn P. Tesler
12. California Polytechnic State 大學
13. Daniel L. Krejsa
14. California 大學
15. Berkeley
16. I-Lin Kuo
17. Jordan Lampe
18. California 大學
19. Davis
20. Rudolf Von Bunan
21. Chicago 大學
22. Andrew S. Yeh
23. Cornell 大學
24. Scott S. Benson
25. Emoey 大學
26. Charles D. McDonell
27. Georgia Institute of Technology
28. Jeffrey W, Hermann
29. Haruard 大學
30. Todd A. Brun
31. Duff G. Campbell
32. Leigh Chao
33. Roland B. Drier
34. Daniel D. Lee
35. David M. Maymudes
36. Michael D. Mitzenmacher
37. Daniel S. Sage
38. Micheal E. Zieve
39. Hofstra
40. Michael Cole
41. Iowa State 大學
42. Brad W. Michael
43. Knox College
44. Peter F. Schultz

45. Massachusetts Institute of Technology
46. Erik Ordentlich
47. Deniz Yuret Michael Cole
48. Iowa State 大學
49. Brad W. Michael
50. Knox 大學
51. Peter F. Schultz
52. Massachusetts Institute of Technology
53. Erik Ordentlich
54. Deniz Yuret
55. Michigan State 大學
56. Steven D. Fischer
57. Jacob R. Lorch
58. Michigan 大學
59. Ann Arbor
60. Robert B. Doorenbos
61. Pennsyloania 大學
62. Michael Albert
63. Prnceton 大學
64. Emory F. Bunn
65. Timothy Y. Chow
66. David C. Fox
67. Albert
68. Prmceton 大學
69. Emory F. Bunn
70. Timothy Y. Chow
71. David C. Fox
72. Rahul V. Pandharpande
73. Reed 大學
74. Nathaniel J Turston
75. Rochester 大學
76. Daniel B. Finn
77. St, Olaf 大學
78. James S. Larson
79. Stanford 大學

80. Thomas H. Chung
83. John C. Loftini
82. Swarthmore 大學
83. Robert E. Marx
84. Texas 大學
85. Austin
86. Peter S. Shawhan
87. Toronoto 大學
88. Edward J. Doolittle
89. Washington 大學
90. St, Louis
91. Peter S. Shawhan
92. Waterloo 大學
93. Paulina Chin
94. Frank M. D'Ippolito
95. Michael Glaum
96. Simon H. Lee
97. David N. C. Tse
98. Wisconsin 大學
99. Madison
100. David G. Radcliffe
101. Yale 大學
102. Robert S. Mannmg
103. William M. Nelson
104. Yeshiva 大學
Philip T. Reiss.

共有二〇九六個競試者來自美國的大學及學院，參加一九八八年十二月三日的競試，根據協會紀錄共有二五七隊。

第四十九屆競試的試題委員會，是由Abraham P. Hillman（主席），Paul R. Halmcs 及Gerald A. Heuer ；他們撰寫下列題目及在那些有建設性的解答中最突出的解答。

問　　題

問題A－1

令R是笛卡兒平面中，包含（X、Y）點的區域，其中（X、Y）點滿足 $|X|-|Y|\leq 1$ 及 $|Y|\leq 1$ 給出R及計算R的面積

問題A－2

微分的乘積規則如 $(fg)'=f'g'$ 是很平常的錯誤，假設定義 $f_{(x)}=e^{x^2}$，證明是否存在一個開區間（a、b）和一個定義於（a、b）上的非零函數g，使得上述的乘積規則對X在（a、b）上爲眞。

問題A－3

經由證明定義出實數值X的集合，使得 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\,CSC\,\frac{1}{n}-1\right)^{x}$ 收斂。

問題A－4

(1)平面上每一點以3種顏色之一來塗，是否必存在兩個點距離恰好1英吋遠，且有相同顏色。

(2)若將3色改爲9色，會有何種情況發生，證明你的回答。

問題A－5

證明存在唯一的一個函數f，$f=R^{+}\rightarrow R^{+}$ 使得 $f(f(x))=6X-f_{(x)}$ 且 $f(x)>0$，$\forall X>0$

問題A－6

假設一個線性變換A，在n維的向量空間中，有n＋1個固有值，使得對其中任意n個線性獨立，是否就可說A是單位元素的純量積（scalar multiple of ths identity），證明你的回答。

問題B－1

一個合成數（正整數）係爲a、b之乘積ab，其中a、b未必相異，且a、b∈{2、3、4……}證明每個合成數，可表爲 $XY+XZ+YZ+1$ 其中X、Y、Z爲正整數。

問題B－2

若X、Y是實數，$Y\geq 0$ 且 $Y(Y+1)\leq(X+1)^{2}$，請證明此式或提出反證。

問題B－3

對任意$n \in Z^+$，令r_n爲$|c-d\sqrt{3}|$之最小值，其中c、d爲非負整數且$c+d=n$找出最小正整數g，滿足$r_n \leq g$，對所有$n \in Z^+$皆成立，並證明你的答案。

問題B－4

證明：若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$是一個收斂的正實數序列，則$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^{\frac{n}{n+1}}$亦成立。

問題B－5

對每一正整數n，令Mn爲$(2n+1)\times(2n+1)$階，斜對稱矩陣，使得對角線下方的首n條子對角元素爲1，而其它主對角線元素爲－1，找出並證明Mn的秩（秩的定義爲使得K×K階之矩陣之行列式值不爲0之最大K值）

注意：

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

問題B－6

證明存在一個無限價的有序整數數對（a、b），使得對每一正整數t，$at+b$爲三角形數（Triangular number）$\leftrightarrow$ t是一個三角形數。（所謂三角形數，是形如$t_n=n(n+1)/2$，$n \in \{0, 1, 2 \cdots\cdots\}$）

解　　答

在下列每個題目後的12個數序（n_{10}, $n_9 \cdots\cdots$, n_0, n_{-1}），n_i,

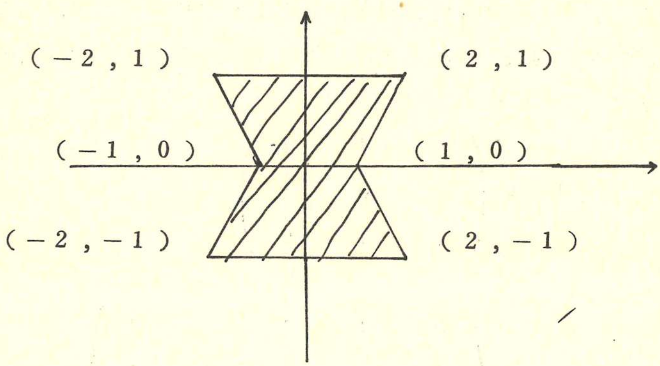
$0 \leq i \leq 10$ 爲二〇八個競試者中獲得 i 分的學生人數，而 η_{-1} 是放棄作答的學生人數。

A－1：（202，0，0，0，0，0，0，0，4，2，0，0）

R在第一象限部分的界爲 $X=0$，$Y=0$，$X-Y=1$ 及 $Y=1$ 形狀爲一一以（0，0），（1，0），（2，1），及（0，1）爲頂點的不等邊四邊形，且面積爲3／2。

∵當（X、Y）∈R時，（±X，±Y）∈R。

∴在其它象限的圖形經由對兩軸成對稱可得，且總面積可知爲6。



A－2：（174，1，7，1，0，0，0，3，3，0，15，4）

定義：

$$g_{(x)} = \begin{cases} e^{x}\sqrt{2x-1}, & \frac{1}{2} < a < x < b \\ e^{x}\sqrt{1-2x}, & a < x < b < \frac{1}{2} \end{cases}$$

爲了導出所求，考慮等式 $(fg)' = f'g'$，並將之寫成爲：

$$f'_{(x)}g_{(x)} + f_{(x)}g'_{(x)} = f'_{(x)}g'_{(x)} \Rightarrow g'_{(x)}/g_{(x)} = \frac{-f'_{(x)}/f_{(x)}}{1-f'_{(x)}/f_{(x)}}$$

若 $f_{(x)} = e^{x^2}$，則 $g'_{(x)}/g_{(x)} = -2x/1-2x$

$$\log|g_{(x)}| = x + \frac{1}{2}\log|1-2x| + c$$

c爲任意常數

若 $\frac{1}{2} < a < x < b$，$g_{(x)} = Ae^{x}\sqrt{2x-1}$，A爲任意正實數

若 $a < x < b < \frac{1}{2}$，$g_{(x)} = Ae^{x}\sqrt{1-2x}$

A－3：（ 42 , 17 , 10 , 0 , 0 , 0 , 0 , 6 , 5 , 3 , 34 , 91 ）

令 $a_n = \frac{1}{n} \text{CSC} \frac{1}{n} - 1$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n\sin\frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{120n^5} - \cdots\cdots\right)} - 1$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{120n^4} + \cdots\cdots} - 1$$

$$= 1 + \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{n^2} g_{(n)} - 1$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{6} + g_{(n)}\right)$$

其中 $g_{(x)} \to 0$，當 $n \to \infty$。

因此存在正實數 c , d 和 n，使得 $c\frac{1}{n^2} \le an \le d\frac{1}{n^2}$，$\theta n > N$。

用比較法，和P－試驗（ P-test ），可發現 $\Sigma\, a_n{}^{x}$ 收斂，當 $x > \frac{1}{2}$，發散

，當 $0 < x \le \frac{1}{2}$

但明顯可知這數列在 $x \le 0$ 亦收斂，所以答案為 $\{ x : x > \frac{1}{2} \}$

A－4：（ 45 , 29 , 2 , 2 , 1 , 25 , 11 , 0 , 3 , 3 , 25 , 62 ）

(1)答案為 4

為了證明，令A是一個在此平面上的任意點，且令△ABC為一個正△，且邊長為 1（當然，單位是英吋）且以A為它的一個頂點，若A，B，C中任二點同色，則結構完成，若不是，令A′是A對 $\overline{BC}$ 的對稱點，若A′和B或C同色，則結構完成，若不是，A，A′同色，注意A，A′的距離為 $\sqrt{3}$，所以事實上距離為 $\sqrt{3}$ 的任兩點，可經由以其中一點為頂點，邊長

爲1的正△和它的對邊的對稱點來形成，所得的結果，指出，對每個起點A，不是映射的等邊△，對某些點B，C完成這個所求結構，不然就是每個和A相距$\sqrt{3}$的點A′和A有相同的顏色，所有和A相距$\sqrt{3}$的A′所成的集合爲一個以$\sqrt{3}$爲半徑的圓，圓上任意具有長度1的弧得到一組點、距離爲1，且有相同顏色。

(2)答案是否定的

爲了證明，以共同邊的長選擇爲使得對角線長趨近1，但不等於1的正方形來鋪這個平面，若對角線長0.9則完成，若使用這個長度，則正方形的邊長爲$0.9/\sqrt{2}$比0.63 爲大，在某一個正方形用#1，設塗其它8個毗連的正方形，塗#2～#9色，如此重覆做下去，若考慮這個顏色結構的大正方形（包含9個小正方形）可得（因爲目前的目的不在意邊界的顏色是否要一成不變的有一種可能性，就是讓每個正方形的上邊界和友邊界和原始的正方形，有相同的顏色）

所得的結果爲用9色所塗的平面上，沒有兩個距離爲1的點同色，事實上所有點若有相同顏色，不是距離在0.9吋之內，就是大於$0.63\times 2=1.26$

A－5：（32，8，4，0，0，0，0，1，7，96，9，51）

對任意$x>0$，令a_0，a_1，a_2……爲定義$a_0=x$，$a_{n+1}=f(a_n)$，則$a_{n+2}+a_{n+1}-6a_n=0$對$n=0,1,2\cdots\cdots$ 這個差分方程式的特徵根是-3和2，因此$a_n=(-3)^n\times c+2^n k$ 對某些常數k，∵ $a_{n+1}=f(a_n)>0$，θn所以我們可得$c=0$，且有$f_{(x)}=2x$這個唯一的f，滿足這種情況，因此得到$f(f_{(x)})=f(2x)=4x=6x-f_{(x)}$且$2x>0$，當$x>0$。

A－6：（59，14，10，7，0，0，0，0，5，0，21，92）

是A必定是單位元素的純量積

假設x_1，x_2，……，x_{n+1} 是A的固有向量，且它們中任意n個是線性獨立，具有相關的固有向量λ_1，λ_2，……，λ_{n+1}

令$Bi=x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n+1}\}$、$\{x_j\}\Rightarrow Bi$是一個n維向量空間中n個線性獨立向量所成之集合，所以Bi 是一個基底，A是一個和Bi 相關的

變換，可表成一個對角線矩陣，對角線 diag（ λ_1 ，λ_2 ，……，λ_{i-1} ，λ_{i+1} …… λ_n ）因此 trace (A)＝ $S-\lambda_i$ 、其中 S 是固有值的和，

$S=\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_{n+1}$ 然而一個綫性變換的跡（ trace ）和基底的選擇無關，因此 $S-\lambda_i=S-\lambda_j$ ，$\theta_{i,j}$ ，所以 $\lambda_i=\lambda_j$ ，$\theta_{i,j}$ 令 λ 爲共同值，則對任意基底 Bi、A 對應到 diag（ λ ，λ_1 …… λ ）爲單位元素的 λ 倍。

B－1：（ 176 ，25 ，0 ，0 ，0 ，0 ，0 ，0 ，1 ，1 ，1 ，4 ）

令 ＝1，可得 $xy+xz+yz+1=xy+x+y+1$

$$=(x+1)(y+1)$$

當 x 、 $y\in z^{+}$ 上式可得到所有的合成數。

B－2：（ 88 ，38 ，30 ，0 ，0 ，0 ，0 ，0 ，26 ，4 ，18 ，4 ）

對 $0\leq y\leq 1$ 所求成立

所以設 $y>1$ ，若 $(x+1)^2\geq y(y+1)$，我們可假定 $x>0$ ，因此

$x\geq\sqrt{y(y+1)}-1\geq\sqrt{y(y-1)}$，$\theta$a $b\in 1\,R^{+}$ ，

$\sqrt{ab}+1\leq\sqrt{(a+1)(b+1)}$

B－3：（ 20 ，16 ，17 ，2 ，0 ，0 ，0 ，0 ，52 ，33 ，27 ，41 ）

令 $g=(1+\sqrt{3})/2$ ，既然對每個固定值 n ，序列 n ，$n-1-\sqrt{3}$ ，$n-2-2\sqrt{3}$ ，……，$-n\sqrt{3}$ 是一個公差爲 $-2g$ 的等差級數，∵其中有唯一一項 x_n ，ə：$-g<x_n<g$

明顯地，$r_n=|x_n|$ ，令 $\varepsilon>0$ ，由鴿洞原理，存在 a　b ，$a\neq b$ ，且 $|x_a-x_b|<\varepsilon$

令 $t=|a-b|$ 在序列 r_t ，r_{2t} ，r_{3t} …… 中，有 r_{kt} ，

ə：$g-\varepsilon<r_{kt}<g$ 因此 g 是 r_n 的最小上界

B－4：（ 17 ，1 ，0 ，0 ，0 ，0 ，0 ，0 ，3 ，2 ，73 ，112 ）

令 $s=\{n:a_n^{\frac{n}{n+1}}<2a_n\}$ ，假設 $n\in s$ ，$a_n^{\frac{n}{n+1}}\geq 2a_n$ 等价於

$\frac{1}{2}\geq a_n^{1-\frac{n}{(n+1)}}=a_n^{\frac{1}{n+1}}$ 等价於 $\frac{1}{2^n}\geq a_n^{\frac{1}{n+1}}$ ，可得 $\sum\limits_{n=1} a_n^{\frac{1}{n+1}}\leq\sum\limits_{n\in s} a_n^{\frac{1}{n+1}}$

$+\sum\limits_{n\notin s}\frac{1}{2^n}<\infty$

B－5：（9，0，10，1，0，0，0，0，1，2，45，140）

令u是一個1的k次原始根（primitive kth root），其中$k=2n+1$

對$1\leq i\leq k$，令Li 爲行向量（1，$u^{i\ 1}$，$u^{2(i\ 1)}$，……，$u^{(k\ 1)(i\ 1)}$）這個以Li 爲第j行的$k\times k$階矩陣是凡得蔓得（Vandermonde）矩陣，所以Li 在複數上是綫性獨立，對$1\leq i\leq k\Rightarrow MnLi=CiLi$其中Ci 是Li 和Mn 第一列的純量點積（Scalar olot product）

注意$c_1=0$，但對$2\leq i\leq k$，$c_i=-\sum_{j=2}^{n+1}u^{(j-1)(i-1)}+$

$\sum_{j=n+2}^{k}u^{(j-1)(i-1)}\neq 0$ 、

也就是說下列向量｛$c_2L_2\cdots\cdots c_kL_k$｝和｛$MnL_2\cdots\cdots MnL_k$｝是綫性獨立但$MnL_1=c_1L_1=0$，所以Mn 的秩爲2n。

B－6：（38，9，4，4，24，8，0，5，5，1，17，93）

解法一：明顯的，$t_{3n+1}=1+9t_n$，且$t_{3n}=t_{3n+2}=0$（mad_3）即說（9，1）是一個滿足要求的序對，若a_m和b_m定2爲$f_{(x)}=9x+1$，$f_{(x+1)}=a_2x+b_2$，$f(a_mx+b_m)=a_{m+1}x+b_{m+1}$ 由數學歸納法和（a_m，b_m）爲滿足所求，$\theta m=2$，3，……

解法二：我們證明序對（$8t_r+1$，t_r）滿足所求。

令T＝｛0，1，3，6……｝是三角形數的集合。

θ＝｛1，9，25，49，……｝爲奇數手方所成的集合。

則等式$(2n+1)^2=8\left(\frac{(n^2+n)}{2}\right)+1$代表

才$\in T\leftrightarrow 8t+1\in\theta$……………………………………（＊）

令$t_r=\frac{r(r+1)}{2}tT$，且$q=8t_r+1$

對"⇦"部分

令$t\in T$，∵Q對乘法具封閉性，且$8t+1\in Q$

由（＊）$\Rightarrow q(8t+1)=8qt+q=8qt+8t_r+1=$

$8(qt+t_r)+1\in Q$因此由（＊）$qt+t_r\in T$，得證。

對"⇒"部分

令t為整數，且$qt+t_r \in T$

則$8(qt+t_r)+1=8[(8t_r+1)t+t_r]+1$

$=(8t_r+1)(8t+1) \in Q$

因此(＊)告訴我們$t \in T$，得證。

謹向幫助過我的人到上最大謝意！

The William Lowell Putnam Math. Competition 50

A－1

形如１０１０１０……１０１的質數有幾個？

A－2

$$\int_0^a \int_0^b e^{max\{b^2x^2, a^2y^2\}}\, dx\ dy$$ ，其中a，$b>0$

A－3

假如　$11Z^{10}+10iZ^9+10iZ-11=0$，證明：$|Z|=1$

（其中Z是一個複數，且$i^2=-1$）

A－4

若α爲一無理數，$0<\alpha<1$，給定一個「忠實」的錢幣，問是否存在利用這個錢幣的「有限對局」（finite game），使得其中一個人贏的機率恰好是α？（「忠實」的意思是兩面出現的機率皆爲½；「有限對局」是指在有限步之後會結束此局的機率是１）。

A－5

令m爲一正整數，g是單位圓內的一個內接正（$2m+1$）邊形，證明存在與m無關的正常數A，滿足以下的性質：對g內的任一點p，皆可找到

g 上的兩個相異頂點 u_1 及 u_2，使得

$$\left|\,|p-u_1|-|p-u_2|\,\right|<\frac{1}{m}-\frac{A}{m^3}$$

此處，$|s-t|$ 表示點 s 及 t 的距離

A - 6

令 $\alpha=1+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$ 爲一個「形式的冪級數」(formal power series)，其中的係數取自於僅有兩個元素的體 $Z_2=\{0,1\}$ 中，假如

$$a_n=\begin{cases}1\text{ ，在 } n \text{ 的 2 進位展開中，每一「堆」0 的個數皆爲偶數}\\ \\ 0\text{ ，其他情形}\end{cases}$$

(例如： 因 $36=100100_2$，故 $a_{36}=1$；

因 $20=10100_2$，故 $a_{20}=0$)

證明： $\alpha^3+x\alpha+1=0$ （在 Z_2 上）

B - 1

有一個正方形的靶，今要隨機在擲出一支飛鏢，假如每兩塊相同面積的靶面被擊中的機會皆一樣，求被擊中之位置靶心較離邊界爲近的機率，你的答案要寫成形如

$$\frac{a\sqrt{b}+c}{d},$$

其中 a，b，c，d 爲整數。

B－2

若非空集合 S 中有一個滿足結合性及左、右消去律的運算，假如對每個 $a \in S$，集合 $\{a^n : n = 1, 2, 3, \cdots\}$ 皆爲有限，問 S 一定是個羣嗎？

B－3

令 f 爲〔0，∞）上的可微分函數，且當 $x > 0$ 時，

$$f'(x) = -3f(x) + 6f(2x)$$

假設：$|f(x)| \leqq e^{-\sqrt{x}}$，（$x \geqslant 0$），（因此，當 x 增加時，$f(x)$ 迅速地趨近於 0）今對非負整數 n，定義

$$\mu_n = \int_0^\infty x^n f(x)\,dx \qquad \text{（稱爲 } f \text{ 的 n 階動差）}$$

(a)用 μ_0 表示 μ_n，

(b)證明數列 $\{\mu_n \dfrac{3^n}{n!}\}$ 會收歛，但僅當 $\mu_0 = 0$ 時，此極限才會是 0

B－4

一個可數的無限集會有不可數個兩兩只相交有限個點的非空子集嗎？

B－5

內接單位圓的梯形 T 之頂點爲 A，B，C，D，其中 AB 平行於 CD，且 A，B，C，D 呈逆時針排列。令 s_1，s_2 及 d 分別表示線段 AB，CD，OE 的長度，其中 E 是 T 的兩條對角線的交點，O 是圓心。

求 $\sup \left\{\dfrac{s_1 - s_2}{d} : \text{T 是內接梯形，} d \neq 0\right\}$，並描述達到這個上界的各種情形。

B - 6

令$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$為從n維區域$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$中隨機地取出的一點，$f$是$[0,1]$上的連續函數，滿足$f(1)=0$

定義

$$x_0 = 0 \quad ,$$

$$x_{n+1} = 1$$

證明Riemun和

$$\sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1}) \qquad \text{的期望值}$$

等於 $\int_0^1 f(t)p(t)dt$，其中p是一個n次多項式，與f無關，且$0 \leqq p(t) \leqq 1$，$0 \leqq t \leqq 1$

給學弟的一封信

本文作者現任教於臺大數學系，這是他八月中出國進修之前留給我們的一份禮物。他以親歷的感受寫下這封信，文句平淡而樸實，却道出了當前大、中學數教育的最大危機，讀者或能從文中體會到作者用心之誠。

事實上，在百忙之中作者又爲讀者們譯好了 Rényi 的一篇 Socrates與Hippocrates 有趣的對話錄，限於篇幅，延在下期登出。

一年來作者不斷爲本刊貢獻很多心力，他所做的遠遠超過他所被看到的。對於這些，我們深致謝意。 編者按

厚紀：

接到你的來信，了解了你對數學的困惑，感到非常同情。你說，對「公設一定義一定理」這樣一系列陳述下去的數學，覺得非常乏味，因爲常常不知道這些定義、定理來自何方，又將到何處，讀數學所懂得的，只是在「這一步能不能推到下一步」的邏輯推演中鬪口角。這種苦惱，過去我們班上的同學也曾碰過，也因此很多同學到了四年級，整天不是拱豬就是下棋、打橋牌，熄了燈還搬桌子到走廊上，偷壁燈夜戰，惹得教官很不放心。那時，最流行的一句話——Laplace 快死時說：「一切數學都是假的，只有愛情才是眞的」。

這股流風不僅在當時增強了校園所謂「虛無」、「失落」的時髦病，而且到了今天在數學的教學上已經起了很大的壞作用。我聽過，有我們的學長，口口聲聲說是要加強學生的新觀念，因此認爲要教大學生 Banach 代數，可是一點也沒提到引進函數空間的理由；我也聽過，有些師專的老師，認爲

必須讓學生趕上時代，因此解析幾何可以不教，集合論卻不能不上；我還聽說過，有些高中老師在數的交換性和結合性上大做文章，教得高一的學生糊裏糊塗，弄不清楚爲什麼本來對他那麼親近的東西，一下子變得那麼陌生和遙遠了。這些在我對自己的學習歷程做一番回顧後發現都是由於受到「公設一定義一定理」這股流風的影響，對數學產生了歪曲的看法才造成的。

我也捲進這股風暴中好久。記得大三那年，有位牌打得很好的同學，很懇切的問我：「數學有什麼好呢？」我說，「數學眞有意思啊，就像下棋一樣，公設，藉著一些規則，它就能導出那麼多美麗的定理來。它在結構上的美麗，就像一幅畫一樣啊！」可是他又說：「我看不出有什麼美，只覺沒趣，你能否多說一點？如果說得我心服口服，我就不再打牌了。」我是很有熱忱勸他「改邪歸正」，可是當時我怔住了，我能再說些什麼呢？極端一些，像柏拉圖一樣，拿些錢給他，說這個最有意義？還是吹噓一下老套：「數學是科學的女皇」？可是有些別系的同學拿數學來問我時，通常我只能回答：「對不起，我還沒學到。」繁雜的計算不會或許還說得過去，可是別人要求解釋一些式子的意義時，能夠說，「喔，這是定理」就敷衍了事了嗎？

這些困擾的問題，激起我去探尋數學課程內容的來龍去脈，當時所能問得到的答案有兩種。第一種認爲只有大師才知道。對於正在發展中的數學，也許可以這麼說，可是像微積分，高等代數這類早有上百年歷史的科目，難道也只有那少數幾個大師才懂得？這種「唯大師論」，那時曾經使我沮喪過一陣子。第二種認爲大學學的數學都是些基礎，用意不過是在訓練數學的推理方式，進一步的瞭解須要讀更多的書。這種講法，當時確實對於自己不滿「公設一定義一定理」的想法，曾起過一陣子的撫慰作用。但是現在想來，卻覺得和「唯大師論」一樣，阻礙了對數學的認識，助長了那股流風的聲勢。是的，大學學的是比較基礎的東西，但這只是相對於現代做研究工作的人來說是對的。至於那些東西對高斯、尤拉來說，可已經是相當尖端而有實質的東西一不但對數學本身的問題，有了一定程度的答覆，而且對應的也解釋了不少實際問題。例如在初微裏學到的導數，在歷史上是由於研究速度、距離之間的關係所引發，經過進一步的探討，發現速度和決定函數曲線進行方向的斜率，有了相同的數學內涵，最後才歸納出導數能用來解釋一切變化率

的問題。像對導數的這種認識，並不是公設化的演繹方式，以及邏輯推理所能包含的。要是不知道這些，而一味堅持「推理方式」，就莫怪乎那些不再或沒機會讀研究所的學生，感到數學不過是一堆名詞，以及由這堆名詞疊起來的一副空架子而已。當然，在這種狀況下，讓他去教數學，他怎能不教「公設一定義一定理」，而自誤誤人呢？

我在讀研究所時，聽聽到一種論調，認爲一個數學式子可能的解釋既然是那麼多，爲了避免給人先入爲主和以偏概全的毛病，最好的方法就是不加註解。持這種論調的人，可能他是很有學問的人，知道許多註解，可是對當時「入門」的我，卻是一個也不懂得，空說「有許多註解」又怎能教人心服？現在仔細想來，這種論調一方面忽略了創造數學的動機，例如要是不講弦振盪引起的積分算子問題，誰會懂得希氏空間論裏頭譜分析在談些什麼？誰又知道它會往那個方向走？另一方面，這種論調使人抓不住理論的想法，例如要是對 Jacobian 不加註解，或者只說是導數的一種推廣，一點也不提是面積（測度）局部的變化率，誰又怎會曉得在變數變換後，積分一定要乘上個 Jacobian 呢？碰到人家問起，不說「定理保證如此」，又能說些什麼？

現在我常想，那些認定數學是「公設一定義一定理」的人，大概是墜入「數學即下棋」的想法裏，認爲由某些公設開始，藉著邏輯推演，便能發展出一套理論來。也因此他們常躲在「將來可能有用」的擋箭牌後面，怕人家問「有什麼用？」。可是，要是我們去翻翻數學發展的歷史，會發現他們的想法跟怕問的態度，都不是我們應該學習的。要的，數學史上的確存在著理論先於實用的例子，但是，仔細的考察會發現這些理論都是用來推廣或是解釋數學本身已產生的問題，而這些問題的根源卻是實際問題一在十九世紀以前，一直是物理而來，到現在卻是來自人文跟自然科學。因此拿「數學是科學的工具」的眼光來看，這些理論無非是在解說，已有工具可能的改進以及可能的適用範圍。況且，進一步的考察又可以發現，這些理論到後來能夠有進一步的發展，完全是受到實際問題的刺激，例如廣義相對論之於微分幾何；量子力學之於特殊函數論和希氏空間算子論。有了這些認識，人家問起「有什麼用？」的問題時，縱使談不上「實用」，也可以談談「理論之用」吧

？而且，從這些探討我們也容易瞭解，由於理論本身的擴大，因要需要一個更有系統和更鞏固的基礎，而公設便是由理論提供的實際資料中分析挑選出來的，一面用來綜合已有的理論資料，一面用來作為邏輯推演這套理論的基礎，但卻不是理論的出發點。因為要是沒有理論，我們去跟什麼建立基礎呢？所以數學那裏像下棋呢？

講得這麼多，我也逐漸覺得心虛；畢竟，所談的數學已超過我所完全瞭解的範圍了，但是每次我在學習中有所心得時，總是印證了上面的觀點。而且，想起以前「迷信難書」的學習態度，總有點黯然神傷，要是那時有人告訴我這些，該是多好。所以收到你的信，發現你有了相同的苦痛，不禁就寫下這麼多，也許有些地方還講得不夠完善，有些地方和你的學習經驗互相衝突，希望你能來信批評和討論，更希望你能和幾位同學組合起來，一起研究，一起向師長們請教。

前風　上

「給學弟的一封信」讀後

王福隆

上學期末編輯同學來邀稿，我自知自己的數學實在不行，但看著編輯那股熱情，那股勁兒，我硬下頭皮答應交出一點東西。本來嘛，「師大數學」是屬于系上每一份子的，眼睜睜地看著熱心的編輯東奔西跑，四處邀稿，這樣誠心誠意地親自跑到我們面前，實在不忍回絕。原來想寫九章去年才出版的 George Polya的「數學發現」那本書，關於「數學模式」那一部份的一點心得，臨時變了主意。回想大二時看了魏慶榮先生的「給學弟的一封信」，頗受感動，於是決定用這個標題拉雜地談些感想。我想，「師大數學」如能有個園地，同學們彼此談談心，聊些學習數學的感受，心路歷程，也是不壞的吧？

魏先生文中首先提到他學弟的苦惱：「對『公設一定義一定理』這樣一系列陳述下去的數學，覺得非常乏味，因為常常不知道這些定義、定理來自何方，又將到何處，讀數學所懂得的，只是在『這一步能不能推到下一步』的邏輯推演中鬥口角。」我相信不少學數學的人都會有同樣的困擾。我自己也有一段日子陷入最低潮，牢騷話略過不說了。我請教了一些人，總結他們

的意思大概是：繼續努力，一定能突破困境。這和魏先生文中所說的第二種看法是相似的。

努力當然最重要，但我一向相信方法也是極重要的。我們大概會承認，給一個人魚，不如教他如何捕魚，教他捕魚的技巧，不如教他技巧的精神。一個古老的中國寓言尤其能說明方法的重要，大意如下：一個人從上海出發，晝夜不停地開著 BMW，向北直去，中途有人問他到哪裏去，爲什麼這麼趕？他說要到廣州。我想，不管是哪門學問，總是要努力與方法並重的吧？人們說讀數學可以啓發人的思考，增進理解能力，如果指的是這種「公設—定義—定理」的讀法，我可萬萬不敢認同。我總是覺得，這樣子讀數學，讀的是死的數學，甚至要把數學讀死了——人們會瞧不起數學的。譬如一道幾何證明題，忽然作出一條輔助線，卻不交代爲什麼會想到作這條輔助線，是否先前也曾試了幾條可能的輔助線；不錯，表面看來，邏輯推演都對，但這能算是講理嗎？這種理也未免霸道了點吧？

好在還是有一些數學家關心發現的法則，例如 G. Polya就寫了三種書：「怎樣解題」、「數學發現」和「數學與逼眞推理」，目前國內都有了譯本。我深信提高和普及的工作一樣重要，發現一些定理，開創一個局面，固然能使人名留千古，但闡釋已發現的東西，讓後來的人能學得更快、更好，也許只是一個無名英雄，卻同樣値得敬佩。數學家 G. H. Hahdy在「一位職業數學家的辯白」第一段中就說：「…解說、評論、欣賞這些東西，比起創作本身，是次一等的工作，由次一等的人做的。」這話恐怕還有商量的餘地。物理學家 A. Einstein 願意爲「完全缺乏物理學和數學的實際知識」而有興趣和相當的理解力的人寫「物理學的進化」，爲只具備「相當于大學入學考試的知識水準」的讀者寫「狹義與廣義相對論淺說」，把一門學問闡釋的深入淺出，讓職業與業餘的讀者都獲益非淺，能說這是「次一等的工作，由次一等的人做的」嗎？我們對 Polya先生那一套關于啓發術的書的感動和感激絕不下於他在數學上的一些發現。

我常覺得，讀一些科學家的經驗談，雖不敢說勝讀十年書，但每次總有相當的收獲。最後我想以物理學家楊振寧先生提出的幾種學習方法結束本文

，希望對我們學數學的同學們也能有幫助。

「第一，盡量多讀參考書，博覽群書，擴大知識面。他指出，只要時間和能力允許，一般來說，讀書愈多肯定對學習愈有好處。有些事物和學問並非一開始就被人們懂得和理解的，但是只要持之以恆，知識豐富了，終能發現其奧秘。

第二，不要死鑽牛角尖。他說，對于一個課題，如果經過長時間的鑽研仍然解答不了，不妨暫時擱一下，換一個新的題目，經過一段時間，有了新的啓發，原來解答不了的難題便可能迎刄而解。

第三，採用〝滲透性〞方法。他說，有兩種對應的學習方法，一種叫做〝滲透法〞，另一種叫做〝按部就班〞。知識是互相滲透和擴展的，知識的積累更是如此。知識往往在你不知不覺、似懂非懂中積累和豐富起來。不要害怕打破那種〝按部就班〞的常規。

第四，推演法和歸納法結合，更注重歸納法。他在西南聯大讀書時，學習方法主要是推演法，是從數學推演到物理的方法。到美國芝加哥大學以後，他跟導師泰勒學習，使用的是倒過來的方法，從物理現象引導出數學的表示方法。他認爲兩個地方的教育都對他以後的工作有決定性的作用。但是，盡管推演法的學習使他打下了做學問的札實基礎，他卻更看重歸納法的學習。他說，歸納法的起無是物理現象，從這個方向出發，不易陷入形式化的泥坑。…他指出：多增加一些不絕對嚴密的、注重歸納法的課，對於學習會有很多好處。」（參見牛頓出版，「寧拙勿巧一楊振寧訪談錄」一書， 15 ～ 16 頁）

教學是師大人一個關心的問題，而下列文章乃是學長（姊）的心得感想，希望能引起同學的共鳴，特此感謝狐狸的熱心幫忙，及慧淴、明信、乃毓、獻明及誌陽學長的鼎立協助。

訪談錄(一)～(五)

整　理：王明信

(一)

關於準備課程？

Sol：視班級的程度而訂，前兩級的學生授予課本及講義的內容所以準備內容也以課本及講義爲範圍，後一級的學生只要求將課本的內容弄懂，所以準備內容以課本爲範圍，如果遇到難處則須借重他人的經驗，同校的學長學姐是最佳的求助對象。

如何授課？

Sol：其實教學還容易，教人就很難，通常先複習前一天的授課內容，再將今天的進度教完，通常在下課前會有隨堂考，隨堂考很重要可以只道學生今天聽進去多少以決定明天或下一堂課複習時要將那些內容再特別說明一次。

學生那一部份容易犯錯？

Sol：example 學生知道 $3\times3=9$，$-3\times-3=9$，但9的開根號就會回答了，這些可能是學生還沒進入更深一層的抽像思考，所以會犯這些錯誤。

如何避免學生在推演過程中犯錯？

Sol：通常自己認爲學生可能會犯的錯誤方法，會在黑板演練一次，至求不出結果時，反問學生，這個方法是不是求不出結果來，學生會回答是，再告訴學生這是錯誤的方法，而後再將正確的方法說明一次，不過學生都會反映老師爲什麼要教錯誤的方法？

關於吸引學生的注意力？

Sol：上課的速度須視學生的反應而定，如果學生大部份均失去注意力時就不可再趕進度，須喚起他們的注意力，我常用的方法是老師現在來講一個笑話，然後就不說話，直至學生發現好像被騙而笑出來時再繼續授課。

關於　　？

Sol：隨堂考及競試均很重要，考完後要幫他們訂正、講解，但是如果學生自己肯唸那才有效果，現在青少年很不願自己負責，考試的題目稍一變化即怪罪老師，好像老師沒教到同樣的題目是不該，還有另一個現象，跟師大很像，女生的成績普遍比男生好，你們男生要加油了！

(二) 關於介紹公式？

Ans：國中生較少證明，不過課本及參考書有的內容一定會教，高中生則一定要證明，最不理想的狀況也要說明公式的由來，總之要讓學生了解公式的由來及應用再要求學生背誦。

關於驗收成果？

Ans：上課時即可採發問的方式，準備不充分時亦可用這個方法，由學生來刺激自己的思考，再決定下一步教什麼，最重要的當然是考試，考試的成績較不重要，最重要的是訂正的工作，訂正的工作一定要做的徹底，讓學生明白為什麼上課好像都懂，習慣也會做考試就寫不出來，把導致寫不出來的步驟、觀念，強化一次，所以訂正工作最重要。

其實教育工作是一份良心事業，老師一定要有愛心，一定要掌握學生的個性，因人都有惰性所以一定要給予學生適度的壓力，其實一位老師只要盡心，學生能感受到壓力學習方能達到效果，最後提出一個問題，一個學校有盡心的教師、有混的教師，你教得非常盡心，那些很混的老師扯你的後腿時，你怎麼辦？

其實教學也是一種經驗的累積，等你有經驗時你就曉得如何教。

關於準備一個單元的課程

Ans：將課本的內容及參考書的編排用心看一遍，知道這個單元的結構是什麼再將自己的思考方向憶及它是如何來？及為什麼要有這些東西？然後決定如何教。

如何教出完整的內容給學生？

Ans：(1)老師本身的實力問題：老師本身即要對數學有完整的概念，然後準

備充分對教材非常熟悉，再則對學生的思考方式亦要掌握，要不然一位完全了解教學和一位不了解教學的老師帶給學生的資訊是一樣的。

(2)同一個題目最好能有不同的解決，從各方面進入這個題目，程度不好的學生可以聽懂一種，程度好的學生可將之融會貫通。

(3)老師本身的良心問題，有的老師本身實力好，程度亦高但不盡心，於教學工作也無法教出完整的內容。一顆心的問題。

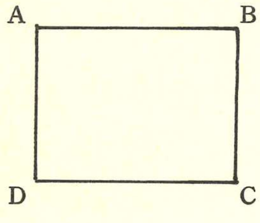
關於如何算教好學生？

Ans：其實教學是第三重要的工作，最重要最厲害的事是老師能指引學生自己去摸索。

如何準備二次曲綫的課程及是否會把二次曲綫標準法教給學生？

Ans：準備工作如上述，教法則因年級而異，初學者只將二次曲綫的類型教給學生並介紹一些二次曲綫的特性。高三學到矩陣行列式時則將矩陣行列式的幾何意義介紹並教二次曲綫標準化，別人不一定教，我一定會教，但只教基本的，還有矩陣的馬可夫鏈亦可用來解機率的問題知道嗎？

馬可夫鏈：一個人今天在A地，則明天在A、B、D地的機率為$\frac{1}{3}$



今天在B地明天在A、B、C的機率皆為$\frac{1}{3}$

今天在C地明天在B、C、D的機率皆為$\frac{1}{3}$

今天在D地明天在A、C、D的機率皆為$\frac{1}{3}$

試問人在A則第一天在A、B、C、D之機率各為多少？

第二天在A、B、C、D之機率各為多少？

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ \\ B \\ \\ C \\ \\ D \end{array} &
\begin{bmatrix}
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\
0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}
\end{bmatrix}
\end{array}
\times
\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
=
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array}
\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}
\longrightarrow \text{第一天}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\
0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\
\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}
=
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array}
\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix}
\longrightarrow \text{第二天}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\
0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\
\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix}
= \qquad \longrightarrow \text{第三天}
$$

Example ：

(1) If $xy = 3600 \quad x, y \in N$

求①(x, y)＝？解的個數

②x, y 皆為偶數則 (x, y)＝？

③x, y 互質則 (x, y)＝？

Sol：(1) $3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

①$(4+1)(2+1)(2+1)$……解的個數

②$(2+1)(2+1)(2+1) = 27$

③$2^3 = 8$

Sol：(2)視 x, y 為不同之二位，2^4 為 4 個 a 物，3^2 為 2 個 b 物，5^2 為 2 個 C 物

將 4a、2b、2c 分配給 x, y 二位（重複組合）

①$H^2_4 H^2_2 H^2_2 = 5 \times 3 \times 3$

②$H^2_2 H^2_2 H^2_2 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

③$2^3 = 8$

$x, y, z = 3600 \quad x, y, z \in N$

①(x, y, z)＝？

②x, y, z 皆為偶數 (x, y, z)＝？

③x, y, z 互質 (x, y, z)＝？

Sol：①$H^3_4 H^3_2 H^3_2$

②$H^3_1 H^3_2 H^3_2$

③$3^3$

㈢　　　　整理：陳乃毓

經過輾轉的介紹與追尋，終於讓我們找到一位非常熱心血具有教育熱忱的楊坤茂學長，他極願意將他的心得與教學方法提供給仍在校的學弟妹們，以下就是訪問重點的整理：

一、教教學強調引起動機，教每一新單元之前要事先想想，如何以生活化的假子或以前曾經學習過的舊經驗來引起學習動機。

二、因式分解：要教授因式分解這一單元時，可先提「因數分解」。國中並無「因數分解」這一名詞，不過學王都學過，每一個自然數都可以因數分解，例如：6分解為2乘以3，這是原本他們就曉得，可稍加利用。在學習的理論中，要學習新的經驗應由舊的經驗為出發點，如此重疊上去，效果顯著。

使同學熟習、了解之後，以後提起「因數分解」他們即立刻知道。提過因數分解，接著可以向學生發問：學習因數分解有什麼用？一般同學聽到這問題就會楞住了，平常根本沒思考過，此時，叫幾個程度較不錯的學生起來回答，可達引起動機的目的。親愛的之人，你是否曾想過此問題？在此，提兩點供作參考，聰明如你，　然有更多的答案：1.自然數質數的唯一分解，將自然數分解為質因數的乘積。2.可運用到分數的四則運算，分數作加減時，分母的通分，或作約分時，約去相同公因數。皆會用到因數分解的觀念。

因式分解那一單元有許多公式，該不該要求學生背呢？也設，你在家教當中，曾有此困惑，楊學長針對此問題，說出他的看法：一般的教法會要求學生背，至少有六個基本的公式確實得背，不過，數學和其他科目最大不同之處，就是不能只靠死背，眞正的領悟和只是把它背起來就不同了。學生遇到不同面貌的問題，是不是會將基本加以應用，是教學需要注意到的地方。老師除了要學生將公式記得，更重要的是要講解如何用一個公式，例如（x^2+2x+1）要注意到有三項（當然，他們得先知道什麼是「項」），而頭尾兩項是某數或某式的平方，中間可看成那兩數乘積的兩倍，具備此形式即

可化成完全平方式。若是（ x^2-4 ）只有兩項，就不作此考慮，這是平方差的公式。前面兩個例子是較簡單的題目，若比較難的問題，可能需要用到許多公式，這樣的問題能發揮數學的精神。教到最後可做個歸納總結：只有兩項就是平方差、立方和、立方差，或提出公因式；至於三項的式子，最先想到的是十字交叉相乘、完全平方；四項的比較難，可能是提出公因數，重新分組，分成三項一組和一個一項或二組二項；五項一定是要分組或拆項，六項類似五項。有一原則，較多項時要去括號重新組，再代基本公式。這些技巧或特別的類型就需要稍微記一下。在A班上課時，可以將這些歸納整理在教學過程中逐漸灌疏給學生，訓練他們思考的能力。

㈢負負得正：

負負得正是你我都非常熟音的一個觀念，若要你舉一日常生活的例子說明此一重要觀念，你可有底稿乎？楊學長以地層下陷的問題說明。有兩個變數，時間及地層高度。時間以現在爲零，往後爲正，往前爲負；地層下陷以現在高度爲零，往上爲正，往下爲負。若以台南爲例，假設每年下陷2公分，，則五年前的地層高度和現在比較，現在是零，5年前的高度是負2乘以負5等於正10 。相當有趣，不是嗎？實際上，並不是每件事情都適宜「負負得正」這個觀念，這點應讓學生了解，若一樣東西無法賦予它負的涵義或定義的不明確，就會產生矛盲的的現象。而地層下陷是個極不錯的例子，現在教材中把減法看成是加相反數，減了看成加負了，這可和國小學過的倒數觀念互相對照，即作分數的除法時，除數要變成倒數再作相乘。兩個觀念對照著講，促進學生的了解。

㈣平面座標：

在座標平面教學中，學長爲引起動機，曾大膽的玩了個撲克牌遊戲，引起學生極高的學習興致。玩法如下述：在52張牌中任意挑出36張，排成下列圖形：

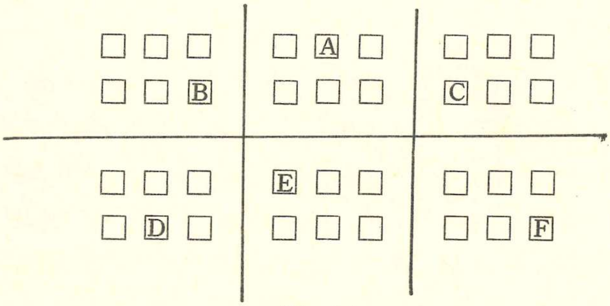


圖 ㈠

此時，老師可徵求某一學生當助手，而老師事先與助手「培養默契」取得協調，當第三者（其他學生）向老師任意指其中一張牌，那位助手並不在場，即助手在不知情的情況下，在老師「一句話」的暗示下能正確推測出牌的位置。以下舉些例子，聰明的乙人，你能發現絕竅所在嗎？

學生甲指定A的位置，老師說：西施是個美女。

學生乙指定B的位置，老師說：童安格的歌曲很受歡迎。

學生丙指定C的位置，老師說：小婉君喜歡小鹿。

學生丁指定D的位置，老師說：馬兒在吃草。

學生戊指定E的位置，老師說：紅花別在新郎身上。

學生己指定F的位置，老師說：電腦是部萬能的機器。

動動你的腦，腸枯思竭嗎？再給你些提出：

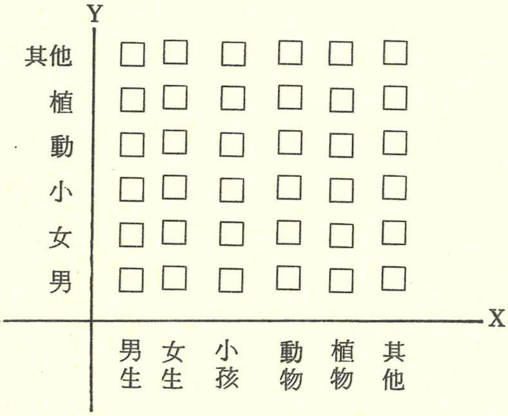
①每句話中有兩個名詞。

②全部的牌分爲六大格，每大格中又有六小格。

如何？投降了吧！告訴你答案，每格各代表一類的名詞：而每一句話的前面

男人	女人	小孩	
動物	植物	非動	非植

一名詞提示在那一大格，後面的名詞是暗示小格的所在。懂了吧！例如：F那張牌的提示也可以為：馬桶是金子做的。你可有其他答案？以後在班上可試試，一定能製造不少「笑果」。或許你要問此遊戲與座標有什麼關係？當你把圖形(一)轉變成以下的圖形就能明白了！X座標代表大格、Y座標代表小格。



五函數：

可以販賣機為例，設計較簡單的販賣機，則飲料是錢的函數，強調對於每一個 x 都只有一個 y 對應，不過，這個要讓學生了解很難，能判斷是否為函數的圖形就不錯了，有一對一和多對一，在國中還無法學到很深的，高中都難以體會了，只要先讓學生有個概念就可以。

看完了這位學長的許多經驗之談，未來的老師們可有何心得，思考後、整理過，把它記下來吧！也許是以後的利器呢？但別畫地自限喔!!

(四)

整理：鄭英豪

黃熒惠，75級系友，服務於板橋新埔國中，曾任A^{+}班導師三年，現爲專任數學教師。

談國中老師的甘苦，應分成兩部份來談，一是專屬於數學的部份，一是一般老師的角色。

首先談數學老師的部份。

教數學難，其實也沒想像中那麼難，以一個大學數學系畢業生的眼光來看，學生們學不好似乎是笨死了，即使有老師會說“其實學不好很正常”也很難令人體會這句話的背後帶有多少年的失望。眞正的困難是，老師（尤其是主修數學的老師）和學生們都會懷疑，學這一大堆數學要幹嘛？短視一點，要考試嘛！那麼學這些的眞正用意在那裡，不僅學生不懂，連唸了一大堆數學的我也不懂。

數學有用，但是對中學生而言，學多項式，學幾何證明有用，實在是說不清楚，到底有什麼用？增進思考？養成推理能力？這些非得唸一堆數學不可嗎？

對我而言，數學的訓練似乎幫助我有比較靈敏、清晰的思考，尤其是碰到一些“難想”的事務時，確實能使我比較有分析、抽絲ㄅㄛ ㄐㄧㄢˇ的本事，問題是，這是唸數學養成的嗎？還是我本來就有這種能力？

很多唸數學的人還不是糊裡糊塗？

再說，告訴學生說唸數學能幫助思考，想怕學生是聽不進去的，至少我的學生是不吃這一套的。

所以，只好另外找說詞說數學有用。但是很遺憾，我說的學生聽不懂。

舉個例子說，教學生負數，用溫度計來說，學生馬上會問，零下五度就零下五度，爲什麼要　叫－5度？通常我會用賺、賠，向東走向西走來介紹，問題是這些已經都有方法說它了，何必多個符號？

另外就是分寸的問題，所謂分寸就是這個數學主題的深廣程度，那裡是

試暫停的深度？這個恐怕得由歷年聯考題來決定了。

比如說十分逼近法求開根值，聯考要是不考也就算了，它的計算並不是每個人都有把握今對的，如果死腦筋地用十分法去逼近，恐怕是事倍功半，聯考要考，所以教直式開方法，至少讓學生有能力去先知道結果是多少，然後再去十分逼近吧！

還有一個困難就是一個新單元怎麼開始，那第一句話很難出口。比如說第一册量與數，第三册比例的部份，那些東西學生都已有相當程度的認識，現在要拿來在課堂上教，還眞不知道要怎麼辦。根本不知道學生的已知有多少。

當然這諸多問題到目前我都沒能解決，主要是也不知道找誰去問就算有人告訴我一些東西，也很虛浮，什麼要與經驗結合啦，要先引起動機啦，這些話有說沒說似乎都沒什麼作用。其次談到老師這個角色。

老師很可憐的，尤其是主科老師。

段考下來，成績低落，家長打電話來問，我兒子數學怎麼考那麼差？你要告訴他什麼？

“全班都很差”？那等於打自己一個耳光，“全校都很差”，那這種打擊學生士氣的題目爲什麼要出？你要告訴他眞相嗎？

因爲命題老師生他班上學生的氣，決定殺，於是全年級都下地獄。但是在第一線上　著的是老師。這次考試考了一題你一看，完蛋！沒教。你怎麼向學生交待？別班都有教。於是學生去別班老師家補習，眞有效，段考成績好起來了。這種情況你要叫大家相信那份題目出得太難了嗎？或者，你要說命題老師出得太偏了？恐怕連你自己都不相信這種話。

時間久了，學生們一入學就知道，那個老師教得好，那個老師補得好，你還能淸高、堅持？所以要學生信任你很難。如果學生都不信任你，你還信任你自己嗎？

時間久了，教材熟透了，人也見多了，於是，就麻木了。開始打，開始過，開始考課外題。另外一個壓力是來自同事間的。

聯考出一份考題，你認爲靈活有內容，考出來也不好不壞，問題來了，

聯考會考這種題目嗎？沒見過，同事們笑你。連你自己都會覺得同樣吃粉筆灰，爲什麼我和別人不一樣。眼看著同事們一個個換工作換環境，你會覺得，其實，這裡不差你一個老師，很快的就厭倦了。到目前爲止我仍沒找到改變現狀的方法，當然我可以說一些很漂亮很有道理的東西來說，其實只要怎樣怎樣就可以好些，但是那是作文，並不是眞的那樣。在師大老實說並沒有對這些問題有什麼收穫，或許老們說過，那又如何？聽與面對是兩碼子事。我唯一的建議是不要太堅持什麼一定是什麼，一定要怎樣，去教書，很多東西都是新的，而對它，就不是別人能帮助得了的，太多的堅持與“以爲”，只會使自己一次又一次無法置信地接受。多看一些書，不是數學的書，漫畫要看，電動玩具要玩，你才有可能和你的學生溝通，他們是平凡的小孩，數學只是一個四節的課，大部份時間他們的話題都不是數字，只知道數學是沒用的。

(五)

訪談老師：張攀炎

任教學校：苗栗縣立苑裡國中

任教時間：十五年

畢業學校：師大數學系夜間部

訪談內容：

一、前言

本次訪問進行了兩個晚上，訪問時爲力求自然，事先擬定了幾個原則：①不用錄音機當場錄音。②僅少數幾個單元部分（如幾何、未知數）先訂問題。③記錄時僅掌握重點，事後再詳細整理，所以部分內容無關數學教學的只酌量加入，同時呈現在同學面前的訪問稿是評論式而非原始的對話型式。

二、內容

(一)關於整體教材

(1)教材編排程序：最大的編排問題出現在第四册。第四册前三章因式分解、一元二次方程式、數列與級數，全部是重點，以前是分散在各册，現在卻集中在一起，數列與級數又從二章縮減爲一章，使得末册的分量比其他各册多出很多，正常地教，兩學期也教不完。另外編教材者似乎有個觀念，沒有用到的就跳過去，像複數這個比較艱澀的單元就完全刪掉了。但問題是該講的觀念不講會造成學生邏輯上的斷層，增加學習困擾，例如因式和倍式刪掉了而直接講分式

$\frac{1}{(X-2)^2}-\frac{2}{X+3}=\frac{3}{(2X-1)(X-2)}$，學生不懂同乘的$(X-2)^2(X+3)(2X-1)$是什麼意義，像這種觀念沒講就跳出題目，教起來很頭痛。適當的排法是如舊教材一樣，先教多項式

，再講因式分解，再教方程式、應式……課程上有順序，才能避免浪費時間。

⑵學生程度：可分兩方面來講：①按照常態分配的法則來講，十個班級的學生充其量能挑出1～2個班級可以上大學，以苑裡國中來講，才不過第三班（尚屬前段班、升學班）程度就差很多，連課本都不太懂，上起課來師生雙方都痛苦，所以經常一進教室就想趕快下課。②從教材的影響來講，現在的學生運算能力差很多，原因是因爲舊國小教材內容很多很雜，相對地四則運算練習的機會少很多，所以現在國中的四則運算能力較差，由於四則運算是數學中很基本的能力，所以現在國中生的數學能力也退步了。

⑶教材簡易度：現在課本的編排方向有簡化的趨勢，如複數、對數、因倍式都刪掉了，而新加入的敍述統計、機率等若照課本的分量再加一點東西進去，倒是很簡單。教育當局的目的可能在於現在學一點，高中再多學一點，大學時學得又是一個程度了，如此用循序漸進的方式來教育。

㈠關於各單元的幾個問題

⑴問：現在國小教材引進未知數的觀念以銜接國中課程，教起來有什麼差別？

答：國小事先教過，理解力較強，所以國中時再講都比較容易懂，但是正因爲教材變雜了，每一單元都無法熟練，所以要他做卻不一定做得出來。

問：幾何給學生的困擾？

答：現在幾何是打散在各册裏面，思考方向就比較多，對學生而言，可以增進推理能力，至於合起來怎麼樣就不敢說了，可能會因課程不連貫，缺乏整合能力。在內容上只是分量變多了，並沒有比較特別難教的。

問：坐標幾何中，方程式和圖形的對應及極大、小值和最高點、最低點的對應如何說明？

答：解析幾何裏，方程式和圖形的對應問題就是一點一點的描，描幾點出來之後再把圖形連出來，假如學生不相信就再多描幾點，而拋物綫的最高點、最低點就告訴他們，拋物綫上任一點所對應的Y值在最低點時爲最小值，在最高點時爲最大值，只能用這樣子說明，以一個國中生的程度，也很難用嚴密的理論來證明。

問：前面所講等差、等比級數的合併及課程的調動除了使第四册分量暴增外，對課程本身有否影響？

答：再舉個例子來看，

$$a+b=9,\ a\cdot b=26 \Rightarrow a^3+b^3=?$$

解：

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

$$=9^3-3\cdot 26(9)=27$$

這是多項式單元裏的題目，而解答時要用到因式分解的公式，然而現在的多項式是在第三册，因式分解卻到第四册才敎，結果變成前面的題目要用後面尚未學習的觀念，學生當然覺得很難，所以課程安排順序不當和刪掉某些必要的課程一樣會造成許多困擾，這會降低學生的學習興趣。

㈢其他

⑴十二年國敎

根據比較新的資料，十二年國敎之後，高中入學標準由各縣市自訂，數學就不一定像現在這麼吃香了。譬如說台中一中訂的標準可能是數學佔 10 %，歷史、地理各佔 10 %，甚至也許數學佔 8 %，歷史、地理卻佔 12 %，那麼各國中就不會特別加強數學，也就能各科並重，五育兼顧了。

粗略來看，目前的敎育政策似乎在走美國模式。入那一所高中是照比例分配的，每班分配幾個，如此爲了讓優秀的學生多上好高中，學校只好採常態編班，再加上前面的正常敎學，以後敎育大概可以正常一點。另外爲了因應高中的增加，大學會逐年增加，同時改採申請制，其中可能有些是野雞大學，只要經過學生及社會大衆的排斥，自然就

會被淘汰了。

(2)學生問題

綜歸來說，在國中教書會有什麼困擾是騙人的，學生的智力發展到一定的程度自然就懂了，當然鄉下小孩比較不好問，所以問題較少，可能也是原因。事實上最大的問題都是有關學生的品性，曾經有一電視上的座談會，教育部長毛高文承認經統計，12％的國中生是既不想升學也不想就業，每天只是到處晃，想想看若不好好地安頓，12％的國中生可以製造出多少問題？

訪

1937 年第二次世界大戰， 1945年日本宣佈無條件投降，臺灣光復。光復後的四十五年，也就是公元 2001 年的11年前，該年3月20日下午的一通電話是為導火線，結果　　請繼續看下去。

詳細經過：3月20日下午4:00左右我撥了362××××電話。第一次，我撥錯號碼；第二次，還是撥錯，秉持著不屈不撓、拋頭顱、灑熱血、奮戰不懈、勇往直前的精神，皇天不負苦心人，終於打通了（心中雀躍不已）。喂！是朱樺老師嗎？

對！

老師我是師大學生，想找你做個訪談，主題是老師對數學的學習過程，不知老師什麼時候有空？

好！暫定下星期三，也就是3月28日上午10:00　，如需更改我再打電話給你。

3月28日上午9:50出發，一路上風和日麗，烏煙瘴氣，約莫十來分鐘，我赫然站立在舊數館107室門口，朱樺老師，引我進研究室。

問（以下簡以Q代之）：先請老師談一談求學的經過，好嗎？

答（以下以A代之）：從小學、中學、大學到研究所，就跟一般人無異。

Q：老師唸那所研究所？

A：從大學、碩士班、博士班一直在台大唸。

Q：那麼老師未曾出國嘍？

A：對！沒有。

Q：老師是一開始就唸數學嗎？爲什麼？

A：對！大概從小學五、六年級開始我就喜歡數學，所以我也沒有特別去選擇，好像就認定了喜歡數學，考大學時因爲分數距數學系還差了 11 分，所以考上了地理系，但唸地理對我來說不太方便，像地理、地質、氣象常常要在野外實習，所以我就轉到數學系。

Q：老師是什麼時候轉系的？

A：台大算是蠻開明的，在第一次期中考前學校就准許我可以不修原來的課，改選數學系的課，但在一年後才正式申請轉系。

Q：老師在學習數學的過程中，是否順利？有沒有遇到困難、或挫折？

A：困難一定是有。我舉個例子，小學五、六年級時與方程式，裏頭有一個口，外頭一大堆括弧，那時候自然不知什麼是移項，譬如□＋5＝10，很自然你就把5減到右邊（即□＝10－5，尙未有明確的移項概念），2×□＝10，自然□＝10÷2＝5，我不知爲何如此。所以不知如何去計算其它的題目。那天晚上我做習題、怎麼算，結果代回原式都不對。本來幾分鐘就解決的習題，那個晚上一直摸不清，急得都快哭了，於是挑燈夜戰，硬搞，後來一下把它弄通了，我記得那是我第一次遇到的麻煩處。（喜悅之情洋溢，不禁也令我分享了那種快悅）

第二個印象深刻的是高三時數列之極限，雖然我會背誦 $\forall\ \varepsilon > 0$ $N \in Z$ $\forall n > N$ $|a_n - b| < \varepsilon$ ，但我一直感覺不出爲什麼滿足這定義，a_n 就趨近於 b，那時候我整天就在想著這個問題，大概有兩個星期之久，直到有一天我和我數學老師去參加一個活動，活動開始前我還在想。忽然我就跟老師說，我想通了（喜悅之情再度浮現）像這樣一件事，不論老師或課本是否解釋透徹，還是要靠自己費心去揣摩、領會。

Q：之後還有沒有類似的經驗。

A：然後就是大一的線性代數，那時我從地理系轉過來，比別人晚了一個月，所以就不太容易跟得上，那開的課爲集合論，但那學期有⅓是線性代數；高中時代唸的是嘉義縣東石高中，是所程度較差的學校，所以大半

靠自己唸，對於課本之外的東西涉獵很少，多半在課本上打轉，甚至於什麽才是〝眞正〞的證明，也不是很清楚。所以第一個學期的線性代數就補考，記得那一年寒假正巧寒訓，所以有兩個月假期，人家上成功嶺，我在家裏唸集合論及線性代數。兩個月從頭到尾，慢慢啃，不知啃幾遍，習題一題一題作，結果就搞通了，補考時覺得太 triuial 了，後來再繼續唸線性代數就不一樣了，所以我覺得請數學有時也要下苦功，難關一過就柳暗花明的開朗了，當然有人幫忙會方便些，但自己的功夫是不可少的。

Q：老師是否可介紹一下在哪一方面較有興趣。

A：我目前唸的是交換代數。我想我之所以會唸代數可能有幾個原因。首先是那時候在線性代數上所花的功夫，還有一個是在羣論上我花了一些功夫，那時是在春假前後，調課加上放假，前後有兩個星期，我就專攻羣論。原來我的代數成績都是低空掠過，那次期中考却考了 90 分，再者在大三時我修了施拱星先生的整數論，他的教學法，引導我對代數有更多的認識，也有更大的興趣。

Q：老師在日常生活中唸數學外還做些什麽？

A：在休閒方面，我喜歡集郵，也花一些時間在讀聖經和基督徒的聚會上。我認爲一個人要有一個正常的信仰，這信仰會賦予你人生的意義，也會引導你一生走在正確的路上，更會在人生的旅途加力給你，人生最忌諱的是庸庸碌碌，却不知所從。

Q：老師如果再做一次選擇，是否仍會選擇數學？爲什麽？

A：（考慮了一會兒）我自己本來對文學有一些興趣，但現在看來，如果做爲一種職業，可能還是數學。

Q：以我個人經驗而言，同學多半認爲大學的課程，譬如代數，太過抽象，老師是否有好一些克服的方法。

A：一般而言抽象是相對的。比如說，對一般來說：我們所生活的空間 R^3 是最具體的，可是對物理學家來說， R^4 最具體。對唸數學的人而言 R^n 亦極爲具體，甚至 R^∞ 都覺得不太有什麽困難，所以抽象不是絕

對的，藉著合適的學習、思考，過去覺得抽象的事物，也會慢慢〝覺得〞具體了。就像〝羣〞，有人覺得抽象，有人覺得具體。當然這跟你本身的〝細胞〞有關，也跟自己的思考培養有關，另外老師的指導也很重要。例如：講羣時，不妨先從具體的例子下手，尤其是排列羣，在沒有羣的語言之下，先將排列羣的基本性質弄清楚，接著再提供許多其他有關羣的例子，再引入羣的定義。接著在論證一般性質的過程中，也不斷輔以實例來說明。同學們在自行學習時，也不斷以實際例子來印證所學的理論，藉著理論和實例，反覆對照、印證，抽象的理論就會慢慢具體化了，慢慢有感覺了。

Q：對於數學系的同學，老師有什麽建議呢？

A：不知你們系上讀書風氣如何？

Q：我覺得有一小撮人很用功，一大半人忙自己工作，另一小撮人混日子。（ sorry ！家醜外揚嘍！ ）

A：如果非常沒有興趣，我認爲應該考慮轉系，大學的時間最好不要浪費，免得回過頭來很後悔，想轉系的話無論如何得先拚個漂漂亮亮的成績。如果有同學並不排斥讀數學，但是覺得沒有前途，我不曉得是哪個前（哈哈一笑）。其實讀數學的前途不錯。並不是唸數學將來就是要作數學，許多相關的方面都想用唸數學的人，他們所要的不完全是你的數學，而是你的人。因爲一個受過〝良好〞數學訓練的人，對於邏輯推理、數字能力、事情決斷、辦事能力都有幫助；你也可以留在數學本行，也可以攻統計、離散數學、物理數學、電腦；也可以轉到財經、商業方面。路其實很寬廣的。

當然在你改行的時候，例如你要改電腦。開始的時候，你必須比別的同學，加倍功夫，因爲你要用一兩年時間來抵別人四年，但是在你趕上以後，你就比別人強，因爲你有比別人更強的數學根基。

Q：老師覺得以後想唸數學的人要有什麽準備工作？

A：把眼前每一門課都唸好，不必好高騖遠，儘量多做習題，不妨多看一些數學史，對所學的背景有所了解，這樣就能把所學連貫在一起。不管喜

不喜歡，無論是分析、代數、幾何都儘量學好，如果有能力，比別人學得快，不妨往上繼續唸（例如初微讀完就繼續自修高微，但切記一定要讀得踏實。）

Q：謝謝老師接受訪談！

本文的完成要感謝的人太多了，不知要先從誰感謝起，就只有謝天、感謝中華民國政府德政、李總統登輝先生、三民主義，中華民國萬歲！

更午　仲春

寫在後頭

偶然間在雜誌上看到了兩則“新”聞：

〔紐約中央公園記事1〕1844年7月3日，一群紐約客爭論一則紐約晚報的社論：「炎炎夏熱襲來，有些人離開市鎮到鄉村陰涼的避暑地，到荷柏坑(Hoboken)或新布萊頓(New Brighton) 旅行避暑，如市政當局眞要做事，大可以給咱衆人廣袤樂土，市民不必出城就可以享受」。

〔紐約中央公園記事2〕1990年夏天的某個午後，一群紐約客正恣意享受紐約中央公園的美麗午后、陽光、森林、新鮮空氣…………。

心中頗有感觸，與得一個環境的改善是需要人來參與的。個人如置身於某一團體，爲該團體的一份子，那麼他就有權責去參與；這一個參與的態度我想不管現在、將來，在何地都是應然的。同樣的師大數學的發展也是同學參與，所付出心力的表徵。

也許同學可嘗試去捉住一些個問題，嘗試去用自己的眼光、想法來把“牠”“做掉”，這才是學習的目的，而不是由別人告訴一些“東西”而你只能決定“接受”或“不接受”，教育的目的之一是在使人“獨立”是吧！

寫文章不是要使人看不懂或看起來“很玄”，別人都能看的東西不等於膚淺，其實搞文字、符號的遊戲是令人繁厭的事情，試自己捫心自問有多少自己看起來沒什麼，能看的東西被自我的執見所漏失了，科學的工作來簡化問題，使得問題容易解決，但我發現太多的人都喜歡把文章寫得自己也看不懂，用來唬唬別人，實在無聊得很。

楊青育
編輯部 劉志鴻
洪士薰

發行人：陳　昭　地
出版者：國立臺灣師範大學數學學會
編　　輯：洪士薰、楊青育、劉志鴻
封　　面：陳　介　宇
印刷者：公館打字印刷有限公司
地　　址：台北市羅斯福路三段281號2樓
電　　話：(02)3633534
出版日期：中華民國七十九年六月十日

師大訓課刊登第136號

統 一 編 號
06385750370