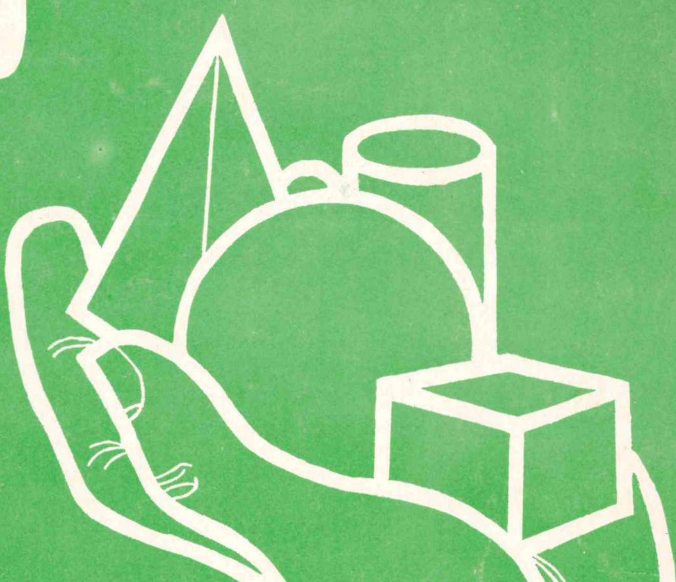
師大數學

10



師大數學學會出版

中華民國六十五年六月

系主任 序

本系成立於民國三十五年八月，首由張儒林先生擔任系主任，當時僅有數學系一年級及二年制專修科一年級各一班，同學三十餘人，敎授三位、助敎一位，嗣由管公度、潘璞、李新民、康洪元、范傳坡各敎授輪掌系務，歷經各主任之努力及其精一之計劃，始具今日規模。現本系日間部有十二班，夜間部五班，共有同學六百餘人，圖書壹萬陸千餘册（分藏於數研數資料室及理學院圖書舘約四千伍百種），雜誌百餘種，自去歲夏遷於新址後，環境煥新，有助於研究風尙，師生孜孜不息，均爲美好遠景而奮發。

畢業系友，已逾越千人，負笈重洋者多各有成就（獲博士學位者約九十人，僅獲碩士學位者約壹百五十餘人）或執敎於高等學府，或繼續高深研究，餘多服務於中等敎育界，平時諄諄敎學，誨人不倦，敦品篤行，懷抱熱忱，此實爲本校善良風氣之所致。

邇來科學進展甚速，數學之需要甚切，本系之任務更日益增大，除學術研究外，更肩負數學敎育之發展及中等數學敎育輔導之重要任務。同仁等均懷履薄之心，致力於未來發展，並時時注意於以下數點：

一、安定中求充實，再求發展。

二、增強敎材敎法之研究，鼓勵對數學敎育有貢獻者出國觀摩。

三、注重高深學術之研究及應用。

四、申請增設電子計算機組以配合中等數學敎育之發展。

五、增訂圖書雜誌及增聘專門人才。

爲增強研究風尙，本系於十年前創辦年刊，發表創作及研究心得。切磋琢磨，提高學習興趣。屢繼負責同學之辛勞耕耘及師生系友之共同支持，漸茲茁壯，今後請大家更不吝珠璣，源源賜稿，則本刊必前程似錦，散發絢爛光芒，於此，至表謝忱，更盼我師生系友善珍此片園地。

常法徽 謹識

六十五年六月

—— 序言 ——

這是一大嚐試，本期系刊我們全部採用系友及同學們的作品，而不似前數期的系刊百分之九十是老師們的作品。我們確知同學們之作品遠不及老師們作品那麼富思想、具創意及嚴密完整。我們也確知目前數學系的學生太過於依賴老師的領帶，我們只會跟著老師的後面走，不會自己走出象牙塔，甚至連問聲：「老師！我們去那裏？」都不會。因此，我們寧可多費些篇幅讓同學們自己來開墾，讓他們嘗試去創作，不再只作個跟隨者。我們盼望著一片美好的田園將於不久的將來呈現在眼前。

本來，本期系刊還有一更大膽的嘗試，我們打算開闢一專欄——「我思與我願」。在這專欄中我們分別邀請、訪問了系中的數位老師及許許多多的同學，請他們撰文對本系的過去、現在加以比較批評，並發表本系今後所應努力發展之方向。我們收到各方對這問題所發表的文章非常的多，且意見都甚爲珍貴。因爲篇幅有限，我們不能一一刊登，在此僅將其意見綜合如下：

1. 師資之加強——本系是全國最大、人數最多的數學系，但是在師資方面稍感不足。本系日間部共有十二班，夜間部五班，加上教育系數學組、物理系、化學系及中等學校教師研習班所需開課之班數不下七、八十班次，但本系卻僅有教授 10 位、副教授 6 位、講師 7 位，助教 12 位，平均每 2 班次才可分配到一位老師，老師們因授課時數較多。對同學難以多加指導同學們頗感摸索之艱，因此希望在師資方面須增加人數，充實教學陣容。

2. 研究環境之建立——自從本系遷居理學院後，讀書環境雖大有改善，但卻不盡完美。圖書館內不夠安靜，借閱參考資料手續太繁，同學們多感圖書館坐位不夠及不甚安靜爲苦。有本系許多同學曾極力向理學院建議開闢數學系專用研究教室，以利切磋，但理學院只開放 B103 教室下午（14～18 時）半天，頗感時間太短，如能增爲全日（早晨八時至二十時）至表感激。

本系自從有了教授研究室後，已有老師在研究室指導學生，但因老師們課務較多，無法經常留在研究室，同學等希望能多與老師接觸，能多多聆聽老師之指導。因此，希望老師們多訂定課外指導時間，以利同學之聆教。

3. 研究風氣之培養——數學注重討論研究，要使本系茁長，要使每個人知識增加，本系師生必須多討論、多研究、多切磋、多琢磨，因此，我們建議系內裏策劃組織各科研究小組，指派專人指導。

4. 授課內容的改進——希望課程要精簡，要完整，要有序列的進行，更希望完成一定的進度。在教授指定某些參考書內，要切實的研讀。

5. 加強學會的功能——學會不但是康樂性的社團，更應該是陶冶品德及助長研究風氣的社團，因此對於今後的學會，應多方兼顧，除舉辦康樂活動外尤宜發揚人格完美之培養，及多請專家學者講演，以增長研究之風尙。

本期系刊爲慶祝本校卅週年校慶，內容比往年豐富，這必須感謝每一位賜稿的系友及同學，我們更感謝常主任、林義雄老師、郭汾派老師、呂溪本老師、鄭麗卿老師的指導。

又本期系刊承蒙張校長親提刋頭文字，對張校長之重視本刋謹代表全系師生於此申謝。

依照慣例，本刋中所有疏誤概由編輯小組負全部責任，希各讀者不吝批評指敎！

師大數學學會文教股　孫文先　謹誌

中華民國六十五年六月

目　錄

數學系的同學們所成的集合就像一個「體」，在這個「體」的「形式裡面」，包含了許多大大小小的「群」、「理想」、和一個親愛的「環」。同窗四載後，您我以後相見的「機率」，也許早就「趨近於零了」。因此，不論將來您要向北「平移」，還是向南「旋轉」；向外「發散」還是向內「收斂」，我竭誠地盼望以後：

我們的信件是「可交換」的；
我們的心靈是「可結合」的；
我們的友誼是「可分配」的；
我們的痛苦是「可微分」的；
我們的快樂是「可積分」的；
我們的距離是「可量長」的；
我們的空間是「無限維」的。

更盼望將來各地都有我們的「單位元素」負責聯絡。最後祝福各位早日找到您（您）的「反元素」，然後有「後繼元素」，使你們在各方面的發展就像 Field Extension 一般地「連續」到永遠，永遠………。

數四乙

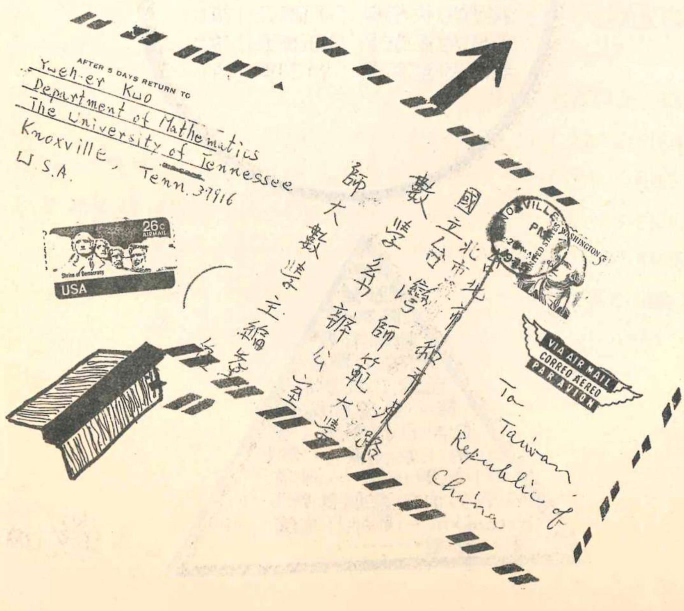
A NOTE ON HOMOGENEOUS INEQUALITY SYSTEMS

by

Yueh-er kuo (郭王月娥)

The University of Tennessee
Knoxville, Tennessee 37916
U.S.A.

A Sir In U.S.A.



This note gives a summary of some properties of homogeneous inequality systems and examples of finding a solution basis and general solutions of homogeneous inequality systems. The details about the properties of homogeneous systems can be found from [1].

To solve systems of linear inequalities is one of the most important tasks in the theory of linear algebra. The concept of solution basis mentioned in this note enables us to solve homogeneous inequality systems with variable sign ranges.

Throughout this paper R will denote the reals; R_n will denote Euclidean n-dimensional vector space. Greek letters shall designate real numbers, and small Roman letters shall designate single points in R_n. The origin is denoted by 0 or 0_n.

A finite set A in R_n can be regarded as a matrix. The transpose of A will be denoted by A^T. (A, B) and $\binom{A}{B}$ will mean the matrix obtained from A and B by juxtaposition and by writing one below the other, respectively. "r" shall designate the rank of A, n the number of rows and m the number of columns.

A_i shall mean a submatrix of A which has rank i and consists of i columns of A, $1 \leq i \leq r$. Determinant of a square matrix A will be denoted by $\det A$.

DEFINITION 1. (a). A matrix consisting of $n - r$ vectors of a basis of the solution space of $xA = 0$ as its rows is called an <u>equational base</u> of A, and is denoted by C or C_A.

DEFINITION 1. (b). The six convex sets-- R, R^+, $\bar{R}^+$, R^-, $\bar{R}^-$, and R^o --are called <u>one-dimensional sign ranges</u>, where

$R^+ = \{\alpha | \alpha \varepsilon R, \ \alpha > 0\}$, $R^- = \{\alpha | \alpha \varepsilon R , \ \alpha < 0\}$,

$\bar{R}^+ = \{\alpha | \alpha \varepsilon R , \ \alpha \geq 0\}$, $\bar{R}^- = \{\alpha | \alpha \varepsilon R , \ \alpha \leq 0\}$, and

$R^o = \{0\}$. $\bar{R}^+$ and $\bar{R}^-$ are also closed sign ranges.

DEFINITION 1. (c). A cartesian product $R^{(1)} \times R^{(2)} \times \ldots \times R^{(n)}$ is called an <u>n-dimensional sign range</u>, and is denoted by V_n , where $R^{(i)}$ is one of the six one-dimensional sign ranges for each i .

DEFINITION 1. (d). The cartesian product $\bar{R}^+ \times \ldots \times \bar{R}^+$ is called the <u>principal orthant</u> and is denoted by $\bar{V}_n^+$

A relation P will be written in the form

$$P_{a,\alpha,R^{(i)}} \ : \ xa + \alpha \ \varepsilon \ R^{(i)}$$

where x is a row vector of n unknowns, a is a column vector of n coefficients, α is a constant, and $R^{(i)}$ is a one-dimensional sign range.

DEFINITION 2. A <u>system</u> Σ is a set of finitely many relations and is written in the form

$$\Sigma_{A,c,V_m} \ : \ xA + c \ \varepsilon \ V_m \tag{1}$$

where A is an $n \times m$ matrix, c is a row vector of m constants, x is a row of n unknowns, and V_m is an m-dimensional sign range.

Each column of A corresponds to a relation P of Σ . If $c = 0$, then (1) is called a <u>homogeneous system</u>.

Consider a homogeneous system Σ , which is written in the form

$$\Sigma_{A,0,V_m} \quad : \quad xA \in V_m \tag{2}$$

Let ℓ be a point of R_n and let $\omega\ell \in S$, where $\omega \in R$, and S is the solution domain of (2).

DEFINITION 3. (a). The associated sign range $R^{(i)}$ of ω for $\omega\ell \in S$, S is the solution domain of (2) , is called the <u>coefficient range</u> belonging to ℓ and is denoted by $R^{(\ell)}$.

DEFINITION 3. (b). For $i = 1, 2, \ldots, p$, let $R^{(\ell_i)}$ be the coefficient range belonging to ℓ_i . Then the p-dimensional sign range $R^{(\ell_1)} \times R^{(\ell_2)} \times \ldots \times R^{(\ell_p)}$ is called the <u>coefficient range</u> belonging to $L = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_p \end{pmatrix}$, and it is denoted by W_L or W .

REMARK 1. Let S be the solution domain of (2) and let $w \in W_L$. Then $w = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p)$ with $\omega_i \in R^{(\ell_i)}$. Since $\omega_i \ell_i \in S$ for each i , we have that $wL = \sum \omega_i \ell_i \in S$.

We will denote the set $\{wL \mid w \in W\}$, by WL .

DEFINITION 4. (a). A matrix L is called a <u>solution matrix</u> of A if $W(V_m)\, L = S(V_m)$ for each closed sign range V_m, where $S(V_m)$ is the solution domain of (2) and $W(V_m)$ is the coefficient range belonging to L with respect to $S(V_m)$, and it is denoted by L_A or L.

DEFINITION 4. (b). A solution matrix of A which contains no superfluous rows is called a <u>solution basis</u> of A and it is denoted by B_A.

THEOREM 1. (a). <u>A matrix L is a solution matrix of A if and only if it contains a solution basis of A.</u>

THEOREM 1. (b). <u>Every solution matrix L_A of A is a solution matrix of A_i, where A_i is a submatrix of A consisting of i independent columns of A.</u>

THEOREM 1. (c). <u>Let E_n be the identity matrix of order n, and a is a column vector of n constants, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Then</u>

$$L = \begin{pmatrix} L_1(a) \\ E_n \end{pmatrix}$$ <u>is a solution matrix of $A_o = (E_n, a)$.</u>

THEOREM 1. (d). <u>Every matrix A has a solution matrix.</u>

THEOREM 1. (e). <u>A matrix L, which, for each A_i of A, contains all rows of an equational base C_{A_i} of A_i, is a solution matrix.</u>

THEOREM 2. *Each matrix which contains an equational base of each A_r and each A_{r-1}, where r is the rank of A, is a solution matrix of* A.

REMARK 2. Since every A_r generates the same linear system as A, an equational base C_A of A is also an equational base of every A_r. Accordingly, for each A_{r-1}, an equational base can be obtained by adding one suitable row to the rows of a given C_A. For those A_{r-1} which generate the same linear system, we can choose the same added row.

PROPOSITION 1. Let C_A be given and let E_A be the matrix of all the added rows in Remark 2. Then $B_A = \begin{pmatrix} C_A \\ E_A \end{pmatrix}$ is a solution basis.

EXAMPLE 1. For

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

find a solution basis B_A.

SOLUTION. Since A has rank 3, C_A consists of $4 - 3 = 1$ row. The row, $(-1, -1, -1, 1)$ is orthogonal to A and is non-zero. So it is a C_A.

We can easily see that each three columns of A are linearly independent, which means that each two columns of A form an A_2 and that no two different A_2 generate the same linear system.

So, for each A_2, we will choose a row which is independent of C_A and is orthogonal to each column of A_2. If we let

$$A_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2^{(6)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

then we obtain

$$g_1 = (-1, -1, 1, 1), \quad g_2 = (-1, 0, -3, 1),$$

$$g_3 = (-1, 1, -1, 1), \quad g_4 = (-2, -1, 0, 1),$$

$$g_5 = (1, -1, -1, 1), \quad g_6 = (-3, 0, -1, 1),$$

where g_i is orthogonal to each column of $A_2^{(i)}$ and is independent of $(-1, -1, -1, 1)$, for each i, $i = i, 2, \ldots, 6$. By Proposition 1,

$$B_A = \begin{pmatrix} C_A \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

is a solution basis of A.

THEOREM 3. *Let*

$$B_1 = \begin{pmatrix} C_A^{(1)} \\ E_A^{(1)} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B_2 = \begin{pmatrix} C_A^{(2)} \\ E_A^{(2)} \end{pmatrix}$$

be two solution bases of A *described in Proposition* 1. *Then there exists a matrix* M *such that*

$$B_2 = M\, B_1 \;,$$

and

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} ,$$

where $\det\left(M_{11}\right) \cdot \det\left(M_{22}\right) \neq 0$, *and* M *is a diagonal matrix.*

PROPOSITION 2. (See [1]). Let V_m be a fixed closed m-dimensional sign range and S the solution domain of system (2). Then there exists a matrix

$$B_{A,V_m}^{(1)} = \begin{pmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2 \end{pmatrix}$$

such that, for $x \in S$, x can be written in the form

$$x = u\, P_1^{(1)} + v\, P_2 \;, \quad u \in R_j \;, \quad v \in \bar{V}_k^{+}$$

where j and k are the number of rows of $P_1^{(1)}$ and P_2 , respectively, and conversely any such expression is contained in S .

PROOF. Let $B_A = \begin{pmatrix} C_A \\ E_A \end{pmatrix}$ be a solution basis of A described in Proposition 1. Then, for $x \varepsilon S$, $x \varepsilon W B_A$ where W is the coefficient range belonging to B_A.

REMARK 3. We can omit all rows b of B_A which have coefficient range R^o, and replace all rows b which have coefficient range $\overline{R}^-$ by $-b$, so that the coefficient range belonging to our new matrix consists of R and $\overline{R}^+$ factors only. By reordering the rows, if necessary, we obtain a matrix which has the desired property.

EXAMPLE 2. Given

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

and $V_4 = \overline{R}^- \times \overline{R}^- \times \overline{R}^+ \times \overline{R}^+$, find a $B^{(1)}_{A,V_4} = \begin{pmatrix} P^{(1)}_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$ and the general solution of x of $xA \varepsilon V_4$, as described in Proposition 2.

SOLUTION. In Example 1, we have obtained a solution basis,

$$B_A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Consider the system $XA \varepsilon V_4$. Then every solution x can be written in the form $x \varepsilon W B_A$, where

$$W \subset \bar{R}^+ \times \bar{R}^- \times R^o \times \bar{R}^+ \times R^o \times R^o \ .$$

Since the fourth, sixth and seventh rows of B_A have coefficient range R^o , we can omit them. We replace the third row $(-1, 0, -3, 1)$, by $-1(-1, 0, -3, 1) = (1, 0, 3, -1)$, since it has coefficient range $\bar{R}^-$. Thus we get

$$B^{(1)}_{A,V_m} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Since only the first row of $B^{(1)}_{A,V_m}$ has coefficient range R , we have

$$P^{(1)}_1 = (-1, -1, -1, 1)$$

and

$$P_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Hence the general solution x of the system $xA \varepsilon V_4$ can be written in the form

$$x = \alpha\,(-1, -1, -1, 1) + v \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

where $\alpha \varepsilon R$, and $v \varepsilon \overline{V}_3^{\,+}$.

THEOREM 4. <u>The solution domain</u> S <u>of a closed homogeneous system is the sum of a linear space and a convex polyhedral cone.</u>

REMARK 4. In Proposition 2, $P_1^{(1)} = C_A$ since each row of C_A has coefficient range R , and no row of E_A has coefficient range R .

PROPOSITION 3. (See [1]). Let V_m be a fixed closed m-dimensional sign range and S the solution domain of system (2). Then there exists a matrix $B^{(2)}_{A,V_m}$ such that, for $x \varepsilon S$, x can be represented in the form $x = u\,B^{(2)}_{A,V_m}$, $u \varepsilon \overline{V}_\ell^{\,+}$, where ℓ is the number of rows of $B^{(2)}_{A,V_m}$.

PROOF. Let $B^{(1)}_{A,V_m} = \begin{pmatrix} P^{(1)}_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$ be a matrix described in Proposition 2. We obtain a matrix $P^{(2)}_1$ such that

$$P^{(2)}_1 = \begin{pmatrix} & E_j & \\ \lambda_1 & \lambda_2 \; \cdots & \lambda_j \end{pmatrix} P^{(1)}_1 \, , \quad \lambda_i \in R^- \, , \quad i = i \, , 2 \, , \ldots , j \, ,$$

where E_j is the identity matrix of order j, and j is the number of rows of $P^{(1)}_1$. Now, let

$$B^{(2)}_{A,V_m} = \begin{pmatrix} P^{(2)}_1 \\ P_2 \end{pmatrix} .$$

We will show that $B^{(2)}_{A,V_m}$ is the desired matrix. Since, for $x \in S$,

$$x = u\, P^{(1)}_1 + v\, P_2 \, , \quad u \in R_j \, , \quad v \in \overline{V}^+_k \, ,$$

it suffices to show that, for each row p_i of $P^{(1)}_1$, both p_i and $-p_i$ can be represented as a linear combination of the rows of $B^{(2)}_{A,V_m}$ with non-negative coefficients.

We have

$$P^{(2)}_1 = \begin{pmatrix} & E_j & \\ \lambda_1 & \lambda_2 \; \cdots & \lambda_j \end{pmatrix} P^{(1)}_1 = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_j \\ p_{j+1} \end{pmatrix} ,$$

where p_i , for $i = 1, 2, \ldots, j$, are the rows of $P_1^{(1)}$, and

$$p_{j+1} = \sum_{i=1}^{j} \lambda_i \, p_i \ .$$

So each row p_i of $P_1^{(1)}$ appears in $B_{A,V_m}^{(2)}$. Moreover, since

$$\sum_{i=1}^{j} (-\lambda_i) \, p_i + p_{j+1} = 0 \ ,$$

we have

$$-p_k = \sum_{i \neq k}^{j} \frac{\lambda_i}{\lambda_k} \, p_i + \frac{1}{-\lambda_k} \, p_{j+1} \ , \quad k = 1, 2, \ldots, j \ ,$$

where $-\lambda_k$ and $\frac{\lambda_i}{\lambda_k}$ are positive. This completes the proof.

EXAMPLE 3. Let

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} ,$$

and $V_4 = \overline{R}^- \times \overline{R}^- \times \overline{R}^+ \times \overline{R}^+$. Find a $B_{A,V_4}^{(2)} = \begin{pmatrix} P_1^{(2)} \\ P_2 \end{pmatrix}$ and the general solution x of $xA \in V_4$ as described in Proposition 3.

SOLUTION. In Example 2, we have obtained a

$$B^{(1)}_{A,V_4} = \begin{pmatrix} P^{(1)}_1 \\ P_2 \end{pmatrix} ,$$

where

$$P^{(1)}_1 = (-1, -1, -1, 1)$$

and

$$P_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

So, $P^{(2)}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} (-1, -1, -1, 1) \quad , \quad \lambda \in R^- \; .$

If we choose $\lambda = -1$, then we have

$$P^{(2)}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (-1, -1, -1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Thus, we have

$$B^{(2)}_{A,V_4} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

and

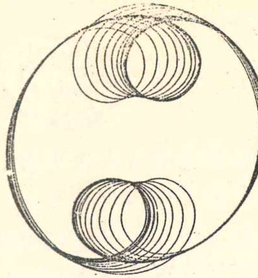
$$x = u \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u \,\varepsilon\, \overline{V}_5^{+} .$$

REFERENCES

1. D. R. Fulkerson, The Theory of Linear Inequalities, The Rand Corporation, Santa Monica, California, 1952.

2. D. Gale, "How to Solve Linear Inequalities," American Mathematical Monthly 76 (1969), 589-599.

3. A. W. Tucker, "Dual Systems of Homogeneous Linear Relations," Annals of Mathematical Studies 38 (1956), 3-18.



一個極大極小之實例

系友 顏啓麟

在這篇短文最主要之目的是給一例說明數學可用於解決一些日常生活中所遇到的問題，在下述問題僅表這些問題之某種之格式，讓我們首先敍述這問題。

【問題】若一電視機由 n 種相異之零件所組成，又設今每種零件各有 m 份，且其第 k 種零件之壽命分別爲 $\{a_{k,1}, a_{k,2}, \cdots\cdots, a_{k,m}\}_3$　$k=1, 2 \cdots\cdots n$，試找出一種組合方法使得，所組之 m 部電視機之壽命總和爲最長。

今若設

$$A=[a_{ij}]\ 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m=\begin{bmatrix} a_{11}, & a_{21}, & \cdots\cdots a_{n,1} \\ a_{12}, & a_{22}, & \cdots\cdots a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \\ a_{1m}, & a_{2m}, & \cdots\cdots a_{n,m} \end{bmatrix}$$

意表由 $\{a_{1j}, a_{2j}, \cdots\cdots, a_{n,j}\}$ 等零件構成第 j 個電視機，則其壽命必爲

$$\min_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij}$$

而所有電視機之壽命總和必爲：

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant m}\ \min_{1\leqslant i\leqslant n} a_{ij}$$

今以 $\alpha(A)$ 表之，又令

$$P(A)=\{A'=[a'_{ij}]\ ;\ a'_{ij}=a_{i f_i(j)},\ f_i \text{ 爲 } \{1, 2, \cdots\cdots, m\} \text{ 之一置換},\ 1\leqslant i\leqslant n\}$$

則由所給各零件組成 m 部電視機之各組合中以

$$\max\{\alpha(A')\ ;\ A'\in P(A)\}$$

爲最長壽命，以 $\tau(A)$ 表之。

令　$A=[a_{ij}]\ 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant k+1$，不失去一般性可假設

$$a_{1,k+1}=\min\{a_{i,j}\ ;\ 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant k+1\}$$

令　$B=[b_{ij}]\ 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant k$　　$b_{i,j}=a_{ij},\ 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant k$

則　$\bar{B}=[\bar{b}_{ij}]\ 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant k$

$\bar{A}=[\bar{a}_{ij}]\ 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant k+1$

令　$(\bar{A})_k = [\ \bar{a}_{ij}\ ]\ 1 \leqslant i \leqslant n\ ,\ 1 \leqslant j \leqslant k$

則　$\bar{b}_{ij} \leqslant \bar{a}_{ij}$　　$1 \leqslant j \leqslant n\ ,\ 1 \leqslant j \leqslant k$，故由註(1)可得

(4)　$\alpha(\bar{B}) \leqslant \alpha[(\bar{A})_k]$

因此，因α之定義，及(3)，(4)可得

$$\alpha(A) = \alpha(B) + a_{1,k+1} \leqslant \alpha(\bar{B}) + a_{1,k+1}$$

$$\leqslant \alpha[(\bar{A})_k) + a_{1,k+1} = \alpha(\bar{A})$$

故$\tau(A) = \alpha(\bar{A})$，證畢!!

〔註〕：若　$B = [\ b_{ij}\ ]\ 1 \leqslant i \leqslant n\ ,\ 1 \leqslant j \leqslant m\ ,\ C = [\ c_{ij}\ ]\ 1 \leqslant i \leqslant n\ ,$

$1 \leqslant j \leqslant m$且$b_{ij} \leqslant c_{ij}$　　$i = 1\ ,\ 2 \cdots\cdots,\ n$

$j = 1\ ,\ 2 \cdots\cdots,\ m$

顯然由定義可看出

(1)　$\alpha(B) \leqslant \alpha(C)$，

(2)　$\tau(B) \leqslant \tau(C)$。

對　$A = [\ a_{ij}\ ]\ 1 \leqslant i \leqslant n\ ,\ 1 \leqslant j \leqslant m$，定義$\bar{A} = [\ \bar{a}_{ij}\ ]\ 1 \leqslant i \leqslant n\ ,\ 1 \leqslant j \leqslant m$

為$P(A)$之元素滿足，　　$\bar{a}_{ij} \geq \bar{a}_{ij+1}$　　$1 \leq i \leq n$，　$1 \leq j \leq m-1$。

顯然最自然之猜測，即$\alpha(\bar{A}) = \tau(A)$，換言之，壽命較長的零件與壽命較長零件配合，壽命較短的零件與壽命較短之零件配合，如此之組合方法，所組成之m個電視機之壽命會最長。

欲解決我們的問題僅需證明以上之猜測為眞，即

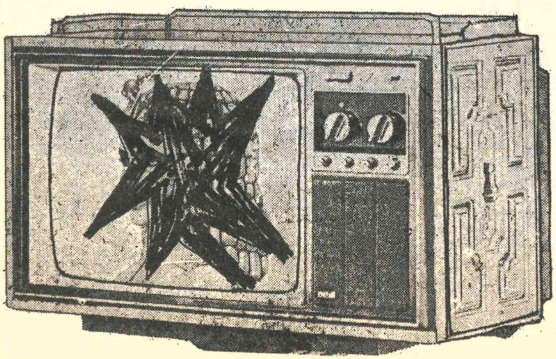
【命題】：設$A = [\ a_{ij}\ ]\ 1 \leqslant i \leqslant n\ ,\ 1 \leqslant j \leqslant m$則$\tau(A) = \alpha(\bar{A})$

【證明】：我們將對m用數學歸納法，顯然當$m = 1$時，

$$\{\bar{A}\} = \{A\} = P(A)$$

故　$\tau(A) = \alpha(A) = \alpha(A)$，今設$m = k$時成立，即對任何

$B = [\ b_{ij}\ ]\ 1 \leqslant i \leqslant n\ ,\ 1 \leqslant j \leqslant k$，　　$\tau(B) = \alpha(\bar{B})$成立。



從保角變換到非歐幾何

作者：數三丙 徐郁輝
指導老師：林義雄

1. 從歷史來看非歐幾何的產生

在歐基里德的「幾何原本」中，他用公設的方法，將幾何發展成數學上一個嚴格論證的模型。歐氏之第五公設「過一已知直線外一點，存在有惟一的一條直線平行於此一已知直線」，在這個平行線理論上，他予人以一種不得不相信的感覺，從古代的幾何學者，一直希望能找出這個公設與其他基本公設之關聯性，或將之除掉，而視之為一個定理，以其他公設證明之，然而至 19 世紀初，有關這第五公設之證明仍然闕失，而數學家亦懷疑到這關念本身，德國數學家高斯（ Gauss ），從1792年以後，便從事於這個問題的研究，他逐漸明白這疑問的正確敍述，最後他決定放棄第五 公設，並發展了一系相反主張之結果之定理，稍後德國數學家Schweikart 及 Taurinus 均隨相同之途徑，但他兩人無一人獲得這個問題的最後回答。高斯並沒有將其研究結果公布。至羅巴切夫斯基（ Lobachevskian ）採取與歐氏第五公設完全相悖之聲明，作為一個公設，結果發展成一個與歐氏幾何學相容之幾何學，于是有所謂的非歐幾何學；羅氏的這個想法，在相對論中被證明為正確。差不多與羅巴切夫斯基同時的匈牙利幾何學家亞諾司、波又伊（ Janos Bolyai ）也發現了證明第五公設之不可能性，及非歐幾何存在之可能性。

2. Klein 之 Erlangen計劃與Poincare model)

Klein 氏總括射影，仿射，與他各種幾何學所發展的結果之後，對於它們的形式通則，給予一個清楚的公式說明，即所謂 “ Erlangen 計劃 ” 其內容如下：

「我們可以考慮空間單值變換；作成一群（常就稱運動群）進行調查圖形在此群每一變化之下，仍能保有之諸性質，將之匯為一系統，即稱為所屬於此群之一套幾何學。」

顯然的在歐氏幾何上，我們只討論到剛體性質，其餘性質皆不予討論。

接下來讓我們來看Poincare model

今假設 K_Z，K_W，分別代表單位圓 $|Z|<1$，$|W|<1$，今假設存在有一個單位圓至單位圓的保角變換（ comformal mapping ）S， 使得 $S(Z_0)=W_0$，$S(\frac{1}{\overline{Z}_0})=\frac{1}{\overline{W}_0}$，則此保角變換可寫成如下之形式：

$$\frac{W-W_0}{1-W\overline{W}_0}=e^{i\theta}\frac{Z-Z_0}{1-Z\overline{Z}_0}\ ,\ \theta\in R \qquad \cdots\cdots(1)$$

不失去一般性可選$S(Z_0)=0$，則得到

$$W=e^{i\theta}\frac{Z-Z_0}{1-Z\overline{Z}_0},\ \theta\in R \quad\cdots\cdots(2)$$

接著，設$S=\{W\mid W$為單位圓至單位圓內之保角變換$\}$，我們欲證明S為一群。

(a) 設W_1，$W_2\in S$，且$W_1(Z)=e^{i\theta_1}\dfrac{Z-Z_1}{1-\overline{Z}_1Z}$，

$$W_2(Z)=e^{i\theta_2}\frac{Z-Z_2}{1-\overline{Z}_2Z}，則$$

$$W_2(W_1(Z))=e^{i\theta_2}\frac{W_1(Z)-Z_2}{1-\overline{Z}_2W_1(Z)}$$

$$=e^{i\theta_2}\frac{e^{i\theta_2}\dfrac{Z-Z_1}{1-\overline{Z}_1Z}-Z_2}{1-Z^2\cdot e^{i\theta_1}\dfrac{Z-Z_1}{1-\overline{Z}_1Z}}$$

$$=e^{i\theta_2}\frac{e^{i\theta_1}(Z-Z_1)-Z_2(1-\overline{Z}_1Z)}{1-\overline{Z}_1Z-e^{i\theta_1}\overline{Z}_2(Z-Z_1)}$$

$$=e^{i\theta_2}\frac{Z(e^{i\theta_1}+\overline{Z}_1Z_2)-(e^{i\theta_1}Z+Z_2)}{(1+e^{i\theta_1}\overline{Z}_2Z_1)-Z(\overline{Z}_1+e^{i\theta_1}\overline{Z}_2)}$$

$$=e^{i\theta_2}\frac{Z-\dfrac{e^{i\theta_1}Z_1^1+Z_2}{e^{i\theta_2}+\overline{Z}_1Z_2}}{1-Z\dfrac{\overline{Z}_1+e^{i\theta_1}\overline{Z}_2}{1+e^{i\theta_1}\overline{Z}_2Z_1}}$$

令 $Z_3=\dfrac{e^{i\theta_1}Z_1+Z_2}{e^{i\theta_1}+\overline{Z}_1Z_2}$

則 $\overline{Z}_3=\left(\dfrac{e^{i\theta_1}Z_1+Z_2}{e^{i\theta_1}+Z_1Z}\right)$

$$=\frac{e^{-i\theta_1}\overline{Z}_1+\overline{Z}_2}{e^{-i\theta_1}+Z_1\overline{Z}_2}$$

$$=\frac{\overline{Z}_1+e^{i\theta_1}\overline{Z}_2}{1+e^{i\theta_1}\overline{Z}_2Z_1}$$

且 $\left|\dfrac{e^{i\theta_1}Z_1+Z_2}{e^{i\theta_1}+\overline{Z}_1Z_2}\right|=\left(\dfrac{e^{i\theta_1}Z_1+Z_2}{e^{i\theta_1}+\overline{Z}_1Z_2}\times\dfrac{e^{-i\theta}\overline{Z}_1+\overline{Z}_2}{e^{-i\theta_1}+\overline{Z}_1Z_2}\right)^{1/2}$

$$=\left(\frac{|Z_1|^2+|Z_2|^2+e^{i\theta_1}Z_1\overline{Z}_2+e^{-i\theta_1}\overline{Z}_1Z_2}{1+|Z_1|^2|Z_2|^2+e^{i\theta_1}Z_1\overline{Z}_2+e^{-i\theta_1}\overline{Z}_1Z}\right)<1$$

(因為$|Z_1|^2+|Z_2|^2<1+|Z_1|^2+|Z_2|^2$

所以，得到$W_2(W_1(Z)) = e^{i\theta_2} \dfrac{Z-Z_3}{1-Z\overline{Z}_3}$,

即S具封閉性

(b) 同樣的我們可以證得S具結合性，即$(W_1W_2)W_2 = W_1(W_2W_3)$ 對任何W_1 $W_2, W_3 \in S$。

(c) 設$e(Z) = Z$，則$e \in S$，且對$\forall W \in S$，$We = eW = W$，所以，e爲S 之單位元素。

(d) 設$W = W(Z) = e^{i\theta} \dfrac{Z-Z_1}{1-\overline{Z}_1 Z}$，設$S(Z) = e^{-i\theta} \dfrac{Z+Z_1 e^{i\theta}}{1+e^{-i\theta} Z\overline{Z}_1}$

，則$s \in S$，且$sW = Ws = e$

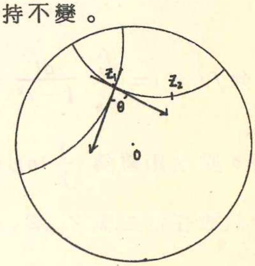
由(a)(b)(c)(d)知S構成一群。

今假設$\Omega = \{Z \mid |Z| < 1\}$，$A\{P \mid W_1(P) = W_2(P), \forall W_1, W_2 \in S\}$ 即A表在Ω上對S中任一變換之不變性質，則由Klein之Erlangen 計劃得(Ω, S, A)構成一套幾何學，在下面我們希望定義在Ω上之一些不變性質，使(Ω, S, A)形成一個與歐氏幾何相　　幾何學。

3. 非歐幾何(Non-Euclidaen Geometry)

在Ω上，我們定義點爲在Ω上歐氏幾何所定義之點，過Z_1 點之直線爲與$|Z| = 1$正交之圓，在Ω上之圓弧，則任給$Z_1, Z_2, \in \Omega$，則過Z_1, Z_2 之直線爲一與$|Z| = 1$正交之圓弧，線段Z_1Z_2表圓弧上Z_1Z_2段，兩直線之夾角爲過其交點做其二個切線所夾之角度。

當我們如此定義點，線，線段，角度時，則對任一保角變換$\omega \in S$之變換，點仍舊對應到點，線對應線，線段對應線段，且角度保持不變。



接下來我們希望定義二點間之距離公式，使對S之任一變換，其距離仍舊不變。由前等式(1)得單位圓至單位圓之保角變換可表示成

$$\frac{W-W_0}{1-W\overline{W}_0} = e^{i\theta} \frac{Z-Z_0}{1-Z\overline{Z}_0}$$

得到 $\left|\dfrac{W-W_0}{1-W\overline{W}_0}\right| = \left|\dfrac{Z-Z_0}{1-Z\overline{Z}_0}\right|$ 以，對任何單位圓至單位圓之保角變換，得$\tau(Z_1, Z_0) = \left|\dfrac{Z-Z_0}{1-Z\overline{Z}_0}\right|$ 保持不變

今假設存在有一個距離函數f，使得當Z_1Z_2爲Ω 上任二點時，其距離表

爲$E_S(Z_1,Z_2)$且$E_S(Z_1,Z_2)=f(\tau(Z_1,Z_2))$，取$0<k$，$k<1$，則過0，$h$，$k$點之直線爲$(-1,1)$ 線段，今假設這個距離函數存在時，則顯然必滿足三點共線之加法性質：

即$E_S(o,h+k)=E_S(o,h)+E_S(h,h+k)$

得$f(\tau(o,h+k))=f(\tau(o,h)+f(\tau(h,h+k))$

即$f(h+k)=f(h)+f\left(\dfrac{h}{1-h(k-h)}\right)$ ……………………………(※)

因爲$\tau(o,h+k)=\dfrac{o-(h+k)}{1-o(h+k)}=h+k$

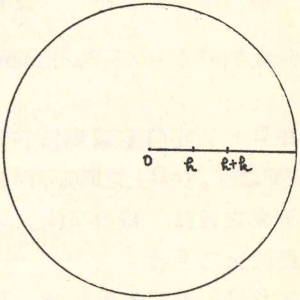
令$\nu=\dfrac{k}{1-h(k-h)}$　　得$k=\dfrac{\nu-h^2\nu}{1+h\nu}$

所以等式(※)可得

$$\frac{f(h+k)-f(h)}{k}=\frac{f(\nu)}{\nu}\times\frac{1+h\nu}{1-h^2}$$

令k趨近於O

得$f'(h)=\dfrac{f(\nu)}{\nu}\times\dfrac{1+h\nu}{1+h^2}$



再令ν趨近於O

得$f'(h)=f'(O)\dfrac{1}{1-h^2}$

因爲$f'(O)$爲常數，可令$f'(O)=1$

則得$f'(h)=\dfrac{1}{1-h^2}$

得到$f(h)=\displaystyle\int_o^h\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\log\frac{1+h}{1-h}$，亦即對任一點$h\in R^+$，$o<h<1$，

則h至o點之距離爲$\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+h}{1-h}$。

今假設任給二點$Z_1,Z_2\in\Omega$，則存在一個單位圓之保角變換

$$\omega=e^{i\theta}\frac{Z-Z_1}{1-Z\overline{Z}_1}$$

使得$\omega(Z_1)=0$，$\omega(Z_2)=P$，$0<P<1$，

即　　$P=e^{i\theta}\dfrac{Z_2-Z_1}{1-Z_2\overline{Z}_1}$

由距離對保角變換之不變性得

$$E_S(Z_1, Z_2) = \int_0^P \frac{dt}{1-t^2}$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{1+P}{1+P}$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{1+\dfrac{Z_2-Z_1}{1-Z_2\overline{Z_1}}}{1-\dfrac{Z_2-Z_1}{1-Z_2\overline{Z_1}}}$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{|1-Z_2\overline{Z_1}|+|Z_2-Z_1|}{|1-Z_2\overline{Z_1}|-|Z_2-Z_1|}$$

4. (Ω, E_S) 形成一個 metric space，

當我們如此定在 Ω 上任二點 Z_1, Z_2 之距離爲 $E_S(Z_1, Z_2) = \frac{1}{2} \log \frac{|1-Z_2\overline{Z_1}|+|Z_2-Z_1|}{|1-Z_2\overline{Z_1}|-|Z_2-Z_1|}$ 時，接下來我們要證明（Ω，E_S）會形成一個 metric space 。

(1)顯然 $E_S(Z_1, Z_2) = \frac{1}{2} \log \frac{|1-Z_2\overline{Z_1}|+|Z_2-Z_1|}{|1-Z_2\overline{Z_1}|-|Z_2-Z_1|} \geqslant \frac{1}{2} \log 1 = 0$

所以 $E_S(Z_1, Z_2) \geqslant 0$，對 $\forall Z_1, Z_2 \in \Omega$

(2)若 $E_S(Z_1, Z_2) = 0$

即 $\frac{1}{2} \log \frac{|1-Z_2\overline{Z_1}|+|Z_2-Z_1|}{|1-Z_2\overline{Z_1}|-|Z_2-Z_1|} = 0$

得 $\frac{|1-Z_2\overline{Z_1}|+|Z_2-Z_1|}{|1-Z_2\overline{Z_1}|-|Z_2-Z_1|} = 0$

得 $|Z_2 - Z_1| = 0$

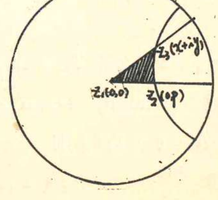
所以 $Z_1 = Z_2$

(3) $E_S(Z_1, Z_2) = E_S(Z_2, Z_1)$

因爲 $|1-Z_2\overline{Z_1}| = |\overline{1-Z_2\overline{Z_1}}| = |1-Z_1\overline{Z_2}|$

(4)今任給 $Z_1, Z_2, Z_3 \in \Omega$，不失去一般性，取 $Z_1 = 0$，$Z_2 = P$，$Z_3 = x+iy$（否則找一保角變換 S 從 Ω 到 Ω，使得 $S(Z_1) = 0$，$S(Z_2) = P$，$S(Z_3) = x+iy$）

今證 $E_S(Z_1, Z_2) + E_S(Z_1, Z_3) \geqslant E_S(Z_2, Z_3)$



即證 $\frac{1}{2}\log\frac{1+P}{1-P}+\frac{1}{2}\log\frac{1+|Z_3|}{1-|Z_3|}\geqslant\frac{1}{2}\log\frac{|1-PZ_3|+|Z_3-P|}{|1-PZ_3|-|Z_3-P|}$

即證 $\log\frac{(1+P)(1+|Z_3|)}{(1-P)(1-|Z_3|)}\geqslant\log\frac{|1-PZ_3|+|Z_3-P|}{|1-PZ_3|-|Z_3-P|}$

即證 $\frac{1+P}{1-P}\cdot\frac{1+\sqrt{x^2+y^2}}{1-\sqrt{x^2+y^2}}\geqslant\frac{\sqrt{(1-px)^2+p^2y^2}+\sqrt{(x-p)^2+y^2}}{\sqrt{(1-px)^2+p^2y^2}-\sqrt{(x-p)^2+y}}$

即證 $(1+p)(1+\sqrt{x^2+y^2})(\sqrt{(1-px)^2+p^2y^2}-\sqrt{(x-p)^2+y^2})\geqslant$

$(1-P)(1-\sqrt{x^2+y^2})(\sqrt{(1-px)^2+p^2y^2}+\sqrt{(x-p)^2+y^2})$

化簡之，得

即證 $(p+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{(1-px)^2+p^2y^2}\geqslant(p+\sqrt{x^2+y}p)\sqrt{(x-p)^2+y^2}$

即證 $(1-px)^2+p^2y^2\geqslant(x-p)^2+y^2$

即證 $1+p^2(x^2+y^2)\geqslant p^2(x^2+y^2)$

即證 $1+p^2\gamma^2\geqslant p^2+\gamma^2$ $\qquad\qquad \gamma^2=x^2+y^2$

然而，事實上

$$(1-p^2)(1-\gamma^2)\geqslant 0$$

所以上之不等式皆爲可逆，所以我們得到（Ω，E_S）形成一個metric space

5. Ω上之完備性（complete property）

接著我們欲證明Ω是complete ω,γ, to E_S，首先我們任給一點$Z\in\Omega$，則

$$E_S(Z,0)=\frac{1}{2}\log\frac{1+|Z|}{1-|Z|}$$

今我們讓Z在Ω上運動，且設$|Z|$趨近於1時則$\frac{1+|Z|}{1-|Z|}$會趨於∞（無限大）

得到

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+|Z|}{1-|Z|}$$

趨於∞，即當Z趨近于邊界$|Z|=1$時，則$E_S(Z,0)$趨於∞，亦即我們可將$|Z|=1$，視爲無窮遠點。

接著我們欲證明Ω上的每一個Canchy sequence ω,γ, to E_S，都會收斂

證明：

今設$\beta_\gamma(z_*)=\{z\mid E_S(z,z_*)<\gamma\}$則任給$\gamma>0$，$z_*\in\Omega$，得$\beta_\gamma(z_*)\in\Omega$，今$\langle z_n\rangle$爲一Canchy sequence ω,γ, to E_S，則任給一$\varepsilon>0$，存在$N(\varepsilon)$使得當$n,m\geqslant N(\varepsilon)$時，則

$$E_S(z_n,z_m)<\varepsilon,$$

固定 $n \geqslant N(\varepsilon)$，則存在 $R > \gamma > 0$，使得 $z_m \in \beta_\gamma(z_n) \subset \beta_R(z_n) \subset \Omega$，當 $m \geqslant N(\varepsilon)$ 時

得到 $\overline{\beta_\gamma(z_n)} \subset \beta_R(z_n) \subset \Omega$，

現 $\overline{\beta_\gamma(z_n)}$ 是 compact in Ω，所以存在 Subsequence $< z_{nk} >$ of $< z_n >$ 收斂到某點 $z_0 \in \beta_\gamma(z_n)$，$\omega, \gamma$, to $|\ |$（即一般之距離測度）。則

$$\lim_{nk \to \infty} E_S(z_{nk}, z_0) = \frac{1}{2} \lim_{nk \to \infty} \log \frac{|1 - z_{nk}\overline{z_0}| + |z_{nk} - z_0|}{|1 - z_{nk}\overline{z_0}| - |z_{nk} - z_0|}$$

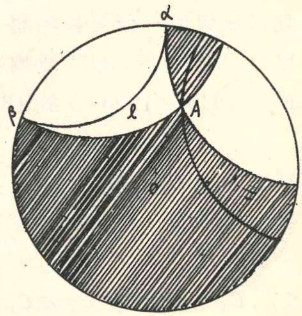
$$= \frac{1}{2} \log \lim_{nk \to \infty} \frac{|1 - z_{nk}\overline{z_0}| + |z_{nk} - z_0|}{|1 - z_{nk}\overline{z_0}| - |z_{nk} - z_0|}$$

$$= \frac{1}{2} \log 1 = 0$$

因爲 $E_S(z, z_0)$ 爲 Z 的連續函數，且在 $\beta_\gamma(z_n)$ 均勻連續。

到此我們得到當 $< z_n >$ Canchy sequence 則存在有一 Subsepuence $< z_{nk} >$ 收斂至 z_0，所以得到 (Z_n) 收斂至 Z_0，所以 (Ω, E_S) 爲 complete。

6. Poincare modcl 上之平行公設



到現在爲止，我們所討論到，在歐氏幾何上之性質，似乎在（Ω, E_S）上均會成立，事實並不盡然，接下來我們要討論的是在歐氏幾何上的平行線惟一理論，在 Ω 上並不成立。

由上右圖，給一直線 ℓ 及線外一點 α，且 ℓ 交邊界 Γ 於 α，β，則過 α，A 及 β，A，可做二條直線（直交圓弧），且過 A 點可作無窮多條直線不與 ℓ 相交，且任一直線皆位於兩直線 $\overline{\alpha A}$，$\overline{\beta A}$ 之間（圖中斜線部分），至此我們得到一個與歐氏第五公設完全相悖之一套幾何學，證明平行線理論並非絕對正確在任一幾何學上。

參考資料

徐氏基金會：數學之內容方法及意義 Ⅲ。

Markushevich : Theory of Functions of a conplex variable (I)

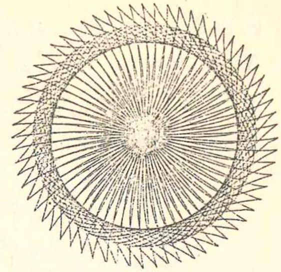
Caratheordary : Function Analysis.

Courant and Robbin : What is mathematis.

NevanLinna : Introduction to Complex Analysis.

從 Klein 觀點討論一些幾何

作者：數四甲 陳邦臺
指導老師：林義雄



參考書目：1. 數學導論（水牛出版社，吳定遠譯）原文：What is Mathematics？
作者：Courant
2. 數學內容、方法及意義（徐氏基金會）Vol Ⅲ
3. Linear Algebra and Geometry —— S. M. P. Cambridge University Press

“幾何”所討論的是在平面上或空間中圖形的性質。這些性質是如此的多，其變化是如此的大，故須有一些分類原則，才能將這個豐富的知識領域整理出一個秩序來。我們可以問，在一類變換下，某圖形的什麼性質將不改變，而所有談到這些性質的定理就構成與這一類變換相關的幾何學。依照所考慮的變換類別而將幾何學分爲不同的部門，換言之，以“變換群”（註 1）來分類幾何學。這個觀念是德國人 Felix Klein（1849 − 1925）於 1872 年，在一篇有名的演說 Erlanger 計劃中所提出的。

設集合 Ω 表（抽象）空間，G 表空間 Ω 單值變換所作成的一變換群

定義：　設 C_1，$C_2 \subseteq \Omega$　若 $\exists\, T \in G \ni T(C_1) = T(C_2)$ 則稱 $C_1 \equiv C_2$　即 C_1 與 C_2 視爲同一圖形

定義：　設 C_1，$C_2 \subseteq \Omega$，$C_1 P C_2$ 表 C_1 與 C_2 有 P 之關係
若 $\forall\, T \in G$　$C_1 P C_2 \Rightarrow T(C_1) P T(C_2)$ 則稱 P 爲 C_1 與 C_2 之不變性。

Klein 的 Erlanger 計劃：考慮空間 Ω 及空間 Ω 單值變換所作成的一變換群 G 令 P 表示此空間 Ω 中圖形 C，在群 G 內每一變換下，仍能保有的諸性質所成的集合。研究 P 中性質，將之滙成一系統，即稱爲附屬於此群的一套幾何學。以符號（Ω，G）記之。

換個角度來看，此方法有如，將 Ω 中圖形依定義 1 分類，而研究同類圖形到底具有那些共同特徵（由定義 2 所界定的）。

設 H 是 G 的子群。考慮兩套幾何（Ω，G）與（Ω，H）
由定義 1 可知：（Ω，G）中幾何圖形類別，不比（Ω，H）中幾何圖形類別多。
由定義 2 可知：（Ω，G）中不變性一定是（Ω，H）中的不變性，詳言之，（Ω

，G）中同類圖形之特徵（性質）一定是（Ω，H）中同類圖形之特徵（性質）。

Ⅰ歐幾里德幾何　（Ω，G）＝（R^2，Orthogonal Transformations O）（註 2）

Ⅱ仿射幾何　（Ω，G）＝（R^2，Invertible Linear Transformations I）(註 3）

Ⅲ高微（流型）　（Ω，G）＝（R^2，Diffeomorphisms D）

Ⅲ點集拓樸　（Ω，G）＝（R^2，Homeomorphisms H）

Ⅴ集合論　（Ω，G）＝（R^2，$1-1$ & onto S）

因爲：f 是 Orthogonal Transformation

$\Rightarrow f$ 是 Invertible Linear Transformation

$\Rightarrow f$ 是 Diffeomorphism

$\Rightarrow f$ 是 Homeomorphism

$\Rightarrow f$ 是 $1-1$ & onto

所以 O 是 I 之子群，I 是 O 之子群，以次類推。

上述“幾何”間關係，我們可以這樣表示（Ω，&）→（Ω，H）→（Ω，D）→（Ω，I）→（Ω，O） 以下所討論的，取 $\Omega=R^2$。

Ⅰ歐幾里德幾何：（R^2，O）

定理：$O=\{A \mid /\ \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\quad det\ A=1$ or $det\ A=-1\}$ 爲一群（歐幾里德變ㆍ群）

證　∵ & 爲一群，$O \subseteq$ &　∴只須證封閉性即可

A，$B \in O \Rightarrow det\ AB = det\ A\ det\ B = 1$ or $-1 \Rightarrow AB \in O$

事實上，歐幾里德變換，亦稱平面定心剛性運動，不外是平面本身的旋轉或鏡射或其合成，即$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$或其合成

定理：歐幾里德變換爲保長度變換，即 $A \in O \quad |A(\vec{x})-A(\vec{y})|=|\vec{x}-\vec{y}|$，$\forall \vec{x}, \vec{y} \in R^2$

研究對象：長度、角度、任何圖形之大小（形狀）在（R^2，O）中爲不變量（不變性），如三角形全等定理 SSS、SAS、ASA。其中最著名的是：勾股弦定理（直角三角形，兩股平方和等於弦的平方）

我們在中學階段解題目，常運用到歐幾里德性質，即在歐幾里德變換下，保持不變之圖形性質。

例：求橢圓 Γ_- ：$5x_2+8xy+5y^2-9=0$ 之①長軸長②短軸長③離心率④正焦弦長：

解：$T=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$$\lambda^2-(a+c)\lambda+\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}=0$$

$$\lambda^2-(5+5)\lambda+\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=0$$ 解之得 $\lambda_1=9$，$\lambda_2=1$

$\lambda_1=9$ 相應之固有向量爲 $e_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

由 $(x,y)\begin{pmatrix} a-\lambda_1 & b \\ b & c-\lambda_1 \end{pmatrix}=(0,0)$ 決定

$\lambda_2=1$ 相應之固有向量爲 $e_2=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

令 $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$　$B=A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$　則 $B\in O$

在 B 變換下 $\Gamma_-:5x^2+8xy+5y^2-9=0$

$\rightarrow\Gamma_-':9x^2+1y^2-9=0$

而對於 $\Gamma_-':\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$　極易知道所要的消息

Ans：長軸長 $2a=6$，短軸長 $2b=2$，離心率 $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

正焦弦長 $\frac{2b^2}{a}=\frac{2}{3}$

Ⅱ仿射幾何

我們若只對圖形的“仿射性質”感覺興趣，可以把它們從其他的一切性質中抽出，並想像一個空間（仿射空間）及在此空間內的幾何圖形（由定義1分類），它們都只具有令我們感覺興趣的各種性質（由定義2所界定）。

設 $I=\left\{A:A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\quad \det A\neq 0\right\}$ 則 I 爲一群（$\because A,B\in I\Rightarrow$

$\det(AB)=\det A\det B\neq 0\quad \therefore AB\in I$）

圖形有相當多的性質，在上述每一變換下，被保存下來。

設 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$　$\det A\neq 0$　即 A 爲一仿射變換

定理：A 將直線 $\{\vec{p}+\lambda\vec{u}\mid\lambda\in R\}$ 映至直線 $\{(\vec{p})A+\lambda(\vec{u})A\mid\lambda\in R\}$

證：　$\because A$ 爲線性變換　$\therefore(\vec{p}+\lambda\vec{u})A=(\vec{p})A+\lambda(\vec{u})A$

定理：A將一對平行線，映至一對平行線

證： 設 $l_1=\{\vec{p}+\lambda\vec{u}\mid\lambda\in R\}$ $l_2=\{\vec{q}+\mu\vec{v}\mid\mu\in R\}$ $l_1\parallel l_2\Rightarrow$

$\vec{u}=k\vec{v}$ $k\neq0$ $(l_1)A=\{(\vec{p})A+\lambda(\vec{u})A\mid\lambda\in R\}$

$(l_2)A=\{(\vec{q})A+\mu(\vec{v})A\mid\mu\in R\}$

$\because(\vec{u})A=(k\vec{v})A=k(\vec{v})A$ $k\neq0$ $\therefore(l_1)A\parallel(l_2)A$

定理：經A變換後，落在平行線或同一直線上的兩線段，其長度比例值保持不變。

證： 設兩線段$\overline{AB}$，$\overline{CD}$落在同一綫上或分別落在平行綫上，即$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ $k\neq0$

則$\overline{AB}=\{\vec{a}+\lambda\overrightarrow{AB}\mid 0\leqslant\lambda\leqslant1\}$，$\overline{CD}=\{\vec{c}+\mu\overrightarrow{CD}\mid 0\leqslant\mu\leqslant1\}$

其中$\vec{a}$，$\vec{c}$分別表A，C點之位置向量

$(\overline{AB})A=\{(\vec{a})A+\lambda(\overrightarrow{AB})A\mid 0\leqslant\lambda\leqslant1\}$

$(\overline{CD})A=\{(\vec{c})A+\mu(\overrightarrow{CD})A\mid 0\leqslant\mu\leqslant1\}$

$$\frac{|(\overline{AB})A|}{|(\overline{CD})A|}=\frac{|(\overrightarrow{AB})A|}{|(\overrightarrow{CD})A|}=\frac{|(k\overrightarrow{CD})A|}{|(\overrightarrow{CD})A|}=\frac{|k(\overrightarrow{CD})A|}{|(\overrightarrow{CD})A|}=|k|$$

而$\dfrac{|\overline{AB}|}{|\overline{CD}|}=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{CD}|}=\dfrac{|k\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{CD}|}=|k|$

故比例值保持不變。

定理：經A變換後，平面內兩圖形的面積的比例值保持不變

證： 先證 area $(CA)=|det\,A|$ area (C)，C爲一簡單封閉曲線，其隱函數方程式爲$f(x,y)=0$

$$\text{面積}(CA)=\left|\iint_{CA\text{區域}}dX\,dY\right|=\left|\iint_{A\text{區域}}\frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)}\,dx\;dy\right|$$

$$=|det\;A|\left|\iint_{A\text{區域}}dx\;dy\right|=|det\;A|\,\text{面積}(C)$$

$$(x,y)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=(a_{11}x+a_{21}y,\;a_{12}x+a_{22}y)=(X,Y)$$

$$X=a_{11}x+a_{21}y$$
$$Y=a_{12}x+a_{22}y$$

$$\frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)}=\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial X}{\partial x}&\dfrac{\partial X}{\partial y}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial Y}{\partial x}&\dfrac{\partial Y}{\partial y}\end{vmatrix}}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}\\a_{12}&a_{22}\end{vmatrix}=det\;A$$

許多著名的定理，根本上屬於仿射幾何。如重合問題（ Incidence Problem ）——心問題及Menelaus（孟氏）定理，Ceva（帥氏）定理。

整個二次曲綫區分爲橢圓、拋物線、雙曲綫，是基於圖形的仿射性質。在仿射

變換之下，一個橢圓被變成一個橢圓。我們舉一例來說明此應用：

例：求曲線 Γ_-：$4(3x-4y+1)^2+9(4x+3y-7)^2=900$ 所圍成的面積。

解①：設 $A+\overrightarrow{k}$：$R^2\to R^2$

定義爲 $\begin{matrix} X=3x-4y+1 \\ Y=4x+3y-7 \end{matrix}$ 　則 $A+\overrightarrow{k}$ 爲一仿射變換

其中 $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{k}=(1,-7)$ 表一平移

則在仿射變換 $A+\overrightarrow{k}$ 下，Γ_- 變成 $\Gamma_-{}^*$：

$$4X^2+9Y^2=900 \text{ or } \frac{X^2}{(15)^2}+\frac{Y^2}{(10)^2}=1 \quad \text{爲一橢圓}$$

$\Gamma_-{}^*$ 面積爲 $\pi ab=\pi\cdot 15\cdot 10=150\pi$

故 Γ_- 面積爲 $\dfrac{1}{|\det A|}150\pi=6\pi$ # 　而 Γ_- 亦爲一橢圓

② 我們若將 $4(3x-4y+1)^2+9(4x+3y-7)^2=900$ 化爲

$$4\cdot 25\left(\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+\frac{1}{5}\right)^2+9\cdot 25\left(\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{7}{5}\right)^2=900$$

考慮變換 $B+\overrightarrow{l}$：$R^2\to R$

定義爲 $\begin{matrix} X=\dfrac{3}{5}x-\dfrac{4}{5}y+\dfrac{1}{5} \\ Y=\dfrac{4}{5}x+\dfrac{3}{5}y-\dfrac{7}{5} \end{matrix}$ 　or

$$(x,y)\to(x,y)\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}+\left(\frac{1}{5},\frac{-7}{5}\right)$$

其中 $B=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{l}=\left(\frac{1}{5},\frac{-7}{5}\right)$ 爲一平移，

則 $B+\overrightarrow{l}$ 不僅爲一仿射變換，更強地爲一歐幾里德變換

$(\because \det B=1)$

則 $B+\overrightarrow{l}$ 將 Γ_- 映至 $\Gamma_-{}^{**}$：

$$4\cdot 25X^2+9\cdot 25Y^2=900 \quad \text{or} \quad \frac{X^2}{3^2}+\frac{Y^2}{2^2}=1$$

Γ_-^{**} 為一橢圓，其長軸長 $2a=6$ ，短軸長 $2b=4$ ，由於歐幾里德變換的保長性質，可知 Γ_- 亦具有此特性。

故 Γ_- 面積可直接算出　$\pi ab=\pi\cdot 3\cdot 2=6\pi$ #

有趣的是，由定義 1 ，在仿射平面上，非退化之三角形只有一種。

定理：給 $\triangle ABC$ ，$\triangle A'B'C'$　則存在 $T\in I$

使得 $T(\triangle ABC)=\triangle A'B'C'$　（視 A，A' 固定於原點）

證：　因 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 綫性獨立，$\overrightarrow{A'B'}$，$\overrightarrow{A'C'}$ 綫性獨立

故存在 $T\in I$　使得　$T(\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{A'B'}$　$T(\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{A'C'}$

則　$T(\triangle ABC)=\triangle A'B'C'$

我們若想更深入掌握圖形性質，不妨考慮一射影變換群，研究圖形在每一射影變換下，所保有的性質，滙成一系統，即導出射影幾何學。在笛卡爾坐標系下，一平面（加理想元素）到一平面（加理想元素）之射影變換為 $f(x,y)=(x',y')$

$$x'=\frac{a_{11}x+a_{12}y+a_{13}}{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}}\qquad y'=\frac{a_{21}x+a_{22}y+a_{23}}{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}}$$　（註 4 ）

仿射變換即為 $a_{31}=a_{32}=0$ 之情形，故仿射變換群為射影變換群之子群，而射影性質一定是仿射性質。

Ⅱ高微流型Manifold

定義：設 U，V 為 R^2 中開集　h 為 $U\to V$ 之可微分函數

若存在可微分反函數 $h^{-1}: V\to U$　則稱 h 為 diffeomorphism（註 5 ）

由定義可知 h 為 $U\to V$ 之 1－1 & onto 函數

定理：$D=\{h:\ h:R^2\to R^2$　diffeomorphism$\}$ 為一群

證：　$f,g\in D$　設 $h=fg$（合成函數）　則 h 1－1 & onto　且可微分

$\because$　$Jh(\vec{x})=Jfg(\vec{x})=Jf(g(\vec{x}))Jg(\vec{x})\neq 0$

$\therefore$　h 存在可微分反函數　故　$h\in D$

因此在 (R^2,D) 內，兩圖形 C_1，C_2 是否視為同一類，端視是否存在 $h\in D$ 使得 $h(C_1)=C_2$

例如 ≡  ≡  為同一類

但是  ≢  則不為同一類

Ⅲ點集拓樸

當我們更加深入於幾何形狀的本性之內，可以覺察出有極多的問題，所牽涉到性質，甚至比射影性質還深入，如在隨意的扭曲（但不引起圖形的斷裂或部份相黏）都還能保存下來。

設 $H=\{f\mid f:R^2\to R^2$　Homeomorphism$\}$　則 H 為一群

例：在 (R^2,H) 下，圓與正方形是同一類圖形

證：設圓區域 S^2 與正方形區域 I^2 ，欲證 $S^2 \overset{\text{homeo}}{\cong} I^2$

作圓 S_0^2 內切於正方形 I^2 ，如圖

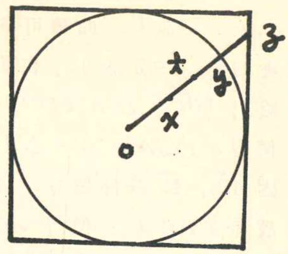
$S_0{}^2$ 之圓心 O 即爲正方形 I^2 之中心。

因爲 $S^2 \cong S_0{}^2$ 故只須證 $S_0{}^2 \cong I^2$

給 $x \in S_0{}^2 - \{0\}$，

設 $\overrightarrow{ox}$ 交 $\partial S_0{}^2$（$S_0{}^2$ 之邊界）於 y

交 ∂I^2（I^2 之邊界）於 z



在 $\overrightarrow{oz}$ 上取一點 $t \ni \dfrac{ox}{oy} = \dfrac{ot}{oz}$

定義 f ： $S_0{}^2 \to I^2$ 由 $f(x) = \begin{cases} t & x \in S_0{}^2 - \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

claim $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$

令 $f(x_n) = t_n \qquad f(x_0) = t_0$

$\Rightarrow \dfrac{ox_n}{oy_n} = \dfrac{ot_n}{oz_n}$, $\dfrac{ox_0}{oy_0} = \dfrac{ot_0}{oz_0} \Rightarrow ot_n = \dfrac{ox_n \cdot oz_n}{oy_n}$, $ot_0 = \dfrac{ox_0 \cdot oz_0}{oy_0}$

$\because x_n \to x_0 \quad \therefore ox_n \to ox_0$, $oy_n \to oy_0$, $oz_n \to oz_0$ 故 $ot_n \to ot_0$

$\Rightarrow f(x_n) = t_n \to f(x_0) = t_0$ 故 f 爲連續

同理，給 $t \in I^2 - \{0\}$ 設 $\overrightarrow{ot}$ 交 $\partial S_0{}^2$ 於 y，交 ∂I^2 於 z，反之

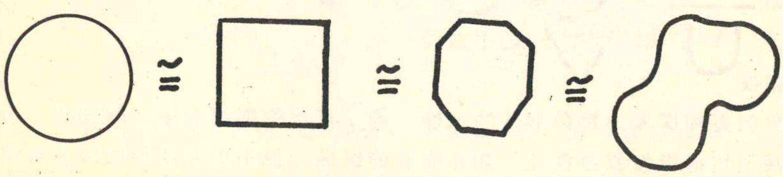
在 $\overline{oy}$ 上取一點 $x \ni \dfrac{ot}{oz} = \dfrac{ox}{oy}$

定義 g ： $I^2 \to S_0{}^2$ 由 $g(t) = \begin{cases} x & t \in I^2 - \{0\} \\ 0 & t = 0 \end{cases}$ 則 g 爲連續

顯然 $g \circ f = 1_{S_0{}^2}$, $f \circ g = 1_{I^2} \Rightarrow f, g$ 均爲 1－1 且映成，且 $g = f^{-1}$

故 f 爲同胚變換　由定義 1，圓與正方形在（R^2，H）爲一種圖形

甚至於，在（R^2，H）中，



Ⅲ集合論

若取 $S = \{f \mid f : R^2 \to R^2 \text{ 1-1 \& onto}\}$ 爲變換群

則同類圖形之特徵只是 Cardinal 的相同了。

例：—— 與  在（R^2，S）中視爲一樣，但於（R^2，H）則不同類

證：　設 $A=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$　　　$B=\{(x,y) \mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$

定義 $f: B\rightarrow A$　$x=0.x_1\,x_2\,x_3\cdots\cdots$　　（實數可唯一表爲一無限小數）

$y=0.y_1\,y_2\,y_3\cdots\cdots$　　如 $1=0.99\cdots\cdots$

$(x,y)\xrightarrow{f} z=0,x_1\,y_1\,x_2\,y_2\,x_3\,y_3$

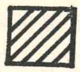
claim　f 是 1－1　若 $f(x,y)=f(x',y')\Rightarrow 0.x_1\,y_1\,x_2\,y_2\,x_3\,y_3\cdots\cdots=$

$0.x_1'y_1'x_2'y_2'x_3'y_3'\cdots\cdots\Rightarrow x_i=x_i'\quad y_i=y_i'\quad i=1,2,\cdots\cdots\Rightarrow x=x',\ y=y'$

$\therefore\quad (x,y)=(x',y')$

claim f 是 onto　$\forall\ z=0.z_1\,z_2\,z_3\,z_4\cdots\cdots$　　$\exists\ x=0.z_1\,z_3\cdots\cdots$

$y=0.z_2\,z_4\cdots\cdots$　　$\ni f(x,y)=z$

假設 —— $\underset{\text{homeomorphism}}{\cong}$ 　但 —— 去掉一內點非連通，
去掉一內點仍爲連通，故 $A\ncong B$　則可知（R^2，H）與（R^2，S）所討論的確實不同

後記：本文構想是源自65、4、28 林義雄老師的演講，深致謝意！

註 1：變換群（運動群）G

(1)　對於任意變換 $T_1, T_2\in G\Rightarrow T_1T_2\in G$（即依序施行這集合內任意兩個變換，其結果恰等於這集合內某一變換。）

(2)　$\exists\ I\in G\ni IT=TI=T\quad \forall T\in G$（即存在使各點保持不動的變換。）

(3)　$\forall T\in G\quad \exists\ T^{-1}\in G\ni TT^{-1}=T^{-1}T=I$（即存在恢復一切點至它們原先位置的變換）

(4)　$(T_1T_2)T_3=T_1(T_2T_3)\quad \forall T_1, T_2, T_3\in G$　（結合律）

註 2：R^2 至 R^2 之歐幾里德變換爲 $T+\overrightarrow{k}$：

$$(x,y)\rightarrow(x,y)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}+(k_1,k_2)$$

$$=(a_{11}x+a_{21}y+k_1,\ a_{12}x+a_{22}y+k_2)$$

其中　$det\,T=det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=1$　or -1

註 3：R^2 至 R^2 之仿射變換爲 $A+\overrightarrow{b}$：

$$(x,y)\rightarrow(x,y)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}+(b_1,b_2)$$

$$=(a_{11}x+a_{21}y+b_1,\ a_{12}x+a_{22}y+b_2)$$

其中　$det\,A=det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\neq 0$

註 4：請參閱(1) Mathematical Concepts from Ancient to Modern Times —— Oxford Press 1972

(2)射影幾何—— 作者Kline（日本人）共立出版社 1965

註 5：請參閱(1) Functions of Several Variables ——Wendell H. Fleming.

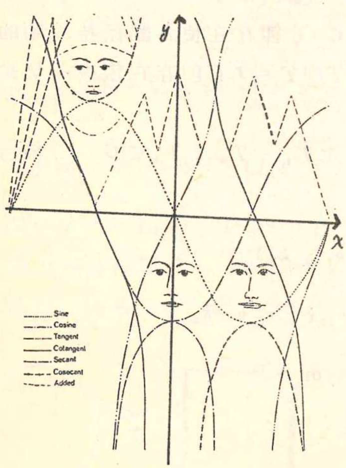
(2) Calculus on Manifolds —— Michael Spivak.

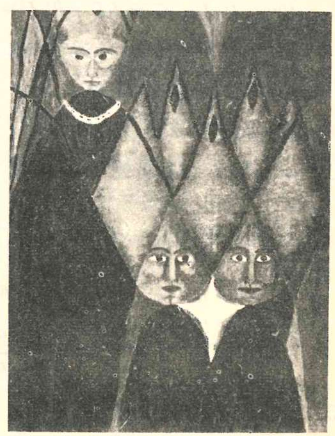
繪畫與數學

作者：數三丙 孫文先

當一個畫家想畫一幅畫時，他必先決定這幅畫之佈局。有時他繪出突然捕獲的靈感，有時他依照著實物描繪，最時常的是他拿著一枝鉛筆在畫紙上無目的的亂劃些線條，直到他覺得他所亂劃出的線條有點像某些人物或景色，而得到靈感。

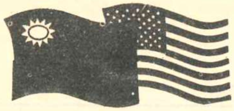
在亂塗時，人類最喜歡劃，也是最美的線條是均勻連續的曲線。下面這幅畫，畫家是將許多三角函數圖形的組合作爲佈局所繪出的畫。如果我們在這幅畫的中央作一直角座標，我們不難看出它的眞相來。（見下圖左）



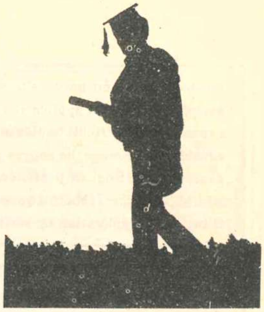


還有許許多多的畫，尤其是抽象畫，我們若加以仔細的分析，我們更可驗證數學與繪畫是息息相關的。

各位讀者！當各位正在苦思數學不解時，不妨抓枝筆在紙上組合些函數圖形，調劑調劑心靈，說不定您將繪出一幅驚動世界的名畫呢！



留美第一步



作者：數三丙 陳立甫

一、前　言

筆者數度至美國新聞處聽取美國在華教育基金會學生顧問Mr. Douglas payne演講"留學須知"，在此順便介紹與有志赴美深造的同學，有關細節譯自The 1st step "Study in the U.S."

目前本國大學畢業的學生，獲學士學位後，即可申請入美國大學的研究所。研究所通常需一或二年修碩士學位，三到四年以上修博士學位。

二、如何申請學校及獎助學金

A.最初詢問函

有兩種主要的方式。一是直接寫英文信去學校索取申請表格及資料。另外一種方式是填一份基金會供應的「索取申請入學資料表」（Request for Application Materials　）簡稱R.A.M. 給預定申的學校。此表可幫助美國院校約略了解申請者的狀況，並決定其申請入學的資格。大部份的美國大學寧願收到R.A.M. 而不願收到英文信，因爲英文信有時語焉不詳，又嫌囉嗦。附表R.A.M. 見本文後。

填寫R.A.M. 時

1. 誠實的回答每一問題。
2. 打字填表或書寫填表均可。塡寫時必須整齊，假使你想給他們第一個好印象的話。
3. 你的英文名字必須跟你考托福時拼法一致。
4. 你的英譯住址，最好到郵局查問。
5. 假使你想先攻碩士，後攻博士，你必須註明。
6. 塡寫Over-all Average 時，

例如：

English	3學分	Grade = 80%（80 × 3）= 240
Math	2學分	Grade = 90%（90 × 2）= 180
Dance	2學分	Grade = 70%（70 × 2）= 140

Most colleges and universities in the United States require a detailed application for admission. This usually must be accompanied by an application fee, a medical examination, official transcripts (in English), and other documents that may be expensive or difficult to obtain. To prevent yon from wasting work and money applying to a school when you could not be considered-because the course you desire is not offered, the time for application is past, or your academic preparation, financial resources or English proficiency would not satisfy the school's requirements-you should complete this form and send it by Air Mail to the school of your choice. The school will carefully review your request and will either send you instructions for filing your application or write explaining why it does not seem practical for you to apply.

REQUEST FOR APPLICATION MATERIAL FOR:

(Please Print in ink or typewrite)

ALL QUESTIONS MUST BE ANSWERED

Undergraduate Admission__________

Graduate Admission__________

1. Name____________________ Sex: Male______Female______
Last (Family Name) First.

2. Address for reply____________________

3. Citizen of__________Date of Birth__________Married: Yes____No____

4. Expected date of entrance: Month__________Year__________

5. Degree being sought: Bachelor's__________Master's__________Doctorate__________

6. Intended major or field of study (be specific)____________________

7. School and University Record: List High School (Upper Middle School), College, and Graduate School if any. If not yet graduated, write expected date of graduation. "Course of Study" for middle school is usually either "vocational" or "college preparatory"; for college, your major subject.

Name of School	City	Course of Study	Dates Entered & Left

Degrees or Diplomas	Date Awarded	Class Rank (e.g. 5th in class of 70)

8. Grades at university (on basis of 100) Over-all Average_____Average for Major Subject_____
Highest grade given by the university in your class________lowest passing grade________

9. Language spoken at home____________________

10. Years of formal study of English: High School________College________Other________

11. Give the dates the exams were taken (or will be taken) and the scores received.
TOEFL ________ (date) ________ (score) GRE Aptitude________ (date) ________ (verbal score) ________ (quantitative score)
GRE Advanced ________ (subject) ________ (date) ________ (score) ATGSB________ (date) ________ (score)

Chinese Ministry of Education__________ __________
(date) (score)

(This exam is required for students from the Republic of China going abroad.)

Other exams______________________________ __________ __________
(name of exam) (date) (score)

12. Financial Support: I have US$____________available for my educational and living expenses in the U. S. provided by__________________. The additional money for transportation to het U. S. will be provided by________________.

(Attention American Foreign Student Advisor: Each student applying for a student visa from the American Consulate in The Republic of China must prove to the Consulate that he possesses sufficient funds to cover all expenses during his entire time in the U. S. or that completely satisfactory other arrangements have been made to provide for all expenses. A visa can not be issued to anyone who is unable to meet this requirement.)

13. Will you be requesting financial aid from the University? Yes____________ No____________
If yes, tuition scholarship____________assistantship____________fellowship____________

(Students: The address for admission application and financial aid application are often different. If you wish to apply for financial aid you must also write to the correct financial aid address.)

14. If you do not receive financial aid from the school receiving this preliminary application, will you be able to attend? Yes____________No____________

15. If you have left school and are gainfully employed, please describe your work experience. Attach an additional page if necessary.

16. Date____________________ Signature______________________________

Please use this space for additional comments. If you feel your grades do not reflect your true ability, explain below. Describe your study plans and what you will do after completing your education in the U. S. Ask any questions you might have. Attach an additional page if necessary.

NOTE: This is a modified version of the Institute of International Education form designed to assist foreign students and American institutions. distributed by the United States Educational Foundation/China. Its use does not imply sponsorship of applicant by the IIE or USEF/C.

Dance	2學分	Grade = 70% (70 × 2) = 140	
Total	7學分	Total	560

那麼你的 Over-all Average 是 560 ÷ 7 = 80% 填寫 Average for Major Subject 時，是指你在台灣所讀的主科，而不是你計劃到美國功讀的科目。通常中國通用的等級（ grade ）

A = 80%～100%　　B = 70%～79%

C = 60%～ 69%

D = 50%～ 59%　failure with a chance to retest

E = 0%～ 49%　failure with no chance to retest

7. a.托福考試（TOEFL）

每年四次（1月，3月，6月，10 月），在語言中心報名，內容爲聽力測驗（ listening comprehension ）、語法結構（ grammatical structure ）、字彙（ vocabulary ）、閱讀測驗（ reading camprehension ）及寫作能力（ Writing ability ）等五部分。全部爲測驗題，考三個半小時，可保留二年。

b.G.R.E. 考試

每學年四次

October	Advanced only
December	Aptitude only
April	Aptitude only
June	Aptitude only

內容①性向測驗（ Aptitude Test ）：計有語文能力（ Verval ）及計算能力（ quantitive ），考二小時五十五分。

②專門測驗（ Advanced Test ）：考你主修的科目，考二小時五十分。

報名表到濟南路三段五十四號基金會索取，函 ETS（ Educational Testing Services ）處報名。G.R.E. 可保留五年。

c.ATGSB 指（ Admission Test for Graduate Study in Business ）讀商學院必考。

d.Chinese Ministry of Education

指自費留學考，目前已廢除。

8. 獎學金計三種

a. tuition Scholarship ，這是給大學部學生的獎學金。

b. assistantahip ，這是給修碩士學位（ Master degree ）的學生。有研究助教獎學金（ Research Assistantship ）及教學助教獎學金（ Teaching

Assistantship ）兩種。

c. fellowship，這是給修博士學位（ ph.D. degree ）的學生。

選擇十個適合你的學校，寄出你的R.A.M.，順便附上這封信。

Cover letter to send with RAM:

Your home address

Date

American University Address

Dear ______________:

I wish to attend your fall 1976-77 semester. The attached R.A.M. form may aid you in determining whether or not it is practical for me to make formal application. If you fee I am qualified to do graduate work at your university, please send me your admission/financial aid forms.

Please inform me of your decision as soon as possible.

Thank you.

Sincerely,
(signature)

寄出R.A.M.約數星期後可得到回音。最好掛號寄出以防寄丟，如果過了六星期還沒消息的話，去信查問。

B. 正式申請

美國大學回覆外籍學生最初詢問信，是採鼓勵入學或不鼓勵入學的方式。如果回信是積極的，就會隨函附寄申請表格及有關規定。大體上需準備下列資料：

(a)成績單（ trans crips ），英譯本。

(b)文憑、學位證明（影印本即可）。

(c)經濟來源證明。

(d)申請費（ App lication fee ）

(e)介紹信，通常需三位教授的推薦函。

(f) Tests Results 諸如TOEFL，G.R.E. 考試之成績證明，函 ETS 直接寄

到你所申請的學校。

(g)英文自傳及讀書計劃。

填畢所有表格及學校所要求的各項資料，於申請入學截止日期之前寄達。靜候佳音，通常經數月之後始有回音。你或許可能獲得不祇一個學校的入學許可，挑選你最願意就讀的學校。拒絕學校時附上這封信：

Sample letter of rejection:

Your home address

American university address

Dear

Thank you very much for granting me admission/financial aid to attend your university. However, after considering all factors, I must regretfully decline.

I appreciate the trouble you have taken in considering my application.

Sincerly,

(signature)

譬如說：

你希望 1977 年 9 月入美國研究所

1. 1975 年 9 月～1976 年 8 月間
   選擇適合你的大學
2. 1976 年 9 月～1976 年 12 月
   寄出你的R.A.M.
3. 1977 年 1 月～1977 年 3 月
   寄出你的正式申請表格
4. 1977 年 4 月～1977 年 8 月
   申請護照 (passport)
   簽證 (visa)
   結匯 (foreign exchange)

實際上凡有意赴美求學的學生，早在多年前即應該準備工作，諸如保持優良學業成績、儘量打好英語基礎等。對了，我知道有些程度不錯的同學，平時不太重視學業成績。畢竟學業成績是他們取捨的標準，實在是他們怎麼曉得你是愛因斯坦或是孔夫子呢！還有個補救的辦法，考好你的G.R.E.這裡有個例子，一個成績差，卻擁有高分數G.R.E.，另一個成績好，但G.R.E.分數低，則他們選擇了擁有高分數G.R.E.者。

三、結　尾

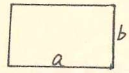
以上乃申請美國大學入學許可及獎學金所需的大致步驟，希望這篇文章能對諸位有所幫助。如果申請時還有什麼問題或困難，可以至基金會請教學生顧問，那邊還備有各大學資料。謝謝！

富必尼定理

作者：數三甲 陳永昌
指導老師：林義雄

讓我們在數學上以不嚴密的觀點來推演、討論富必尼定理。由日常的經驗和普通常識開始。

〈Ⅰ〉



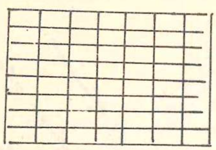
求一塊已知長寬矩形的面積：

由幾何直覺得

面積＝長×寬＝寬×長

代數上爲　a × b ＝ b × a

〈Ⅱ〉

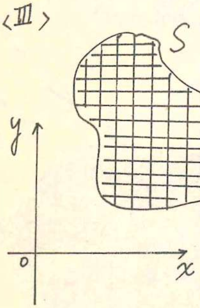


在一矩形土地上欲測量其面積，可是長與寬大得不能以尺量時，吾人只好將其分割爲若干小矩形使其長寬能用尺量，於是可分別求出每一小矩形面積而後相加所得即是所求的面積。相加的方法可以先求長邊再算寬邊，也可以寬邊先加再加長邊，它們所得的結果是相同的。例如日常所見農夫插秧，順著長邊插和沿著寬邊插，最後都可完成插秧工作。

在代數上，設小矩形面積分別爲 $a_{ij} \geqslant 0$（$1 \leqslant i \leqslant m$，$1 \leqslant j \leqslant n$）則面積是

$$\sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)$$

〈Ⅲ〉

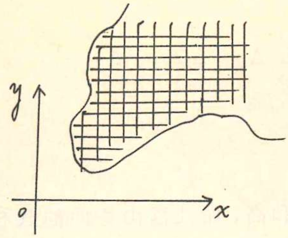


任給一個圖形要求面積，可將其分割爲若干矩形而後將其相加，當分得愈細，數目愈多時，相加值愈接近這圖形的面積；當分成非常細，卽其數目趨近於∞，相加值就等於這個圖形的面積。並且由 x 軸方向先加和由 y 軸方向先加結果是相等的。

考慮下圖，它可任意分割成無數個矩形，使每一矩形大於一固定正數，當它分割爲愈細時相加值愈大，故得知其面積是無限大的，因它無邊界。

在代數暨分析上看來，設分割成的各矩形面積爲 $a_{ij} \geqslant 0$，則整個圖形的面積 $A(s)$：

$$\sum_{i\cdot j=1}^{m\cdot n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right)$$



$\rightarrow A(s)$　當 $m, n \rightarrow \infty$ 時

$$\therefore A(s)=\sum_{i\cdot j=1}^{\infty} a_{ij}=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\right)$$

〔證明〕

由（Ⅱ）已知 $\sum_{i\cdot j=1}^{m\cdot n} a_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)$

$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)$ 。……………………………………（※）

設 $G(j)=\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$ ，$A(s)'=\sum_{j=1}^{\infty} G(j)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\right)$

$t_k=\sum_{j=1}^{k} G(j)$ ，又設 $S(p,q)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} a_{ij}$ ，$T=\lim_{p,q\to\infty} S(p,q)$ ，則任給 $\varepsilon>0\ \exists N$

使得　$0\leq T-S(p,q)\quad \forall P>N\quad q>N$

找 M 使得 t_M 包含所有的項 a_{ij} ，當 $1\leq i\leq N+1\qquad 1\leq j\leq N+1$

因此，假若 $n\geqslant M$

$\Rightarrow |t_n-S(N+1,N+1)|\leq T-S(N+1,N+1)<\frac{\varepsilon}{2}$

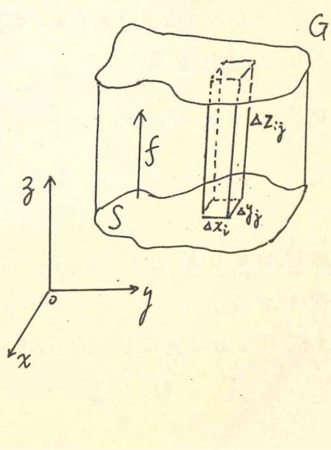
同理 $\Rightarrow |A(s)-S(N+1,N+1)|\leq T-S(N+1,N+1)<\frac{\varepsilon}{2}$

所以，任給 $\varepsilon>0\quad \exists M \ni |t_n-A(s)|<\varepsilon\ \forall n\geqslant M$　因爲 $\lim_{n\to\infty} t_n=A(s)'$

$\Rightarrow A(s)'=A(s)$

$$\therefore A(s)=\sum_{i\ j=1}^{\infty} a_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\right)=A(s)'$$

再由（※）知 $\sum_{i\ j=1}^{\infty} a_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right)$



如右圖欲求體積時，可將此立體分割成若干長方體，當長方體分成很細，個數很多時，將如此之長方體相加即可得所求立體體積。

在代數上，體積$V(G)$可表為

$$V(G)=\sum_{ij=1}^{\infty}\Delta x_i\ \Delta y_j\ \Delta z_{ij}=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\Delta y_j\ \Delta z_{ij}\right)\Delta x_i$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\Delta x_i\ \Delta z_{ij}\right)\Delta y_j$$

Δx_i，Δy_i，Δz_{ij}分別表分割成的長方體的長寬和高，而其高由底面的長和寬來決定。

因為其底S分成無數矩形，長寬分別為Δx_i，Δy_i在每一矩形上找一點ξ_{ij}對於此點在z軸有一函數$f\geqslant 0$，對映於Δz_{ij}，則 此一長方體體積趨近於$f(\xi_{ij})\Delta x_i\Delta y_j$ 故

$$\sum_{i\ j=1}^{m\ n}\Delta x_i\ \Delta y_j\ f(\xi_{ij})=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\Delta y_j\ f(\xi_{ij})\right)\Delta x_i$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\Delta x_i\ f(\xi_{ij})\right)\Delta y_j\rightarrow V(G)$$ 當

m，$n\rightarrow\infty$時

要求$max\ \Delta x_i$，$max\ \Delta y_j\rightarrow 0$，則我們可以用積分形式改寫為

$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy=\int\left[\int f(x,y)\,dx\right]dy$$

$$=\int\left[\int f(x,y)\,dy\right]dx=V(G)$$

由（Ⅰ）（Ⅱ）（Ⅲ）（Ⅵ）的討論我們可看出它們在本質上來講都是相同的，它的觀念都是源由（Ⅰ）$a\times b=b\times a$而來，透過級數與極限的觀點來表成（Ⅵ）中的積分。

現在我們得到了一個結論：

〔富必尼定理〕：

假設f在緊緻（Compact）矩形

$Q=[a,b]\times[c,d]\subseteq R^2$內是有定義。

若f在Q上連續

則$$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx$$

$$=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy。$$

那麼對於任給的$f(x,y)$是否可滿足富必尼定理呢？我們看兩個例子：

例1：設$f(x,y)=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2$

$0\leq x\leq 1$，$0<y\leqslant 1$，$f(0,0)=0$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \right] dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx \right] dy = \int_0^1 \frac{-1}{1+y^2} dy = -\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx \right] \neq \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \right] dx$$

∴富必尼定理不成立。

例2：令 $I=[0,1]\times[0,1]$ $f(x,y)=\dfrac{x-y}{(x+y)^3}$

當 $(x,y)\in I$，$(x,y)\neq(0,0)$；$f(0,0)0$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right] dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{2}$$

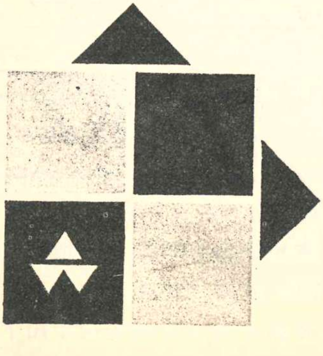
$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx \right] dy = \int_0^1 \frac{-1}{(1+y)^2} dy = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx \right] dy \neq \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right] dx$$

∴富必尼定理不成立。

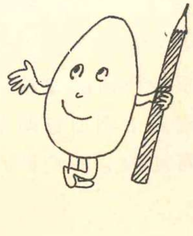
由上二個例子知富必尼定理並不是隨時可成立的，對於黎曼積分（ Riemann integral ） 來講，它必須是連續且在定義域上是有意義的。

現在我們已知富必尼定理成立的條件，那麼它的用處呢？對於任給立體體積求法，在數學上若不用富必尼定理的方法則由（ IV ）之討論，我們只好用複雜繁瑣的級數加法來求；但是富必尼定理卻給我們一個解決問題的捷徑，它使我們化繁爲簡、化三維的運算爲二維的積分。它是我們處理很多有關這方面問題的一個利器。



所謂"數學"——

是一種用來製造不及格的藝術。



關於拓樸

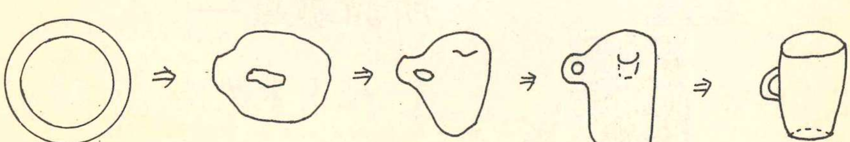
作者：數三甲 林貴玉
指導老師：郭汾派

每當與友人談及所修習的科目時，說到拓樸，許多人都不曉得拓樸是什麼，最多只知道拓樸是數學系的必修課程之一。以我來說，學了近一年的拓樸，到底拓樸是什麼，也只有一些粗淺的認識。

拓樸是一門相當新的數學，可以說是具體化幾何學的一支，比較偏於分析。拓樸學家最關心的是：在不產生新點也不粘合已存在的點的原則下，經過任何的彎曲、延伸、縮小或變形，有那些幾何上的特性仍不改變。例如以線穿編過號的珠子，以珠子代表點，以橡皮筋取代線，那麼即使珠子間的距離改變了，或者橡皮筋打結了，但珠子的次序仍未改變。

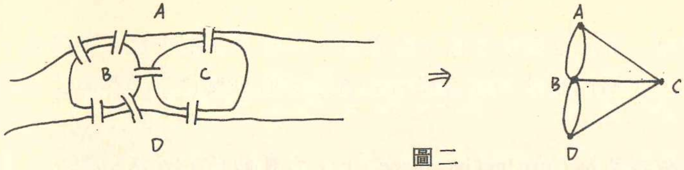
兩個幾何圖形彼此間若有一對一的對應關係，且可定義一個連續函數使其反函數亦爲連續函數，則我們稱此二幾何圖形爲同拓樸（homeomorphism）。所謂連續函數是說：定義域中的點 x 在對應域中恰有一點 y（$=f(x)$）與之對應。且對於值 y 的每一鄰域 $N(y)$ 都能找到一點 x 在定義域中，使得點 x 的鄰域所映的像均在 $N(y)$ 中又形狀或曲綫遵守法則變形成其他亦稱同拓樸。因爲橡膠製品可變形成許多同拓樸的物品，所以也有人以橡膠板幾何來稱拓樸學。橡膠帶可變形爲同拓樸的圓或方形，但不能與 8 字形爲同拓樸。因爲必須粘合帶子的兩點才能成爲 8 字形，而這是與同拓樸的規則相抵觸的。

又我們可以把輪胎狀的物體和有杯耳的杯子視爲同拓樸。這可由下圖由輪胎狀的粘土去變形而得知。



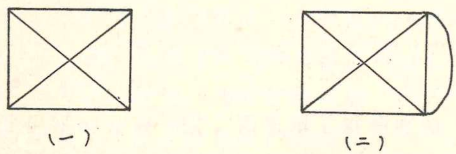
圖一

拓樸有很多不同的來源。如所謂七橋問題：有兩座島在彼此和陸地間有七座橋，要想辦法走過七橋而每座橋不走第二次，在1735 年瑞士數學家尤拉（Euler）證明這是不可能的。他把圖形簡化成一網狀圖，以點代島，以綫代橋。如下圖



圖二

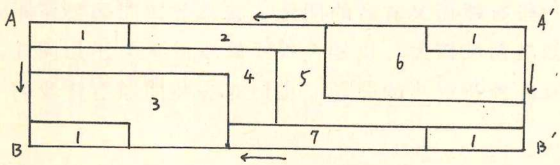
他的法則如下：一頂點若為偶數個綫所相交而得則稱偶頂點，若由奇數個綫所相交而得則稱奇頂點。由（面數－邊數＋頂點數＝２）（Ｆ－Ｅ＋Ｖ＝２）吾人可證明只可能有零個或偶數個奇頂點。一個網狀圖形能夠一筆劃畫完而不重覆的充分條件為：它沒有奇頂點或有兩個奇頂點。當它有奇頂點時，它的畫法是從某一奇頂點開始畫起。知道這些以後，我們就能穩操勝劵的打賭說：我可以決定任一網狀圖是否能一筆劃畫完而不重覆。如圖㈠不能一筆劃畫完但圖㈡可一筆劃畫完。



圖三

另一有名而聲名狼藉至今一百多年來仍未被解決的問題是着色問題。在一單純連接的表面上如地球或任意一書頁，吾人只須四色即可着色，使得任二有共同邊的區域其顏色不同。而每一區域與其他區域之共同邊至少為一有限數。沒有人曾經需要超過四色來着色，但也沒有人能證明如此的着色法是辦得到的。當吾人着色象棋盤時只須二種不同顏色即可辦到。

最刺激的是，一個看起來較難的定理已被證明：在一輪胎狀或任何雙重連接的表面上，七個顏色是必須而且是足夠的。下圖為一輪胎狀圖形攤開在紙上的圖形：



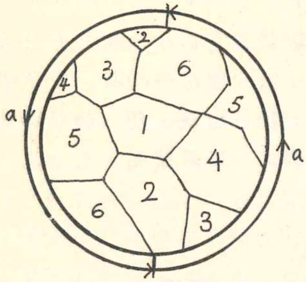
圖四

$\overline{AA'}$ 與 $\overline{BB'}$ 粘合，再把 $\overset{\frown}{ABA}$ 與 $\overset{\frown}{A'B'A'}$ 粘合即得一輪胎狀圖形。所分之七區域，每一區域均與其他區域有共同邊。

在着色問題中，如果不限制所分割的區域每兩個均需有共同的邊，則我們所需的顏色種類將可減少。如西洋棋盤之只須黑白二色為一例。在一般的面上（如紙面或地球表面），六種顏色或少於六種顏色就可以使有共同邊的區域着不同色。（區域若有共同頂點但無共同邊則可着同色）。

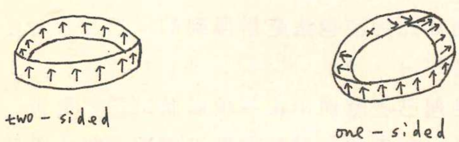
經由一較精細的證明，吾人可證得球面上的着色，只需五種或少於五種顏色。至今尙無數學家以圖解來表出此事實，因爲那將必須把球面分割成四十個以上的區域。

由下圖吾人可知在映射平面(projective plane)上，六種顏色恰可滿足要求。圖上有六個五邊形區域，每個區域均與其他區域共一邊。



將其中一邊扭轉而與另一邊相粘得一映射平面

在 1858 年 Mobius 和 Listing 個別發現了單邊面。把一條長方形帶子的一短邊轉 180° 和另一短邊粘合，即可得一單邊面。油漆其表面時，只須一直刷過去，不用再翻轉而中斷，即可將全表面刷過。當一個方向沿着面移動，回到出發點時，其方向不變者稱爲雙邊面，若方向反了，則稱爲單邊面。如下圖：



圖五

綜上所述，均爲拓樸學中一些有趣而又有名的問題。誠然解決問題很了不起，但是能發現問題，而使我們的知識領域擴大，也是件很不簡單的事。正如同在其他的數學領域中一般，拓樸學仍有許多待解決的問題，也仍有許多問題有待我們去發現去探討。

參考資料：

Baar : Experiments in topology

Kline : Mathematical throngh from Ancident to Modern Time

對微積分基本定理的一些看法

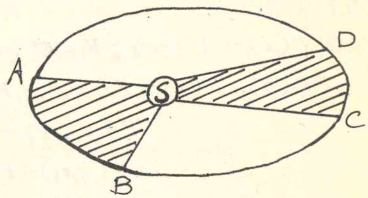
作者：數三丙 童明聰
指導老師：林義雄

一、微積分的歷史背景

(1)描寫運動：我們這個世界是動態的；地球環繞太陽而轉，人類的行走跑跳，自由落體等等。爲了瞭解支配這些變化的法則，則須去解析這些變動，但是這些變動發生時都是連續的，沒有一個固定的地方，爲了研究這些變動，因此產生了微積分；如一個運動體，將距離對時間微分，得到在某一點的瞬時速率，再微分一次，則得到瞬時加速度。

(2)求曲綫之切綫：在光學上，光綫直射，經過鏡面反射，我們求出鏡面之切綫，然後求出其法綫，我們才能判斷光綫反射後的路徑。

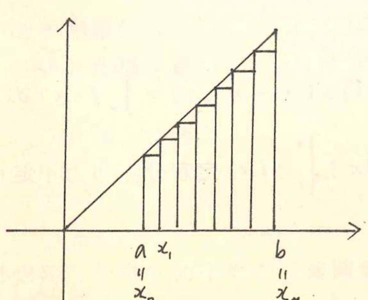
(3)求極大極小的問題：想要使砲彈發射到極遠的距離，經過微積分對於砲彈的種種彈道加以分析，得到砲口仰角爲四十五度時，其射程最遠。



(4)求面積、體積、曲綫長度：微積分能幫助我們算出種種不規則物體體積，表面積及弧長。例如刻卜勒（Kepler）的行星第二運動定律，即行星運動時速率的變更，和其距太陽的距離有關。凡運行時間相等時，則其與太陽連結線所掃過的面積相等，如圖斜線部分 ABS 與 CDS 的面積相等。

二、人生經驗

當我們爬樓梯時，是一階梯一階梯的逐漸上升，而達到頂端。換句話說，我們由地上爬到頂端是把它分割成許多小階梯而慢慢上升達成的。微積分的理論基礎就是建立在這上面。在某種意義下也可說是將電影的原理，導入了數學中；電影係由運動體的重複靜止畫面構成的，而微積分卻將運動分割成許多「靜止的畫面」，以便「一幅一幅」的連續觀察。



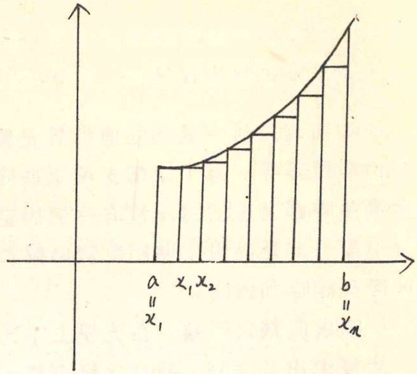
三、＋與－，×與÷透過極限步驟得到$\int$及d

(1)直綫 $y=x$ 之情形

如爬樓梯，一台階一台階的往上爬，當台階寬度趨近於0時，$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \to 0$　得到

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) = \int_b^a x\,dx$$

(2) $y = F(x)$ 表由 a 到 x 在 $y = f(x)$ 曲線下的面積。



$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

運用以前的四則運算，我們可以求得如圖曲線下小矩形的面積和，透過極限觀念，讓小矩形寬度趨近於0，則我們得到曲線下之面積 $\int_a^b f(x)\,dx$。

(3) $f(x) = F'(x)$，$F \in C'[a,b]$（*i.e.* F 在 $[a,b]$ 上是連續可微分）

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \cdots\cdots + F(x_1) - F(x_0)$$

$$= (F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + \cdots\cdots$$

$$+ (F(x_n) - F(x_{n-1})) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1}))$$

由中值定理（mean value theorem）知，存在 $\bar{x}_i \in (x_{i-1}\ \ x_i)$，使得

$$f(\bar{x}_i) = F'(\bar{x}_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \Longrightarrow F(x_i) - F(x_{i-1})$$

$$= f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1})$$

所以　$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1})$

當 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \to 0$，由積分定義得

$$F(b) - F(a) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)\,dx$$

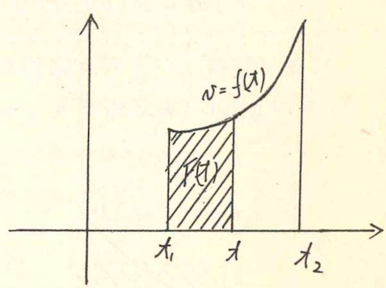
即 $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \left\{ \int f(x)\,dx \right\} \Big|_a^b$，*i.e.* 定積分亦可由不定積分表示之。

這就是微積分基本定理，它把表面上看來無關表瞬時變率的“微分”及表極限

和的“積分”聯合起來。$\int$ 及 d 大體上來說是互爲反運算，就如加法和減法，乘法和除法一樣。＋與－，×與÷經過極限步驟的處理，則得到 $\int$ 及 d。對於積分及微分的運算，若直接由極限步驟去求的話，過程極爲繁瑣，不易計算，這也是十七世紀以前，微積分未能發展的主要原因。牛頓（Newton）及萊布尼茲（Leibnitz）發現了微積分基本定理，澄清了微分和積分的觀念，發明了微積分。由於實際生活的需要，累積了充分的理論與計算資料之後，才得到現在一般定積分的解法。微分和積分應用極廣，從物理、化學、生物乃至於經濟社會等都會用到，只要我們研究的對象，其性質因某因素而變動，換句話說，可得到一個函數，積分後，便是總數值。如把 x 軸代表時間，y 軸代表一個商店當時出售貨物的售量，其積分後面積便是代表某段時間內總共賣了多少東西。又如 x 軸代表離家的距離，y 軸代表你走到那兒淋雨的多少，面積便是代表落湯雞的程度。微積分能將函數的圖表加以解析，函數的解析至爲最重。因爲世界上不論何物體，莫不都在某種推移狀況下，逐漸變化。由於定積分資料的累積，對應的，求導數問題的研究，同時並進。還有一種現象，積分後的函數，可能愈來愈奇怪，愈來愈“超越”。微分則恰好相反，它往往把“超越”或奇怪的函數平凡化。例如 $1/x$ 的不定積分爲 $\log x$。因此積分會造出許多新的函數出來，函數的領域便拓寬了，數學上可研究的資料便增多了。

四、各方面之說明

(1)物理觀點；以速度 $v = f(t)$，t 表時間：



從 t_1 到 t_2 所經過的距離爲

$$F(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$$

$S = F(t)$ — 從某一起點行經的距離，因時間 t 而變化，即爲距離函數。

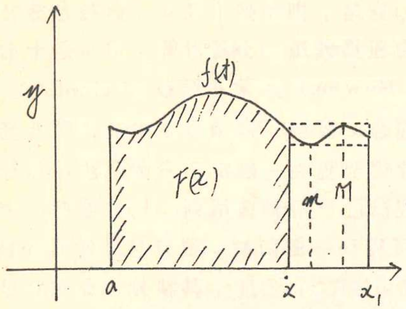
如當我們在濃霧中駕著車子，沿一直線駕駛時，不幸計程器壞了，但我們隨身帶著很精確的錶，我們一面注意速度表的指針，一邊把時間連續地記錄下，就能夠求得經過的距離。這種方法用於潛水艇或太空船是很實用的。

(2)面積的解釋

$F \in C'[a, b]$

將積分 $F(x)$ 視爲曲線 $y = f(t)$ 下的面積，

則 $F(a) = 0$，



$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

如左圖 x 和 x_1 間的面積，此面積的大小是介於（x_1-x）m 與（x_1-x）M 兩值之間。其中 M 與 m 分別爲 x 至 x_1 區間中，$f(t)$ 的最大值與最小值。

即 $(x_1-x)m \le F(x_1)-F(x) \le (x_1-x)M$

$$m \le \frac{F(x_1)-F(x)}{x_1-x} \le M$$

若 $f(t)$ 是連續，當 $x_1 \to x$ 時，$M, m \to f(x)$

$$\therefore F'(x)=\lim_{x_1\to x}\frac{F(x_1)-F(x)}{x_1-x}=f(x)$$

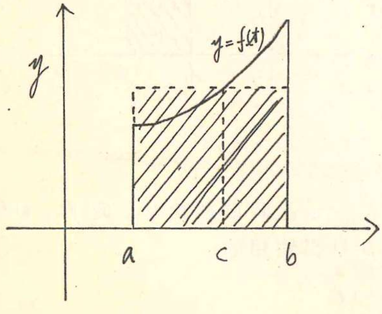
這表示在曲線 $y=f(t)$ 下的面積，當 x 增大時的變率是等於該曲線在點 x 的高。

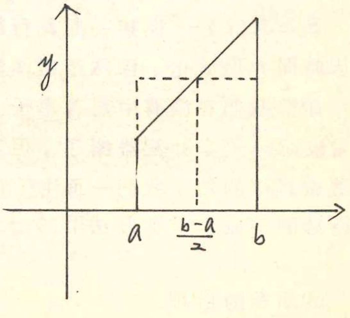
(3)如 $F \in C'$，$F'(x)=f(x)$

由中值定理（mean value theorem）得到

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)=f(c)(b-a)=F'(c)(b-a)$$

其幾何意義，在 a 與 b 之間存在一點 c，使得 c 點的變率等於兩端點（a，$F(a)$）（b，$F(b)$）連線之斜率。





如 $F(x)$ 視爲曲線 $y=f(t)$ 下的面積，如上圖，則斜線部分之矩形面積等於曲線下之面積。

若 $y=f(t)=t$　如上圖形

則梯形面積 $= f\left(\frac{b-a}{2}\right)(b-a)$

五、結　論：

(1)把客觀世界裡實際事象的一種連繫，用數學式表示出來。

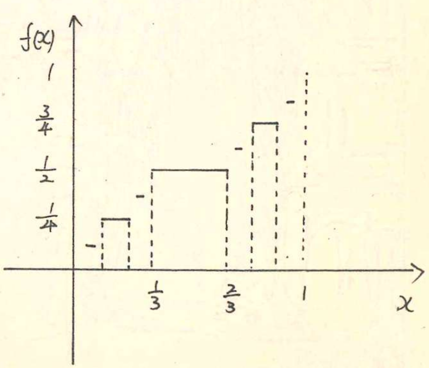
利用微積分，能把客觀世界裡所有運動及變化，用數學來解析，微積分在今日，已成了實用科學和數學知識的貯藏所的連絡管，不論飛機、電視機、橋樑、炸彈、太空船，如不接受它的照顧，便無法完成。當年牛頓將伽利略的自由落體方程式，$y=16t^2$（y 的單位爲呎，t 的單位爲秒），連續微分二次，用以剷去它層層的變化和不定常數，最後得到了一個常數，它的變率是零，也就是它不變，故它代表一個自然律。就是凡所有自由落體都以每秒增加每秒 32 呎的加速度，向地心下降，由於這個事實的確定，牛頓才能放眼於地球之外，推論出萬有引力定律，也就是支配宇宙間一切運動體的定律。學微積分等於在 + − × ÷ 之上，透過“ limit ”的方法，多增加 $\int$ 及 d 二種運算，用來描寫自然界運動現象，及肉眼直覺看不到的現象，我們現在不僅在算術、代數、幾何上可作問題，而且可利用微積分在更廣的數學（數學分析）上作運算。

(2)數學分析結果的實際應用

如原始資料在實際世界中已獲得證明，那麼，用數學論證也一樣可以獲得證明。對所得數學結果的正確性，用不着作實際的驗證，只須看數學論證是否正確就可以了！但容許有“誤差”。愛因斯坦應用高斯（Gauss）和黎曼（Riemann）的觀念，導出了相對論，事後經由許多科學家予以證實。

六、推　廣

若 f 是連續且可微分 almost every-where ie 不可微分點集的 measure 爲 0。並不會保證 $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$。



例：$x \in [0,1]$，$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$　$0 \leq a_n < 3$

且 $a_n \in Z$，此即 x 的三元展開（ternary expression），N 是使 $a_n = 1$ 的最小自然數，若不存在 $a_n = 1$，則取 $N = \infty$，

設 $b_n=\frac{1}{2}a_n$ ，$n<N$，$b_N=1$，定義 $f(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n}{2^n}$

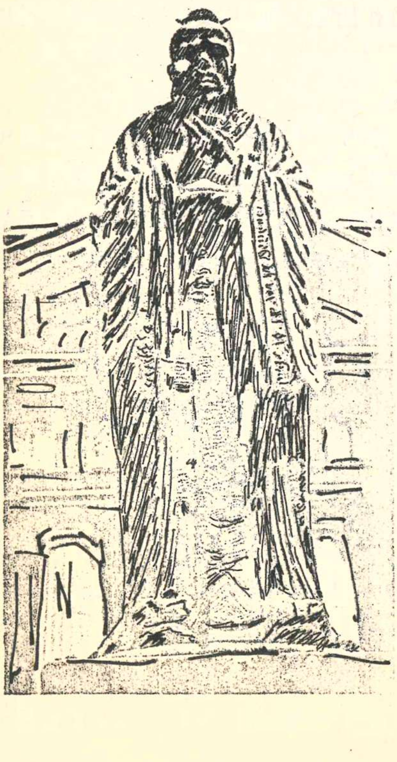
則 f 是單調連續函數，而且 $f'=0$ almost everywhere

$\Rightarrow\int_0^1 f'(x)\,dx=0$ ，但是 $f(1)-f(0)=1-0=1\neq 0$

這函數 f 稱爲 Cantor ternary function

但當 f 是絕對連續（ absolute continuous ）

則 $\int_a^b f'(x)\,dx=f(b)-f(a)$



別忘了我們的責任！

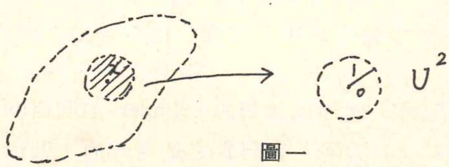
簡介 2-Dimensional Manifolds

作者：數三甲 彭文理
指導老師：郭汾派

在拓樸觀念上，*2-dimensional manifolds* 可以看成由薄紙片做（黏）成的曲面。也可以說是一個在局部上和歐氏平面有相同性質的拓樸空間。先給一個定義：

【定義】 *2-dimensional manifold* 是一個具有下列規則的 *Hausdorff* 空間：每一點都存在一個 *open neighborhood* 同胚於（*homeomorphic*）*2-dimensional open disc* $U^2 (=\{x \in R^2 : |x| < 1\})$。

上面的定義從幾何觀點說，可以用圖一表示：

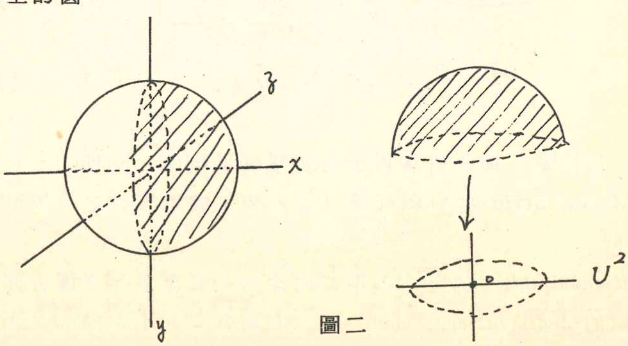


圖一

下面我們給幾個 *2-dimensional manifolds* 的例子：

例1：二維空間 R^2 是最簡單的 *2-dimensional manifolds*，因為對每一點 x，都可以找到 $V=\{y \in R^2 : |y-x| < 1\}$ 同胚於 $U^2=\{x \in R^2 : |x| < 1\}$。

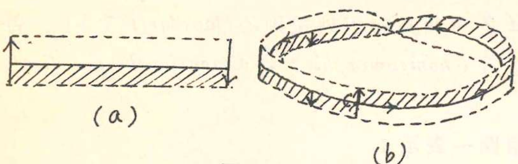
例2：*2-Sphere* $S^2=\{x \in R^3 : |x|=1\}$ 是一個 *2-dimensional manifold*，對一點 $(1,0,0)$，$V=\{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 : x_1 > 0\}$ 是 $(1,0,0)$ 的 open neighborhood 同胚於 U^2，而對於其他點，我們只要把 S^2 對原點旋轉至 $(1,0,0)$ 仍可以找到相同的 open neighborhood 同胚於 U^2。（見圖二）這就像一個人站在地球上看地球，他的視野呈一平面上的圓。



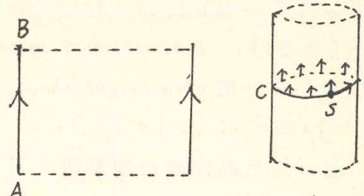
圖二

在這些由薄紙片黏成的 2-*dimensional manifolds*中，有些是連通的（connected），有些不是，在 connected 2-*dimensional manifolds* 中，可以分成兩類：一類是定向的（orientable），另一類是不定向的（non-orientable）我們以 cylinder，torus，Mӧbius strip, Klein-bottle 作例子來解釋所謂的定向和不定向。

例 3：Mӧbius 帶（Mӧbius strip）的構成是把一條等寬的長紙帶兩端，一端扭轉而相黏結，然後除去周界，即是 2-*dimensional manifold*，如圖三(b)所示，也可以圖(a)表之。它是不定向的，因為在此帶中央封閉路徑上一點 c，定一向上方向，沿此路徑旋繞，回到原來位置，箭頭已經向下和原來相反。



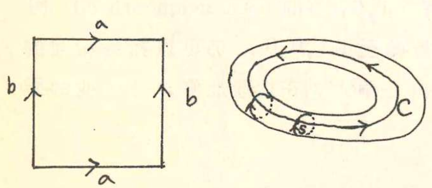
圖三



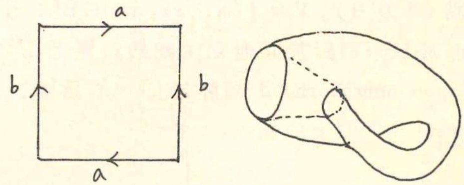
(a) 圖四 (b)

如果我們在黏的過程中不扭轉，就形成我們的 cylinder 如圖四(b)也以(a)表之除去周界，也是一個 2-*dimensional manifold*。我們說它是定向的，乃因為我們對所有的封閉路徑 C，在此路徑上任取一點 S 且選擇一方向，當此點沿此路徑回到原來位置，箭頭仍然不變如圖四，C 是封閉路徑，S 是起點，指向上方。

例 4：上例中的 Cylinder 如果我們再把兩端接起來，就成了 Torus，像輪胎一樣如圖五(B)所示，也以(A)表之，或用符號則記為 $aba^{-1}b^{-1}$。我們說它是定向的，乃因在封閉圓路徑 C 上取一點 S，選一個定方向繞 C 回到原來位置，方向仍不變。



(A) 圖五 (B)



(A) 圖六 (B)

如果把 Cylinder 一端扭轉，插入自身再相接就形成了 Klein-bottle。它是不定向的，乃因它具有像 Mobius strip 的扭轉性質見圖六(B)，或以(A)表之，如用符號則記為 $abab^{-1}$。

2-*dimensional manifolds* 的定向與不定向從另一角度看，亦即表面數目的問題，我們發現：定向的 2-*dimensional manifolds* 有兩個面，不定向的 2-*dimensional* *manifolds* 只有一個面。

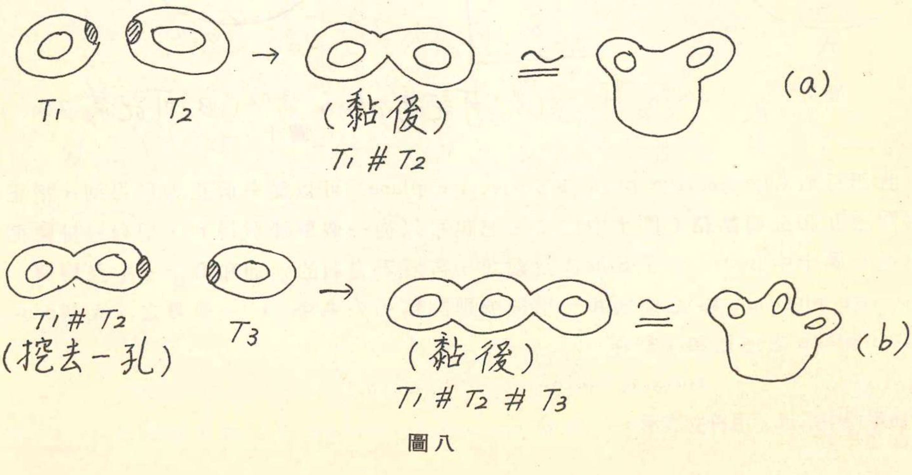
下面的定理是對 2-*dimensional manifolds* 其中屬於緊緻（Compact ）且連通（connected） 的作一形式上的歸類，也是在 2-*dimensional manifolds* 中一個基本而重要的定理。

【定理】任何一個緊緻且連通的 2-*dimensional manifolds* 同胚於 sphere,或同胚（homeomophie)於torus的連通和(Conneetecl sum ）或同胚於 projeetive plane的連通和。要了解這個定理則必須知道什麼叫做連通和（ connected sum ）和 projectiee plane 。

【定義】 兩個緊緻且連通的 2-*dimensional manifolds* S_1 , S_3 的連通和是將這兩個 2-*dimensional manifolds* 個別挖去一個圓小孔，然後接連這兩個小孔的邊緣所得到的圖形結果，表為 $S_1 \# S_2$ 。

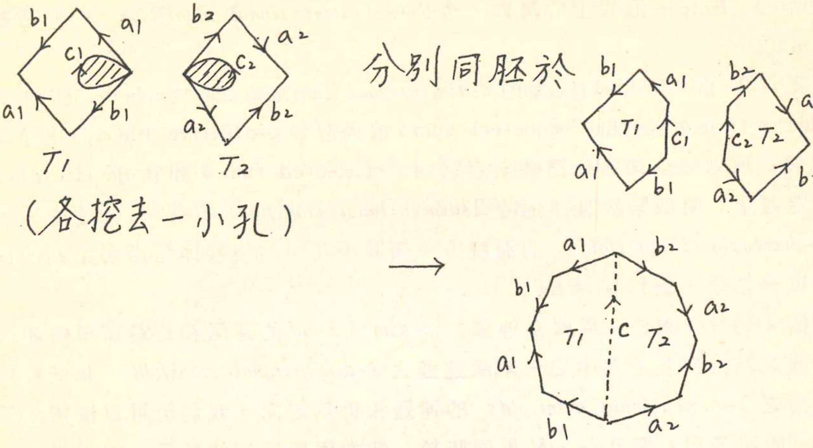
一個 2-*sphere* 和任一緊緻且連通的 2-*dimensional*的連通和是最簡單的如圖七，它所得到之結果同胚於其中之那緊緻連通之 2-*dimensional manifold* ，我們可以證明兩個定向之 2-*dimensional manifolds* 的連通和仍為定向。我們仍可以做兩個 Torus T_1, T_2 的連通和（圖八），結果同胚於一個有兩個把柄的杯子，如果Torus 數目增多，其連通和也同胚於多把的杯子。

圖七



圖八

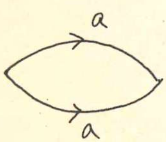
圖八(a)可改寫爲



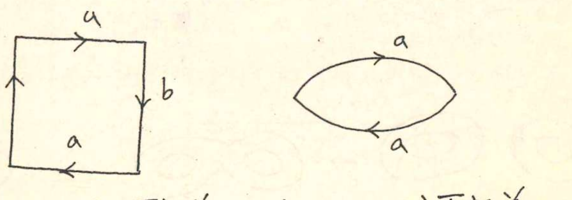
其連和和記爲 $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}\ a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$ ，一般言之，n 個 Torus 其連通和可表爲

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}\ a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots\cdots\cdots\cdots\ a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$$

我們了解了Torus的連通和，再看看 2-*sphere* 。事實上，我們可以把它看做是把一個兩邊形（2-*gon*）的兩邊相黏結如圖九，因爲它們在拓樸上是同胚的，用符號則可記爲 aa^{-1} 。



圖九



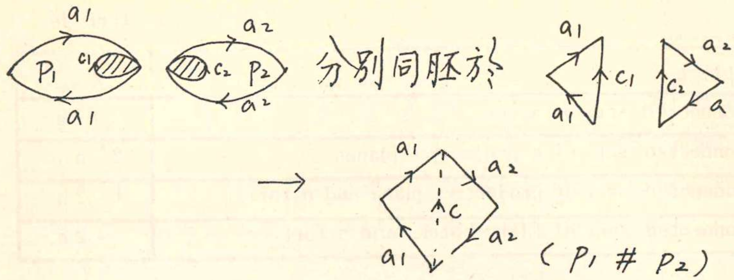
(A)可記爲abab　　(B)可記爲aa

圖十

我們再看看 projective plane：projective plane 可以從一個正方形得到，把正方形對邊互相扭轉黏結（圖十中(A)），它也可以從一個兩邊形得到，把對邊扭轉而後黏結（圖十中(B)），有了其形成之觀念，再看看它們的連通和圖十一中爲兩個 projective plane p_1, p_2 之連通和。用符號則記爲 $a_1 a_1 d_2 a_2$ ， 一般言之，幾個projective plane 之連通和，記作

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\ a_n a_n$$

所以前定理中所述，用符號表示。



圖十一

(a) sphere：aa^{-1}

(b) n 個 Torus 的連通和 $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots\cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$

(c) n 個 projective plane 之連通和 $a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots\cdots a_n a_n$

雖然我們已經知道緊緻連通的 2-*dimensional manifold* 同態於 sphere 或者同態於 Torus 的連通和或同態於projective plane 之連通和，但是在拓樸上，我們仍難分辨其相異處。換句話說，我們須用另一角度的方法與觀念來分類，這就是我們要介紹的Euler characteristic ，一個經過三角化以後的緊緻連通 2-*dimensional manifold* M，其Euler characteristic 。$x(M)=v-e+t$ ，其中：

v ＝M三角化之頂點數

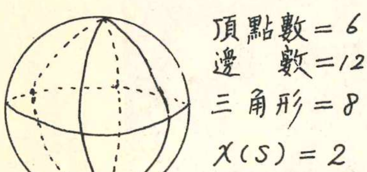
e ＝M三角化之邊數

t ＝M三角化之三角形個數

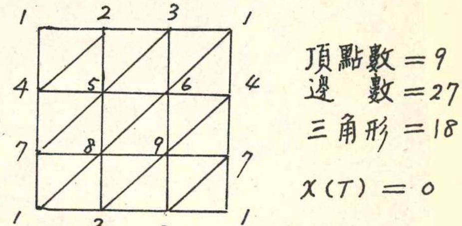
以S^2爲例：就像切西瓜樣三角化（圖十二）

所謂的三角化，即在其曲面上切割出有限個同胚的三角形網。每兩個三角形最多只能有一邊及二個頂點共用。當然，我們能證明不同的三角化形成的 Euler charactenistic 是相同的。

以 Torus 爲例。



圖十二



圖十三

把 Euler characteristic 應用到連通和上我們得到下列公式：

$$X(S_1 \# S_2)=X(S_1)+X(S_2)-2$$

其中 S_1, S_2 是緊緻連通之 2-*dimensional manifold* 推廣之；我們有

Euler characteristie

Sph e	2
Connected sum of n tori	2−2n
Connected sum of n projective planes	2−n
Connected sum of projective plane and n tori	1−2n
Connected sum of klein bottle and n tori	−2n

有了 Euler-Characteristic 我們更進一步的對緊緻連通的 2-dimensional manifolds 的認識。

2-*dimensional manifolds* 是代數拓樸中的一些觀念，筆者限於知識和文筆，祇能寫出這些淺顯的觀感，若有疏漏或不當之處，尚請指教。如果同學們希望有更深入明白的了解 2-*dimensional manifolds* 及其他觀念，可以參考下列書目。

【參考資料】

一、Blackett：Elementary Topology.

二、William S. MASSEY.

Algebraic Topology. An introducti n（主要參考書）

行政大樓夜景

Night View of the Administrative Building

關於 1976 年

作者：數三丙 孫文先
指導老師：呂溪木

今年是西元 1976 年，是中國的龍年。世界經濟的復甦，使得每一個人都讚美 1976 年是個幸運年。在此我要告訴各位一件有關 1976 更幸運的事。

$1 = -1+\sqrt{9}-7+6$

$2 = 1\times\sqrt{9}-7+6$

$3 = 1+\sqrt{9}-7+6$

$4 = -1+\sqrt{9}+7-6$

$5 = 1+\sqrt{9}+7-6$

$6 = (-1+9-7)\times 6$

$7 = -1+9-7+6$

$8 = 1\times 9-7+6$

$9 = 1+9-7+6$

$10 = 1\times(-\sqrt{9})+7+6$

$11 = 1+(-\sqrt{9})+7+6$

$12 = 1\times 9!\div 7!\div 6$

$13 = 1+9!\div 7!\div 6$

$14 = (-1+\sqrt{9})\times(7!\div 6!)$

$15 = -1+\sqrt{9}+7+6$

$16 = 1\times\sqrt{9}+7+6$

$17 = 1+\sqrt{9}+7+6$

$18 = (1+9-7)\times 6$

$19 = 1\times(\sqrt{9}!+7+6)$

$20 = 1+\sqrt{9}!+7+6$

$21 = -1+9+7+6$

$22 = 1\times 9+7+6$

$23 = 1+9+7+6$

$24 = 1\times(-\sqrt{9}+7)\times 6$

$25 = 1+(-\sqrt{9}+7)\times 6$

$26 = -1+\sqrt{9}\times 7+6$

$27 = 1\times\sqrt{9}\times 7+6$

$28 = 1+\sqrt{9}\times 7+6$

$29 = (-1+\sqrt{9}!)\times(+7)-6$

$30 = (1-\sqrt{9}+7)\times 6$

∘ $31 = 1+(\sqrt{9}+[\sqrt{7}])\times 6$

$32 = -1-9+7\times 6$

$33 = 1\times(-9)+7\times 6$

$34 = 1-9+7\times 6$

$35 = -1+\sqrt{9}!\times 7-6$

$36 = 1\times\sqrt{9}!\times 7-6$

$37 = 1+\sqrt{9}!\times 7+6$

$38 = -1-\sqrt{9}+7\times 6$

$39 = 1\times(-\sqrt{9})+7\times 6$

$40 = 1 \quad \sqrt{9}+7\times 6$

$41 = -1+(\sqrt{9}!)\times(7!\div 6!)$

$42 = 1\times\sqrt{9}!\times 7!\div 6!$

$43 = 1+\sqrt{9}!\times 7!\div 6!$

$44 = -1+\sqrt{9}+7\times 6$

$45 = 1\times\sqrt{9}+7\times 6$

$46 = 1+\sqrt{9}+7\times 6$

$47 = -1+\sqrt{9}!\times 7+6$

$48 = 1\times\sqrt{9}!\times 7+6$

$49 = 1+\sqrt{9}!\times 7+6$

$50 = -1+9+7\times 6$

$51 = 1\times 9+7\times 6$

$52 = 1+9+7\times 6$

∘ $53 = -1+9\times[\sqrt{7}\times 6]$

$54 = (-1+\sqrt{9}+7)\times 6$

$55 = (1+\sqrt{9}!)\times 7+6$

$56 = -1+9\times 7-6$

$57 = 1 \times 9 \times 7 - 6$

$58 = 1 + 9 \times 7 - 6$

$59 = -1 + (\sqrt{9} + 7) \times 6$

$60 = 1 \times (\sqrt{9} + 7) \times 6$

$61 = 1 + (\sqrt{9} + 7) \times 6$

$62 = -1 + 9 \times (7! \div 6!)$

$63 = 1 \times 9 \times (7! \div 6!)$

$64 = 1 + 9 \times (7! \div 6!)$

$65 = -1 + 9! \div 7! - 6$

$66 = 1 \times 9! \div 7! - 6$

$67 = 1 + 9! \div 7! - 6$

$68 = -1 + 9 \times 7 + 6$

$69 = 1 \times 9 \times 7 + 6$

$70 = 1 + 9 \times 7 + 6$

∘$71 = -1 + 9 \times ([\sqrt{7}] + 6)$

$72 = -1 - \sqrt{9} + 76$

$73 = 1 \times (-\sqrt{9}) + 76$

$74 = 1 - \sqrt{9} + 76$

$75 = (-1)^9 + 76$

$76 = (1 + 9) \times 7 + 6$

$77 = -1 + 9! \div 7! + 6$

$78 = 1 \times 9! \div 7! + 6$

$79 = 1 + 9! \div 7! + 6$

$80 = 1 + \sqrt{9} + 76$

$81 = -1 + \sqrt{9}! + 76$

$82 = 1 \times \sqrt{9}! + 76$

$83 = 1 + \sqrt{9}! + 76$

$84 = -1 + 9 + 76$

$85 = 1 \times 9 + 76$

$86 = 1 + 9 + 76$

$87 =$

$88 =$

$89 =$

$90 = -1 + 97 - 6$

$91 = 1 \times 97 - 6$

$92 = 1 + 97 - 6$

$93 =$

∘$94 = -1 + 97 - [\sqrt{6}]$

$95 = -1 + (9 + 7) \times 6$

$96 = 1 \times (9 + 7) \times 6$

$97 = 1 + (9 + 7) \times 6$

∘$98 = -1 + 97 + [\sqrt{6}]$

∘$99 = 1 \times 97 + [\sqrt{6}]$

∘$100 = 1 + 97 + [\sqrt{6}]$

多麼幸運啊！用1,9,7,6 四個數字，在其上我們任加數字運算符號而有序的運算，我們可造出1 至100 中除了87,88,89,93 四個數。可見今年的好運是上蒼有意安排的。

並非任一年都是如此幸運的。例如去年（1975 年） 我們只能做出下列數字：

$1 = (-1)^9 + 7 - 5$

$2 = -1 - 9 + 7 + 5$

$3 = 1 \times (-9) + 7 + 5$

$4 = 1 - 9 + 7 + 5$

$5 = 1 \times \sqrt{9} + 7 - 5$

$6 = 1 + \sqrt{9} + 7 - 5$

$7 = 1 \times 9 - 7 + 5$

$8 = -1 - \sqrt{9} + 7 + 5$

$9 = 1 \times (-\sqrt{9}) + 7 + 5$

$10 = 1 - \sqrt{9} + 7 + 5$

$11 = (-1)^9 + 7 + 5$

$12 =$

$13 = 1^9 + 7 + 5$

$14 = -1 + \sqrt{9} + 7 + 5$

$15 = 1 \times \sqrt{9} + 7 + 5$

$16 = 1 + \sqrt{9} + 7 + 5$

$17 = 1 + \sqrt{9} \times 7 - 5$

$18 = 1 \times \sqrt{9}! + 7 + 5$

$19 = 1+\sqrt{9}!+7+5$

$20 = -1+9+7+5$

$21 = 1\times9+7+5$

$22 = 1+9+7+5$

$23 = 1+\sqrt{9}\times7+[\sqrt{5}]$

$24 =$

$25 = -1-9+7\times5$

$26 = 1\times(-9!+7\times5)$

$27 = 1+\sqrt{9}\times7+5$

$28 =$

$29 =$

$30 = (-1+\sqrt{9}!)\times7-5$

$31 = -1-\sqrt{9}+7\times5$

$32 = 1\times(-\sqrt{9})+7\times5$

$33 = 1-\sqrt{9}+7\times5$

$34 = 1-9+7!\div5!$

$35 =$

$36 = -1+\sqrt{9}!\times7-5$

$37 = 1\times\sqrt{9}!\times7-5$

$38 = 1+\sqrt{9}!\times7-5$

$39 = 1+\sqrt{9}+7\times5$

$40 = 1-\sqrt{9}+7!\div5!$

$41 =$

$42 = 1\times\sqrt{9}\times7\times[\sqrt{5}]$

$43 = -1+9+7\times5$

$44 = 1\times9+7\times5$

$45 = 1+9+7\times5$

$46 = 1+\sqrt{9}+7!\div5!$

$47 =$

$48 =$

$49 = -1+(\sqrt{9}+7)\times5$

$50 \doteq -1+9+7!\div5!$

在 1 ～50中，已有許多數字，我們無法作出。

據有位有名之預言家預測，西元一九九九年世界將有極大變動，很可能是世由毀滅。我們且來看看公元二〇〇〇年將是什麼樣子。

$1 = 2^0+0+0$

$2 = 2+0+0+0$

$20 = 20+0+0$

從此可見西元二〇〇〇年這世界上可能沒存有幾種東西，故這名預言家之預言是有可能的。親愛的讀者您說呢？您不妨爲明年算算吧！

談談微分的定義

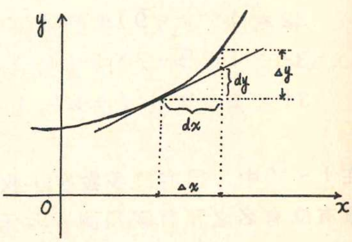
作者：數四乙 林宗華
指導老師：林義雄

“微分”這個名詞大家從大一開始便耳熟能詳，從初微、高微、測度、泛函、複變，這一系列的分析學理，都會提到，但其符號與表達方式都因科目的差別或書籍的不同而有很大的差異，不過儘管如此，它的結構，精神却都是一致的，現在我們用四種不同的角度（即一、幾何觀點，二、線性代數觀點，三、泛函分析觀點，四、測度學觀點）來欣賞“微分”的定義：

一、用幾何方式認識微分：

1. $f : R^1 \to R^1$，$y = f(x)$，若 f 在 x_0 點可微分，

即 $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$ 存在。



則記 A 爲 $f'(x_0)$，稱爲 f 在 x_0 的導數，也是過（x_0，$f(x_0)$）切線的斜率。

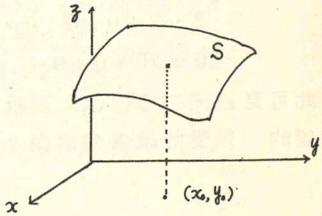
dy 則稱爲 f 在 x_0 經 dx 變量的微分。

（$dy = f'(x_0)\,dx$）

2. 現在我們嘗試把 R^1 推展到 R^2（R^n）

如右圖　$f = R^2 \to R^1$，

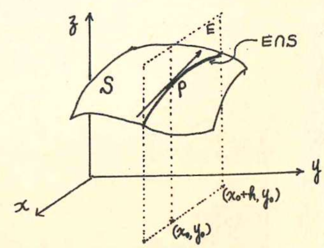
即 $z = f(x, y)$



①我們先定義偏導數

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

此時對於把 y_0 看成常數，只沿著 $y = y_0$ 直綫之方向求導數一樣。



若 S 表曲面 $z = f(x, y)$，E 表過 $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

點與 x 軸平行的平面，我們來看它的幾何意義：

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ 表曲線 $E \cap S$ 在 $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 點切線的斜率。

同理可定義 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$

若 F 表過 P 與 y 軸平行的平面，則 $\dfrac{2f}{2y}(x_0\ y_0)$ 表曲線 $F \cap S$ 在 P 點切線的斜率。

②再定義方向導數：

令 $U = (a, b)$ 為 R^2 中的單位向量，$x = (x_1, x_2)$

$Du\, f(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + hu) - f(x)}{h}$

若 K 表過 x 與 u 平行的平面，則它的幾何意義是曲線 $K \cap S$ 在 $(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$ 點切線的斜率。

3. 在 $R^1 \to R^1$ 中 f 在 x_0 可微分的幾何意義可說是在 x_0 可以做一條切線，成為在 x_0 附近的最佳綫性近似。因此在 $R \to R^1$ 中 f 在 (x_0, y_0) 可微分我們也可想成在 (x_0, y_0) 能找到一個最佳切平面（由過該點之所有切綫所組成），使之成為 (x_0, y_0) 附近的最佳綫性近似。

在一度空間中只要導數 $f'(x_0)$ 存在便可微分。但在二度空間，我們由

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\ y^4}{x^2 + y_4}, & \text{若 } x \neq 0 \\ 0, & \text{若 } x = 0 \end{cases}$$

可知在 $(0, 0)$ 每一個方向的方向導數（當然包含兩個偏導數）均存在，但却不連續。

故我們可知 f 在 $(0, 0)$ 每一方向之切綫不構成一個平面，即切平面不存在。所以如果“可微分”，要達到這個效果，單憑一度空間中的“導數存在即可微分”的條件顯然是不夠的，因此可微分的條件就必須強得多。

4. 在不同的書籍裡，對於 $f: R^n \to R^1$ 可微分的定義，我們舉例如下：

① Bartle：　f 在 c 可微分，即存在一個綫性函數 $L: R^n \to R^1$，$\ni$

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta(\varepsilon),\ \ni |x - c| < \delta \Rightarrow$$

$$|f(x) - f(c) - L(x - c)| < \varepsilon\, |x - c|$$

② Apostol ： f 在 x 可微分，即存在一線性函數 $g: R^n \to R^1$ ，$\ni$

$\forall \varepsilon > 0$ ，∃鄰域 $N(x)$ ，$\ni y \in N'(x) \Rightarrow$

$| f(y) - f(x) - g(x; y-x) | < \varepsilon | y - x | - x |$

③ Fulk ： f 在 $P_0(a, b)$ 可微分，即存在二數 A 與 B ，$\ni$

$f(a+h, b+k) = f(a, b) + Ah + Bk +$

$\eta \sqrt{h^2 + k^2}$ ，此地 $\eta \to 0$ ，當 $\sqrt{h^2 + k^2} \to 0$

④ Widder ： f 在 (a, b) 可微分，即 $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a, b)$ 與 $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a, b)$

存在，且

$f(a+\triangle x, b+\triangle y) - f(a, b) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a, b)$

$\triangle x + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a, b) \triangle y + \phi(\triangle x, \triangle y) \triangle x + \psi$

$(\triangle x, \triangle y) \triangle y$ ，此地 $\phi(\triangle x, \triangle y)$ ，且 $\psi(\triangle x,$

$\triangle y) \to 0$ ，當 $(\triangle x, \triangle y) \to (0, 0)$

其餘定法甚多，不勝枚舉。不過雖然衆說紛紜，但理唯一貫，就是要滿足前述 3. 的性質。

上式中 $L(x-c)$ ，$g(x; y-x)$ 稱爲 f 在 c 點（x 點）的全微分，一般記成：$df_x = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots\cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$ 。

5. 由於幾何性質只能解釋 $R^2 \to R^1$ 的性質，$R^n \to R^1$ 只能憑定義由二個變數推廣到 n 個變數，而且值域若爲 R^m 空間，由於圖形無法做出，以上的解釋便歸於無效。

因此我們準備：①用綫性代數爲工具來解決 $R^n \to R^m$ 微分的問題。

②用泛函分析爲工具，用一個可以統領上述諸式的式子來取代上述紛歧的符號。

〔例〕若 $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ 與 xy 平面之交集爲

一有心錐線，則此錐綫之中心座標爲 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ 與 $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ 之聯立解。

不失一般性，若假設 $z = f(x, y)$ 爲一橢圓抛物面，其與 xy 平面之交集爲一橢圓 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f - 0$

若 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ 代表在 (x_0, y_0) 有一平行“ xy 平面與 x 軸

”之水平切綫

$\frac{2f}{2y}(x_0\ ,\ y_0)=0$ 代表

在（ x_0 ，y_0 ）有一平行“

xy 平面與 y 軸”之水平切

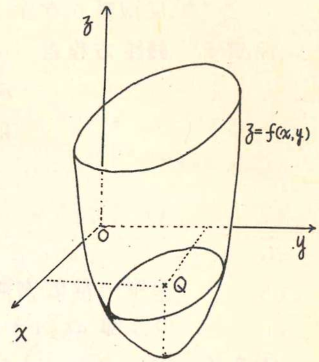
綫。

其交點恰爲 $z=f(x\ ,\ y$

）之頂點，該點在 xy 平面

之射影恰爲橢圓中心。

故其中心座標爲



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\ ,\ y)=2ax+by+d=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x\ ,\ y)=bx+2cy+e=0$$ 之聯立解。

二、用線性代數的觀念來解釋微分：

1. 綫性代數的工具：

性質 1. 若 $f:R^n\to R^m$ 爲一線性映射，$x\in R^n$，$f(x)=(f_1(x)$，$f_2(x)$，……$f_m(x_1)=(y_1\ ,\ y_2\ ,\ \cdots\cdots\ ,\ y_m)$

必然存在一矩陣〔a_{ij}〕$_{n\times m}$，∈

$$(y_1\ ,\ y_2\ ,\ \cdots\cdots\ ,\ y_m)=(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \cdots\ ,x_n)\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} & a_{1m} \\ a_{21}\ a_{22} & a_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1}\ a_{n2} & \cdots\cdots\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

此矩陣稱爲 f 的代表矩陣，記爲〔 f 〕$_{n\times m}$

性質 2 f 與 g 爲二綫性映射，且代表矩陣各爲〔 f 〕，〔 g 〕。

若 $h=gof$，則〔 h 〕=〔 f 〕〔 g 〕。

性質 3. $f:R^n\to R^n$ 爲一綫性映射，$e_1\cdot e_2$，……e_n 爲 R^n 中之一基底，則

$$|\ det〔f〕|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ \cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

代表 $f(e_1)$，$f(e_2)$，……$f(e_n)$ 所張成的有向體積，也代表體積的漲縮率。

性質 4. $\det[f] = |a_{ij}| \neq 0$ 時，我們可知 f 爲一對一且映成，故 T^{-1}（反函數）存在。

性質 5. 線性方程組

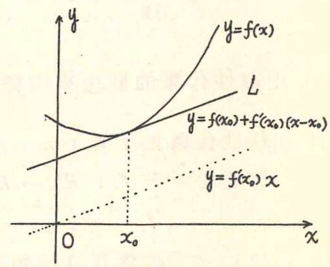
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = t_j\ (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = t_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = t_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n = t_n \end{cases}$$

有唯一解的充要條件爲係數矩陣 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ 之行列式值不爲 0，即 $\det A = |a_{ij}| \neq 0$

①在 $f: R \to R$ 中，由於 $y = f'(x_0)x$，代表一個 $R \to R$ 的線性映射，在第一部份的 1 中，如果把 x_0 當做原點，這個函數圖形就變成 f 在 x_0 的切線 L，換句話說，函數 f 在非常靠近 x_0 的點幾乎與 L 上的點沒有兩樣，因此微分可以看成一種局部的線性逼近觀念爲了表示局部性，把上式寫成 $dy = f'(x_0)dx$



②同理在 $z = f(x, y)$ 中，

$$z = Ax + By,$$

此地 $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$，　$B = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

也代表在 (x_0, y_0) 之一切平面，觀念與上述並無二致，我們寫成

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot(dx, dy)$$

③在 $f: R^n \to R^1$ 中，我們可以推廣成 $df = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots\cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)\cdot$

$(dx_1, dx_2, \cdots\cdots, dx_n)$

④故在 $f: R^n \to R^m$ 時，由於 $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots\cdots f_m(x))$，其中 $f_1, f_2, \cdots\cdots f_m$ 均爲 $R^n \to R^1$ 之實數值函數。

因此，如果它可微分，它的線性逼近函數很直覺的可以看成

$$df_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \cdots\cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)\cdot(dx_1, dx_2\cdots\cdots, dx_n)$$

$$df_2 = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \cdots\cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)\cdot(dx_1, dx_2, \cdots\cdots dx_n)$$

$$\vdots$$

$$df_m = \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_1}, \frac{\partial f_m}{\partial x_2}, \cdots\cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\right)\cdot(dx_1, dx_2, \cdots\cdots dx_n)$$

寫成一個式子，就是

$$df = (df_1, df_2, \cdots, df_m) = (dx_1, dx_2, \cdots\cdots, dx_n)\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, & \cdots\cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, & \cdots\cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}, & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}, & \cdots\cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

由性質 1.可知此綫性映射之代表矩陣爲$\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{m\times n}$，

有時記成$[df]_{m\times n}$，特稱爲 Jacobian 矩陣，當 $m=n$ 時，其行列式值稱爲 Jacobian。

記爲 $det[df]_{n\times n}$ 或 $\frac{\partial(f_1, f_2, \cdots\cdots f_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)}$

第一部份 4.中 Bartle 與 Apostol 的微分定義，在此仍然有效，我們到第三部分時，再把 $R^n \to R^m$ 的可微分性做一個更嚴密的定義。

3. Jacobian 矩陣的重要性：

假設 $f: R^n \to R^n$ 時

①反函數定理：

我們要知道 f 在 x_0 附近是否可逆？即是否存在一反函數？

只要在 x_0 點能找到一個最佳綫性逼近函數 L（即在 x_0 可微），而此綫性函數的代表矩陣（即 Jacobian 矩陣）不爲0，由性質 4.可知 L 爲一對一且映成，故 L^{-1} 存在，因此 f 在 x_0 的某一鄰域內，反函數便存在。——這就是反函數定理的主要內容，現在我們將定理的內容寫下來供大家參考：

〔定理〕：$f: R^n \to R^n$ 存在一個 x_0 之鄰域 $\cup$，$\ni$

1° $\forall a \in \cup$，f 在 x_0 連續可微分

2° ∃線性函數 L（即 df），∋

$$det\,[\,df\,]_{n\times n}=\frac{\partial\,(\,f_1\,,\,f_2\,,\cdots\cdots f_n\,)}{\partial\,(\,x_1\,,\,x_2\,,\cdots\cdots x_n\,)}\neq 0$$

⇒(1)存在 x_0 的開鄰域 $V\subset U$，∋ $f(V)=W$ 爲 R^n 中的開集。

(2) $f:V\to W$ 爲一對一，即存在 $f^{-1}:W\to V$。

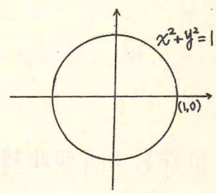
(3) f^{-1} 在 W 上連續可微分。

(4) $[\,df^{-1}\,]_{n\times n}=[\,df\,]^{-1}_{n\times n}$，$\forall\, x_0\in V$

②隱函數定理：

(i)〔問題1〕對於一個方程式 $F(x,y)=0$ 是否可表爲一隱函數 $y=f(x)$？

例如方程式 $x^2+y^2=1$ 代表一圓，在區間（-1，1）間每一鉛直線（垂直 x 軸的直線）均與圖形交於兩點，故全部不爲函數圖形。



因此我們只討論局部性的情形，即把問題範圍減弱到如下所述：

〔問題2〕對於 $F(x,y)=0$ 在某一點 x_0，是否存在一個鄰域內的圖形，可表爲一函數 $y=f(x)$？

在上例中我們很容易可以看出除（1，0），（-1，0）外，其餘均滿足〔問題2〕的情形，而（1，0）（-1，0）這兩點發生在 $\dfrac{\partial F}{\partial y}=0$ 之時。（即 $\partial y=0$，$y=0\Rightarrow x=\pm 1$）

我們可以解釋當 $\dfrac{\partial F}{\partial y}=0$ 時，在（1，0）點有鉛直切綫，即最佳綫性近似對於一個 x 沒有 y 值與之對應，不爲函數圖形，由前可知在（1，0）很小的鄰域間與綫性逼近圖形性質幾乎相同。因此在該點附近的圖形不能把 $F(x,y)=0$ 化成隱函數 $y=f(x)$。

(ii) 對於 $F(x,y,z)=0$ 是否局部可爲一隱函數 $z=f(x,y)$？

例如 $x^2+y^2+z^2=1$ 代表一球，

也是當$\dfrac{\partial F}{\partial z}=0$時 $z=0$，代入方程式得 $x^2+y^2=1$

該圓上每一點均有鉛直切平面，都不是函數圖形。

(iii) 因此我們可以看出，如果某一點的最佳綫性逼近圖形不爲函數圖形時，在該點附近（包含該點）的圖形亦不是函數圖形，而此綫性逼近爲函數圖形的充要條件爲在該點的偏導數不爲0。

若値域在 n 度空間，圖形雖不能作出，但也可依此想像，此時偏導數的地位則由 Jacobian 取代。

(iv) 所以若 $F: R^{n+m} \to R^n$　$x=(x_1 \cdots\cdots x_n)$　$t=(t_1 \cdots\cdots t_m)$

$$F(x;t)=(F_1(x;t)\cdots\cdots F_n(x;t))$$

$$F_1(x_1 \cdots\cdots x_n;\ t_1 \cdots\cdots t_m)=0$$

$$F_2(x_1 \cdots\cdots x_n;\ t_1 \cdots\cdots t_m)=0$$

$$F_n(x_1 \cdots\cdots x_n;\ t_1 \cdots\cdots t_m)=0$$

如果在某一點的附近想把 $x_1 \cdots\cdots x_n$ 各自表成 $t_1 \cdots\cdots t_m$ 的隱函數。

起碼要有這兩個條件：①在該點之綫性逼近存在且②

$$\frac{\partial(F_1\ F_2 \cdots\cdots F_n)}{\partial(x_1\ x_2 \cdots\cdots x_n)} \neq 0$$

③連鎖法則（chain rule）

由前述綫性代數的工具性質2可知合成函數的代表矩陣爲原來兩函數代表矩陣的乘積。

故若 $h(x)=g o f(x)$

則 $$\frac{\partial(h_1 \cdots\cdots h_n)}{\partial(x_1 \cdots\cdots x_n)}=\frac{\partial(h_1 \cdots\cdots h_n)}{\partial(f_1 \cdots\cdots f_n)} \cdot \frac{\partial(f_1 \cdots\cdots f_n)}{\partial(x_1 \cdots\cdots x_n)}$$

特別若 $g=f^{-1}$　則二者所代表之 Jacobian 互爲倒數。

④ $f: R^n \to R^n$

$$y_1=f_1(x_1 \cdots\cdots x_n)$$

$$y_2=f_2(x_1 \cdots\cdots x_n)$$

$$y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_m=f_n(x_1 \cdots\cdots x_n)$$

若把 $x_1 \cdots\cdots x_n$ 看成參數，則上式能把所有 $x_1 \cdots x_n$ 消去而表成一個 $y_1\ y_2 \cdots\cdots y_n$ 的方程式　$\phi(y_1 \cdots\cdots y_n)=0$　的充充要條件爲

$$\frac{2\,(\,y_1\ y_2 \cdots\cdots y_n\,)}{2\,(\,x_1\ x_2 \cdots\cdots x_n\,)} = 0$$

*此題同學可令 $n=2$ ，嘗試著自己證明。

⑤映射的漲縮率：

對於上面④的函數若 $f_1 \cdots\cdots f_n$ 均為連續可微分此映射把 R^n 空間中的一閉區間映到另一閉區間。

且 $\dfrac{2\,(\,y_1\ y_2 \cdots\cdots y_n\,)}{2\,(\,x_1\ x_2 \cdots\cdots x_n\,)} \neq 0$ 時

若 $\triangle Ax_1 \cdots x_n$ ，$\triangle A\ y_1 \cdots y_n$ 分別代表此二區域的有向體積

由前述綫性代數2具性質多3可知

$$\lim_{\triangle Ax_1 \cdots x_n \to 0} \frac{\triangle Ay_1 \cdots y_n}{\triangle Ax_1 \cdots x_n} = \left| \frac{\partial\,(\,y_1 \cdots\cdots y_n\,)}{\partial\,(\,x_1 \cdots\cdots x_n\,)} \right|$$

故表示局部性時，我們把它寫為

$$dy_1 \cdots\cdots dy_n = \left| \frac{\partial\,(\,y_1 \cdots\cdots y_n\,)}{\partial\,(\,x_1 \cdots\cdots x_n\,)} \right| dx_1 \cdots\cdots dx_n$$

$$\therefore \int \cdots\cdots \int f\,(\,y_1 \cdots\cdots y_n\,)\, dy_1 \cdots\cdots dy_n = \int \cdots\cdots \int f\,(\,x_1 \cdots\cdots x_n\,)$$

$$\left| \frac{\partial\,(\,y_1 \cdots\cdots y_n\,)}{\partial\,(\,x_1 \cdots\cdots x_n\,)} \right| dx_1 \cdots\cdots dx_n$$

〔例〕1. 極坐標

$$x = r\cos\theta\ ,\ y = r\sin\theta \qquad \frac{\partial\,(\,x\ ,\ y\,)}{\partial\,(\,r\ ,\ \theta\,)} = r$$

$$\text{則} \iint f\,(\,x\ ,\ y\,)\, dx\, dy = \iint f\,(\,r\ ,\ \theta\,)\, r\, dr\, d\theta$$

2 球面坐標 $x = r\ \sin\theta\cos\phi \qquad y = r\ \sin\theta\ \sin\phi \qquad z = r\ \cos\phi$

$$\frac{\partial\,(\,x\ ,\ y\ ,\ z\,)}{\partial\,(\,r\ ,\ \theta\ ,\ \phi\,)} = r^2\sin\theta$$

$$\therefore \iiint f\,(\,r\ ,\ y\ ,\ z\,)\, dx\ dy\ dz = \iiint f\,(\,r\ ,\ \theta\ ,\phi\,) r^2 \sin\theta$$

$$dr\ d\theta\ d\phi$$

3. 柱面坐標 $x = p\cos\phi \qquad y = p\sin\ \phi \qquad z = z$

$$\frac{\partial\,(\,x\ ,\ y\ ,\ z\,)}{\partial\,(\,p\ ,\ \phi\ ,\ z\,)} = p$$

$$\therefore \iiint f(r, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint f(p, \phi, z)\, p\, dp\, d\phi\, dz$$

三、在完備化距離空間上微分定義的處理：

1. 前言：以下這部分我們將用較爲抽象的線性代數工具來討論微分的定義，並將符號做個統一性的處理，但因本系對於“完備化距離空間”及“函數的norm”都在大三的泛函分析或拓樸的課程中才加以介紹，因此修過泛函分析的同學對於其符號可能較爲適應，本質上或許也較爲了解。

2. 工具：① $L(R^n, R^m) = \{ f \mid f : R^n \to R^m$ 爲綫性變換 $\}$

$f \in L(R^n, R^m)$， 令 $A = [f]_{n\times m} = [a_{ij}]_{n\times m}$

定義：$\|f\| = \sup\limits_{|x|\leq 1} |f(x)| = \sup\limits_{|x|\leq 1} |xA| = \|A\|$

則 $(L(R^n, R^m), \|\cdot\|)$ 爲一 Banach 空間（一完備化距離空間）

②若令 $\|A\|_1 = \max\limits_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} |a_{ij}|$，則 $(L(R^n, R^m), \|\cdot\|_1)$ 也是一 Banach 空間，且存在常數 c_1，c_2，$\ni \forall f \in L(R^n, R^m)$，

$c_1 \|A\|_1 \leq \|A\| \leq c_2 \|A\|_1$

③由於 f 所成的集合與其代表矩陣 A 所成的集合有一對一且映成的關係，且 norm 一樣，故可視爲同構，所以我們常把它們視爲相同，而不太加以區分了。

3. 背景：由第一部分 $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \to f'(x)$，

可知 $\dfrac{f(x+h)-f(x)-hf'(x)}{h} \to 0$

若令 $\triangle f_x(h) = f(x+h) - f(x)$

且 $g(h) = f(x+h) - f(x) - hf'(x) = \triangle f_x(h) - hf'(x)$

當 $h \to 0$ 時，易證 $\dfrac{g(h)}{h} \to 0$，故可知 $g(h)$ 爲一小 o 函數，即 $g(h) = 0(h)$， 因此第一部分的定義，可改寫成 $F : R \to R$，存在一實數 $df_x = f'(x)$，$\ni$

$$\triangle f_x(h) = h\,df_x + o(h), \quad \text{其中} \frac{o(h)}{h} \to 0 \text{ ，當 } h \to 0$$

4. 定義：$U \subseteq R^n$ ，$f: U \to R^m$ ， x 爲 U 之內點

f 在 x 點可微分 $\Longleftrightarrow \exists\, A \in L(R^n, R^m)$ ，$\ni$ 對所有長度充分小的 h 滿足 $\triangle f_x(h) = hA + o(h)$ ，

其中 $\dfrac{|o(h)|}{|h|} \to 0$ ，當 $|h| \to 0$

$$\Longleftrightarrow \lim_{|h| \to 0} \frac{|\triangle f_x(h) - hA|}{|h|} = 0$$

①若另有一 $B \in L(R^n, R^m)$ ，滿足定義中的條件，我們欲說明其唯一

$\triangle f_x(h) = hB + o(h)$ …………(1)

$\triangle f_x(h) = hA + o(h)$ …………(2)

(1)－(2) $h(A - B) = o(h) \Rightarrow A = B$

此時記 A 爲 df_x ，稱 df_x 爲 f 在 x 的全微分（ total differential ）

②我們試比較 R 與 R^n 中定義的差異在於 h 有沒有絕對值，因 R^n 中的點是一個向量而兩向量相除是沒有意義的，故在 R^n 中 $\dfrac{o(h)}{h}$ 需加上 絕對值，它們的比值才有意義——這是二者之間最大的差異。

③如果我們用 norm 來取代絕對值的話，上述定義的形式將可採用爲一般具有 norm 的向量空間（ norm linear space ）中微分的定義。

④試將第二部分中 Bartle, Apostol, Fulks, Wjdder 對於微分的定義與上述定義加以比較我們將發現這裡的定義可以統領上述諸式，尤其像 Fulks 中 $\eta \to 0$ 爲 $\sqrt{h^2 + k^2} \to 0$ 或 Widder 中的 $\phi(\triangle x, \triangle y)$ 與 $\psi(\triangle x, \triangle y) \to 0$ 當 $(\triangle x, \triangle y) \to (0, 0)$ ，用小 o 數都可充分的加以說明。

5. 性質：

① $U \subseteq R^n$ ，$V \subseteq R^m$ ，$f: U \to R^m$ ，$x \in U$ 爲內點，f 在 x 點可微分 $\Rightarrow f$ 在 x 連續。

② $f, g: U \to R^m$ ，$x \in U$ 爲內點，f 在 x 點可微分 $\Rightarrow d(f+g)_x = df_x + dg_x$ 。

③ $f: U \to R^n$ ，$g: U \to R$ ，$x \in U$ 爲內點，f 在 x 可微分

$(gf)(x) = g(x)f(x) \Rightarrow d(gf)_x = dg_x\, f(x) + g(x)\,df_x$

④ $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} R^l$，$x \in U$ 爲內點，$f(x) \in V$ 爲內點，f 在 x 可微

$\Rightarrow g \circ f$ 在 x 可微，且 $d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$

6. 例子：

〔例 1.〕 $A \in L(R^n, R^n)$，若 A 可逆，當 $\|A\| < 1$ 時，則 $(I_n - A)^{-1}$ 存在且 $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots\cdots + A^n + \cdots\cdots$

(∵) 令 $S_n = I_n + A + \cdots\cdots + A^m$

令 $k > m$ $\|S_k - S_m\| = \|A^{m+1} + \cdots\cdots + A^k\| \leq \|A^{m+1}\| + \cdots\cdots + \|A^k\| \leq \|A\|^{m+1} + \cdots\cdots + \|A\|^k \to 0$ （∵ $\|A\| < 1$）

$\{S_m\}$ 在 $L(R^n, R^n)$ 中爲柯西數列，

∴ $S_m \to S \in L(R^n, R^n)$ （∵ R^n 爲完備性空間）

∴ $(I_n - A)S_m = I_n - A^{m+1} = S_n(I_n - A)$

∵ $\|A\| < 1$， ∴ $\|A^{m+1}\| \leq \|A\|^{m+1} \to 0$， ∴ $A^{m+1} \to 0$

$\Rightarrow (I_n - A)S = S(I_n - A) = I_n$

故 $I_n - A$ 存在且可逆，

∴ $(I_n - A)^{-1} = S = I_n + A + A^2 + \cdots\cdots + A^n + \cdots\cdots$ #

我們令 $M(n) = \{A \mid A \in L(R^n, R^n)\}$

$GL(n) = \{A \mid A \in M(n)$，且 A^{-1} 存在$\}$

〔例 2〕 $f: GL(n) \to GL(n)$，$f(A) = A^{-1} \Rightarrow df_A(B) = -A^{-1}BA^{-1}$

特別 $df_A(A) = -A^{-1}$

(∵) 固定 $A \in GL(n)$，取 $B \in M(n)$

$$\triangle f_A(B) = f(A+B) - f(A) = (A+B)^{-1} - A^{-1}$$

$$= A^{-1}\left[(I_n + BA^{-1})^{-1} - I_n\right] = A^{-1}\left[\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m (BA^{-1})^m - I_n\right] \quad \text{(由例 1.)}$$

$$= -A^{-1}BA^{-1} + A^{-1}\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^m (BA^{-1})^m$$

易證 $A^{-1}\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^m (BA^{-1})^m = o(B)$

〔例 3.〕 $f: M(n) \to M(n)$，$\ni f(A) = A^m$，求 $df_A = ?$

(∵)，定義 $g: M(n) \times M(n) \times \cdots\cdots \times M(n) \to M(n)$

如 $g(B_1, B_2, \cdots\cdots, B_n) = B_1 B_2 \cdots\cdots B_n$

則 g 爲 $M(n)$ 上 m 次多綫性變換，

$$dg_{(B_1 B_2 B_3 \cdots\cdots B_m)}(C_1 C_2 C_3 \cdots\cdots C_m) = C_1 B_2 \cdots\cdots B_m + \cdots\cdots + B_1 B_2 \cdots\cdots B_{n-1} C_n \qquad (※)$$

再定義 $h : M(n) \to M(n) \times M(n) \times \cdots\cdots \times M(n)$

如 $h(c) = (c, c, \cdots\cdots, c)$

$$dh_c = h$$

$$M(n) \xrightarrow{h} M(n) \times M(n) \times \cdots\cdots \times M(n) \xrightarrow{g} M(n)$$

$$c \longrightarrow (c, c, \cdots\cdots c) \longrightarrow c^m$$

$\therefore f = g o h$

$$df_A(B) = dg_{h(A)} o\, dh_A(B) = dg_{h(B)}(h(B)) = dg_{h(B)}(BB\cdots\cdots B) \quad (由◇)$$

$$= BA^{m-1} + ABA^{m-2} + \cdots\cdots + A^{m-1}B$$

特別 $df_A(A) = mA^m$

〔例 4.〕 若 $f : GL(n) \to GL(n)$，$f(A) = A^{-m}$，則 df_A 又如何？

$$(\because)\ df_A(B) = -\sum_{k+l=m-1}\sum A^{-(k+1)} BA^{-(l+1)}$$

特別 $df_A(A) = -mA^{-m}$ #

四、在測度空間上微分的定義：

1. 定義：

1° 設 μ 是定義在 R^1 上的一個 Borel 測度

m 是定義在 R^1 上的 Lebesgue 測度

2° 設 $f(x) = \mu((-\infty, x))$ $\forall x \in R^1$

則 f 在 x 點可微分且 $f'(x) = A$

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，對於任一包含 x 的開區間 I，其長度小於 δ

$$\Rightarrow \left| \frac{\mu(I)}{m(I)} - A \right| < \varepsilon$$

若在 n 度空間，此定義則變成

$$\left| \frac{\mu(S)}{m(S)} - A \right| < \varepsilon$$ 此處 S 為包含 x_0 之一開球（open ball）

2. 我們證明這個定義（A）與前述在實數中的定義（B）是對等（equivalent）的。

($\because$) 若將 μ 改成 $\mu - A_m$，不失一般性，我們只證明 $A = 0$ 的情況

（B）$\Rightarrow$（A）

1° 若 $f(x)=0$ 且 $\varepsilon>0$， $\exists\,\delta\ni|f(t)-f(x)|\leq\varepsilon\,|t-x)$

當 $|t-x|<\delta$

2° 設 $x\in I$，$I=(s,t)$ 且 $t-s<\delta$

選擇 $s_n\ni\ x>s_1>s_2>\cdots\cdots$，$s_n\to s$

則 $|u((s_n,t))|=|f(t)-f(s_n)|\leq|f(t)-f(x)|+|f(x)-f(s_n)|$

$\leq\varepsilon(t-x)+\varepsilon(x-s_n)=\varepsilon(t-s_n)<$

$<\varepsilon\cdot m(I)$

3° $\because I=U((s_n,t))\ \Rightarrow\ |\mu(I)|\leq\varepsilon\,m(I)$

$(A)\Rightarrow(B)$

1° 設 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta$，取 $x\in I(s,t)$ $\quad t-s<\delta$

$$\left|\frac{\mu(I)}{m(I)}-0\right|<\varepsilon$$

2° $\left|\mu\left[\left(s-\frac{1}{n},t\right)\right]\right|<\varepsilon\left(t-s+\frac{1}{n}\right)$ $\forall$足夠大的 n。

3° $(s,t)=\bigcap\left(s-\frac{1}{n},t\right)$ $\quad f(t)-f(s)=\mu[(s,t)]$

$\Rightarrow|f(t)-f(s)|\leq\varepsilon\,|t-s|\quad(s<x<t<s+\delta)$

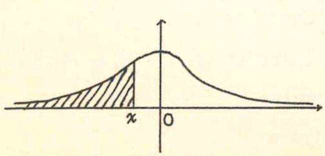
4° 若 (A) 成立，則 $u(\{x\})=0$，此地 $\{x\}$ 爲包含 x 本身的一個集合因此 f 在 x 連續，也因此在3°中不論 S 或 t 都能由 x 來代換，因此我們得到 $f'(x)=0$

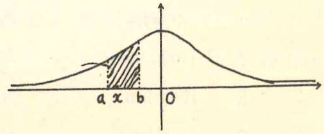
3. 舉例說明：

①若 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ （標準常態機率密度函數）

定義 $\mu(-\infty,x)=\displaystyle\int_{t_0}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ （Borel 測度）

$m(a,b)=b-a$ （Lebesgue 測度）





②對 $x_0\in R$，$x_0\in I=(a,b)$

$$\frac{\mu(I)}{m(I)}=\frac{\text{斜綫部分面積}}{b-a}$$

大家可以看出若固定 $I=(a, b)$ 的長度，則越向原點靠近，其比值越大,也就是分配函數在此分配得越密的意思。

因此這個比值可以看成分配函數在 (a, b) 間的密度，（即" Borel 測度"在" Lebesgue 測度"中的密度）。

③若定義 $F(x)=\mu(-\infty, x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

$$\lim_{\substack{m(I)\to 0\\ x\in I}}\frac{\mu(I)}{m(I)}=\lim_{\substack{b\to a\\ x\in(a,b)}}\frac{\mu(a,b)}{b-a}=\lim_{\substack{b\to a\\ x\in(a,b)}}\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

$$=F'(x)=f(x)$$

這個比值又可以看成在 x 點附近分配函數密度變化的極限值，代表分配函數在該點的變化率。

尾聲：綫性函數是在實變數中形式最簡單的函數，不但容易運算也容易掌握其性質，由以上我們可以看出，不論是那一種定義，都是把微分看成在該點附近的最佳綫性逼近，把複雜的函數局部轉化成綫性函數。其性質也就明顯得多了，這就是微分的內涵及功用。

以上內容大部份取材自林義雄、陳昭地老師上課的教材，以及和儲啓政、李有金、吳建成同學討論的結果，整理而成，如有謬誤，尚請同學不吝指正。

參考資料

1. Johnson : Calculus
2. Bartle : Elementary of Real Analysis
3. Apostol : Mathematical Analysis
4. Widder : Advanced Calculus
5. Fulks : Advanced Calculus
6. Spiegel : Advanced Calculus
7. Holfman : Linear algelra
8. Royden : Real Analysis
9. Rudin : Real and complex Analysis
10. Simmons : Topology and Modern Analysis
11. 林義雄 : 高等微積分

討論Cauchy的算術幾何與調和平均值定理

編譯小組譯

李恭晴
劉但蔭 指導

【定理】 $(S_1)\ M_H(n) \leq M_G(n) \leq M_A(n)$，其中 n 個正實數 $a_v\ (v=1,\cdots\cdots,n)$ 爲已知，且

$$M_A(n)=\left(\sum_{v=1}^{n} a_v\right)\cdot\frac{1}{n}\ ,\ M_G(n)=\sqrt[n]{\prod_{v=1}^{n} a_v}$$

$M_H(n)=n\cdot\left(\sum_{v=1}^{n}\frac{1}{a_v}\right)^{-1}$ 的第一個，也是深具識見的證明是出之於 Cauchy（1789～1857）他的證明用到下列事實：

對於滿足 n 個之正實數 a_v，恒有

$$\prod_{v=1}^{n} a_v = 1 \quad 以及 \quad \sum_{v=1}^{n} a_v \geq n$$

此處等式與 (S_1) 中一樣，只有當所有的 a_v 都相等時才成立。

今日的證明大都局限於證明下列的敍述：$M_G(n) \leq M_A(n)$ 而且證明的方法非常多。由

$$\sqrt[n]{\prod_{v=1}^{n} a_v} \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{v=1}^{n} a_v\right) \text{ 以及 } b_v=\frac{1}{a_v}$$

即可得到：$n\cdot\left(\sum_{v=1}^{n}\frac{1}{b_v}\right)^{-1} \leq \sqrt[n]{\prod_{v=1}^{n} b_v}$ 及 (S_1)

較少爲人所知的是下列導出 (S_1) 的一個方法，它只用到 Bernoulli 不等式

$$(B)\ (1+h)^n \geq 1+n\cdot h$$

（當 $1+h>0$ n 爲自然數）。這個 J. Bernoulli（1654～1705）用以比較單利與複利所用到的關係。在今天十年級（高一）的學生也能毫無困難的加以討論比不等式。

在 (B) 中，令 $1+h=Z$ 則可得 $Z^n \geq 1+n(Z-1)$ 以及 (B')，$Z^n+n-1 \geq nZ$（當 $Z \geq 0$，n 爲自然數）然後我們利用數學歸納法，證明不等式 $M_G(n) \leq M_A(n)$。第一步首先證明 $M_G(2) \leq M_A(2)$ 此問題我們將再加以討論，數學歸納法的假設爲 $\dfrac{M_A(n-1)}{M_G(n-1)} \geq 1$ 其證明如下：

$$M_A(n) = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{v=1}^{n} a_v \right) \overset{\text{p.d.}}{=} \frac{(M_A(n-1))(n-1) + a_n}{n}$$

$$\overset{\text{p.d.}}{=} \left((M_A(n-1))(n-1) + \frac{(M_G(n))^n}{(M_G(n-1))^{n-1}} \right) \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{M_G(n-1)}{n} \cdot \left(\frac{M_A(n-1)}{M_G(n-1)} \cdot (n-1) + \left(\frac{M_G(n)}{M_G(n-1)} \right)^n \right)$$

$$\overset{\text{I.A.}}{\geq} \frac{M_G(n-1)}{n} \left(n-1 + \left(\frac{M_G(n)}{M_G(n-1)} \right)^n \right)$$

$$\overset{(B')}{\geq} \frac{M_G(n-1)}{n} \left(n \cdot \frac{M_G(n)}{M_G(n-1)} \right) = M_G \cdot (n) \qquad \text{Q.E.D.}$$

只有在 $n=2$ 時，p.d 通常是 $M_H(2) \cdot M_A(2) = (M_G(2)^2)$ 由此及 $M_G(2) < M_A(2)$，即可得 $M_H(2) < M_G(2)$ 在我們進一步討論次要問題以前，我們先擧出幾個值得一提的 (S_1) 的推論。熟知的符號 $\sigma_0(n) = \sum_{t/n} t^0$ 它是代數一個自然數 n 的因數的個數

$$\sigma_1(n) = \sum_{t/n} t \qquad \sigma_{-1}(n) = \sum_{t/n} \frac{1}{t}$$

則爲在 (S_1) 中之和，其中 n 之因數 t 兩兩相異，這在 (S_1) 中產生"＜"的關係。

由於 $\prod_{t/n} t = n^{\frac{\sigma_0(n)}{2}}$ 可得

$$M_G = \sqrt[\sigma_0(n)]{\prod_{t/n} t} = \sqrt{n} < \frac{\sigma_1(n)}{\sigma_0(n)} \text{ 以及 } (S_2^{(1)})\ \sigma_1(n) > \sigma_0(n) \cdot \sqrt{n}$$

用語言說明，此卽表示 n 的所有因數之和中每一項"平均的大小"要大於 $\sqrt{n}$。引人注意的是由 (S_1) 之不等式所產生的結果：

$$(S_2^{(2)})\ \sqrt{n} > \frac{\sigma_0(n)}{\sigma_{-1}(n)} \text{ 及 } \sigma_{-1}(n) > \frac{\sigma_n(n)}{\sqrt{n}}$$

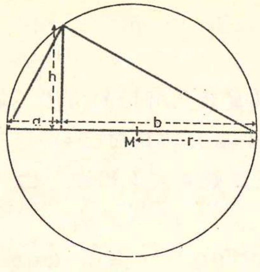
此結果也可由統計結果 $(S_2^{(1)})$ 中獲得。

當 $n=12$ 時，有 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12} > \frac{6}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{12}}{2}$

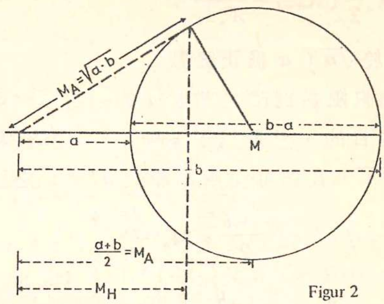
現在我們考慮 $n=2$ 之情形，並令 $0 < a_1 = a \leq b = a_2$ 而不影響一般性，所以只須證明 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ 而 M_A，M_G 及 M_H 則分別爲 $\frac{a+b}{2}$，$\sqrt{ab}$ 及

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{(M_G)^2}{M_A}$$

當 $a=b$ 時，在（S_1）中，對於 $n=2$ 等號成立。一般熟知的關於不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ 之證明爲利用 Thale 圓，其直徑 $2\gamma=a+b$ 由高之定理，其所成之直角三角形之高（見圖 1 ）有：$h=\sqrt{ab}\leq\gamma=\frac{a+b}{2}$（$=\gamma$ 只有當 $a=b=\gamma$ ）而 a，b 爲直角三角形之兩股。從圖 2 也很容易看出（S_1）在 $n=2$ 時之情形；它將用到正切定理以及歐幾里得定理。



Figur 1



Figur 2

“Der Mathematikunterricht”雜誌在 1969 年第五期中對於 $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$ 在幾何上決定極值問題的意義，有詳細的說明，關於這個導引，我願意加以指出。

利用純算術方法，可以得到下列關係(1)，它對於任何一個體的元素都成立。

$$(1)\qquad ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

在(1)中，只須考慮 $0<a\leq b$ 之情形（a,b 爲實數），當 $a=b$ 時，由(1)可得

$$\sqrt{ab}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

而當 $a\neq b$ 時，由 $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2>0$ 可得

$$ab<\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ 及 } \sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$$

並且由 $M_AM_H=M_G{}^2$，可導出

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab} \text{ 或}$$

(2) $$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}\ (0<a<b)$$

此表示法的最主要部份是(2)的一個應用，它用於決定平方根的近似值！同時與(1)合併，可求出其誤差。除此之外，我們這個方法也成為現今課本上經常用到的重複方法的原理：

$$X_n=\frac{1}{2}\left(X_{n-1}+\frac{\alpha}{X_{n-1}}\right)$$

其中 X_n 趨近於 $\sqrt{\alpha}$（α 為正實數）

現在我們只限於討論自然數 n 的平方根。其實我們所用的方法，並不須此限制，作此限制的目的，只是為了要使（S_4）中之誤差易於計算而已。

要逼近 $\sqrt{n}$，我們可從兩個滿足 $ab=n$ 之正實數 $a<b$ 出發，由(2)可得：

$$\sqrt{n}=\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}=M_A^{(1)}$$

及 $$\sqrt{n}>\frac{n}{M_A^{(1)}}=\frac{ab}{\frac{a+b}{2}}=M_H^{(1)}$$

$M_A^{(1)}$ 及 $M_H^{(1)}$ 即為 $\sqrt{n}$ 之界限（上下限），此外

$M_A^{(1)}$、$M_H^{(1)}=n$

並且由於

$$M_A^{(1)}=\frac{a+b}{2}=\frac{2b+(a-b)}{2}=b+\frac{(a-b)}{2}<b$$

可知不等式 $a<M_H^{(1)}<M_A^{(1)}<b$。

$M_A^{(1)}$ 及 $M_H^{(1)}$ 構成一個新的數對，我們可以再重複用此方法，得到：

$$\sqrt{n}<\frac{M_H^{(1)}+M_A^{(1)}}{2}=M_A^{(2)},\ \sqrt{n}>\frac{n}{M_A^{(2)}}=M_H^{(2)}$$

在(1)中，令 $b=M_A^{(1)}$，$a=M_H^{(1)}$ 時，右邊的平方數 $\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$ 較小，因此 $\sqrt{ab}$ 之近似值較 $\frac{a+b}{2}$ 為佳。因為 $M_A^{(2)}$ 與 $M_H^{(2)}$ 也是兩個正實數，且 $M_A^{(2)}M_H^{(2)}=n$，我們的方法可以繼續到 $M_A^{(3)}=\frac{M_H^{(2)}+M_A^{(2)}}{2}$，$M_H^{(3)}=\frac{n}{M_A^{(3)}}$ 同樣地，以 $b=M_A^{(3)}$，$a=M_H^{(3)}$ 代入，可將(1)中之 $\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$ 縮小，而得一更好之近似值。這些結果，我們綜合為定

理（S_3）為要舉例說明（S_3），我們以$\sqrt{12}$及$\sqrt{2}$為例(1) $\sqrt{12}=\sqrt{3\cdot 4}$

$$(a=3<4=b),\ M_A^{(1)}=\frac{3+4}{2}=3.5\ ;\ M_H^{(1)}=\frac{12}{M_A^{(1)}}=\frac{24}{7}$$

由於$M_H^{(1)}=3.42\cdots\cdots$，可從$3.42<\sqrt{12}<3.5$得3.46為我們第一步所得之值，此為$\sqrt{12}$在小數中之值，其次

$$M_A^{(2)}=\left(\frac{24}{7}+\frac{7}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{48+49}{28}=\frac{97}{28}=3.4642\cdots\cdots<3.4643\ ;$$

$$M_H^{(2)}=\frac{12}{M_A^{(2)}}=\frac{336}{97}=3.4639\cdots\cdots>3.4639$$

所以由第二步就已經知道$\sqrt{12}$之值此3.4640大，而此數到小數點以下第三位為$\sqrt{12}$之正確近似值，在第三步中，我們從$M_A^{(2)}$與$M_H^{(2)}$開始：

$$\sqrt{12}<M_A^{(3)}=(M_H^{(2)}+M_A^{(2)})\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{336}{97}+\frac{97}{28}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{9408}{97}+\frac{9409}{28}\right)=\frac{18817}{5432}=3.46410161\cdots\cdots<3.46410162\ ;$$

$$M_H^{(3)}=\frac{12}{M_A^{(3)}}=\frac{12.5432}{18817}=\frac{65184}{18817}$$

$$=3.46410161\cdots\cdots>3.46410161$$

因此從第三步中，我們可得$\sqrt{12}$之近似值3.464101615，此近似值在小數以下第八位為正確，此正確性只有在很少的學校個案中才需要。

(2) $$\sqrt{2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\ \left(a=\frac{4}{3}<\frac{3}{2}=b\right)$$

$$M_A^{(1)}=\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{8+9}{12}=\frac{17}{12}=1.41\bar{6}<1.417$$

$$M_H^{(1)}=\frac{24}{17}=1.4117\cdots\cdots>1.4117$$ 因此

1.4144為$\sqrt{2}$之小數點以下二位正確的近似值。

$$M_A^{(2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{24}{17}+\frac{17}{12}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{24\cdot 12+17^2}{17\cdot 12}\right)$$

$$=\frac{288+289}{408}=\frac{577}{408}=1.414215\cdots\cdots<1.414216\ ;$$

$$M_H^{(2)}=\frac{2}{M_A^{(2)}}=\frac{816}{577}=1.414211\cdots\cdots>1.414211$$

所以 1.414213 逼近 $\sqrt{2}$ 至小數點以下第五位正確。

細心的讀者必定已經注意到在上列兩個例子的計算中附帶加以驗算。現在我們限制於有理數 a 與 b 。

$(b=\frac{n}{a})$，此處由 $M_A{}^{(e)}=\frac{a+b}{2}$ 與 $b=a+1$ 恒有 $M_A{}^{(e+1)}=\frac{M_H{}^{(e)}+M_A{}^{(e)}}{2}=$

$\frac{(h^2-1)+k^2}{\cdots\cdots\cdots}$ （ k 爲一自然數）當我們由 $\sqrt{n}=\sqrt{\frac{n}{n_1}}\cdot n_1$ 與 $n=n_1{}^2-1$ 開始，也會產生同樣的結果，其詳細理由必須用到 Fibonacci數列及繁分數，因此在這裏不詳加討論。

由(1)我們也可以得到另一個一稍寬一之關於下式誤差之估計值：

$$\Delta^{(1)}=M_A{}^{(1)}-\sqrt{n}=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$$

$$\Delta^{(n)}=M_A{}^{(n)}-\sqrt{n}=\frac{M_H{}^{(n-1)}+M_A{}^{(n-1)}}{2}-\sqrt{M_H{}^{(n-1)}M_A{}^{(n-1)}}$$

我們知道 $(\frac{a+b}{2})^2-ab=(\frac{a-b}{2})^2$ 　及

(3)　$$(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab})(\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab})=(\frac{b-a}{2})^2$$ 或

(4)　$$(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab})=\frac{2(\frac{b-a}{2})^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$$

因爲由 $a\cdot b=n$ 恒可設 $b>a\geq 1$，所以有 $\sqrt{b}\geq\sqrt{a}\geq 1$，並且由(4)可得不等式

(5)　$$\Delta^{(1)}<\frac{1}{2}(\frac{b-a}{2})^2$$

完全類似地，我們可得

(6)　$$\Delta^{(e)}<\frac{1}{2}(\frac{M_A{}^{(e-1)}-M_A{}^{(e-1)}}{2})$$

不等式(5)與(6)構成了定理（S_4）

在例(1)中

$$M_A{}^{(1)}=\frac{7}{2} \text{ 且 } M_H{}^{(1)}=\frac{24}{7}$$

所以由（S_4），得到：

$$\Delta^{(2)}<\frac{1}{2}(\frac{1}{28})^2<\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}$$

因此$M_A^{(2)}$爲$\sqrt{12}$至小數以下第二位正確之近似值。

對應的計算，可得：

$$\Delta^{(3)} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-7}$$

因此，$M_A^{(3)}$至小數以下第七位正確。

最後，我們將討論平均值在幾何上之應用，雖然它很有用，但是在今日只有在三角學上稍微用到，它在第十學年中講述是毫無困難的，並且可用以求π之近似值。

對於銳角α與β（其和也是銳角），我們很容易證明和角定理：

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$t_g(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{t_g\alpha \pm t_g\beta}{1 \mp t_g\alpha\, t_g\beta}$$

由此定理，可得下列公式：

(1) $1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$， $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

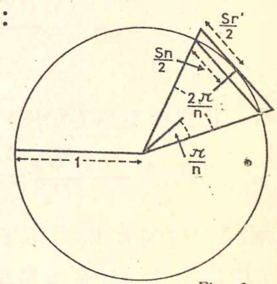
$$\cos^2 2 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$t_g 2\alpha = \frac{2 t_g\alpha}{1 - t_g{}^2\alpha}$$

現在將半徑$\gamma = 1$之圓分爲內接與外切正n角形，其每邊之長分別以S_n及S'_n表示，其周長分別爲$E_n = n \cdot S_n$，及$U_n = n \cdot S'_n$，由圖3可得：

$$\frac{S'_n}{2} = \sin\frac{\pi}{n}\ ;\ \frac{S'_n}{2} = t_g\frac{\pi}{n} \quad 或$$

(8) $E_n = 2n\sin\dfrac{\pi}{n}$ ；$U_n = 2n\, t_g\dfrac{\pi}{n}$



Figur 3

由$\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$，$t_g\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$及(8)，可得

$$E_6 = 6,\ U_6 = 4\sqrt{3}$$

現在要決定E_n及U_n以求2π，遇到了重大的困難，下列恒等式對此有所助í 。E_n與U_{2n}之幾何平均爲

$$M_G(E_n \cdot U_{2n}) = \sqrt{E_n \cdot U_{2n}} = \sqrt{2n\sin\frac{\pi}{n} \cdot 4n \cdot t_g\frac{\pi}{2n}}$$

$$= 2n\sqrt{2\sin(2 \cdot \frac{\pi}{2n}) \cdot t_g\frac{\pi}{2n}}$$

$$= 2n\sqrt{4\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\cos\frac{n}{2n}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\cos\frac{\pi}{2n}}}$$

$$= 2n\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{2n}}$$

$$= 4n\sin\frac{\pi}{2n}$$

$$\overset{\text{p.d.}}{=} E_{2n}$$

欲求E_{2n}所需之U_{2n}可由E_n與U_n之調和平均以求之。即：

$$M_H(E_n\cdot U_n)=\frac{2\cdot E_n\cdot U_n}{E_n+U_n}=\frac{2\cdot 4n^2\cdot\sin\frac{\pi}{n}\cdot t_g\frac{\pi}{n}}{2n(\sin\frac{\pi}{n}+t_g\frac{\pi}{n})}$$

$$=\frac{(4n\cdot\sin^2\frac{\pi}{n})\cdot\cos\frac{\pi}{n}}{(\sin\frac{\pi}{n}\cdot\cos\frac{\pi}{n}+\sin\frac{\pi}{n})\cdot\cos\frac{\pi}{n}}=\frac{4n\cdot\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}+1}$$

$$=\frac{(7)8n\cdot\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}}{2\cos\frac{2\pi}{2n}}=4n\cdot t_g\frac{\pi}{2n}\overset{\text{p.d.}}{=}U_{2n}$$

因此，我們得定理（$S_5^{(1)}$）

$$U_{2n}=\frac{2E_n\cdot U_n}{E_n+U_n}=M_H(E_n,U_n)\qquad E_{2n}=\sqrt{E_n\cdot U_{2n}}=M_G(E_n,U_{2n})$$

由於（$S_5^{(1)}$）可從E_6，U_6開始以算出E_{12}，E_{24}，E_{48}……以及U_{12}，U_{24}，U_{48}，……等。所應注意的只是去尾誤差（平方根之近似值）以及系統誤差（在乘、除之時）很難估計，因此最好在計算中儘可能保持根式，而得

(9) $E_6=6$，$E_{12}=12\sqrt{2-\sqrt{3}}$，$E_{24}=24\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

$$E_{48}=48\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

(10) $U_6=4\sqrt{3}$，$U_{12}=24(2-\sqrt{3}=\dfrac{24}{2+\sqrt{3}}$

$$U_{24}=48(2+\sqrt{3})\cdot(2(\sqrt{2-\sqrt{3}})-1)$$

$$=48\sqrt{2+\sqrt{3}}(2-\sqrt{2+\sqrt{3}})$$ [16])

在基礎數學中，常常用其他的公式對來代替（$S_5^{(1)}$）。由(8)得

$$E_{2n} = 4n\cdot\sin\frac{\pi}{2n} \overset{(7)}{=} 4n\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{2n}}$$

$$\overset{(7)}{=} 4n\sqrt{1-\frac{1+\cos\frac{\pi}{n}}{2}} = 4n\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{2}}$$

$$= 2n\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{n}} = 2n\sqrt{2-2\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{n}}}$$

$$\overset{(8)}{=} 2n\sqrt{2-\sqrt{1-(\frac{E_n}{2n})^2}}$$

及(11) $$E_{2n} = 2n\sqrt{2-2\sqrt{1-(\frac{E_n}{2n})^2}}$$

由(8)也可得到U_n與U_{2n}的關係，但要用到較多之計算才能導出：

$$U_n = 2n\cdot t_g\frac{\pi}{n} = 2n\cdot t_g\left(2\cdot\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$= 4n\cdot t_g\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{1}{1-t_g{}^2\frac{\pi}{2n}} = U_n\cdot\frac{1}{1-(\frac{U_{2n}}{4n})^2}$$

即 $$U_n\left(1-(\frac{U_{2n}}{4n})^2\right) = U_{2n}$$

因此U_{2n}即爲下列二次方程式之正根：$X^2U_n + X\cdot 16n^2 - U_n\cdot 16n^2 = 0$，換句話說，

(12) $$U_{2n} = \frac{1}{U_n}\left(-8n^2+4n\sqrt{4n^2+U_n{}^2}\right)$$

剛剛所得的兩個式子比（$S_5^{(1)}$）需要更多的開方計算，因此在實際計算中，包含更多的去尾誤差。

較少爲人所知的是定理（$S_5^{(1)}$）的一個相似問題，它是關於圓內接與外切正n邊形的面積F_n及F'_n，若其所決定之三角形的面積分別以f_n與f'_n表示，則由圖3知

$$f_n = \frac{1}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\text{，}f'_n = t_g\frac{\pi}{n}$$ 或

(13) $$F_n = \frac{n}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\text{，}\quad F'_n = n\cdot t_g\frac{\pi}{n}$$

就像（$S_5^{(1)}$）之證明一樣，我們可得（$S_5^{(2)}$）

$$F_{2n} = M_G(F_n, F'_n) = \sqrt{F'_n\cdot F'_n}$$

$$F'_{2n}=\frac{2F_{2n}\cdot F'_n}{F_{2n}+F'_n}=M_H(F_{2n},F'_n)$$

與⑾和⑿對應之公式爲：

$$F_{2n}\overset{(13)}{=}n\cdot\sin\frac{\pi}{n}=n\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{n}}\overset{(7)}{=}n\sqrt{1-\frac{1+\cos\frac{2\pi}{n}}{2}}$$

$$=n\sqrt{\frac{1-\cos\frac{2\pi}{n}}{2}}=\frac{n}{2}\sqrt{2-2\cos\frac{2\pi}{n}}\overset{(7)}{=}\frac{n}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-\sin^2\frac{2\pi}{n}}}$$

$$\overset{(13)}{=}\frac{n}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-(\frac{2F_n}{n})^2}}$$

換句話說，可得（14）$F_{2n}=\frac{n}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-(\frac{2F_n}{n})^2}}$

利用與⑿之導出式完全相同的計算，可得

$$(15)\qquad F'_{2n}=\frac{1}{F'_n}(-2n^2+2n\sqrt{n^2+F'^2_n})$$

定理（$S_5^{(2)}$）及⒁，⒂之可行性與定理（$S_5^{(1)}$）及⑾，⑿所言相同。由（$S_5^{(2)}$）⒁及⒂所決定的數列F_{2n}及F'_{2n}（$n=2,3\cdots\cdots$）收斂於π。而由（$S_5^{(1)}$）與⑾，⑿之數列收斂於2π。如此，可以得到各數列不同的極限值，它們可以用幾何加以解釋。

由⒁　及$F_4=2$，$F_8=2\sqrt{2}$

$F_{16}=4\sqrt{2-\sqrt{2}}$　，　$F_{32}=8\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

可得趨近π之收斂數列：

$$2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\cdots+\sqrt{2}}}}$$

（n個重方根），它不適於求π之數值。由⒁也可得到：

$F_{12}=3$，$F_{24}=3\cdot2\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$F_{48}=3\cdot2^2\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$　　$F_{96}=3\cdot2^3\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

因爲　$\lim_{n\to\infty}\frac{F_3\cdot2^n}{F_2\cdot2^n}=\frac{\pi}{\pi}=1$

所以可得

$$(16)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2-\sigma_n}}{\sqrt{2-\sigma'_n}}=\frac{2}{3}\text{ 及 }\sigma_1=\sqrt{3},\ \sigma'_1=\sqrt{2}$$

$$\sigma_n=\sqrt{2+\sigma_{n-1}},\quad \sigma'_n=\sqrt{2+\sigma'_{n-1}}\ (n=2,3\cdots\cdots)$$

【本文譯自 Hans Schubart，Karlsruhe】

The Structure of the Galois group of a polynomial $f(x)$ over a field K & some examples.

作者：數三甲 張簡永福
指導老師：鄭麗卿

Let k be a field, $f(x)\in k[x]$, and let K be splitting field of $f(x)$ over Assume $f(x)$ is separable [ie, $f(x)$ has on multiple root in K] . Then K is a Galois extension of k [i.e, K is normal and separable over k] & therefore we may consider the Galois group $G(K/k)=\{\sigma\in \mathrm{Aut}(K) \mid \sigma(\alpha)=\alpha, \forall \alpha\in k.\}$Next, let $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots+a_1x+a_0$, where $ai\in k$, $\forall i=0,1,2,\cdots\cdots\cdots n.$ Assume that $f(x)$ Can be factored Completely as a product of linear factors in K Say, $f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)$, $\alpha_i\in K$, $i=1,2,\cdots\cdots n$. where $\alpha_i\neq\alpha_j$. if $i\neq j$. Then by the definition of a splitting field, we have $K=k(\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots\alpha_n)$ Let $\tau\in G(K/k)$

$$\begin{aligned}\text{then } f^{\tau}(x) &= x^n+\tau(a_{n-1})x^{n-1}+\cdots\cdots+\tau(a_1)x+\tau(a_0)\\ &= x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0\\ &= f(x)\end{aligned}$$

Bat $f^{\tau}(x)=(x-\tau\alpha_1)(x-\tau\alpha_2)\cdots\cdots(x-\tau\alpha_n)$ with $\tau\alpha_i\in K$, $\forall i$,

By unique factorization theorem ∗ (consider $f(x)\in K[x]$)

We know that $\{\tau\alpha_1,\tau\alpha_2,\cdots\cdots\tau\alpha_n$ is a permutation of $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots\cdots\alpha_n\}$

Thus we can define a function $\varphi: G(K/k)\to S_n$ (Symmetric group on n elements)

$$\text{by } \tau \to \begin{pmatrix}\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots\alpha_n\\ \tau\alpha_1,\tau\alpha_2,\cdots\ \tau\alpha_n\end{pmatrix}$$

Claim that φ is an 1-1 homomorphism

Indeed, Sine $K=k(\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots\alpha_n)$

it follows that if $\tau_1,\tau_2\in G(K/k)$ with $\tau_1\alpha_i=\tau_2\alpha_i$ $\forall i=1,2,\cdots\cdots n$.

then Since $\tau_1\beta=\tau_2\beta$ $\forall\ \beta\in k$

We must have $\tau_1=\tau_2$, $\therefore \varphi$ is 1-1

Next, to show φ is a homomorphism

let $\tau_1\,\sigma\in G(K/k)$

then $\varphi(\tau)\varphi(\sigma)=\begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \cdots\cdots & \alpha_n \\ \tau\alpha_1, & \tau\alpha_2, & \cdots\cdots & \tau\alpha_n \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \cdots\cdots & \alpha_n \\ \sigma\alpha_1, & \sigma\alpha_2, & \cdots\cdots & \sigma\alpha_n \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \sigma\alpha_1 & \sigma\alpha_2 & \cdots\cdots & \sigma\alpha_n \\ \tau(\sigma\alpha_1) & \tau(\sigma\alpha_2) & \cdots\cdots & \tau(\sigma\alpha_n) \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots\cdots & \alpha_n \\ \sigma\alpha_1 & \cdots\cdots & \sigma\alpha_n \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \cdots\cdots & \alpha_n \\ \tau(\tau\alpha_1)\,\tau(\sigma\alpha_2) & \cdots\cdots & \tau(\sigma\alpha_n) \end{pmatrix} = \varphi(\tau\cdot\sigma)$

Hence $G(K/k) \cong \mathrm{Im}\,\varphi \subset S_n$

Sime $I_m\varphi$ is a subgroup of S_n

We can consider $G(K/k)$ as a subgroup of S_n

Example 1. Let k be a field with char $k \neq 2$

Let $f(x)=x^2-a \in k[x]$ and assume that a is not a square in k

To decide the Galois group of $f(x)$ over k,

first we know that, $f(x)$ is irreducible in $k[x]$ (for a is not a square in k)

Also $f(x)$ is separable ($\because$ char $k \neq 2$, $\therefore$ $f'(x)$ & $f(x)$ has no common root)

Let k be a splitting field of $f(x)$ over κ then K is normal & separable over k

Let α be a root of $f(x)$ then we have $K=k(\alpha)$ (Since another root is $-\alpha \in k(\alpha)$)

$\therefore$ We conclude that $G(K/k)=S_2$

[Since $\# G(K/k)=[K:k]_s - [k(\alpha):k]_s = [k(\alpha):k] = \deg f(x) = 2$]

Remark : $[E:k]_s$ denote the separable degree of E over k

Remark : We can replace $f(x)$ above by any arbitray quadratic polynomial

$g(x)=x^2+x+c$

In this case, we may write $g(x)=(x-\frac{b}{2})^2-(\frac{b^2}{4}-c)$

Example 2. Let k be a field and chark $\neq$ 2 or 3

Let $f(x)=x^3+bx+c \in k[x]$, Let K be a splitting field of $f(x)$

Assume that $f(x)$ is separable

To decide the Galois group $G(K/k)$

first we may assume that $f(x)$ has no root in k, and then $f(x)$ is irreducible.

[Since if $f(x)$ has a root in k, then $f(x)$ may view as a quadratic polynomial and as shown in Example 1.]

Let $f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$ then $K=k(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

Claim $\# G(K/k)=[K:k] \geqslant 3$

Indeed since $[k(\alpha_1):k]] = [k(\alpha_i):k] = \deg f(x) = 3$

$\forall i = 1, 2, 3$ ($f(x)$ is separable) and since $k(\alpha_1) \subset k$ it follows that

$[K:k]_s = [K:k(\alpha_i)]_s \ [k(\alpha_i):k]_s = [K:k(\alpha_1)]_s \times 3 \geqslant 3$

But $G(K/k) \subset S_3$

$\therefore$ Either (a) $G(K/k)$ is cyclic of order 3.

(i.e, $G(K/k) = \{ \tau \mid \tau$ is even permutation, $\tau \in S_n \}$)

or (b) $G(K/k) = S_3$

If $k(\alpha_i)$ is normal over k. $\forall i = 1, 2, 3$.

We immediately obtain $k(\alpha_i) = K$, Henee $G(K/k)$ is cyclic of order 3.

If $k(\alpha_i)$ is not normal over k, then

We consider the discriminant $\delta = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_3)$ and $\Delta = \delta^2$

Now, for all $\tau \in G(K/k)$,

We have $\{ \tau\alpha_1, \tau\alpha_2, \tau\alpha_3 \} = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$

$\therefore \tau(\Delta) = \Delta$, Hence $\Delta \in K^{G(K/k)} = k$ ($K^G = \{ \alpha \in K \mid \sigma(\alpha) = \alpha \ \ \forall \sigma \in G \}$)

is a fixed field of G

Also $\tau(\delta) = \pm\delta \quad \forall \tau \in G(K/k)$

Hence we conclude that

(a) when Δ is a square in k

$\delta \in k \Leftrightarrow \forall \tau \in G(K/k), \tau(\delta) = \delta \Leftrightarrow G(K/k)$

consists of all even permutations in S_3

$\Leftrightarrow$ $G(K/k)$ is cyclic of order 3. (A_3)

(b) when Δ is not square in k

We have $G(K/k) = S_3$

Remark 1.: Whan $f(x) = x^3 + bx + c$ we have $\Delta = -4b^3 - 27c^2$

Remark 2.: When we replace $f(x)$ by $g(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$

We may write $g(x) = (x + \frac{b}{3})^3 + (c - \frac{b^2}{3})x + (d - \frac{b^3}{27})$

as a form of " $x^3 + bx + c$ "

For instance, consicler $f(x) = x^3 - x + 1$ over the rational numbers.

To decide galois group of $f(x)$ over Q.

First check that whether $f(x)$ is irrcducible & separable

Since $f(x) = x^3 - x + 1$ & $f'(x) = 3x^2 - 1$ has no cammon root

$\therefore$ $f(x)$ is separable

$f(x)$ is irreducible in Q (trival)

$\therefore$ We may consider Galois group of fover Q: $G(K/Q)$

Since $\Delta = -4(-1)^3 - 27(1)^2 = 23$ is not a square in Q

$\therefore \quad G(K/Q) = S_3$

【結語】

若 f(x) 的次數再增大，則問題便愈來愈困難與複雜。我們不想再探討次數更大的，一般來說，當 deg f(x) ≥ 4 問題便顯得很複雜，並且無一規則可循，只如一一逐步去探討 G(K/k) 之形態與構造，但無可否認 G(K/k) 仍是 S_n ($n \geq 4$) 的一Z群。

【參考書籍】

E. Artin : Galois theory

Serge Lang : Algebra

Problem :

(a) Find the Galois group of the equation $x^3 - 2 = 0$ over the rational field F & write out the automorphisms explicity.

(b) Find the splitting field E

Determined the intermediate fields corresponding to all subgroup of G. & determine whether they are normal or not ?

古埃及雷蒙斯二世的石像

A Characterization of Self-injective Regular Rings.

作者:數四甲 紀文鎮
指導老師:呂溪木

The object of this note is to characterize rings with self-injectivity and regularity.

In what follows R will always be an associative ring with identity element 1, and if no ambiguity, all modules will be considered as right unital modules.

Osofsky [1] has shown that a ring R is semisimple Artinian if it satisfies condition (A) below.

(A) R/I is injective for each right ideal I of R.

We will extend this idea here to characterize that a ring which is right self-injective regular if and only if it satisfies condition (B) below.

(B) $R/(o:a)$ is injective whenever $a \varepsilon R$, where $(o:a)$ denotes the right annihilator of a.

If M_R is a module, We denote by $End_R(M)$ the set of all R-endomorphisms of the R-module M. It is clear that $End_R(M)$ is a ring under the obvious operations.

Theorem A : $End_R(M)$ is regular if and only if for any $\alpha \varepsilon End_R(M)$, Ker α and Im α are direct summands of M_R.

【 proof 】 If $End_R(M)$ is regular and $\alpha \varepsilon End_R(M)$ is given, then there exists β in $End_R(M)$ such that $\alpha = \alpha\beta\alpha$. We claim that Ker α and Im α are direct summands of M_R. Indeed, $\beta\alpha\beta\alpha = \beta\alpha$, i,e, $\beta\alpha$ is idempotent, then $M = \text{Im}\,\beta\alpha \oplus \text{Ker}\,\beta\alpha$. It is clear that $\text{Ker}\,\alpha \subseteq \text{Ker}\,\beta\alpha$, and if $\beta\alpha(x) = 0$ then $0 = \alpha\beta\alpha(x) = \alpha(x)$. So we have $\text{Ker}\,\alpha = \text{Ker}\,\beta\alpha$ and hence $M = \text{Im}\,\beta\alpha \oplus \text{Ker}\,\alpha$. Moreover, $\text{Im}\,\alpha \cong M/\text{Ker}\,\alpha \cong \text{Im}\,\beta\alpha$, we get the " only if " part.

on the other hand, given $\alpha \varepsilon End_R(M)$,

Let $M = \text{Ker}\,\alpha \oplus N$, wher N is a complement module of Ker α. Since $N \cap \text{Ker}\,\alpha = 0$, α is one-one on N. Therefore there exists α^* in $Hom_R(\alpha(N), M)$ such that $\alpha^*\alpha(x) = x$, $\forall\, x \varepsilon N$. Furthermore, since $M = \text{Im}\,\alpha \oplus H$ for some submodule H_R of M_R and $\text{Im}\,\alpha = \alpha(N)$, we have $M = \alpha(N) \oplus H$. Thus we can extend α^* to an $\hat{\alpha} \varepsilon End_R(M)$ such that $\hat{\alpha}\alpha(x) = x$ if $x \varepsilon N$.

For any $x \varepsilon M_R$, $x = x_1 + x_2$ which is a unique representation with $x_1 \varepsilon \mathrm{Ker}\,\alpha$ and $x_2 \varepsilon N$. So $\alpha\hat{\alpha}\alpha(x) = \alpha\hat{\alpha}\alpha(x_1 + x_2) = \alpha\hat{\alpha}\alpha(x_2) = \alpha(x_2) = \alpha(x_1 + x_2) = \alpha(x), \forall x \varepsilon M_R$. Thus $\alpha\alpha\alpha = \alpha$ and complete the proof.

Since R with iclentity, therefore $R \cong \mathrm{End}_R(R)$. By Theorem A, we get the following corollary immediately.

Cor A : R is a regular ring if and only if for any $a \varepsilon R$,

(o:a) and aR are direct summands of R_R.

We exhibit here three lemmas those are concerned in the proof of the main result.

Lemma 1 : If $M_R \cong N_R$, then M_R is injective if and only if N_R is injective.

Lemma 2 : Each direct summand of an injective module is injective.

Lemma 3 : Let R be a ring with identity, and let M_R be any unital module. Then M_R is injective if and only if it satisfies Baer's condition.

【 proof 】 To see the literature. e.g. [2] .

The main result will follow immediately from Theorem B below.

Theorem B : R is a right self-injective regular ring if and only if it satisfies (B).

【 proof 】 Let R be right self-injective regular. By cor A and the regularity of R, we know that (o:a) is a direct summand of R_R for any $a \varepsilon R$. Say that $(o:a)_R \oplus I_R = R_R$, then I_R is injective by Lemma 2 and the injectivity of R_R. Moreover, $I_R \cong R/(o:a)$ the condition (B) follows immediately from Lemma 1.

On the other hand, if R satisfies (B), then the injectivity of R_R is directly deduced by the injectivity of $R/(0:1)$. Now we claim that R is regular . Given $a \varepsilon R$, consider the map $\theta : aR \rightarrow R/(o:a)$ defined by $\theta(ar) = r + (o:a)$. It is easily checked that θ is well-defined and $\theta \varepsilon \mathrm{Hom}_R(aR, R/(0:a))$. By Baer's condition, we have an $x \varepsilon R$ such that

$$r + (0:a) = (x + (0:a)) \cdot ar, \ \forall r \varepsilon R.$$

Thus $r \equiv xar \mod (0:a)$. So $ar = axar$ holds for all r in R.

Taking $r = 1$, we get $a = axa$. Q.E.D

Remark : Left self-injectivity and regularity also be characterized just the same way if left annihilators are considered.

Now, consider the following condition (C):

(C) R/I is injective whenever I is a finitely generated right ideal of R. Every finitely generated right ideal of a regalar ring is generated by an idempotent, [2] , it is clear that (B) implies (C). For the converse, I think it is not true, but I can not construct a counterexample. It is still an open problem that how to characterize rings with condition (C). C. Faith gave a conjecture : R is a right self-injective regular ring. (See [2]. P. 128). This conjecture is opposite to my conjecture mentioned above in some sense. My conjecture is based on Barbara Osofsky's paper [1] in which she has shown : If R is a right self-injective regular ring which contains an infinite set of orthogonal idempotents $\{e_n \mid n \in N\}$ and if $I = \sum_{n \in N} e_n R$, then R/I is not an injective R-module.

I greatly appreciate the faculty of Math. Dept. During 1974～5 I was fortunate to have oppotunities of learning many ideas on algebra from professor Leu, and I am also grateful to him for his excellent lectures and encouragement.

Wen-Chen Chi

April 14, 1976

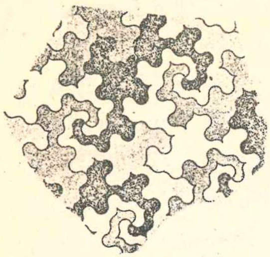
【 references 】

1. B. Osofsky : Rings all of whose finitely generated modules are injective. Pacific. J. Math. 14 (1964)

2. C. Faith : Lectures on injective modules and quotient rings. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, New York Berlin, 1967.

The History of Mathematists

數學家的歷史



約翰·凡紐曼

編輯小組 譯

John Von Neuman 是位傑出的數學家，他不僅在量子物理（quantum physics），邏輯（logic）和氣象學（meteorology） 方面有高度的成就；甚至對於戰爭、高速計算機及經濟學都有著極重要的貢獻。

【年青時代】 西元 1903 年十二月二十八日，他生於匈牙利的布達佩斯。是個富裕猶太家庭中的長子。父親是位銀行家，曾受 Franz Josef 皇帝册封給一個微小的貴族頭銜。

甚至在產生 Szilard (1898), Winger (1902), Teller (1908) 等偉人的城市及時代裏，Neuman 的光彩仍能出類拔粹，顯耀一時。有關他的傳奇，則從童年時代就開始累積。許多是有關他驚人的記憶力。由於能熟記所學，又熱愛歷史；他也是一位研究「拜占庭」、「聖女貞德受審」及「美國內戰」的歷史行家。據說，他一眼就可以記住電話簿內整欄的姓名、地址與電話號碼。

有關他童年的故事大都在談論其思考及解決問題的驚人速度。他在六歲時，已能心算兩個八位數字的除法。八歲時，便通曉微積分。更驚奇的是在十二歲時，已讀畢了波耳（Borel）的函數論（Theorie des Fonction）。

十多歲時，Von Neuman 受教於一位才智出衆的高中老師 L. Ratz 。不久之後，又做了年青的 M. Fekete 及偉大的 L. Fejer （許多匈牙利數學家精神之父）的學生。

根據 Von Karman 的說法，當 John Von Neuman 十七歲時，由於經濟上的原因，他父親曾要求 Von Karman 去勸阻這位青年成爲一個數學家。而身爲父子之間的調停人，他提出的折中建議是化學。所以，Von Neuman 分別於柏林（1921～1923）、蘇黎世（1923～1925）兩地攻讀化學，而在 1926 年，得到蘇黎世化工文憑及布達佩斯的數學博士。

【早期工作】 他的「序數定義」（the definition of ordinal number） 發表於二十歲時，如今已普遍被採用。他的博士論文也有關於點集論。而那公設化的理論，則留下不可磨滅的痕跡。雖然，他非常震驚 K. Godel 所做「證明數學是一致是不可能的」（the impossibility of proving that mathematics is consistent），但他大半生却對點集及邏輯保持有相當的興趣。

他曾在柏林（1926～1929）及漢堡（1929～1930） 兩地擔任講師。在此期間，他的研究遠離了點集論，而趨近：量子物理及 operator theory兩方面一實可視爲一體之兩面。因爲，Von Neuman 是從量子論中導出數學理論；由於受到新物理觀念的啓發，才造成對 infinite-dimensional spaces 及其 operators 更深，更廣的研究。一淺顯的例子是 Hilbert spacc 中的向量幾何（geomtry of vectors），和量子——力學系統中的結構有著相同的性質。Von Neuman 有關量子力學（quantum mechanics）的著作出現（德文）於1932年。而於1947年，翻譯成法文；1947年，西班牙文；1955年，英文。如今，它依然是此方面最具啓發性的作品。E. Winger，一位諾貝爾獎得主，在論及 von Neuman 對量子力學的影響時，曾說，單單這些貢獻，“就可以在今日理論物理學上，帶給他一個顯赫的地位”。

【普林斯敦時期】 1930年，Von Neuman 在普林斯敦大學（Princeton University）擔任了一學期的客座講師。而於次一年，成爲普大教授。1933 年，當普林斯敦高等研究所成立時（Institue for Advanced study），他是數學部門中最初的六位教授之一，並終生保持了是項職位。（譯者註：一般人極容易把普林斯敦高等研究所，及普大混淆不清。事實上，兩者沒有正式的關係，而且是絕對不同的機構。高等研究所成立的目的爲研究而非教育，愛因斯坦亦爲最初六位教授之一。）

三十年代，Von Neuman 的地位以流星般的速度不斷的成長，終於成爲數學界的泰斗。他非常欣賞美國無拘無束的生活方式。而和傳統的德籍教授大相逕庭，他持「四海爲家」的態度，且自願成爲美國公民。

von Neuman 家中經常的宴會是非常出名的，他雖沒有酒癖，但也不是滴酒不沾。

他喜歡開車，却頗不精此道。在普林斯敦，有一處「Von Neuman 角」，起源是由於他的座車一再在那兒發生麻煩。對於某次碰撞事件，他那被引敍不已的解釋是：「我在路上前進，右邊的樹林，以每小時六十英里的速度依次倒退。突然之間，其中一棵擋住了我的通路，緊接著就是轟然一聲……」。

他曾命名他的一隻狗爲「反元素」（Inverse）。他偶而玩玩撲克牌，但通常都是輸家。

1938 年，Von Neuman 再婚，娶 Klara Dan 爲妻。她向 Neuman 學數學，最後成爲程式設計專家。多年之後，在一次訪問中，她談論到 Neuman：「他對房間的位置，只有極模糊的概念……有一次，在普林斯敦，我曾叫他去倒杯水，過了一會，他却回來想知道杯子放在那兒，而我們已在那房子裏呆了十七年之久……。」

Von Neuman 絕對不是所謂漫畫中的大學教授。臉圓，而身材矮胖，經常衣着整潔而正式。當然，他也有一、兩個心不在焉的故事。妻子 Klara 說，一天清晨，Von Neuman 駕車去紐約赴一約會，當車行到 New Brunswick 時，他却打電話詢問

：「我為什麼要去紐約？」

【速度】 Von Neuman 思考的速度是驚人的。G. Polya 承認：「Von Neuman 是唯一令我心寒的學生。在一篇講辭中，如我敍述一個未解決的問題。等我演說結束，他很可能就會拿給我完整的解答。」對於抽象的證明及數字的運算，他皆應付自如。而且 Von Neuman 對自己運算的熟練特別感到驕傲。當他的計算機準備做第一次試驗，有人出了一道涉及二的乘冪的問題，機器和人同時開始，而 Von Neuman 却先算出答案。

有位 Aberdeen Proving Ground 的年輕科學家，一次事先得到一條複雜的算式。他花了十分鐘解出第一個特例；第二個，則花了他一小時紙和筆的計算；至於第三個，在求助計算器之後，仍花了半天的時間，方得答案。之後，他拿了這個公式請教 Von Neuman。Neuman 興高采烈的去嚐試：「如果以 $n=1$ 代入，我們得到……」然後，他凝視空中，口中喃喃自語了一分鐘。這青年，由於事先知道答案，立刻在紙上寫下「2.31？」Von Neuman 給了他一個很滑稽的眼光。繼續道：「現在，如 $n=2$……」又一次在 Neuman 計算完畢前幾分鐘，這位青年以一種遲疑不決的口吻插入：「是 7.49 嗎？」這次 Von Neuman 縐了眉頭。並且立刻展開反擊：「如果 $n=3$，然後……」同樣情形又發生了，在 Von Neuman 自言自語了數分鐘，就要得到結果之際，一旁竊聽的青年宣佈答案：「1.06」對 Von Neuman 而言，這太無法忍受了。這是不可能的，一個默默無聞的初學者，竟然勝過了他。他惱怒、煩惱異常；直到開玩笑的人說了實話。

【口才】 由於匈牙利文並非舉世通用的語文，一般有教養的匈牙利人，對一種或多種外文的依賴性，往往大於其本國語。在家，Von Neuman 講匈牙利語，但他對德文、法文、英文也都能駕輕就熟。

他的講課有個令人厭惡的習慣，那就是他擦黑板的方法。在討論中，他會在黑板上寫下嚴密的公式。當一個符號被證明可由新的代替時，他只將可代換的部分擦去，添入新的；而不是重寫新的公式；在同時，口中仍不停討論。很明顯的，這頗令慣於抄筆記的人為之手忙脚亂。

【工作習慣】 Von Neuman 不自滿於自己的天賦，所以非常努力地工作。他妻子曾說：「在家中，不論清晨或深夜，他總是在寫作。他的工作潛力幾乎是無窮大的。」除在家研究，在辦公室亦非常努力。他常常早到晚退，從不浪費時間。事不分大小，都非常有系統。

當我仍是他助手時，我們曾一起合作一篇論文。在週密的考慮及詳細討論以後，記錄便成了我的工作。而我交給他一份大約十二頁的打字報告。他毫不留情的批評了，刪去了一半，又重寫賸下的部分，結果是十八頁。然而，他仍然不滿意，又做了基本的改變，結果是二十頁。但是這幾乎成為「發散」的過程不斷地繼續下去

，最後的成績是三十頁。（還好仍是收斂）

Von Neuman 另一個著名且令人羨慕的特徵是他的數學勇氣。例如，在尋找反例中，而對一個涉及許多帶有二次冪指數的無窮級數，大部分數學家都會換張白紙，另外再找反例。Von Neuman 則不然，他必在這堆積似山的計算中勇往直前。

他精通數學，但在其知識領域中也有罅隙的存在，大部分是著名的數論及代數拓樸。有一次，當我們正注視著黑板上一個邊長帶有箭頭的長方形，他想知道那是什麼。「哦！那只是環面（torus）……」他竟然茫茫不知所云，這非常基本的問題，從未進入他的領域，而大部分的研究生却都了解了。

智力、速度及努力的工作造成他的成就，在Von Neuman 的 Collected Works 一書中，有他一百五十多篇一序列的論文，關於純數學的，有六十篇；有關物理二十篇；及涉及應用數學六十篇。

【純數學】 Von Neuman 聲名的建立，在三十年代以前，是基於對點集、量子論及 operator theory 的貢獻。但從此以後，在另外三方面，他亦有相當的建樹。首先是 ergodic 定理的證明。稍早，在統計力學（Statistical mechanics）中，ergodic 假設曾不甚精確地被敍述過。1931年，B.O. Koopman 發表了 theory of operators on Hilbert space 利用此定理，可以精確地敍述出 ergodic 假說。而此後不久，Von Neuman 便做出了今日所知的 mean ergodic theorem for unitary operators 。隨後幾年中，他發表了幾篇一流的論文，都有關 ergodie 定理。當他在研究 rings of operators 時，又利用此定理中的技巧及結果。

1900年，D. Hilbert 提出有名的二十三個數學問題，略述了當代數學的情況，並指出未來發展之方向。1933 年，D. Harr 證明了 Harr measure 在 topological groups 中的「存在性」，發表於“Annals of Mathematics” 但在此論文付梓前，Von Neuman 已經迎頭趕上，超過了 Harr 的發展，他隨卽發現如何去解決 Hilbert 一個問題（第五個）中的特例（compact groups）。他的解答，緊接在 Harr 的論文之後，出現在同一期的刋物上。

三十年代後期，Von Neuman 大部分著作，在討論他所稱的 ring of operators（現被稱爲Von Neuman algebra）那是在 operator theory 上做很技巧的發展，擴充了在 finite-demensional algebra 中常見的性質。是當今研究量子物理的利器。這或將是他流傳最久的作品。Theory of rings of operator 的副產品就是Von Neuman 所稱的 continuous geometry 。通常的幾何是在 1 度、2 度、3 度……等空間上討論。而 Von Neuman 在研究 rings of operators 中，發現一個空間（space）的維數結構（dimension of structure）決定於它所允許的 group of rotations 。Group of rotations，以及所有 operator 所組成的環（ring）產生爲常人所熟知的維數。其他的群以及不同的環，則造成數值能夠連續改變的維數。就此而言，一個¾度的空間是有

意義的。Von Neuman 從具體的例子 rings of operators 中，引出了造成“continuous -dimensional space”存在的公設。

【應用數學】 1940年是Von Neuman 科學生涯的轉捩點，他的作品呈現了「不連續的中斷」。在此之前，他是位熟知物理的頂尖理論數學家。此後，却是位通曉理論的應用數學家。他開始對偏微分方程發生興趣。那是物理學中，主要的古典數學工具。不論是戰爭使他對應用數學發生興趣，抑或是他的興趣造成他對戰爭所做不可估計的努力；他是軍方及民間戰爭企業所極力爭取的顧問。從此以後，他的論文主要在討論：統計學、shock waves, flow problems, hydrodynamics、aerodynamics, ballistics, problems of detonation, meteorology 。以及最後而且影響深遠的：對局論(games)及電子計算機 近代數學應用的兩大方向。

Von Neuman 對戰爭的貢獻是多方面的。最常被提及的是，他提議以 implosion method 造成核子燃料的爆炸（二次大戰中）以及支持氫彈的發展（戰後）。在普林斯敦頒贈的榮譽博士（D.Sc.）的褒揚文中，曾提及，他是位數學家，但是慶幸他也是物理學家、工程師、武器製造人及一位愛國者。

【政治】 他對政治上的決定，極少是站在所謂「自由派」一邊的。早於1946年，當原子彈的發展受到批評及攻擊時，Von Neuman 認爲有其發展的必要，並且大力支持（例如，投書紐約時報）。他不同意歐本海默（Oppenheimer），有關氫彈的計劃。並力主美國應在蘇俄之前擁有氫彈。但在歐氏的聽證會上，Von Neuman 却是爲歐氏辯護的證人。他堅持歐氏的忠心及無安全上的危機。

做爲一個原子能發展委員會的委員（由艾森豪總統提名組織的，Von Neuman 於一九五五年三月十五日宣誓參加入會）他呼籲聯合國應主持一項原子能輻射性反應的研究。他曾寫過：「爲了人民的利益，我們願意每年付出三萬人到四萬人的生命（約爲全部死亡人數的百分之二）」。他指出早期的太平洋試爆曾造成了一人死亡，200人傷害的結果，但拿它來跟日本人發動的恐怕事件所造成的一千人死亡的結果來比，那是微不足道的。因此他問：「爲了國際間的和平相處，是否我們必須付出一些代價？」對於這個問題他的答覆是肯定的，他說：「爲了我們將來更高級的工業地位，這種代價是值回票價的」。

【對局論】 當Von Neuman 運用他分析的天賦，致力於戰爭所帶來的問題時；他又運用他組織的洞察力，潛心於「對局論」。其主要應用在經濟學。Von Neuman 早期(1926)證明的minimax theorem是這門學問的基石。至於進一步的推敲及應用則出現於Von Neuman 和 O. Morgen 合作的書中。

在Von Neuman 之前，數理經濟學曾想仿傚古典數理物理的技巧去求發展。當時，利用的數學工具則是分析方面的（特別是 calculus of variations）。Von Neuman 處理方法的秘訣，在採用新觀點（對局論）及新工具（combinatoric 及 convexity 的

觀念)。

對局論在未來數學及經濟中所佔的角色，是不可輕言的。純就數學而言，造成 Morgenstern- Von Neuman 的著作較 Von Neuman 原始論文長六百頁的原因，是由於從深奧的理論到實際應用發展上的需要。另一方面，對局論的衷心擁護者，曾宣稱「對局論是二十世紀前期最偉大的科學貢獻之一」。

【機器】 造成 Von Neuman 聲譽鵲起的最後一項，是「電子計算機的理論及自動化」。對此，他多方面感到興趣；他想深入了解，去設計，去建造，去利用。

電腦執行的過程中，什麼是合乎邏輯的步驟？不可靠的構成分子中，如何得到最可靠的答案？什麼是電腦必須儲存的？什麼是裝設「記憶體」的最好辦法？能否建造一部電腦，不僅節省人力的計算，同時免了再製造新機器的麻煩 換言之，是否有自己再製造的自動化機械？(原則上，是可以的)一部機器能否很成功的模仿「任意情況」？所以當沒有公式適合一具體的物理問題時，機器能執行許多「機率上的實驗」，產生一個統計上精確的答案。這些是 Von Neuman 曾經研究過的部份問題，對於它們解決的辦法，他都有基本上的貢獻。

他曾付出很大的心血於幾種電子計算機，如MANIAC(Mathematical Analyzer, Numerical Integrator, Automic Calculator)及反應良好的 JONIC. 對於這些計算機之應用於解決微分方程式以至於預測及控制氣候的實際問題，他曾大力地提倡，他所貢獻的最令人震驚的主意是：將地球南北極的冰層加以染色以減少它們所產生的能量，如此將使地球的溫度增加到，足以使冰島與夏威夷的氣溫相同。

Von Neuman 一生最後有關學術性的工作是，他接受為耶魯大學所做之 Silliman 演講稿之準備及出版的工作，他所做的這件工作是躺在他死去的那家醫院做的，但他未能完成這件工作，雖然如此，他已做過的草稿却是值得一讀再讀的，而且更啓發了意想不到的主意。當物理學家、工程學家、氣象學家、邏輯學家，以至於電腦學家，都以他為屬於他們一份子而驕傲的時，你可以從他的 Silliman 講稿中看出 Von Neuman 一直是第一的，最偉大的，而且永遠都是的數學家。

【去世】 Von Neuman一生是位頂尖人物。不足為奇的，他獲得很多世間的獎勵及榮耀。在此我們沒有一一列舉的必要，但有些是值得一提的。他得過幾個榮譽博士，其中包括普林斯敦、哈佛、伊斯坦堡頒贈的。他曾擔任一任的美國數學學會主席。1956 年，受贈 Enrico Fermi 獎，其時他已知自己罹患絕症。

1955 年，Von Neuman 患病接受了一項手術，結果證實了癌症的診斷。但他繼續工作、旅行。1956 年四月，住進了Walter Reed醫院，直至 1957 年二月八日與世長辭。燭焰將盡之際，好友 Eugene Winger 記道：「當 Von Neuman 了解自己已患不治之症時，他的理智強迫他明瞭，將離開這世界，而他的思想亦將隨之中止……。當一切絕望時，眼看著和無法避免，而又無法接受的命運相博鬥，他的失意與挫

折，是令人心碎的。」

世間英雄大凡有兩類：一種於平凡中見其偉大；另一種，則有異乎常人的閃爍。Von Neuman 的偉大是平凡的一型。每個人多多少少都有思維的能力，但 Von Neuman 清晰的思考却是數次方倍於我們。Nobert Wiener 和 Von Neuman都是偉大人物，他們的名字都將留芳千古，但是基於不同的原因。Wiener 觀察事物深刻而直覺，Von Neuman 則是清晰而理智。

什麼造成 Von Neuman 如此偉大？是那驚人速度的理解？還是那不尋常的記憶力？不！那些令人印象深刻的特徵是不能永存的。正如一個百年前勇猛的運動員，對今日體育所具的貢獻一樣，他們對於未來的數學及數學家們的影響是微乎其微的。

「公設化的方法」有時被視爲 Von Neuman 成功的秘訣。在他的手中，那不是供賣弄的玄學，而是眞正的智識。他潛心於那些基本的性質（公設），終於被世人奉爲圭臬。「公設化的方法」反映給他的是由基礎通往應用的大道。對 Von Neuman 而言，思考不週密或表達不清晰是不可能的。他的洞察力有著啓明的作用；而他的陳述則是嚴密而無懈可擊的。

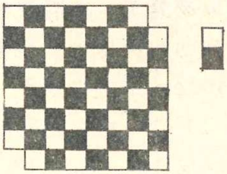
【本文節譯自 P.R. HALMOS 所著 " THE LEGEND OF JOHN VON NEUMANN " 】

數學遊戲

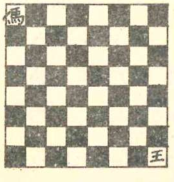
1. 方糖問題

一塊方糖最多可與幾塊其他的方糖作面與面的接觸？設這些方糖都是同體積的正方體。
（提示：一正方形最多可與幾個同面積的正方形作面與面的接觸？若設其他正方形彼此之間並不作面的接觸。）

2. 一塊西洋棋盤如圖去掉右上左下兩格。今有兩格面積大的長方形31 塊，問此31 塊長方形能否填滿此棋盤？



3. 西洋棋盤上只有二枚棋子：黑馬在左上角，白王在右下角。今由白方先走，問白王最多能走幾步而不爲黑馬所將？（西洋棋中，馬的走法與象棋中同，但王的活動範圍不受限制且可斜走。）



Ronald Aylmer Fisher 簡介

編輯小組 譯

西元一八九〇年二月十七日，R. A. Fisher 誕生在北倫敦。在離倫敦約十二哩，Harrow 的一所富有地主所創辦，專爲貧窮人家子弟求學而設的學校裏受啓蒙教育。後來進入劍橋（Cambridge）的 Gonville and Caius 學院讀書。於一九一二年，以數學榮譽學位考試及格畢業（Graduated as a Wrangler in the Mathematical Tripos）。又花了一年時間在劍橋，以"物理獎學金"在 James Jeans 的指導下，研究"統計力學"與"量子理論"且跟隨 J. M. Stratton 研究"誤差理論"（Theory of errors）。

我們都知道 R. A. Fisher 是世界上最享盛名的統計學家與數理生物學家。皇家統計協會議會（Council of the Royal Statistical Society）學得他所研究的工作範圍實在太大了，唯有以大家共同的合作，方可對其作一個適切的評論。因此，在1963年同一期的 Journal of The Royal Statistical Society 中共有四篇短文，以及一系列的有關著作目錄，著者均是 Fisher 的工作友伴。

Fisher 早期的生活，可由 Mahalanobis 先生所寫的傳記（刋在 Sankhya, 1938 年，第四期，265 頁到 272 頁）中知道一些。後來重印於 1950 年出版的 Fisher's Contributions to Mathematical Statistics 中。從那裏，我們知道在 Harrow 時，教他數學的是 C. H. P. Mayo 與 W. N. Rosevere 兩位老師。

他驚人的數學能力，必在很早就被發覺了，有兩個他在 Harrow 時的故事可以說明這個。在一個偶然的機會中，他向他的數學老師發表了以下的話：「一條直線是一條線與兩個點，若以"$a+2$"表示之，平方之則得一平面，四條線與四個點。因此，可以表示成"$a^2+4a+4=(a+2)^2$"。立方之則得一表面（Surface），六個平面，十二條邊與八個點，於是可表示成"$a^3+6a^2+12a+8=(a+2)^3$"。根據這個，n 維體就能夠完美的以 $(a+2)^n$ 表示出來。」這在一個中學生來說，是一個非常了不起的直覺觀念。

另一個故事是有關於那使他在一生中，多多少少受苦的視力困擾。有一段時期，他的讀與寫必須儘可能的減少。他的數學老師問他：「你腦子裏最喜歡數學中的那一部分？」時，他回答說：「是球面三角幾何學（Spherical Trigonometry）！」事實上，在他的腦子中正想學球面三角學。毫無疑問的，這個重要的直覺觀念幫助

了他後來所沉迷，發展的 n 維空間幾何學（geometry of n-dimension space）。

一九一三與一九一五年間，曾在Mercantile and General Investment Company工作一段時間。後來到加拿大，在一個農場裏工作。第一次大戰開始後，由於他的一隻眼睛有毛病，致使他沒有資格到軍中服務。一九一五到一九一九年間，曾在各公立學校敎習數學與物理。

1919年，他加入了Rothamsted Experimental Station，1933到1943年間在London的University College任教授職，而在劍橋當遺傳學教授。1956～1959年，曾任母校Gonville and Caius學院的校長職。當他到達澳洲時，就移居於南澳大利亞的首府Adelaide。

在他的研究生涯當中，曾獲得了國內外許多的好評與極佳的聲譽。1929年被選爲皇家協會之會員。1938年榮獲了一項“皇家獎章”。於1948年再接受了“達爾文獎”。1955年更成爲著名人物之一。且於1942年又榮獲了“Copley勳章”，1952年被授予爵士的職位。1952至1954年期間爲皇家統計協會（Royal Statistical Society）的主席。此之前，在他所參加的遺傳學協會（Eugenics Society）裏更是一個極卓越的著名人物之一，一直到1942年，在那裏他都有非常濃厚的興緻，且舉行了許多次重要典禮。他也是國際生物統計學協會（International Biometric Society）的創始人之一，於1947～1949年間擔任這個協會的主席，是一個榮譽會員。後來也當了國際統計協會（International Statistical Institute），亦是美國國家科學學術會（U.S. National of Science Acadcmy）的名譽會員之一。

第一次世界大戰末期，那時Rothamsted Experimental Station有一大堆關於近八十年中實驗的資料，正想找一個人來處理，他們想或許能有一個數學家，可以從這些資料中研究出一些結果來。於是，在1919年Fisher到了Rothamsted。那時，他只利用一個表格與計算器，開始了這些數據的研究，看看是否能從它們之中得到些未知的資訊。大約十年中，他建立了聞名世界各地的統計部門。他是如何著手做這些呢？首先，他本身就是一個數學的天才，秉具有廣博的生物學見解與知識，他確實瞭解生物學家們的觀點。能夠很迅速地將其顚峯狀態的注意力，從某一件不相關的事情集中到另一個主題上。二十年代中，Rothamsted的那些生物學家，個個都是聰敏精幹的人物，他們曉得“正在作什麼？”與他們的“目標是什麼？”很快的，經過與Fisher談論後，他們發現他確實瞭解，他們的那些問題。當Fisher告訴他們說：「好啦！假如你們利用所得到的那些結果，去作“這種”或“那種”的運算，你們將會得到所希望的。」在他們來說，至少運不知道如何證明這些特殊的技巧是正當的。但他們還是照著他的方法作了。不久，他們發現，果然得到了他們所需要的結果。

1925年當他所寫的“Statistical Methods for Research Workers”這本書出版

時，並不很順利。那時的正統派統計學家並不瞭解他的目的。對於一個生物學家來說，這是一本非常容易的書，但對於一個數學家則否。事實上，因爲這本書是他以前六年時間，與生物學家合作研究中所得的成就爲基礎而寫成的著作。一個數學家想要瞭解它時，必須要非常細心的閱讀他的原始論文，而且還必須設法彌補他在幾何學與代數學的直覺觀念上所獲得的結果之間的差距。

Fisher 永遠是一個友善與健談的伙伴，他的態度是不拘禮儀的，甚至在早期還過得像一個“怪癖者”。但對於同事與來訪的朋友都非常友善。是一個實際行動者，甚至到 Rothamsted 試驗農場親自參加農產實驗的細微工作，告訴他們，那裏有些什麼樣的困難以及如何去克服它們等。

他在自己的家中飼養了許多的老鼠，利用牠們做出了許多遺傳上的實驗。所有自己可以做的事情，他都要親自參與，甚至是一些微不足道的家務事。完全不理會他那些“中等階級”的鄰居們所作的協議，這是他早年生活中一個不尋常的事情。另一件事是在思想上有些偏於保守主義者，特別是有關於“優生學”、“人類學”以及“食物生產”等問題的一些事情上。

Fisher 與 Karl Pearson（1857～1936）兩人都是統計學界的巨人，都以最大的熱心貢獻於他們的事業中，且都不能容忍那些與他們不同的數理統計觀念，有時不免會以審愼的理智與他人發生爭執，但不是全部。在這種情況中，他們都不曉得自己並不是完全的客觀。例如，關於試驗中樣本大小的問題，Fisher 的主要研究是小樣本，而 K. Pearson 本身曾經對小樣本理論也研究過，又小樣本論和從來的大樣本論雖在歷史上有密切關係，但 K. Pearson 對小樣本論的態度非常保守。自 1920 年大戰終止，1933 年退職，到 1936 年病歿爲止，兩人的對立非常尖銳。

現在，我將 Fisher 的主要研究工作條列於下：

1. 小樣本的發展（以及任何大小的樣本）。
2. 顯著性統計檢定的系統化發展。
3. 估計理論的發展，說明什麼樣的先驗（事前）機率（Probability a Priori）能夠被完成。
4. 創立了實驗設計（Design of Eyperiment）的理論，且提供給我們一些分析結結果的技巧。
5. 有關抽樣調查之理論與實際上的貢獻。
6. 變異數分析（Analysis of Variance）與判別函數（discriminative function）上的許多發展。
7. 有關人類遺傳學上的整理。

從 1920 年起，他創造了“推定論”、“假設檢定論”提供一種新的統計學理推測統計學（Inductive Statistics）——以確立新的統計方法之基礎，使英、美

統計學界得有今日輝煌的成就，其功實不可沒。其後由 E. S. Pearson 及 J. Neyman 對於“統計假說”上給與嚴密的數學體系與提供信賴區間之理論，確立了推測統計學的基礎。

他差不多遍涉了所有由“常態”(normal) 誘導出來的標準分配。1875 年 Helmert 已經導出了“常態離差的平方和”之分配 (distribution of the sum of squares of normal deviates)。1893 年 Karl Pearson 創導出 Pearson 分配函數，於 1900 年又誘導出 x^2－分配。1908 年 Student 也從一個常態母體的樣本中，導出了 t－分配。1915 年 Fisher 貢獻了相關係數 (Correlation Coefficient)。1924 年依據部分相關係數的分配與變異數比，有了 x^2－分配，t－分配更總括的見解，以及特殊情況的“迴歸係數”。1928 年在 Rothamsted 發現了樣本的“變異一互變異矩陣”之一般分配 (Wishart distribution) 的概念，以及複相關係數。十年之後發表了“null distribution of the principle components”，最後於 1962 年 3 月 2 日，寫給一位友人的信中說，他已“解決”(run out) 了，對於任何母體樣本的相關之一般分配。其餘，他解決的分配問題是：1922 年，“標準偏差指數”。1927 年與 J. Wishart 的“捕補法之誤差”。1928 年與 L. H. C. Tippett 的“龐大樣本之最大與最小元素”。1928 年，“the largest of several studentized sums of squares”。1931 年，“常態分配之推定百分點”。1953 年，“球面常態分配的單位向量之和”。以及許多有關混合性質的問題。

他首創了 t-statistics 的理論，更利用這，誘導了“測試常態性”的量度之常態樣本的動差 (moments)。他首先着手於研究那些機率密度函數爲高於二次之對數多項式的分配族。可惜因缺乏運算的輔助，使他不能更進一步的發展。另外，他也首創了“檢定顯著性”的“隨機化理論”與非常有用的“無參數估計”(Non-parameter estimation)。

當他在 Rothamsted 時，本從事“地力”的研究，深感對於田間試驗上，若仍應用 Pearson 之大樣本方法，則不但無此巨大地域，且因區域的大必致影響“等質性”，使所有地力不能均一，必須根據小數資料，始能達成此目的。因此，特依“拉丁方格”(Latin square) 法，導入了“隨機配置法”(random arrangement)，舉行小樣本之田間試驗，於記述的統計觀念之中，灌輸了實驗設計之方法。後來，爲了克服種種的困難，更發展到“因子計劃”(Factorial Design) 的思想。他說：

「實驗上，想像某些原因能影響到觀測結果或效果時，以某種方法，把這些原因分解爲多數的基本要因。實驗時，除了某特定因子外，在某種管制條件下，固定其餘因子，而變動某特定因子，再看其效果。這種方法是一般科學想法，在實際研究上是否充分，爲說明某法則或實證爲目標而計劃還算充分。實驗說明的情形，盡量用單純的方式應用該法就充足了。但是不是可視爲“發現性”的方法？無數可能

的因子中也許有若干個具有特別研究的價值，但實際上有很多情形是不可能做肯定的說明。不但如此，某因子的效果是否獨立於其他因子的變化，其效果是否和其他因子群的變化成簡單的特殊關係，都為不得而知的情形特別多。為了研究，取了若干個因子而能個別查明研究方針，那是因為這些因子容易管制，易於計量而已，自然法則不是能以這些變數的簡單函數關係來表示的。」

毫無疑問的，實驗中運用“不同的因素”來分類“實驗的對比”為其實驗設計理論中的一個主要基礎。1923年，他導入了“變異數分析”(Analysis of Variance)與“互變異數分析”(Analysis of Covariance)。即在若干能互相比較的資料組中，分離出可斷定係起因於特定原因之變動的一種技術，去掉了那些已知原因的變動部分，就可得實驗誤差的估計值。對於這個，他說：

「變異數分析，只不過是適用於經過設計之各種實驗中，處理最小平方法與互變異擴展的一種簡捷方法。」

但此方法中，着重於“線性模型”(Linear model)，有時則是複雜關係之問題的阻礙。不過，他的方法於解因素繁雜的實驗之情況方法中，卻是無可匹敵的。附隨在這個方法中的“顯著性檢定”(significant testing)能給與且判斷，到底這些組的資料是否可認為是從單一均質的母群體中所抽出來的任意樣本之根據。在這裡亦使用自由度之概念，這個方法不限制樣本的大小，即不僅是大樣本，亦可使用小樣本。

在這裡，值得一提的是：他於1934年發表了“隨機化與古老牌戲之謎”(Randomization and an old enigma of Card play)。文章中建立了，以前已由Borel與Von Neumann所提出的“對局理論”(Game Theory)獨立發展的理念。Borel與Von Neumann兩位所說的是一般之理論，而Fisher則將這個觀念應用到牌戲的實際問題之通盤的處理上。他的分析是第一個，也是保留的少數幾個有用實際的對局理論之一。

他對於“Bayes 定理”的排斥最為徹底。其理論構成的思想在於不依現實資料以外的知識，亦即不依賴於事先(a prior)知識為其目標。可是Bayes定理雖有上述之缺點，如進一步仔細考慮時，實有再檢討之餘地。

1922年到1928年間的論文，介紹了“一致性”(Consistency)、“有效性”(efficiency)、“充分性”(sufficiency)的概念，以便做為判別估計之優劣準則。含有此三種統計性質的統計量稱為“最佳(不偏)統計量”(optimum statistic)。為了尋求這種最佳統計量，他更導入了“最尤法原理”(principle of maximum likelihood)。

以上，只是Fisher對於數理統計與實驗計劃方面偉大貢獻的一些大綱罷了。至於他在生物學、遺傳學等方面的研究，更有其不可磨滅的貢獻。

我國最偉大的數學始祖隸首

我國古聖先哲，對宇宙萬物的體認極爲深刻，因之中國人的數理觀念亦發生很早，遠在紀元前二六九九年至二五九八年的黃帝時代，就已有了輝煌燦爛的文化，隸首就是那一時代最偉大的數學家，他的生平雖然由於年代久遠，古籍湮沒失傳，無法稽考，但他對人類提供的畢生智慧與努力，奠定了我國數千年前一切自然科學與實用技術的基礎，則是事實，同時，他也是我們中國最早期的一位出類拔萃的數學天才與科學家。

根據秦史記載，隸首是黃帝互屬，黃帝曾使隸首作算術，按照辭典上解釋，「數」就是一、十、百、千、萬的數字，「算數」是指計算的方法而言。通常對於簡單的算數方法稱爲算術，較高深的則稱爲數學。這些計數方法，在黃帝時代就已經有系統而很完整的著作，且能對於數字的運用變化無窮，對計數法則與公式的建立，也有驚世的成就，尤其隸首所著「九章算術」更是中國人所最熟悉的一部書。這部書可以說是人類有史以來最古老的「算術」經典，因其內容艱澁難懂，很少有人去研究它，埋沒了它的價值，是一件可惜的事情。

隸首所作的「九章算術」，已具備了現代數學的基礎，並包括有現代三角學，平面幾何和解析幾何與大小代數等學，可謂現代數學的範圍內，這部書中幾乎應有盡有。足見隸首在數學方面的建樹是如何的偉大。由此可知，黃帝時代所具備的有關數學知識基礎與科技方面的創造發明，已是人類文化的一個顛峯時期，及至唐堯虞舜以後夏商周諸代，中國人文社會科學的發展，又達到了另一個顛峯狀態，尤其在春秋戰國時代，中國文化的發揚光大，無論是自然科學或社會科學，都已經到了鼎盛時期，相信現在的人類世界也不過是那個時間的縮影而已；因爲黃帝時代如果沒有隸首「九章算術」的數學知識基礎，當時就不可能進一步發展與數學發生密切關連的許多科學與器物，例如製造新式兵器與指南車，制定曆書與度量衡，計算地球自轉與月球繞行地球的正確時間及其修正閏差，觀測星辰位置繪製地圖，製造舟車橋樑，建築城廓宮室，還有測量田疇，開發水利，紡織絲麻，編組戶籍，統計人口以及研究動物心理，辨別植物種類等的卓越成就。

「九章算術」和「周髀算經」，同是我國最古遠的數學書籍。九章算術又稱「

九數」，因其內容共分九大部分，包括「方田」、「粟米」、「差分」、「少廣」、「商功」、「均輸」、「贏不足」、「方程」、「勾股」等稱謂。所謂「方田」，就是用以測量田疇界域的計算方法，運用簡單的幾何圖形來測算，並規定圓周率爲「三」（按現在爲三·一四一六），足見隸首對圓周率的計算，已經達到了相當精確的程度。「粟米」是古代商業上在物物交易時作爲計算比值的方式，古人以粟米爲比率，相當於今所用的百分法。「差分」是運用等差法來計算稅賦的方式，類似現在的小數點的分數法則。「少廣」是一種求「數」與「式」之根本的法則，所謂「以御積冪方圓」，即是數的自乘算法，相當於今日的開方，其用途很廣。「均輸」是用於交通運輸上的一種數學，以計算遠近勞費之用。「商功」是用來支算立方體、角錐、圓錐、圓柱等體積的，所謂「以御功程積實」，即是應用工程計算上的「三角」與「立體幾何」。「贏不足」是藉有餘與不足「以御隱雜互見」的學問，類似現在統計學運用。「方程」卽今之大小代數學，是運用正負法則，以計算聯立方程式。「勾股」主要是「以御高深廣遠」卽現在的測量學，運用三角幾何來測量，古人稱三角形兩豎邊爲「股」，橫邊爲「勾」，斜邊爲「弦」，勾方加股方，卽等於弦方，這與現代的三角學法則及定理完全吻合。

從上面的簡單註釋中，可以窺知這部書是隸首集我國古代數學之大成。他將古人的思維能力、推理方式與測算法則，運用他自己的高度智慧，分門別類地記述、創作、發明、終於給後世留下了這樣偉大的科學遺產。

隸首不僅是一位天才數學家，也是一位著名的天文學家，他對於同時代的容成所完成的曆書，也有極大的貢獻，當然精於數理的人，亦通曉天文學，同樣精於天文學的也一定懂得數學。這是因爲這兩種科學的性質本來就具有密切的關係。此外，最值得特別一提的是隸首還發明了一種計算工具，據說文上記載，這種「算具六寸，計曆數者也」，不過這種算具究竟是什麼樣子？因爲年代過久，記載殘缺，早已無法考證，可能就是現在大家習用的珠算盤。但不論是否爲算盤，抑或是其他的算具，遠在四千多年以前，人類的思想技術就能發明如此的算具，的確是一項驚世的大成就，因此我們尊隸首爲人類的先知，爲人類最偉大的數學家，誰曰不宜！從上述史實中，可以知道隸首對中國對人類的貢獻是如何的巨大深遠，當隸首完成其著作與發明之際，全世界却都在草昧未開階段，可見中國歷史文化的悠遠博厚，吾人更應加以珍惜整理並予發揚光大才好。可惜國人對自己的文化都發生了懷疑與輕視，認爲中國文化所涵育的科學成分不足，這是民族生存線上隱伏的危機，非常值得注意，哀莫大於心死，要談救國就必須從心靈救起。我們要效法古聖先賢的奮發與創造發明精神，求得國家的獨立自強。

Galois 的悲劇生涯

編輯小組 譯

Galois 生在巴黎近郊一個叫 Bourg-la-Reine 的鎮中，父親爲該鎮鎮長，受良好教育的父母並沒表現出對數學有特別的才能，而年青的 Galois 却着實從他們那兒學到對暴政難以平息的痛恨。在他最初求學（十二歲入學）階段，對拉丁文，希臘文，甚至於代數並不感興趣，却著述於 Legendre 的“幾何學”。後來，他讀，並且了解了 Lagrange 和 Abel 等大將在代數和分析的作品，但是他的學校正規數學依舊維持平平，而他的老師們都當他是怪人。到十六歲時，Galois 認淸了一椿事實——他的老師並沒體認到他是位數學天才。因此，他希望進入那所曾造就許多著名數學家的學校——“工藝學校”（'Ecole Polytechnique），但因缺乏有系統性的準備而落榜了。這只是令人難受的失敗的開端而已。雖然如此，Galois 在十七歲時把他一些最重要的發現寫成一篇論文，並請 Cauchy 代爲呈交學士院（Academie）。Cauchy 不只是像他曾誤置 Abel 的一篇重要論文那樣把該文給誤置了，而是把它給搞丢了。到此，Galois 憎恨的對象不只是考試委員，更包括了院士。第二次“工藝學校”落榜加深了他的痛恨，而這還不是最嚴重的打擊哩！在爲教權問題而鈎心鬥角的紛爭中，他父親因自感遭受迫害而自殺了。

不顧他所經歷的諸多打擊，Galois 進入“師範學校”（'Ecole Normale）唸書，同時繼續他的研究，在 1830 年提出一篇研究報告角逐數學方面的學院獎。當時的學院秘書 Fourier，把論文帶回家却在不久的以後死去，而該論文也丢了。由於虐政和挫折環境在 Galois 身邊，種下了他在 1830 年反抗的原因。一封批評“師範學校”校長優柔寡斷的謾罵信，使他失掉了學籍。但是他仍再一次地設法把一篇論文提交給學士院，這一次經由 Possion，該論文所包括的一些重要結果乃今衆所皆知 Galois Theory 的一部分；而 Poisson，這位評審先生，却以無法理解爲由將它退回。在徹底失望之餘，Galois 加入法國國民兵，1831 年以聲言威脅法王性命入獄。獲釋後，又捲入另一場糾紛，爲「榮譽」而接受對方的挑戰。决鬥前夕，他花了整夜時間給一個朋友寫信，信中暢論自己研究所得，要求將此信公諸於世，並希望 Jacobi 和 Gauss 爲他闡明這些定理的重要性。1832 年 5 月 30 日清晨，决鬥時爲對方擊中要害，次日即告不治，死時年方二十一，誠爲最年輕而發現卓著之數學家。

【本文節譯自 Boyer：A history of mathematics PP. 638～640】

Abel和Galois

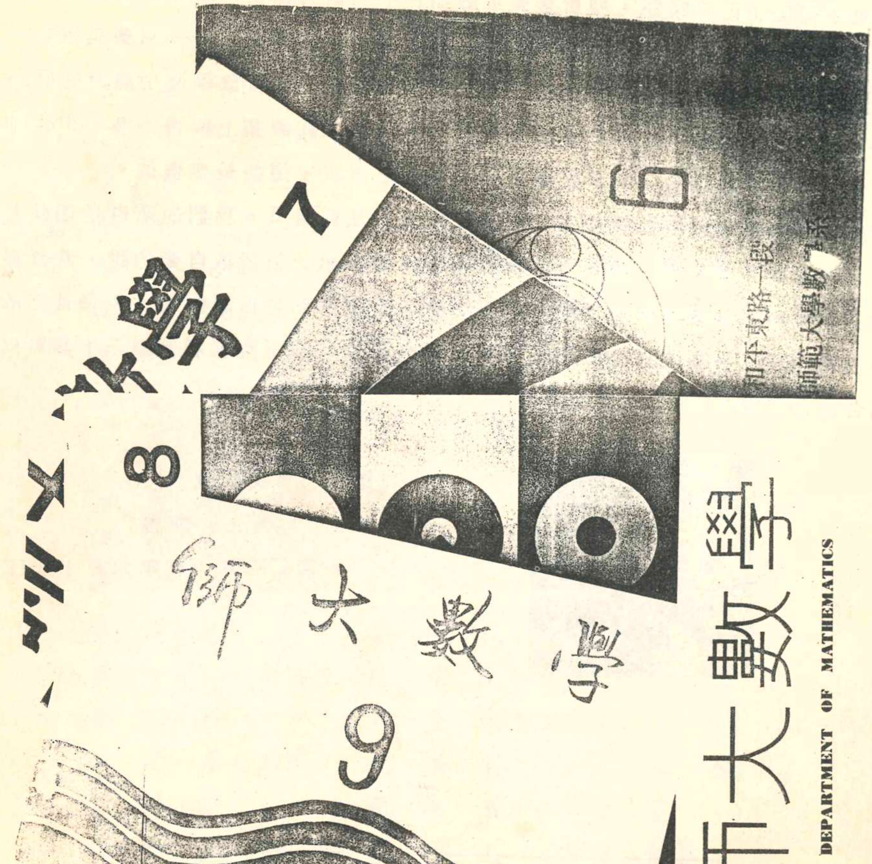
編輯小組譯

Abel和Galois都死的過早，Abel 二十七歲時死於貧窮導發的肺結核，Galois二十一歲死於一場毫無意義的比槍決鬥。Abel 的天才初被發現時，即受朋友及挪威政府的金錢支助，但論天性他是一個樂觀隨和的人。Galois 在最有作爲的五、六年中竟把大部分時間用來攻擊一些愚昧善妒以及態度漠然的教師，以致後來變得乖戾好鬥，與其本性相違。若有人能避免這兩位早逝天才所代表的巨耗，那麼數學界亦不致如此痛失此二位Gauss 的承繼者了，因爲依正常情形Abel和Galois於其有生之年所能成就者雖難逆料，但至少在質和量方面都將大爲提高。對一個大數學家來說，其最先的發現亦不過是一些規則罷了，而並未考慮及一切例外情形，若欲將這些規則發展至成功，則屬於曠日時久的工作，Gauss 就花了五十年時間發展其早年的某項發現，結果却也只完成一部分而已。

Gauss , Abel , 和Galois 若生於今日，社會到底能爲他們做些什麼？政治家Disrael曾說過社會本身就是一個難解的問題；再深入的探討也不過使其意義更模糊、更抽象而已，雖然如此，我們還是以“社會”一詞冠之，因爲幾乎每個人對於“何謂社會？”都各有其一己的看法。Gauss 乃貧苦勞工之子，因得Brunswick 公爵之助始接受教育。今日，他必可由公家出資栽培。而Abel亦可在最高衞生機構接受治療，乃至痊癒。Galois必當受到普遍的尊敬，或在警察的保護下，以任何揑造的罪名被拘留起來，甚或送往集中營服刑。因爲不少證據顯示。現在的教師若碰到像Galois一樣具有高度智慧的學生，不再惶惶然不知所措，而現在的執法者亦不像當年使Galois受牢獄之災的護法者那麼神經緊張。伊索寓言中關於孔雀和烏鴉的一則，在這整件事中頗佔一角：你和我們不同，不滾就得被整。

當時Galois之所以被視爲危險激進份子，非因數學乃因政治之故（現在這種人竟意外地廣受尊敬，因他可算是一名共和黨人）。當時的保皇黨社會一心想持續其腐敗、墮落，所以1830 年代的社會對Galois其人革命性的數學觀念持以漠視的態度，倒也是理所當然之事。但到1920 年代之初，社會發現，一個純粹的數學理論（相對論，說得更明確一點：統計生物學）對於正確的政治思想竟會造成嚴重的威脅。人類統計生物學在俄國被禁，相對論在德國亦然，所以說社會自其摒棄了Galois之後確在不斷的改變之中。

【本文節譯自Bell：The Development of Mathematics P. 243～244】


師大數學
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
師大數學
9
8
7
6
和平東路一段

編後語

在期末考正如火如荼的在考時，終於我把這期系刊全部完成了•在這近個月來每夜我幾乎都關在電算機室，埋首在整堆的稿件中，直到深夜。我常問自己，這犧牲是否值得？這答案在上學期我初接文教股職位時，早就確定了——只要是以我一人之力量能帶給全系師生知識的增長！研究風氣的興盛及能對數學發生濃厚愛好的任何事，我都可以去做，我都可以犧牲。這一年來雖然在課業上獲得不多，但是却使我增加了不少辦事經驗，使我體認了不少處世之方法，這些是無價的•

這社會需要很多默默實幹的人，更需要些不計私利傻瓜，我們的系也是如此•我不敢說我曾做了些什麼，我更不敢說我有些什麼貢獻，但我敢自豪的說，我費盡了我的心力做事。今後我們系裏還需要更多更多爲全系師生服務的人，相信他們的熱忱必千萬倍於我，更相信他們的貢獻是不可限量的。我祝福著我們的系！我將以我曾爲各位服務過爲榮！

數學學會文教股

孫文先　謹啓

中華民國六十五年六月十八日

數學學會組織概況

常務理事：鄭安家（三丙）
常務監事：葉連昌（四乙）
文教股長：孫文先（三丙）
總務股長：黃進進威（三丙）
康樂股長：蔡世榮（二乙）
交通股長：駱豐華（三甲）
服務股長：王清淵（二甲）
衛生股長：沈瑪莉（二丙）
體育股長：駱炳宏（二甲）

田徑男女隊長：曾皇龍
沈瑪莉
棒（壘）球男女隊長：黃克恭
沈瑪莉
足球隊長：朱國頌
籃球男女隊長：張建華
沈瑪莉
排球男女隊長：蘇輝龍
沈瑪莉
游泳隊長：鄭建財
桌球男女隊長：李秋鴻
屠耀華
羽球男女隊長：孫文先
岑雪英

理事：	盧育民（四甲）	鄭安家（三丙）	蔣永延（一丙）
	謝啓凰 〃	駱炳宏（二甲）	陳博宏 〃
	劉幸德（四乙）	鄭玉印（二甲）	郭偉成（夜五）
	蘇清號 〃	李慶俊（二乙）	孫啓鐘 〃
	李中興（四丙）	張天民 〃	王松溪（夜四）
	劉文華 〃	李金松（二丙）	黃貴鳳 〃
	何晚居（三甲）	沈瑪莉 〃	林鳳蓮（夜三）
	劉慶麟 〃	簡純誠（一甲）	李麟 〃
	李崇正（三乙）	柯坤山 〃	陳國龍（夜二）
	黃其福 〃	楊坤維（一乙）	張貴芳 〃
	陳清良（三丙）	羅月鳳 〃	張仲浩（夜一）
		王淑霞（夜一）	張宏旭（夜一）

監事：	曾滿妹	張維孝	王清淵	董倫擇
	葉連昌	張文德	陳天瑞	李玉芳
	蔡文周	彭錦龍	張松竹	宋心美
	高義源	鄭建財	劉詔文	簡孟華

師大數學　　　第十期

發 行 人：常　法　徽
出 版 者：國立臺灣師範大學數學學會
主　　編：孫　文　先
編　　輯：柳鎮鈿　喬慧穎　陳棠治
排 印 者：中原打字印刷行
　地　址：台北市杭州南路一段五號
　電　話：351－0593
出版日期：中華民國六十五年六月廿日
師大訓課刊登第 136 號