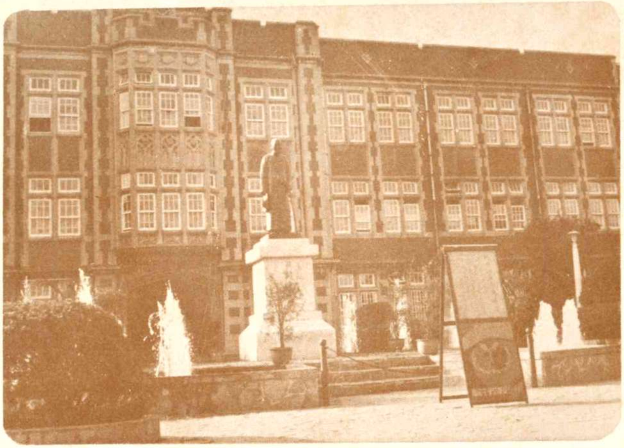
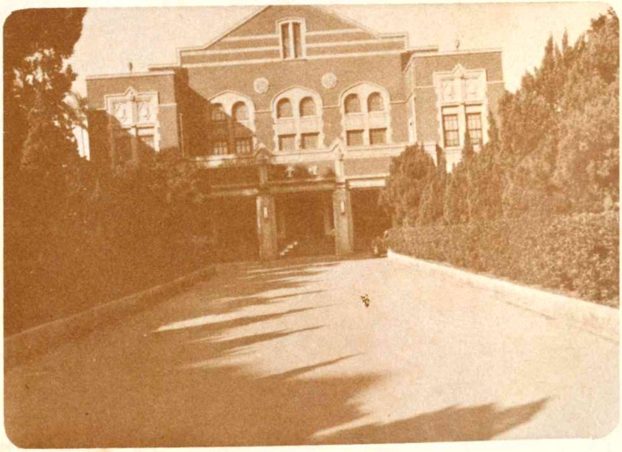
# 師大數學 12



任重道遠

數學系

百年樹人



# 系主任序

本系成立於民國三十五年八月，首由張儒林先生擔任系主任，當時僅有數學系一年級及二年制專修科一年級各一班，同學三十餘人，教授三位、助教一位，嗣由管公度、潘璞、李新民、康洪元、范傳坡各教授輪掌系務，歷經各主任之努力及同仁等之精一計劃，始具今日規模。現本系日間部有十二班，夜間部五班，共有同學六百餘人，圖書壹萬捌千餘册（分藏於數研所資料室及理學院圖書舘約四千柒百種），雜誌百餘種，自六十四年夏遷於新址後，環境煥新，有助於研究風尙，師生孜孜不息，均爲美好遠景而奮發。

畢業系友，已逾越貳千餘人，多各有成就（獲博士學位者逾百人，僅獲碩士學位者約壹百玖十餘人）或執教於高等學府，或繼續高深研究，餘多服務於中等教育界，平時諄諄教學，誨人不倦，敦品篤行，懷抱熱忱，此實爲本校善良風氣之所致。

邇來科學進展甚速，數學之需要甚切，本系之任務更日益增大，除學術研究外，更肩負數學教育之發展及中等數學教育輔導之重要任務。同仁等均懷履薄之心，致力於未來發展，並時時注意於以下數點：

一、安定中求充實，再求發展。

二、增強教材教法之研究，鼓勵對數學教育有貢獻者出國觀摩。

三、注重高深學術之研究及應用。並鼓勵著述及出版。

四、增設電子計算機組以配合中等數學教育之發展。

五、增訂圖書雜誌，並補全過期雜誌。

六、配合課程需要，增聘專門人才。

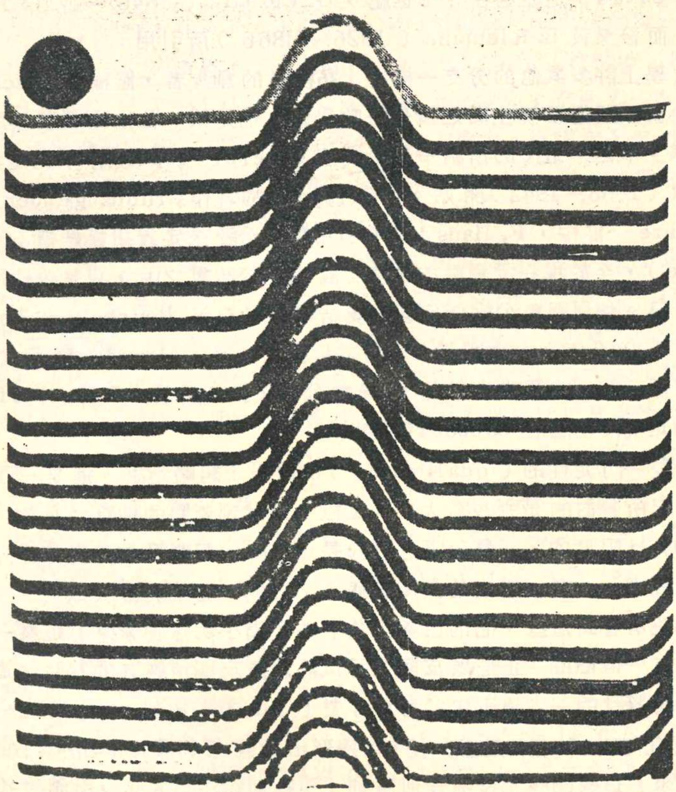
爲增強研究風尙，本系於十二年前創辦年刋，發表創作及研究心得。切磋琢磨，提高學習興趣。屢經負責同學之辛勞耕耘及師生系友之共同支持，漸茲茁壯，今後請大家更不吝珠璣，源源賜稿，則本刋必前程似錦，散發絢爛光芒，於此，至表謝忱，更盼我師生系友善珍此片園地。

常法徽　謹識

六十七年六月

# 目　錄

# 分　析



# 拓樸學漫談

趙文敏

拓樸學（ topology ）一詞，是由希臘文 τ'οποζ 一字轉變而來，原意是〃地位〃；所以，拓樸學原被定義為研究形勢（ situation ）的學科，初期的名稱是 Analysis Situs，這是遠在十七世紀，G. Leibniz（ 1646 － 1716 ）所率先使用的名稱，而後又被 B. Riemann（ 1826 － 1866 ）所引用。

就像數學上許多其他的分支一樣地，拓樸學的創造者，應推 B. Riemann，他是第一位企圖去塑造拓樸空間之概念的數學家，也是第一位把拓樸學應用到分析數學的數學家。不過，近代的所謂一般拓樸（ general topology ）則是從F. Hausdorff（1868－1942）開始。在他 1914 年的著作 Grundzuge der Mengenlehre 一書中，F. Hausdorff 引用鄰域公設來定義拓樸結構（topological structure），至於現在所通用的開集公設也見於該書之中，只是未被用於拓樸結構的定義而已。使用開集公設來定義拓樸結構，是自 N. Bourbaki 在 Topologie Generale（ 1940 年）一書開始。特別需要提出的是，Hausdorff 用來定義拓樸結構的第五個公設，是現代所稱的 $T_2$ 隔離公設，換句話說，Hausdorff 所稱的拓樸空間，乃是現代所說的 Hausdorff 空間。

拓樸學是一門定性的（ qualitatiue ）的數學，粗略地說，這是一門不重視數量的數學，它所探討的是那些與大小、位置、形狀都無關的性質；例如，一個橡皮圈，在它的彈性限度內，任憑我們把它拉長，扭轉，只要我們不把它弄斷，那麼它永遠有一個圈圈。拉長，使它的長度改變了，扭轉，使它的形狀改變了；然而，拓樸學的眼睛沒有看到這些，它的注意力集中在〃這小玩意兒永遠有這麼一個圈圈〃上，〃永遠有一個圈圈〃正是橡皮圈之所以稱為橡皮圈所應有的特性，這個特性正是拓樸學所要探討的一各種形體的內禀特質（ intrinsic quality ）之一。這一個內禀的特質是任何三角形，任何四邊形，任何多邊形，任何圓，任何橢圓等等所共有的，從拓樸學的立場看來，這些圖形都沒有任何區別；這裡值得注意的是，所謂〃沒有任何區別〃乃是從〃拓樸學〃的立場來說，否則，在初等幾何學之中，這些圖形自然是完

全不同的，因爲，不論是形狀，面積，周長等等都可以說明，它們在〝初等度量幾何〞中是不同的圖形。在度量幾何中，兩個圖形必須要全等（ congruent ）才可以視爲沒有任何區別。當然所謂全等，是需要有一個嚴密的定義的：如，兩圓有相同的半徑時，或兩橢圓的長軸與短軸之長分別相同時，或兩三角形的三組對應邊分別相等時。

那麽，所謂〝在拓樸學中沒有任何區別〞，也需要一個嚴密的定義，這個專有名詞，我們稱之爲同胚（ homeomorphism ）；如果我們把一個橡皮製的任意一個物體X，把它任意地拉長、扭轉，只是不能把它撕開或弄斷，那麽我們得到另一個形狀的物體Y，這兩個物體X與Y就稱之爲同胚。當然，這樣的說法是太過於缺乏數學的意義的，或者說，它是不能被接受來做爲數學上的一個定義的。當我們把X扭或拉成Y時，X上每一點P被扭拉成Y上的一點Q，這個P拉至Q的過程，建立了數學上所謂〝由X映至Y的一個映像（ map ）〞，而不得撕開或弄斷，更是強調了很重要的一點，那是：原來在X上很靠近的兩點，在整個扭拉的過程中，仍然保持很靠近。這個〝原來很靠近的點，經過一個映像之後，仍然很靠近〞的說法，正是在建立這個映像的連續性（ continuity ）。所以，在拓樸學中，同胚這個觀念遂定義如下：若 $f: X \to Y$ 是一個一對一且映成的映像，而且 $f: X \to Y$ 與 $f^{-1}: Y \to X$ 兩者都是連續映像，則稱 $f$ 是 $X$ 至 $Y$ 的一個同胚，而 $X$ 與 $Y$ 稱爲同胚的空間。只要 $X$ 與 $Y$ 是同胚的空間，那麽，在拓樸學的立場看來，$X$ 與 $Y$ 是沒有任何區別的。這也就是拓樸學被戲稱爲橡皮幾何學的原因。

然而，緊跟著來的問題是：怎麽樣的映像才能稱爲連續呢？雖然我們說〝原來很靠近的點，經過映像後，仍然很靠近〞是在說明該映像的連續性，只是，〝靠近〞是一個很模糊的觀念，它還不能用來做爲一個嚴密定義的工具；在集合 $X$ 中，要說明兩個點是不是很接近，就需要一些測定它們的接近程度的方法，什麽方法最爲簡便有力呢？讓我們先來說明微積分學中有關函數的連續性以及數列的收斂性（ convergence ）的定義：設 $f$ 是實變數實值函數而 $x_0$ 爲一實數，若對於任意正數 $\epsilon$，皆存在一正數 $\delta$，使得當 $|x-x_0|<\delta$ 時，$|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$ 恆成立，則稱 $f$ 在點 $x_0$ 連續。至於數列的收斂則定義如下：設 $\{a_n\}$ 爲一實數數列而 $a$ 爲一實數，若對於任意正數 $\epsilon$，皆存在一正整數 $N$，使得當 $n \geq N$ 時，$|a_n-a|<\epsilon$ 恒成立，則稱數列 $\{a_n\}$ 收斂於 $a$。

在這裡，兩個實數之差的絕對值正是用來測定這兩個實數的接近程度的。倘若 $a_n$ 不再是實數，$f$ 不再是實變數或不再是實數值，那麽上面這兩個定義所用的 $|x-x_0|<\delta$，$|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$，及 $|a_n-a|<\epsilon$ 就可能沒意義，因爲減法的概念以及絕對值的概念並不是永遠可以定義的。因此，如果我們想將連續的概念由實變數實值函數推廣到任意集合間之任意映像，以及將收斂的概念由實數數列推廣

到任意集合中之任意點列，那麼需要引進一種新的概念來代替上面的減法與絕對值。

首先，我們注意到，在實數線上，兩實數差的絕對值表示這兩數（或它們在數線上所對應的兩點）間的距離，而 $|x-x_0|<\delta$ 表示 $x$ 與 $x_0$ 間的距離小於 $\delta$，這個語句〃$x$ 與 $x_0$ 間的距離小於 $\delta$〃就已經脫離了減法與絕對值的束縛了。在實數集中，與 $x_0$ 的距離小於 $\delta$ 的數所成之集是 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$，我們稱之爲 $x_0$ 的 $\delta$ 一鄰域，則 $|x-x_0|<\delta$ 表示 $x$ 在 $x_0$ 的 $\delta$ 一鄰域之內，而 $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$ 表示 $f(x)$ 在 $f(x_0)$ 的 $\epsilon$ 一鄰域之內。如此，一個實變數實值函數 $f$ 在點 $x_0$ 連續的定義就變成了：對於 $f(x_0)$ 的任意一個 $\epsilon$ 一鄰域 $V$，皆存在一個 $x_0$ 的 $\delta$ 一鄰域 U，使得當 $x\epsilon$ U時，$f(x)\epsilon V$ 恒成立。

其次，我們將鄰域的觀念一般化，設 $a$ 爲一實數而U爲R的一個子集，若存在一正數 $\delta$，使得 $(a-\delta, a+\delta)\subset$ U成立，則U稱爲 $a$ 的一個鄰域（neighborhood）；顯然地，$a$ 的每一個 $\delta$ 一鄰域都是 $a$ 的一個鄰域。根據這個定義，函數 $f$ 在點 $x_0$ 連續的定義又變成爲：對於 $f(x_0)$ 的任意一個鄰域 V，皆存在一個 $x_0$ 的鄰域 U，使得當 $x_0\epsilon$ U時，$f(x_0)\epsilon$ V恒成立。從這個新的寫法，我們可以瞭解很有用的一點觀念：對於任意一個映像 $f: X\to Y$，其中 $X$ 與 $Y$ 爲任意兩個非空集合而 $x\epsilon X$，只要我們在 $X$ 中存在一批稱爲 $x$ 之鄰域的子集，而在 $Y$ 中也有一批稱爲 $f(x)$ 之鄰域的子集，那麼，$f$ 在點 $x$ 的連續性就可以仿照上述加以定義了。

至此，我們的問題是：設 $X$ 爲一非空集合而 $x\epsilon X$，那麼 $X$ 的那一批子集才可以作爲 $x$ 的鄰域呢？換句話說，如果 $n_x$ 表示 $x$ 之所有鄰域所成之族，那麼 $n_x$ 必須有那些必要性質呢？讓我們來觀察實數集的情形；在實數集中，那些能夠做爲某一個點之鄰域的子集，有許多良好的性質，但在這許多性質之中，F. Hausdorff 選擇了其中五個來做爲鄰域所必須具有的，而現代的拓樸學家則上使用了前四個，這四個性質是：

($N$1). 若 $N$ 爲 $a$ 之一鄰域，則 $a\epsilon N$。

($N$2). 若 $M$ 與 $N$ 都是 $a$ 的鄰域，則 $M\cap N$ 也是 $a$ 的鄰域。

($N$3). 若 $N$ 是 $a$ 之一鄰域而 $N\subset M$，則 $M$ 也是 $a$ 之鄰域。

($N$4). 若 $N$ 是 $a$ 之一鄰域，則 $a$ 必有一鄰域 U，使得 U$\subset N$，而且對每一個 $b\varepsilon$ U，$N$ 都是 $b$ 之一鄰域。

F. Hausdorff 從直線上鄰域的許多性質中，選定了這四個做爲基礎，由此而發展出一個精確而又普遍的理論，奠定了二十世紀公設化點集拓樸學的基石。根據 F. Hausdorff 的說法：設 $X$ 是任意一個非空集合，如果在 $X$ 中每一點 $x$，指定一個由 $X$ 之某些子集所成之族 $n_x$，使得上述($N$1)—($N$4)等四性質都能滿足，則 $X$，連同所有的鄰域族 $\{n_x\}_{x\epsilon X}$，稱爲一個拓樸空間（topological space）。

對於任意非空集 $X$，在 $X$ 的每一點 $x$ 指定一個滿足上述四條件的子集族 $n_x$，

就是所謂的〃在集合$X$上建立一個拓樸結構〃。從前面這段討論，我們不難看出，〃建立拓樸結構〃與〃映像的連續性〃兩者之間，關係是何等密切。由於任意集合都可以隨心所欲地建立一個拓樸結構，而當拓樸結構一旦建立，映像之連續性與序列之收斂性等都跟着可以明確地定義，於是，在數學的各個分支之中，配合各個理論的性質與需要，建立適當的拓樸結構，在該項理論的探討上，拓樸學確實提供了很大的幫助，尤其是在〃如何將有限的情形推廣到無限的情形〃這一方面，拓樸學的成就是輝煌的：有限維向量空間的一些結果推廣到無限維的Hilbert空間，有限體擴張（field extension）的Galois理論推廣到無限的體擴張等，只是這項成就中的一小部分而已。

以上我們是在$X$的每一點指定一個子集族$n_x$，在數學上，這是一種〃局部的方法〃，除此之外，我們也希望對拓樸結構有一種〃全面性〃的定義方式；也就是說，當我們要在一個非空集合$X$中建立一個拓樸結構時，我們希望可以不必〃就每一點指定一個$n_x$〃，而希望直接指定一個由$X$的某些子集所成之族$\mathcal{T}$，只要這個子集族$\mathcal{T}$已被指定了，則每一個$n_x$就可以被引導出來。從數學的觀點看來，由一個子集族$\mathcal{T}$就能引導出一大批子集族$n_x$，更能達到執簡馭繁的目的。這種全面性的方法引進了開集的觀念，而利用開集來定義拓樸結構的方法，也是目前最通用的。

開集是怎麼樣的子集呢？我們先看實數集的情形。在實數集R中，某些子集像開區間$(a, b)$具有一個特殊的性質：只要$x \varepsilon (a, b)$，則$(a, b)$就是$x$的一個鄰域。至於像子集$(a, b]$則沒有這個性質，因爲$b \varepsilon (a, b]$，但$(a, b]$却不是$b$的鄰域。現在，在R中由所有具備這個性質的子集所成之族記爲$\mathcal{T}_e$，則$\mathcal{T}_e$具有許多特殊的性質，其中四個性質被用來公設化以定義拓樸結構，這四個性質是:

（01）　$R \varepsilon \mathcal{T}_e$

（02）　$\phi \varepsilon \mathcal{T}_e$

（03）　若$\mathcal{J}$是$\mathcal{T}_e$的任意一子族，則$\mathcal{J}$中所有子集之聯集必屬於$\mathcal{T}_e$。

（04）　$U_1, U_2, \cdots, U_n$爲$\mathcal{T}_e$中之有限多個元素，則$U_1 \cap \cdots \cap U_n \varepsilon \mathcal{T}_e$。

如果我們採用F. Hausdorff的鄰域觀念來建立拓樸結構，然後，在拓樸空間中，將具有這個特殊性質的子集稱爲開集即:U是一個開集的充分且必要條件是，U是它所含之每一點的鄰域；則一個拓樸空間中所有開集所成之族$\mathcal{T}$必滿足上述（01）至（04）的性質。

反過來說，在一個非空集合$X$中，如果我們指定一個由$X$的某些子集所成之族$\mathcal{T}$，使得$\mathcal{T}$滿足上述之（01）—（04）等四個性質，這種子集族$\mathcal{T}$就稱爲$X$的一個<u>拓樸結構</u>，或簡稱爲$X$的一個<u>拓樸</u>，$(X, \mathcal{T})$就稱爲一個<u>拓樸空間</u>。利用這樣的定義，我們可以把$X$中每一點的鄰域族定義如下：

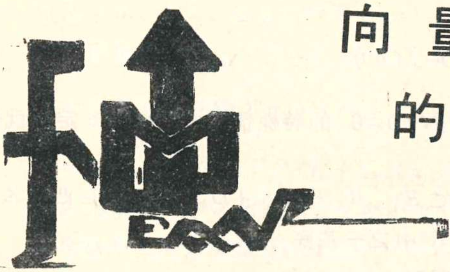
$N \varepsilon n_x$的充分且必要條件是，存在一個$U \varepsilon \mathcal{T}$使得$x \varepsilon U \subset N$。用這種方法所定義的鄰

域族 $\{n_x\}_{x\in X}$，也滿足前述的四個條件（$N1$）至（$N4$）。

這段說明提供給我們一點瞭解：就拓樸結構的公設化而言，使用鄰域做出發點與使用開集做出發點，兩種方法所建立的拓樸學理論是一樣的。至於就映像之連續性的直觀看法而言，似乎鄰域觀念強些。但是，鄰域觀念在許多地方却顯得太局部化了，使用局部的觀念來描述整體的性質時，往往是拖泥帶水，不能達到簡單明瞭的目的。（不難看出，（$N4$）這個性質的敍述，比諸（01）至（04）任何一個都複雜得多）。這應該是絕大多數的數學家習慣於使用開集來說明各種拓樸觀念的原因了。

在一個非空集合$X$中建立拓樸結構，鄰域觀念與開集觀念並不是僅有的辦法；事實上，閉集，閉色算子（ closure operator ），內部算子，外部算子，邊界算子，網（ net ），濾套（ filter ），每一個觀念都可以做爲出發點來定義拓樸結構，而針對各種不同的情形，使用不同的觀念做出發點，往往更能合乎實際的需要且能表現出它的特殊意義。

在數學的發展過程中，先進數學家們從他們所熟悉的直線上的拓樸觀念中，找出了他們認爲足夠的一批性質，定義了一種抽象的拓樸概念，終於成功地建立了一套完整的拓樸學，數十年後的今天，拓樸學不僅保留了它原有的幾何本質（表現在代數拓樸，幾何拓樸，微分拓樸之中），而且更爲近代的分析數學及其他數學分支提供了一套有用而方便的工具（表現在一般拓樸之中）。所以，這一套以收斂性（ convergence ），連續性（ continuity ），緊緻性（ compactness ），隔離性（ separation ），可距離化（ metrization ），距離空間（ metricspace ），一致空間（ uniform space ），與函數空間（ function space ）等爲主幹的一般拓樸學，被 J. Kelley 稱爲：這是每一位年青的分析學家們所必須懂的一套理論。而且，一般拓樸學已被視爲一門研究連續性的學科。有人甚至乾脆把它稱作連續拓樸學（ continuous topology ）或解析拓樸學（ analytic topology ）了。



# 向量值函數的均值定理

王惠中

均值定理（Mean Value Theorem）或稱爲平均變率定理，是微積分課程中相當重要的一個定理。其敘述爲：

"若 $f$ 爲閉區間 $[a, b]$ 上的實值連續函數且在開區間 $(a, b)$ 上可微分（我們記爲 $f \in C[a, b] \cap D(a, b)$），則在 $(a, b)$ 上可找到一點 $c$，使得

$$(1) \qquad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{"}$$

還有其他種種敘述法（參看〔2〕，〔6〕，〔7〕）。但對向量值的函數，上列敘述就不成立。例如，考慮半圓形 $f(t) = (\cos t, \sin t)$，$t \in [0, \pi]$，或螺旋線 $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$，$t \in [0, 2\pi]$，等式(1)就無法成立（！）（此記號表示請讀者自行驗證），通常改用不等式來取代（參看〔1〕，〔3〕，〔4〕）。Mc Leod〔5〕運用泛函分析的知識，提出(1)式在有限維向量值函數的推廣。我們將其條件稍加限制，提供一簡單的證明（僅須初等微積分及線性代數的一些知識即可。）盼望有興趣的同學作進一步的探討。

設 $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t))$ 爲 $R$ 至 $R^n$ 的函數，我們稱 $f$ 爲連續或可微分是指每個座標函數 $f_n$ 均爲連續或可微分而言。$f'(t) = (f'_1(t), f'_2(t), \cdots, f'_n(t))$ 即爲 $f$ 在 $t$ 點之導來式，$f \in C'$ 指 $f'$ 存在且爲一 $R^n$ 值函連續函數。若 $S$ 爲 $R^n$ 上一子集合，我們用凸 $(S)$ 表示 $S$ 在 $R^n$ 中之凸包，即

$$凸(S) = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \mid x_1, x_2, \cdots, x_n \in S, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geqq 0, \ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1\}$$

我們想證明下述定理：

均值定理（M.V.T.）：設 $f$ 爲 $R$ 上之閉區間 $[a, b]$ 至 $R^n$ 之連續函數，且在開區間 $(a, b)$ 上爲連續可微分，則存在 $\{c_1, c_2, \cdots, c_n\} \subset (a, b)$，使得

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\in$ 凸 $\{f'(c_1), f'(c_2), \cdots\cdots, f'(c_n)\}$，即有 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_n \geqslant 0$ 且 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_n=1$ 存在，使得

$$(2)\quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f'(c_i)=\frac{1}{b-a}(f(b)-f(a))。$$

和一維的情形相彷，只要證出 $f(a)=f(b)=0$ 的特殊情形（即Rolle 定理就夠了），我們先證明一些需用的補題。

補題一：設 $A=\{v_0, v_1, \cdots\cdots, v_n\}\subset R^n$，$B_k=A\diagdown\{U_k\}$，而 $0\in$ 凸（$A$）且 $0\notin$ 凸（$B_k$），$\forall k$，則 $B_0$ 爲 $R^n$ 中之一基底。

證　明：只要證明 $B_0$ 在 $R^n$ 中線性獨立即可。

設 $C=\{\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\cdots\cdots\cdots+\alpha_n v_n \mid \alpha_i\geqslant 0, \forall i\}$ 即爲 $R^n$ 中包含 $B$ 之最小錐體。

因 $0\in$ 凸（$A$），故存在不全爲 0 之 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n\geqslant 0$ 使得

(3) $\alpha_0 v_0+\alpha_1 v_1+\cdots\cdots+\alpha_n v_n=0$

因 $0\notin B_0$，故 $\alpha_0 v_0\neq 0$，因此 $-x_0\in C$ 且 $-x\notin C$（!） 若有不全爲 0 之實數 $\mu_1, \mu_2, \cdots\cdots, \mu_n$ 存在，使得

(4) $\mu_1 v_1+\mu_2 v_2+\cdots\cdots+\mu_n v_n=0$

因 $0\notin B_0$，故必有一 $\mu_{k_0}<0$，由(3)+ $t$(4)得

$$\alpha_0 v_0+\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k+t\mu_k)v_k=0$$

設 $E=\{t\in R \mid \alpha_k+t\mu_k\geqslant 0, \forall k=1,2,\cdots\cdots,n\}$，則 $0\in E$ 且 $t\leqslant\dfrac{-\alpha_{k_0}}{\mu_{k_0}}$(!)

因此 $E$ 有上界，設 $t_0=supE$，因 $E$ 爲 $R$ 上之一閉集合，故 $t_0\in E$，所以有一 $k_0\in\{1, 2, \cdots\cdots\}$ 存在，使得 $\alpha_{k_0}+t_0\mu_{k_0}=0$（!），故

$$\alpha_0 v_0+\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k+t_0\mu_k)v_k=0$$

其中有 $v_{k_0}$ 之係數 $\alpha_{k_0}+t_0\mu_{k_0}=0$，其餘 $v_k$ 之係數均 $\geqslant 0$，則 $0\in$ 凸($B_{k_0}$) 與 $0\notin$ 凸（$B_k$），$\forall k$ 之假設衝突，故不全爲 0 之 $\mu_k$ 不可能存在，即 $B_0$ 必爲一線性獨立集。

補題二：在M.V.T.中若 $f(a)=f(b)=0$，則 $0\in$ 凸 $\{f'(t) \mid t\in(a,b)\}$

證　明：設 $u(x)=u(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)\equiv a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_nx_n$，則 $u(x)=d$ 爲 $R^n$ 中一超平面。若 $u(f'(t))\geqslant d$，$\forall t\in(a,b)$，因 $u(f(a))=u(f(b))=u(0)=0$，由一維空間之Rolle定理知，有 $c\in(a,b)$，使得

$u(f'(c))=0$，（$\because \dfrac{d}{dt}u(f(t))=u(f'(t))$），所以 $d\leq 0=u(0)$，此即

證明若 $\{f'(t) \mid t\in(a,b)\}$ 落在超平面 $u(x)=d$ 之某一側，則 0 必亦在

同側，故 $0 \in$ 凸 $\{f'(t) \mid t \in (a, b)\}$

註：此補題在無限維賦範空間也對（！）

Rolle 定理：M.V.T. 在特殊情況 $f(a)=f(b)=0$ 時成立。

證明：我們想證明存在 $\{c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n\} \subset [a, b]$，$\alpha_i \geqslant 0$，$i=1,2,\cdots,n$

但不全為 0，使得 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f'(c_i)=0$，（然後再令 $\lambda_k = \dfrac{\alpha_k}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$ 即可）。

由補題二，$0 \in$ 凸 $\{f'(t) \mid t \in (a,b)\}$，0 可表為 $\{f'(t) \mid t \in (a,b)\}$ 中之元素在 $R^n$ 中之凸性結合，即有 $(a, b)$ 上之 $n+1$ 點 $t_0$，$t_1, \cdots\cdots$，$t_n$，及不全為 0 之非負實數 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_n$ 存在，使得

$$\alpha_0 f'(t_0)+\alpha_1 f'(t_1)+\cdots\cdots+\alpha_n f'(t_n)=0$$

我們希望能再減少一點，我們可設 $\alpha_i f'(t_i) \neq 0$，$\forall i$ 及 $\{f'(t_0), f'(t_1), \cdots\cdots, f'(t_n)\}$ 中之任何 $n$ 點之凸性結合均不為 0（否則就不必再證明了）由補題一，得知 $\{f'(t_1), f'(t_2), \cdots\cdots, f'(t_n)\}$ 為 $R^n$ 上之一基底，故 $R^n$ 上任何元素均可唯一地寫成 $\sum_{k=1}^{n} \mu_k f'(t_k)$. 設 $x$ 為錐體 $C=\{\mu_1 f'(t_1)+\mu_2 f'(t_2)+\cdots\cdots+\mu_n f'(t_n) \mid \mu_i \geqslant 0, \forall i\}$ 的界面上之點，則 $\mu_k \geqslant 0$，$\forall k$，且至少有一個 $\mu_k=0$，令 $S=sup\ \{t \mid f'[t_0, t] \subset -C\}$，由補題一之證明過程中知，$-f'(t_0) \in C$ 且 $-f'(t_1) \notin C$，因此 $t_0 \leq s \leq t_1$，而因 $-C$ 為一閉凸集，$f'$ 為連續函數，因此 $-f'(s)$ 為 $C$ 之一界點，即 $-f'(s)=\sum_{k=1}^{n} \mu_k f'(t_k)$，$\mu_k \geqslant 0$，$\forall k$，且至少有一 $\mu_k=0$，故 $f'(s)+\sum_{k=0}^{n} \mu_k f'(t_k)=0$，即在 $R^n$ 中，

0 可表為 $f'$ 之 $n$ 個之凸性結合，Rolle 定理得證。

註：$n=2$ 時，可由一維的 Cauchy 均值定理直接得到。（！）均值定理的證明：

令 $g(t)=(f(t)-f(a))(b-a)-(t-a)(f(b)-f(a))$

則 $g \in C[a, b] \cap C'(a, b)$，且 $g(a)=g(b)=0$

$$g'(t)=(b-a)f'(t)-(f(b)-f(a))$$

由 Rolle 定理知，存在 $c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n \in (a, b)$，及 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n \geq 0$，$\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_n=1$，使得 $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k g'(c_k)=0$，即

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k((b-a)f'(c_k)-(f(b)-f(a)))=0$$

故 $(b-a)\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f'(c_k)=f(b)-f(a)$，定理得證

推論：（Cauchy 均值定理）

$f$ 為 $R$ 至 $R^n$ 的函數，$f \in C[a, b] \cap C'(a, b)$

$g$ 為 $R$ 至 $R$ 的函數，$g \in C[a, b] \cap C'(a, b)$

則存在 $c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n \in (a, b)$，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n \geqslant 0$，$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$

使得

$$(g(b) - g(a)) \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f'(t_k) = (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k g'(t_k))(f(b) - f(a))$$

證明：考慮 $h(t) = (f(t) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(t) - g(a))(f(b) - f(a))$ 即可。

參考資料：


〔1〕J.Dieudonne': Foundations of modern analysis,(1960)

〔2〕T.M.Flèlt : A Mean Value Theorem

〔3〕T.M.Flelt : Mathematical Analysis (London 1966)

〔4〕T.M.Flelt : Mean Value Theorem for Vector Valued Functions

〔5〕R.M.Mcleod: Mean Value Theorem for Vector Valued Functions Proc. Edin. Math. soc. 14(1964-5)197-209

〔6〕S.Reich : On Mean Value Theorem. AMM.76(1969)70-73

〔7〕D.H.Trahan : A New Type of Mean Value Theorem, Math. Mag. 39(1966)264-268

# 根的逐步逼近

江坤森　　　　　　　　　指導老師：陳昭地

§1 對於一般的二次代數方程式 $x^2-2px+q=0$，我們知道其解爲 $x=p\pm\sqrt{p^2-q}$，同理對於一般的三次代數方程式

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0\,,\ (a_0\neq 0)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

仍有規則可解出其根，例如：

$$令\ x=\frac{x}{(a_0)^{1/3}}-\frac{a_1}{3a_0}$$

可將(1)式變爲

$$y^3+3py-2q=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

而(2)式中有一實根 $y=[\,q+\sqrt{(q^2-p^3)}\,]^{1/3}+[\,q-\sqrt{(q^2+p^3)}\,]^{1/3}$

（此可利用Galois' Theory 及 Cardano Formula ）

得到此一根後，可把原(1)式減成二次方程式，再找出另二根。

§2 四次方程式之解法：

對於一般地四次方程式（設係數爲實數）

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0\,,\ (a\neq 0)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

其解法大致可如下：

(3)式爲下列二方程式解集合之交集

$$ay^2+bxy+cx^2+dx+e=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$y=x^2\ \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

設 $A_1$ 爲(4)式之解集合，$A_2$ 爲(5)式之解集合。

令 $A=A_1\cap A_2$，則 $A$ 爲(3)式之解集合。

現經過(4)與(5)聯立之方程式爲

$$(c-u)x^2+bxy+ay^2+dx+uy+e=0$$

令 $u_1$ 爲下列行列式之一實根

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2a & b & u \\ b & 2(c-u) & d \\ u & d & 2e \end{vmatrix} = 0 \cdots\cdots (6)$$

（此稱爲⑴式之三次結式）

則 $(c-u_1)x^2+bxy+ay^2+dx+u_1y+e=0 \cdots\cdots (7)$

⑺式爲經過⑷與⑸交集之一組二直線，設此二直線爲 $L_1, L_2$ 其方程式爲

$$y=m_ix+k_i,\ i=1,2 \cdots\cdots (8)$$

對⑺式微分得

$$2(c-u_1)x+by+bx\frac{dy}{dx}+2ay\frac{dy}{dx}+d+u_1\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2(c-u_1)x+by+d}{bx+2ay+u_1},\quad bx+2ay+u_1 \neq 0$$

此爲⑺上任一點（$x$，$y$）之切線斜率。因⑺式表一組二直線無論在 $L_1$ 或 $L_2$ 上，該點切線斜率即爲該直線斜率。此時 $L_1$ 與 $L_2$ 在 $y$ 軸上之截距爲

$$ak_i^2+u_1k_i+e=0 \cdots\cdots (9)$$

（∵在⑻中令 $x=0$，得 $y=k_i$，再代入⑺中即得）

故經過點（$0, k_i$）而斜率爲 $m_i=-\dfrac{bk_i+d}{2ak_i+u_1}$，$2ak_i+u_1 \neq 0$，之直線方程式爲 $y=m_ix+k_i$，即爲直線 $L_1$ 與 $L_2$ 之方程式。若 $2ak_i+u_1=0$，即 $k_i=-\dfrac{u_1}{2a}$，則 $m$ 之值顯然無法決定，此實易發現⑼式有二重根，則⑺式可寫成

$$a(y-m_1x-k_1)(y-m_2x-k_2)=0 \cdots\cdots (10)$$

比較⑺與⑽兩式對應係數，可得 $m_1, m_2$ 爲下列方程式之根，$am^2+bm+(c-u_1)=0$，故方程⑶之解集合爲⑻與⑸交集中之橫座標 $x$ 值，亦即

$$A=\left\{x \mid x=\frac{m_i}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{m_i^2+4k_i},\ i=1,2\right\}$$

其中 $m_i, k_i$ 可分別由 $am^2+bm+(c-u_1)=0$ 及 $ak^2+u_1k+e=0$ 而決定。

例：求解 $4x^4+x^3-6x^2+4x-1=0$ 之四根。

答案：$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{3\pm\sqrt{7}i}{8}$

（利用 § 2 中解法求出 $u_1=-3$，$k_1=1$，$k_2=-\dfrac{1}{4}$　$m_1=-1$，$m_2=\dfrac{3}{4}$）

## § 3. 牛頓法

現在如果有一位商人在商業上碰到二個方程式：

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0,\ (deg \geqslant 5) \cdots\cdots (11)$$

$$10x-1-\cos x=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (12)$$

他想找出此二方程式之根，以便能在其銀行簿上多加幾個0，因此他就跑去問數學家，數學家思考了一下，就跟商人說：「很抱歉，我無法把這些根眞正的找出來，因爲早在1826年，挪威數學家Abel已經證明出對於一般代數方程式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$，$deg\ n\geqslant 5$，沒有法則可以求出其一般解。」可是，很幸運地，這位偉大的商人並不會吝嗇的要找出眞正的解，他只需要一很精確的近似根（例如與眞根誤差爲0.001，或小數點以下5位等）。

現在我們就來討論代數多項式的近似根：

設給予一方程式

$$f(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots\cdots+a_k=0$$

假設我們找到第一個近似根 $x_1$，現在我們將找到一個更好的近似根。

設第一個近似根 $x_1$ 與眞根之誤差爲 $\alpha_1$，所以眞根爲 $x_1+\alpha_1$

$i.e$ $f(x_1+\alpha_1)=0$，利用泰勒公式可得

$$f(x_1+\alpha_1)=f(x_1)+\alpha_1f'(x_1)+\frac{\alpha_1^2}{2!}f''(x_1)+\frac{\alpha^3}{3!}f'''(x_1)+\cdots\cdots$$

假如我們的第一個近似根 $x_1$ 足夠好，則 $\alpha_1$ 必定很小，因此我們可以忽略平方項以後之各項，卽忽略

$$\frac{\alpha_1^2}{2!}f''(x_1)+\frac{\alpha_1^3}{3!}f'''(x_1)+\cdots\cdots\cdots$$

可得 $f(x_1)+\alpha_1f'(x_1)\approx 0$，（“$\approx$”代表近似）

$$\Rightarrow \quad \alpha_1\approx-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

於是我們可以得到第二個較好的近似根

$$x_2=x_1+\alpha_1\approx x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

繼續下去，可以得到第三個更好的近似根

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

一般而言，可得

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$=x_n-\frac{a_0x_n^k+a_1x_n^{k-1}+\cdots\cdots+a_{k-1}x_n+a_k}{ka_0x_n^{k-1}+(k-1)a_1x_n^{k-2}+\cdots\cdots+a_{k-1}}$$

假如我們需要計算一個根到某一精確度，只要繼續此一過程直到 $x_n$ 與 $x_{n+1}$

一致（除了所要求之小數點下第？不同而已），此法我們稱爲牛頓法（因此法爲牛頓所發明）。

例 1. 利用牛頓法找出 $x^3-3x-5=0$ 之一近似根到0.001，設第一近似根爲 $x_1=3$

解：　$f(x)=x^3-3x-5$　　$f'(x)=3x^2-3$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^3-3x_n-5}{3x_n^2-5}$$

$$x_2=3-\frac{27-9-5}{27-3}=3-\frac{13}{24}=2.46$$

$$x_3=2.46-\frac{14.89-7.38-5}{18.16-3}=2.46-0.165=2.295$$

$$x_4=2.295-\frac{12.088-6.885-5}{15.801-3}=2.295-0.016=2.279$$

$$x_5=2.279-\frac{11.837-6.807-5}{15.582-3}=2.279\text{，精確至 }0.001$$

$\therefore x^3-3x-5=0$ 之一近似根爲 2,279 精確至 0.001

例 2. 利用牛頓法找 $x^5+5x+1=0$ 之一近似根。（解：$x=-0.1999$）

§ 4. 逐步逼近法（The method of successive approximation）現在我們再回過頭來看(12)式 $f(x)=10x-1-\cos x=0$，重寫此式，得 $x=\dfrac{1+\cos x}{10}$，

$\because f(0)\cdot f(1)<0$ 所以可先取 $x_1=0$ 爲第一個近似根，再取

$$x_2=\frac{1+\cos 0}{10}=0.2$$

$$x_3=\frac{1+\cos 0.2}{10}\approx\frac{1+0.98}{10}=0.198$$

$$x_4=\frac{1+\cos 0.198}{10}\approx 0.198=x_3\text{，精確至 }0.001$$

故 $x=0.198$ 爲(12)式之一近似根精確至 0.001，此法稱爲逐步逼近法（The method of successive approximation），牛頓法其實就是逐步逼近法之一特別情形。

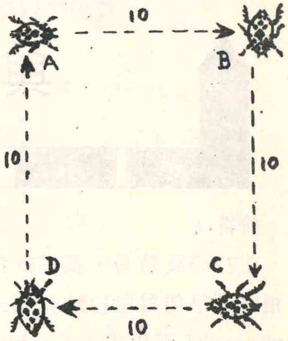
例：利用逐步逼近法求(1) $4-3x=\tan x$ 之近似根至 0.001，(2) $x=\arcsin\dfrac{x+1}{4}$ 之近似根至 0.001

解：(1) $x=0.9082$　　(2) $x_1=2.209$，$x_2=0.3422$，$x_3=-2.702$

逐步逼近在幾何學上具有重大意義，因篇幅關係無法繼續寫下去，只好到此結束。

（Someday man will die, but Mathematics will not.）

〔參考資料〕：
1. N. Ya. Vilenkin: Successive Approximation
2. Postnikov: Fundamentals of Galois Theory
3. Yang Yu-Cheng: Solution of the quartic




多情的昆蟲

四隻昆蟲A，B，C和D站在邊長10吋的正方形四角上（右圖）。其中A和C是雄的，B和D是雌的。在同一時候A向B的方向爬行，B向C，C向D，D向A，假如四隻昆蟲以相同的等速爬行，就會描繪出相交於正方形中心的四條相同的對數螺線（ logarithmic spirals ）在它們相遇以前每隻昆蟲各走了多少距離？不可使用積分解題。

解答：

任何時刻，此四隻昆蟲形成一個正方形的四頂點，當昆蟲移得更靠近時，此四方形會收縮和旋轉。每一追逐者的路徑，無論何時均垂直被追逐者的路線。這就告訴我們，例如A趨近B時，沒有B的移動分量，使得B靠近或離開A。結果若B保持靜止，在此同時；將發出A捕追到B，此螺旋路徑的長，將和正方形的一邊等長： 10吋。

假如三隻昆蟲由等三角形的三角落發出，每隻昆蟲的移動有它速度的$\frac{1}{2}$分量（餘弦的60度角即 $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ）趨近追捕者。所以兩隻昆蟲將以$\frac{3}{2}$倍的速度，互相接近。這些昆蟲將在三角形邊長的兩倍除以速度的三倍的時距後，相會於三角形中心。每隻所走的路線長是$\frac{2}{3}$倍三角形的邊長。

陳火炎

# 淺談不等式與微積分的關係

一、前言：

在初等微積分，高等微積分，複變分析，測度論，實變分析，逼近論等課程中，相信同學們曾陸續地見過三角不等式，C－B－S不等式，Hölder 不等式，Minkowski 不等式，Chebyshev 不等式，Jensen 不等式，Markoff 不等式，以及Berstein 不等式。其中不難發現有很多定理需藉助這些不等式來完成其證明，似乎不等式與微積分間隱藏著一種奧妙關係，有鑑於此，於是本文想談三個有關不等式與微積分的內容，希望讀過此篇以後，有興趣的同學能夠進一步的去探討它。

二、首先將內容分成三個支幹：

1 "$e$"

我們早已諳習 $\pi$ 不是有理數（ Apostol 第七章習題第33題） 且 $\pi$ 不是任何形如

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$$

多項式的根；其中 $n \in N$，$a_k \in \mathbb{Z}$，$a_n \neq 0$。一數具有上述性質時，則稱此數為超越數（ transcendental number ），否則稱為代數數（ Algebraic number ）。代數數可以為有理數或者無理數，然而超越數却總是無理數。

一般而言，欲證明一數為超越數是一件困難的事。雖如此，但德國數學家C. L.F. Lindemann於 1882 年首次證出 $\pi$ 為超越數，另外還有一個在微積分學上很重要的超越數 "$e$" 於1873年被法國數學家C. Hermite 所證得。

在本節中，我們將藉著兩個具有下列性質的正項無窮數列 $\{x_n\}$ 與 $\{y_n\}$ 來定義 $e$ 以進一步於其過程中熟悉一些不等式。

(1) $x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots\cdots$。

(2) $y_1 > y_2 > \cdots\cdots > y_n > y_{n+1} > \cdots\cdots$。

(3) $\{x_n\}$ 中之每一數均小於 $\{y_n\}$ 之任一數。

(4) 對任一正數 $N$，存在一正整數 $M$，$M = 4N$，使得

$$0 < y_n - x_n < \frac{1}{N}, \qquad 當 \quad n \geqslant M。$$

定義1：$e$ 爲數列 $\{x_n\}$ 之最小上界（least upper bound），且爲數列 $\{y_n\}$ 之最大下界（greatest lower bound），其中

$$x_n = (1+\frac{1}{n})^n \quad , \quad y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1} \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

現在我們將證明數列 $\{x_n\}$ 與 $\{y_n\}$ 具有上面四個性質：

欲證(1)，(2)只需證明對任意正數 $n$，

$$x_n < x_{n+1} \qquad 及 \qquad y_n > y_{n+1}$$

因爲若 $x, y > 0$ 且 $x \neq y$，則 $(xy^n)^{1/n+1} < \dfrac{x+ny}{n+1}$，$(n = 1, 2 \cdots)$

故以 $x = 1$ 及 $y = 1 + \dfrac{1}{n}$ 代之得

$$\sqrt[n+1]{1 \cdot (1+\frac{1}{n})^n} < \frac{1+n(1+\frac{1}{n})}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

於是 $\quad (1+\dfrac{1}{n})^n < (1+\dfrac{1}{n+1})^{n+1}$ 或 $x_n < x_{n+1}$。

利用同樣的方法很容易證明若 $Z_n = (1-\dfrac{1}{n})^n$，則 $Z_n < Z_{n+1}$。

但 $\quad y_n = (1+\dfrac{1}{n})^{n+1} = (\dfrac{n+1}{n})^{n+1} = (\dfrac{n}{n+1})^{-(n+1)} = (1-\dfrac{1}{n+1})^{-(n+1)}$

即 $\qquad y_n = Z_{n+1}^{-1}$

因爲 $\quad Z_{n+1} > Z_n$，所以 $\dfrac{1}{Z_{n+1}} < \dfrac{1}{Z_n}$

故 $\quad y_n < y_{n-1} \ (n = 2, 3, 4, \cdots)$ 或 $y_{n+1} < y_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$。

其次證明(3)，(4)兩個性質：

因爲 $y_n = (1+1/n)x_n$，所以對每一 $n$ 我們有 $x_n < y_n$，我們希望證明對任意正整數 $m$ 及 $n$，有 $x_n < y_m$ 之關係，這是很容易辦到的，我們省略其證明。

最後我們的工作是證明任給一正整數 $N$，則當 $n \geqslant 4N$ 時，恒有

$$0 < y_n - x_n < \frac{1}{N}$$

的關係。對每一正數 $n$

$$y_n - x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) x_n - x_n = \frac{x_n}{n} > 0,$$

但對任一正數 $n$， $x_n < y_1 = 4$

因此 $$0 < y_n - x_n < \frac{4}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

故給定 $N$；對 $n \geqslant 4N$，即 $\frac{4}{n} < \frac{1}{N}$

因此 $$0 < y_n - x_n < \frac{1}{N}, \quad \text{當} \quad n \geqslant 4N$$

於是第四個性質證明完成。

在這過程中，我們已證明 $\{x_n\}$ 有一上界及 $\{y_n\}$ 有一下界，因此 $\ell.u.b.\ x_n$ 及 $g.\ell.b\ \ y_n$ 存在，而第四個性質成立保證 $\ell.u.b\ x_n = g.\ell.b\ y_n$，令其爲 "$e$"，顯然定義 1 很完全。

定理 1　若 $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$，則

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

證明：利用二項式定理：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n^n}$$

因爲 $$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{n^{k+1}} = \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\cdots\frac{n-k}{n} \leq 1 \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

因此 $$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

另一方面， $(1 + 1/n)^{n+1}$ 爲遞減數列，所以如果我們能夠證明對每一正數 $n$，存在某一數 $r > n$，使得

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \left(1 + \frac{1}{r}\right)^{r+1}$$

則本定理即已得證。

給定 $n$，利用二項式定理，對任意數 $r > n$，

$$\left(1+\frac{1}{r}\right)^{r+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \left\{(1^{r+1} - 1) + \left(\frac{r+1}{r} - 1\right) + \left[\frac{(r+1)r}{r^2} - 1\right]\frac{1}{2!}\right.$$

$$+\left[\frac{(r+1)r(r-1)}{r^3}-1\right]\cdot\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+$$

$$\left[\frac{(r+1)r(r-1)\cdots(r-k+2)}{r^k}-1\right]\frac{1}{k!}+\cdots+$$

$$\left[\frac{(r+1)r(r-1)\cdots(r-n+2)}{r^n}-1\right]\frac{1}{n!}\}$$

$$+\frac{(r+1)r(r-1)\cdots(r-n+1)}{r^{n+1}}\cdot\frac{1}{(n+1)!}+\cdots+\frac{1}{r^{r+1}}$$

令 $S$ 爲上面大括弧中 $n$ 項之和，我們將證

$$|S|<\frac{1}{2(n+1)!}$$

因爲 $\dfrac{(r+1)r(r-1)\cdots[r-(k-2)]}{r^k}-1=\dfrac{a_1r^{k-1}+a_2r^{k-2}+\cdots+a_{k+1}r}{r^k}$

$, a_i\in Z$

令 $M_k=\max\limits_{1\leq i\leq k+1}\{a_i\}$ ，則 $\left|\dfrac{(r+1)r(r-1)\cdots[r-(k-2)]}{r^k}\right.$

$$\left.-1\right|<\frac{M_k\sum\limits_{i=0}^{k-2}r^i}{r^{k-1}}=\frac{M_k(r^{k-1}-1)}{r^{k-1}(r-1)}<\frac{M_k}{r-1}$$

所以 $|S|<\dfrac{nM}{r-1}$， 其中 $M=\max\limits_{1\leq k\leq n}\{M_k\}$

因此若 $r>1+2nM(n+1)!=N_1$，

則 $|S|<\dfrac{1}{2(n+1)!}$

同方法可證得括弧外各項之和大於 $\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{(n+1)!}$，當 $r>1+4M_n=N_2$；

因此當 $r>N_1+N_2$ 時，$(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}>0$，故本定理得證

註1： 一變數 $x$ 爲介於二正數間之可能未知數，若一數 $p$ 對此變數 $x$ 之相對誤差的最大可能絕對值爲最小，則 $p$ 爲此二正數之調和平均數。（ $x_n$ 與 $y_n$ 之調和平均數 $H_n$

定義爲 $H_n = \dfrac{2x_n y_n}{x_n+y_n} = \left(\dfrac{x_n^{-1}+y_n^{-1}}{2}\right)^{-1}$，我們很容易證得

$x_n < H_n < y_n$ ）。

2、當 $n$ 很大時，$n!$ 很困難計算，但現可利用 $e$ 來估計它。其不等式爲

$$(2\pi n)^{1/2}\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < (2\pi n)^{1/2}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{1/12n}$$

（N.D. kazarinoff : Analytic Ineqalities 第61頁習題），其估計方法可參考widder : Advance calculus第386頁。

2 "微積分裏的例子"

微積分裏的均值定理：

若 $f$ 爲定義於閉區間〔$a, b$〕之連續實值函數且 $f$ 在（$a, b$）中處處可微，則 $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\zeta)$ ， $\zeta\in(a, b)$

因此若 $f'(\zeta)$ 之上、下界很容易找出，則能簡單地估計 $f(b)-f(a)$，

例(a) 令 $f(x)=x^{1/3}$ ， $a=23$ 及 $b=27$，函數 $f$ 在（$a, b$）中可微，因此滿足均值定理的假設，所以

$$3-23^{1/3}=4\cdot\frac{1}{3}\cdot\zeta^{-2/3}\qquad(23<\zeta<27)$$

$$\frac{1}{9}=(27)^{-2/3}<\zeta^{-2/3}<\left[\left(\frac{8}{3}\right)^3\right]^{-2/3}=\frac{9}{64}$$

因此 $\dfrac{4}{27}<3-23^{1/3}<\dfrac{3}{16}$ 或 $2.81<23^{1/3}<2.86$

事實上 $23^{1/3}=2.8438\cdots\cdots$

例(b) 方程式 $x^3+x^2-5x+k=0$ （$k\in R$）在（0, 1）中不能有兩個根。假設其有二個根 $a$ 與 $b$，利用均值定理。

$$0=0-0=f(b)-f(a)=(b-a)f'(\zeta)=(b-a)[3\zeta^2+2\zeta-5]$$

但 $3\zeta^2+2\zeta-5$ 在（0, 1）中恒爲負值，故得到矛盾。

例(c) 證明 $\dfrac{\pi}{4}=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ 及 $\ell n\, 2=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$

令 $I(n)=\displaystyle\int_0^{\pi/4}\tan^n\theta\, d\theta$ （$n=0, 1, 2, \cdots\cdots$）

$$I(2n)=\int_0^{\pi/4}\tan^{2n-2}\theta(\sec^2\theta-1)\,d\theta=-I(2n-2)+\int_0^{\pi/4}\tan^{2n-2}\sec^2\theta\cdot d\theta$$

$$= -I(2n-2)+\frac{1}{2n-1}=\frac{1}{2n-1}-\left[\frac{1}{2n-3}-I(2n-4)\right]\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-5}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot 1+(-1)^{n}\frac{\pi}{4};$$

即 $$\left|\frac{\pi}{4}-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\right|=I(2n)$$

同樣地，我們可證得

$$\left|\frac{1}{2}\ell n\,2-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k}\right|=I(2n+1)$$

因爲 $0<\tan\theta<1$，$(0<\theta<\frac{\pi}{4})$，故 $I$ 爲嚴格遞減

因爲 $I(n)=-I(n-2)+\frac{1}{n-1}$，或 $I(n-2)+I(n)=\frac{1}{n-1}$

所以 $I(n)<\frac{1}{2(n-1)}$，及 $I(n-2)>\frac{1}{2(n-1)}$

簡化爲 $$\frac{1}{2(n+1)}<I(n)<\frac{1}{2(n-1)}$$

所以 $$\frac{1}{2(2n+1)}<\left|\frac{\pi}{4}-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\right|<\frac{1}{2(2n-1)}$$

及 $$\frac{1}{2(n+1)}<\left|\ell_n 2-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right|<\frac{1}{2n}$$

令 $n\to\infty$，則得 $\frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$，及 $\ell_n 2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$

例(d) $$\frac{1}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{2})}}<\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}<\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

令 $J(n)=\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\,d\theta \qquad (n=0,1,2,\cdots)$

則 $$J(n+2)=\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta(1-\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$=J(n)-\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,\frac{d[\sin^{n+1}\theta/(n+1)]}{d\theta}\,d\theta$$

$$=J(n)-\left[\frac{\sin^{n+1}\theta\cos\theta}{n+1}\right]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{n+1}\theta\sin\theta}{n+1}\,d\theta$$

$$=J(n)-\frac{1}{n+1}J(n+2)$$

因此 $J(n+2)=\frac{n+1}{n+2}J(n)$

於是 $J(2n)=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot J(0)$

$$=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2};$$

及 $J(2n+1)=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\cdots\frac{2}{3}\cdot J(1)$

$$=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\cdots\frac{2}{3}\cdot 1$$

因此 $J(2n+1)J(2n)=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\qquad(n=1,2,\cdots\cdots)$

但是 $J(2n)>J(2n+1)$ 及 $J(2n-1)>J(2n)$

因爲 $0<\sin\theta<1,\quad 0<\theta<\frac{\pi}{2}$

所以 $J^2(2n)>\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}$ 及 $J^2(2n)<\frac{1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2}$

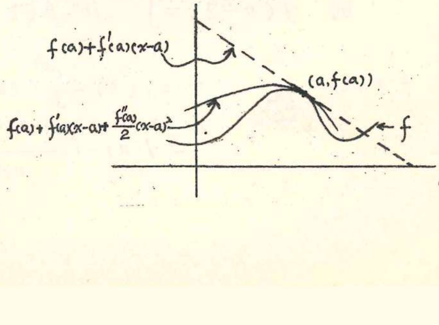
或者 $\frac{\pi}{2(2n+1)}<\left(\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{4}<\frac{\pi}{4n}$

卽 $\frac{1}{\sqrt{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}}<\frac{1\cdot 3\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots\cdots(2n)}<\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$

註 1： 若令 $U_{2n}=\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}t\ dt$，利用例(d)的方法我們可證得

$\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}t\ dt=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}t\ dt$，其中 $k!!$ 表示所有不超過 $k$ 各依 $k$ 偶奇之偶數或奇數之相乘積，例如 $9!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9$。

3、〃藉多項式來逼近一函數〃：




均值定理給我們一可微函數在點 $a$ 之鄰域之逼近值爲 $f(a)$

很自然地我們想用上圖的方法製造一 $n$ 次多項式 $p_n$ 在點（ $x-a$ ）

上滿足條件 $p_n^{(k)}(a)=f^{(k)}(a)$ （ $k=0,1,\cdots\cdots,n$ ）

於是
$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

定理2：若 $f$ 及其前 $n+1$ 次導數在開區間（ $c,d$ ）上連續，且若 $x$ 與 $a$ 均屬於

（ $c,d$ ），則 $f(x)=p_n(x)+\dfrac{f^{(n+1)}(\theta_{n+1})(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

其中 $\theta_{n+1}\in(a,x)$〔或 $(x,a)$〕。

證明：若 $x=a$，則本定理顯然成立。

於是我們假設 $x\neq a$，

令 $R=f-p_n$ ，我們欲證存在一數 $\theta_{n+1}$ 介於 $a$ 與 $x$ 之間，

使得 $R(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta_{n+1})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

因爲 $f$ 在（ $c,d$ ）上有 $n+1$ 次連續導數及 $p_n$ 有無項次連續導數，所以 $R$ 在（ $c,d$ ）上有（ $n+1$ ）次連續導數，

尤其 $p^k(a)=0$ （ $k=0,1,\cdots\cdots,n$ ）

且 $R^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)-p_n^{(n)}(x)$ 〔 $x\in(c,d)$ 〕

但 $p_n^{(n)}(x)$ 爲常數，且 $p_n^{(n)}(a)=f^{(n)}(a)$，

所以 $p_n^{(n)}(x)\equiv f^{(n)}(a)$， 且 $R^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)-f^{(n)}(a)$

若令 $x>a$，則 $f^{(n)}(a)$ 在〔 $a,x$ 〕上滿足均值定理

於是 $f^{(n)}(x)-f^{(n)}(a)=f^{(n+1)}(\theta_1)(x-a)$， $\theta_1\in(a,x)$

因此 $R^{(n)}(x)=f^{(n+1)}(\theta_1)(x-a)$

因爲 $f^{(n+1)}$ 在（ $c,d$ ）上連續，所以 $f^{(n+1)}$ 在〔 $a,x$ 〕上有界。

令 $M$，$m$ 分別爲 $f^{(n+1)}$ 在〔 $a,x$ 〕上的極大、極小值

所以 $m(t-a)\leq R^n(t)\leq M(t-a)$ （ $t\in[a,x]$ ），

其中至少有一 $t$ 使得不等號成立，除非 $M=m$，

因此 $m\int_a^x(t-a)\,dt<\int_a^x R^{(n)}(t)dt<M\int_a^x(t-a)\,dt$

或 $\dfrac{1}{2}m(x-a)^2<R^{(n-1)}(x)<\dfrac{1}{2}M(x-a)^2$

因 $f^{(n+1)}$ 在〔 $a,x$ 〕上連續，於是必存在一數 $\theta_2\in(a,x)$

使得 $f^{(n+1)}(\theta_2)=\dfrac{2R^{(n-1)}(x)}{(x-a)^2}$ （ $x\neq a$ ）

因此　$R^{(n-1)}(x) = \dfrac{1}{2} f^{(n+1)}(\theta_2)(x-a)^2$

同上法繼續作下去，最後我們能證明

$$R^{(n-2)}(x) = \frac{1}{2\cdot 3} f^{(n+1)}(\theta_3)(x-a)^3 \qquad \theta_3 \in (a, x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$R(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta_{n+1})(x-a)^{n+1}$$

若 $x < a$ 時，亦可用此方法處理，而得到相同的結果，於是本定理證明完成。

例(a)　令 $E(k) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$（第一類完全橢圓積分，The complete elliptic integral of the first kind）。求 $E(\frac{1}{4})$ 準確至四位小數之估計值。

解：　令 $f(x) = (1-x)^{-1/2}$　　$x < 1$

若　$0 < x < \dfrac{1}{16}$　.（$\dfrac{1}{16} \geqslant k^2\sin^2\theta \geqslant 0$）

則由上定理得　$f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 + R(x)$

其中　$R(x) = 5\cdot 2^{-4} x^3 (1-\theta)^{-9/2}$　　$(0 < \theta < \dfrac{1}{16})$

因此 $\left| E(\dfrac{1}{4}) - \displaystyle\int_0^{\pi/2} (1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin^2\theta}{16} + \dfrac{3}{8}\dfrac{\sin^4\theta}{256}) d\theta \right|$

$$\lesssim \frac{5}{2^4(16)^3}\left(\frac{15}{16}\right)^{-9/2}\int_0^{\pi/2}\sin^6\theta\, d\theta \doteq \frac{\pi}{36\cdot(15)^{5/2}} < 10^{-4}$$

於是 $E(\dfrac{1}{4})$ 準確至四位小數之估計值爲

$$\frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{2^{11}}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right] \text{或} 1.5962\cdots\cdots$$

定理 3：（Weierstrass 逼近定理）

若 $f$ 在 $[a, b]$ 上連續及任給 $\in > 0$，存在多項式 $p_n(x)$ 使得 $|f(x) - p_n(x)| < \epsilon$，$\forall x \in [a, b]$，成立。

定義 2：多項式　$B_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\binom{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$，$\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

爲對應定義於 $[0, 1]$ 上之實值函數 $f$ 的 $n$ 次 Bernstein 多項式。

定理 4 ：（ S.N. Bernstein 逼近定理 ）

若 $f$ 在〔0，1〕上連續，則其 Bernstein 多項序列 $\{B_n(x)\}$ 在區間〔0，1〕上均匀收斂於 $f$。

欲證明此定理，我們首先必須完成下面幾個證明。

$1^0$ $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1$

證： $1=[x+(1-x)]^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

$2^0$ $0\leq\sum_{k=0}^{n}(\frac{k}{n}-x)^2\binom{n}{x}x^k(1-x)^{n-k}\leq\frac{1}{4n}$, $0\leq x\leq 1$

證： 令 $g_k=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

若我們能計算 (i) $\sum_{k=0}^{n}k^2g_k/n^2$，(ii) $\sum_{k=0}^{n}xkg_k/n$， (iii) $\sum_{k=0}^{n}x^2g_k$

則我們就可證出（$2^0$）來了。

(iii) $\sum_{k=0}^{n}x^2g_k=x^2$ 爲顯然。

(ii) 考慮等式 $(u+v)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^kv^{n-k}$ …………（*）

當 $u=x$ 及 $v=1-x$ 時，得 $1=\sum_{k=0}^{n}g_k$

若假設 $x$ 爲變數，且將（*）式兩邊對 $u$ 微分得

$$n(u+v)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}u^{k-1}v^{n-k}$$

或 $nu(u+v)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}u^kv^{n-k}$ ……………（*′）

當 $u=x$，$v=1-x$ 時得 $\sum_{k=0}^{n}kg_k=nx$ 或 $\sum_{k=0}^{n}x\frac{k}{n}g_k=x^2$

(i) 再一次將（*′）式對 $u$ 微分得

$$n(u+v)^{n-1}+n(n-1)u(u+v)^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}u^{k-1}v^{n-k}$$

當 $u=x$，$v=1-x$ 時得 $\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}g_k=\frac{x}{n}+(1-\frac{1}{n})x^2$

故 $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 g_k = x^2-2x^2+\frac{x}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2$

$$=\frac{-(x^2-x)}{n}=\frac{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}{n}$$

因此 $0\leq \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 g_k \leq \frac{1}{4n}$ ， 當 $0\leq x\leq 1$

S.N. Bernstein逼近定理之證明

任給 $\epsilon>0$，欲證 $\exists N_\epsilon \in N \ni n\geqslant N_\epsilon$

$\Longrightarrow \quad |B_n(x)-f(x)|<\epsilon , \quad \forall x\in[0,1]$

為此，令 $M=Sup\{|f(x)|\mid x\in[0,1]\}$

又由 $f$ 在 $[0,1]$ 上均勻連續知 $\exists\delta>0$，$\ni \forall x,x'\in[0,1]$，

$|x-x'|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(x')|<\frac{\epsilon}{2}$

又已知 $f(x)=f(x)\cdot 1=f(x)\sum_{k=0}^{n} g_k=\sum_{k=0}^{n} f(x)g_k$

因此 $|f(x)-B_n(x)|=\left|\sum_{k=0}^{n}\left[f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]g_k\right|\leq\sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|g_k$

，$(g_k\geqslant 0)$，$\forall_n$，我們將 $k=0,1,2,\cdots\cdots,n$ 之值分成兩類 $A$ 及 $B$ 。

$$A=\left\{k\mid k=0,1,2,\cdots,n \text{ 且 } \left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta\right\};$$

$$B=\left\{k\mid k=0,1,2,\cdots,n \text{ 且 } \left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\delta\right\} 。$$

設 $k\in A$，則 $\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\frac{\epsilon}{2}$

因此 $\sum_{k\in A}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|g_k<\frac{\epsilon}{2}\sum_{k\in A} g_k \leq \frac{\epsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} g_k$

$$=\frac{\epsilon}{2}\cdot 1=\frac{\epsilon}{2}$$

若 $k\in B$，則 $\frac{\left|\frac{k}{n}-x\right|^2}{\delta^2}\geqslant 1$

所以 $\sum_{k\in B}|f(x)-f(\frac{k}{n})|g_k \leq \sum_{k\in B}|f(x)-f(\frac{k}{n})|\frac{(\frac{k}{n}-x)^2}{\delta^2}g_k$

但 $|f(x)-f(\frac{k}{n})| \leq |f(x)|+|f(\frac{k}{n})| \leq M+M=2M$

因此 $\sum_{k\in B}|f(x)-f(\frac{k}{n})|g_k \leq \frac{2M}{\delta^2}\sum_{k\in B}(\frac{k}{n}-x)^2 g_k$

$$\leq \frac{2M}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}(\frac{k}{n}-x)^2 g_k \leq \frac{M}{2n\delta^2}$$

對給定 $\epsilon$ 而言，$\exists\ N_\epsilon \in N$，$\ni n \geqslant N_\epsilon$

$$\Longrightarrow \frac{M}{2n\delta^2}<\frac{\epsilon}{2}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k\in B}|f(x)-f(\frac{k}{n})|g_k<\frac{\epsilon}{2}$$

因此 $\sum_{k=0}^{n}|f(x)-f(\frac{k}{n})|g_k=\sum_{k\in A}|f(x)-f(\frac{k}{n})|g_k+\sum_{k\in B}|f(x)-f(\frac{k}{n})|g_k$

$$<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

於是本定理得證。

最後剩下需證明Weierstrass逼近定理

證明：當 $[a,b]=[0,1]$ 時，即爲Bernstein逼近定理；

故設 $[a,b]\neq[0,1]$ 之情況，

令 $F(t)=f[a+t(b-a)]$，$t\in[0,1]$

此時 $F$ 在 $[0,1]$ 上連續，由 Bernstein 逼近定理知

給定 $\epsilon>0$，$\exists N \ni n>N$

$\Longrightarrow |F(t)-B_n(t,F)|<\epsilon$ （此處用 $B_n(t,F)$ 代 $B_n(t)$ 主要是要強調 $B_n$ 與 $F$ 有關）。

但 $t=\frac{x-a}{b-a}$ 且 $F(\frac{x-a}{b-a})\equiv f(x)$

因此 $|f(x)-B_n(\frac{x-a}{b-a},F)|<\epsilon$ 當 $n>N$

其中因爲 $\frac{x-a}{b-a}$ 爲 $x$ 之線性函數，所以 $B_n(\frac{x-a}{b-a},F)$ 爲 $x$ 之 $n$ 次多項式

故其即爲所求。

註 1：對任一連續於〔$a$，$b$〕之函數 $f$，存在一多項式函數序列 $\{p_n(x)\}$ 在〔$a$，$b$〕上均勻收斂於 $f$。

2：對任一連續於〔$a$，$b$〕之函數 $f$ 均可展開成一在〔$a$，$b$〕上之均勻多項函數級數 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k(x)$。

參考資料


1. 陳昭地，顏啓麟：數學分析，1977，汝旭圖書有限公司印行。（P. 71，P. 194～P. 201 及 P. 215～P. 221）。
2. N.D. Kazarinoff Holt, Rinehart and Winston : Analytic Inequalities 1961, Michigan（P. 35～ P. 62）
3. I.P. Natanson : constructive Function theory, Vol. I, Ungar 1964.
4. D.V. Widder : Advanced calculcus（二版），1961，美亞書版公司印行，（P. 383～P. 388）



數學是人類心智的一種表現，它反映出人類具有堅強活潑的意志，愼思明辨的理性，以及追求完美的意願。其基要素是邏輯和直覺，解析和建構，概括和分殊。雖然不同傳統，可能強調不同的方面，但是唯有這些反對力量的交互作用，以及使它們互相綜合的努力，才能提供數理科學以生命，效用，和崇高無比的價值。

——————數學導論

# 線性變換之冪序列

**指導老師：林福來**
**作者： 蔣永延**

綫性變換（Linear transformation），$A(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc\neq 0$,可分爲抛物綫型（Parabolic），橢圓型（Elliptic），双曲綫型（Hyperbolic），和嚴格偏斜型（Strictly Loxodromic）四種。於此篇文章中，我們將看看這四種綫性變換的冪序列（Iteration）"………, $A^{-2}(z)$, $A^{-1}(z)$, $z$, $A(z)$, $A^2(z)$,………" 之幾何性質。在討論這個問題之前，筆者欲先將有關的定理，定義略述之。

定義：$M_k=\{A(z)=\dfrac{az+b}{cz+d} \mid ad-bc\neq 0,\ a,b,c,d\in k,\ k\subset\mathbb{C}\}$，

$\Gamma_k=\{A(z)=\dfrac{az+b}{cz+d} \mid ad-bc=1,\ a,b,c,d\in k,\ k\subset\mathbb{C}\}$

定理：(i) $(M_k,\circ)$，$(\Gamma_k,\circ)$ 均爲群（Group），其中"$\circ$"爲合成運算。

(ii) $M_{\mathbb{C}}=\Gamma_{\mathbb{C}}$。

證明：(i)顯然成立。

(ii) $\Gamma_{\mathbb{C}}\subset M_{\mathbb{C}}$ 由定義得知，欲證 $M_{\mathbb{C}}\subset\Gamma_{\mathbb{C}}$。

若 $A(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}\in M_{\mathbb{C}}$ ., i.e. $ad-bc\neq 0$

$$A(z)=\frac{\dfrac{a}{\sqrt{ad-bc}}z+\dfrac{b}{\sqrt{ad-bc}}}{\dfrac{c}{\sqrt{ad-bc}}z+\dfrac{d}{\sqrt{ad-bc}}}$$

令 $a'=\dfrac{a}{\sqrt{ad-bc}}$, $b'=\dfrac{b}{\sqrt{ad-bc}}$, $c'=\dfrac{c}{\sqrt{ad-bc}}$, $d'=\dfrac{d}{\sqrt{ad-bc}}$

則 $a'd'-b'c'=1$,所以 $A(z)\in\Gamma_{\mathbb{C}}$ 。

註：由此定理得知，我們只需在 $\Gamma_{\mathbb{C}}$ 上來討論，故於下列敘述中，固定 $A(z)\in\Gamma_{\mathbb{C}}$，即

$$A(z)=\frac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d\in\mathbb{C}\ \text{，且}\ ad-bc=1$$

定理：若 $A(z)\neq id$( identity mapping ) ，則 $A$ 有一個或二個固定點 (fixed point)

證明：令 $A(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$，且 $\xi$ 為 $A(z)$ 之固定點，

則 $\xi=\dfrac{a\xi+b}{c\xi+d}$，即 $c\xi^2+(d-a)\xi-b=0$，

$$\xi=\frac{(a-d)\pm\sqrt{M}}{2c},\ \text{其中}\ M=(d-a)^2+4bc=(d+a)^2-4$$

(i) $M=0$ 則僅有一固定點，若 $c=0$，則 $\xi=\infty$；若 $c\neq 0$，則 $\xi=\dfrac{a-d}{2c}$

$M\neq 0$ 則有二個固定點，若 $c=0$，則 $\xi_1=\infty$，$\xi_2=\dfrac{b}{d-a}$ 為兩固定點；若

$c\neq 0$，則 $\xi_1=\dfrac{(a-d)+\sqrt{M}}{2c}$，$\xi_2=\dfrac{(a-d)-\sqrt{M}}{2c}$ 為兩固定點。

若由固定點來區分，線性變換可分為四種類型：令 $t_A=(a+d)^2$，則

(i) $A(z)$ 為拋物線型 $\Leftrightarrow t_A=4$，

(ii) $A(z)$ 為双曲線型 $\Leftrightarrow t_A>4$，

(iii) $A(z)$ 為橢圓型 $\Leftrightarrow 0\leqslant t_A<4$，

(iv) $A(z)$ 為嚴格偏斜型 $\Leftrightarrow \sqrt{t_A}\notin R$

定義：設 $A_1,A_2$ 為兩線性變換，若存在 $B\in M_{\mathbb{C}}\ni A_1=BA_2B^{-1}$ 則稱 $A_1$ 與 $A_2$ 共軛 ( Conjugate ) ，記為 $A_1\sim A_2$。

定理：(i) "$\sim$" 為等價關係 ( Equivalence relation ) ；

(ii) $A(z)$ 為拋物線型 $\Rightarrow A\sim$ "$z\mapsto z+1$" ；

(iii) $A(z)$ 為橢圓型 $\Rightarrow A\sim$ "$z\mapsto\lambda_A z$" ，其中 $\lambda_A=e^{i\theta}$，$\theta\neq 2n\pi$；

(iv) $A(z)$ 為双曲線型 $\Rightarrow A\sim$ "$z\mapsto\lambda_A z$"，其中 $\lambda_A=|\lambda_A|$，$|\lambda_A|\neq 1$ ；

(v) $A(z)$ 為嚴格偏斜型 $\Rightarrow A\sim$ "$z\mapsto\lambda_A z$" ，其中 $\lambda_A=|\lambda_A|e^{i\theta}$，且 $\theta\neq 2n\pi$，$|\lambda_A|\neq 1$。

註：由此定理得知拋物線型與平移變換共軛，橢圓型與旋轉變換共軛，双曲線型與脹縮變換共軛。

證明：(i)顯然成立。

(ii)–(1)令 $A(z)=\dfrac{az+b}{d}$，因為 $A$ 為拋物線型且 $ad=1$，所以 $a=d$，則

$A(z)=z+\dfrac{b}{d}$，且 $b\neq 0$，(若 $b=0$ 則 $A(z)=z$，但由前面定義中之假設

得知 $A \neq id$）。令 $B(z)=\dfrac{d}{b}z$, $T(z)=z+1$，則 $B^{-1}TB=A$，所以 $A\sim T$。

(ii)－(2)若 $c \neq 0$，固定點 $\xi=\dfrac{a-d}{2c}$，令 $B(z)=\dfrac{\alpha}{z-\xi}$，其中 $\alpha=\dfrac{a+d}{2c}$，

且 $T(z)=z+1$，則 $A=B^{-1}TB$ i.e. $A\sim T$

在證明(iii)(iv)(v)之前，筆者欲先證明當 $A(z)$ 不爲拋物線型時，$A(z)$ 與"$z \mapsto \lambda_A z$"且 $\lambda_A \neq 0, 1$ 共軛，且 $\lambda_A+\lambda_A^{-1}=(a+d)^2-2$

$A(z)$ 不爲拋物線型時，$M \neq 0$，且 $\xi_1$，$\xi$ 爲 $A$ 之兩固定點，令 $T(z)=\lambda_A z$

(I)－(1) $c=0$ 則 $\xi_1=\infty$，$\xi_2=\dfrac{b}{d-a}$，令 $B(z)=z-\xi_2$ 則 $BAB^{-1}(z)=\dfrac{a}{d}z$，令 $\lambda_A=\dfrac{a}{d}$

則 $A\sim T$

(I)－(2) $c\neq 0$ 則 $\xi_1=\dfrac{(a-d)+\sqrt{M}}{2c}$，$\xi_2=\dfrac{(a-d)-\sqrt{M}}{2c}$，令 $B(z)=\dfrac{z-\xi_1}{z-\xi_2}$ 則

$$BAB^{-1}(z)=\frac{d\xi_1-a\xi_2-2b}{a\xi_1-d\xi_2+2b}z$$

令 $\lambda_A=\dfrac{d\xi_1-a\xi_2-2b}{a\xi_1-d\xi_2+2b}$，則 $A\sim T$。

(II)－(1) $c=0$ 則 $\lambda_A=\dfrac{a}{d}$，$\lambda_A+\dfrac{1}{\lambda_A}=\dfrac{a}{d}+\dfrac{d}{a}=\dfrac{(a+d)^2}{ad}-2$

$\because ad=1$ 則 $\lambda_A+\dfrac{1}{\lambda_A}=(a+d)^2-2$

(II)－(2) $c\neq 0$ 則 $\lambda_A=\dfrac{d\xi_1-a\xi_2-2b}{a\xi_1-d\xi_2+2b}$

$$\lambda_A+\lambda_A^{-1}=\frac{(d\xi_1-a\xi_2-2b)^2+(a\xi_1-d\xi_2+2b)^2}{(a\xi_1-d\xi_2+2b)(d\xi_1-a\xi_2-2b)}$$

$$\text{分子}=(a^2+b^2)\frac{(a-d)^2+2bc}{c^2}-4ad\frac{-b}{c}-4bd\frac{a-d}{c}+4ab\frac{a-d}{c}+8b^2$$

$$=\frac{[(a+d)^2-2][(a-d)^2+4bc]}{c^2}$$

（此化簡甚爲複雜，請讀者自行檢驗）

$$\text{分母}=ad\frac{(a-d)^2+2bc}{c^2}-(a^2+d^2)\frac{-b}{c}-2ab\frac{a-d}{c}+2bd\frac{a-d}{c}-4b^2$$

$$=\frac{ad(a-d)^2+2abcd+(a^2+b^2)bc-2bc(a-b)^2-2bc(2ad-2)}{c^2}$$

$$=\frac{ad(a-d)^2+[(a^2+d^2)-2cd]bc-2bc(a-d)^2+4bc}{c^2}$$

$$=\frac{ad(a-d)^2+(a-d)^2bc-2bc(a-d)^2+4bc}{c^2}$$

$$=\frac{ad(a-d)^2-bc(a-d)^2+4bc}{c^2}=\frac{(a-d)^2+4bc}{c^2}$$

則 $\lambda_A+\lambda_A^{-1}=(a+d)^2-2$

(iii) 令 $\theta=\arg\lambda_A$，則 $\lambda_A=|\lambda_A|e^{i\theta}$ $\because\ \lambda_A\neq 0,1,\ \therefore|\lambda_A|\neq 0$

$\lambda_A+\lambda_A^{-1}=(a+d)^2-2=t_A-2\ \therefore\lambda_A+\lambda_A^{-1}+2=t_A$

$A(z)$為橢圓型，$\therefore 0\leqslant t_A<4$

$\Rightarrow 0\leqslant\lambda_A+\lambda_A^{-1}+2<4\Rightarrow -2\leq\lambda_A+\lambda_A^{-1}<2\Rightarrow\lambda_A+\lambda_A^{-1}\in R$

$$\lambda_A+\lambda_A^{-1}=(|\lambda_A|+\frac{1}{|\lambda_A|})\cos\theta+i(|\lambda_A|-|\lambda_A|^{-1})\sin\theta$$

$\Rightarrow(|\lambda_A|-|\lambda_A|^{-1})\sin\theta=0$

$\Rightarrow|\lambda_A|-|\lambda_A|^{-1}=0$ 或 $\sin\theta=0$

$\Rightarrow|\lambda_A|=1$ 或 $\theta=n\pi$

若 $\theta=n\pi$ 則 $\cos\theta=\pm1$ 且($|\lambda_A|=\lambda_A$ 或 $\lambda_A=-|\lambda_A|$)

若 $|\lambda_A|=\lambda_A$，$\lambda_A+\lambda_A^{-1}=|\lambda_A|+|\lambda_A|^{-1}\geq 2\ (\rightarrow\leftarrow)$

若 $\lambda_A=-|\lambda_A|$，$\lambda_A+\lambda_A^{-1}=-(|\lambda_A|+|\lambda_A|^{-1})\leq -2$

$\therefore\ \lambda_A+\lambda_A^{-1}=-2$

$\Rightarrow|\lambda_A|+|\lambda_A|^{-1}=2\ \Rightarrow|\lambda_A|=1$

$\therefore|\lambda_A|=1$，故 $\lambda_A=e^{i\theta}$

若 $\theta=2n\pi$ 則 $\lambda_A=1$，因此 $A\sim id$，而 $id$ 有無窮多個固定點 $(\rightarrow\leftarrow)$

$\therefore\ \theta\neq 2n\pi$

(iv) $\lambda_A+\lambda_A^{-1}+2=t_A$，且 $t_A>4$ $\therefore\lambda_A+\lambda_A^{-1}\in R$ 則 $|\lambda_A|=|\lambda_A|^{-1}$ 或 $\sin\theta=0$

(1) $|\lambda_A|=|\lambda_A|^{-1}\Rightarrow|\lambda_A|=1$

$\lambda_A=e^{i\theta}\Rightarrow\lambda_A^{-1}=e^{-i\theta}$ 且 $\lambda_A+\lambda_A^{-1}=2\cos\theta\leq 2\ (\rightarrow\leftarrow)$

(2) $\sin\theta=0\Rightarrow\theta=n\pi\Rightarrow\cos\theta=\pm1$

$\cos\theta=1\Rightarrow|\lambda_A|=\lambda_A\Rightarrow\lambda_A+\lambda_A^{-1}=|\lambda_A|+|\lambda_A|^{-1}\geq 2$

當 $\lambda_A+\lambda_A^{-1}=2$ 則 $A\sim\mathrm{Id}(\rightarrow\leftarrow)$ $\therefore|\lambda_A|+|\lambda_A|^{-1}>2\Rightarrow|\lambda_A|\neq 1$

$\therefore\lambda_A=|\lambda_A|$ 且 $|\lambda_A|\neq 0,1$。

(v) $\lambda_A+\lambda_A^{-1}+2=t_A$ 且 $\sqrt{t_A}\notin R$ 則 $t_A<0$ 或 $t_A\notin R$，只需證明 $\lambda_A\neq|\lambda_A|$ 且 $\lambda_A\neq e^{i\theta}$

(1)若 $\lambda_A=|\lambda_A|$，則 $t_A\geq 2\ (\rightarrow\leftarrow)$，

(2)若 $\lambda_A = e^{i\theta}$，則 $t_A = 2\cos\theta + 2$，$0 \leq t_A \leqslant 4$( $\rightarrow\leftarrow$ )，

所以 $\lambda_A = |\lambda_A| e^{i\theta}$，且 $\theta \neq 2n\pi$（因爲若 $\theta = 2n\pi$，則 $\lambda_A = |\lambda_A|$）。

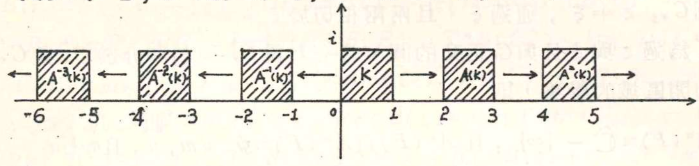
冪序列：………，$A^{-2}(z), A^{-1}(z), z, A(z), A^2(z)$，…………，

$A^2(z) = A(A(z))$，$A^3(z) = A(A^2(z))$，…………。

（I）拋物綫型：考慮平移變換 $A(z) = z+2$，且固定點爲∞。則

$A^2(z) = z+4$，$A^3(z) = z+6$，$A^4(z) = z+8$，………，$A^n(z) = z+2n$，…；

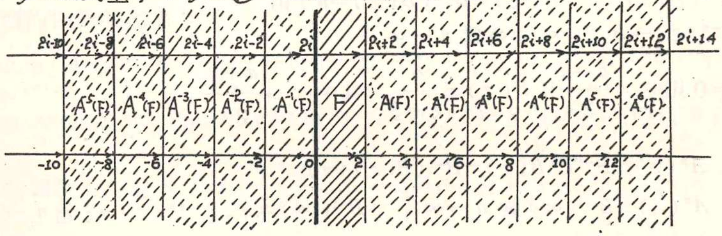
$A^{-1}(z) = z-2$，$A^{-2}(z) = z-4$，$A^{-3}(z) = z-6$，……，$A^{-n}(z) = z-2n$，……。




（圖一）

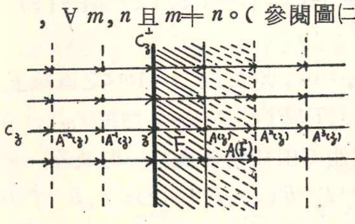
（i）設 $K \subset \hat{\mathbb{C}}$，且 $K$ 與∞之間的距離爲正，即 $K \subset \mathbb{C}$，則 $A^n(K) \to \{\infty\}$，且 $A^{-n}(K) \to \{\infty\}$，當 $n \to \infty$。因爲 $\forall z \in K$，$A^n(z) = z + 2n \to \infty$，當 $n \to \infty$；且 $A^{-n}(z) = z - 2n \to \infty$，當 $n \to \infty$，所以 $A^n(K) \to \{\infty\}$，且 $A^{-n}(K) \to \{\infty\}$，當 $n \to \infty$。（參閱圖(一)）

（ii）………，$A^{-2}(z), A^{-1}(z), z, A(z), A^2(z)$，………，位在同一直綫 $C_z$：$y = \mathrm{Im}\, z$ 上，$\forall\, y \in \mathbb{C}$，且這些直綫均互相平行。

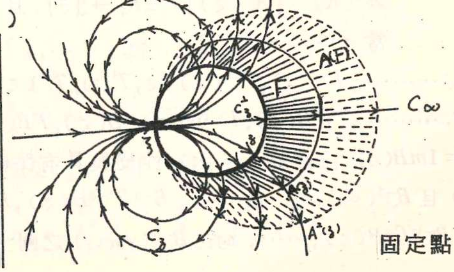



圖（二）

（iii）令 $C_z^{\perp}$ 爲過 $z$ 且與 $C_z$ 正交之直綫，且令 $F$ 爲 $C_z^{\perp} - \{\infty\}$ 和介於 $C_z^{\perp}$ 與 $C_{A(z)}^{\perp}$ 之間的開區域之聯集，則 $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} A^n(F) = \hat{\mathbb{C}} - \{\infty\}$，且 $A^n(F) \cap A^m(F) = \phi$，$\forall\, m, n$ 且 $m \neq n$。（參閱圖(二)）




固定點∞




固定點 $\xi$

問題：一般的抛物線型線性變換是否也具有上例中之三個性質。

我們的答案是肯定的：

定理：設 $A$ 爲抛物線型之線性變換（Parabolic linear transformation），且令 $\xi$ 爲 $A$ 之固定點，則

(i) $A^n(K)\to\{\xi\}$ 且 $A^{-n}(K)\to\{\xi\}$，當 $n\to\infty$，其中 $K\subseteq\hat{\mathbb{C}}$，且 $K$ 與 $\xi$ 之距離爲正

(ii) $\cdots\cdots, A^{-2}(z), A^{-1}(z), z, A(z), A^2(z),\cdots\cdots$，位在同一圓 $C_z$ 上，而且這些圓 $C_z$, $z\neq\xi$，通過 $\xi$，且兩兩相切於 $\xi$。

(iii) 令 $C_z^{\perp}$ 爲過 $z$ 與 $\xi$ 且與 $C_z$ 正交的圓，且令 $F$ 爲 $C_z^{\perp}-\{\xi\}$ 和介於 $C_z^{\perp}$ 與 $C_{A(z)}^{\perp}$ 之間的開區域的聯集，則

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} A^n(F)=\hat{\mathbb{C}}-\{\infty\}\text{，且 } A^n(F)\cap A^m(F)=\phi\quad\forall m,n\text{，且} m\neq n$$

證明：(i) 令 $T(z)=z+1$ 則 $A=B^{-1}TB$ 其中 $B$ 定義於前面之定理中。

$T^n(z)=z+n$，$T^{-n}(z)=z-n$，則 $T^n(z)\to\infty$，且 $T^{-n}(z)\to\infty$，當 $n\to\infty$

(1) $c=0$ 則 $\xi=\infty$，且 $B(z)=\dfrac{d}{b}z$, $A^n=B^{-1}T^nB$，且 $A^{-n}=B^{-1}T^{-n}B$

當 $z\neq\infty$ $A^n(z)=B^{-1}T^nB(z)=B^{-1}(B(z)+n)$

則 $A^n(z)\to B^{-1}(\infty)=\infty$ 當 $n\to\infty$

$A^{-n}(z)=B^{-1}T^{-n}B(z)=B^{-1}(B(z)-n)$ 則

$A^{-n}(z)\to B^{-1}(\infty)=\infty$ 當 $n\to\infty$

(2) $c\neq0$ 則 $\xi=\dfrac{a-d}{2c}$ 且 $B(z)=\dfrac{\alpha}{z-\xi}$，其中 $\alpha=\dfrac{a+d}{2c}$

當 $z\neq\xi$，$A^n(z)=B^{-1}T^nB(z)=B^{-1}(B(z)+n)$

$A^n(z)\to B^{-1}(\infty)$ 當 $n\to\infty$，$\because B^{-1}(\infty)=\xi$，$\therefore A^n(z)\to\xi$ 當 $n\to\infty$

$A^{-n}(z)\to B^{-1}(\infty)=\xi$ 當 $n\to\infty$，$\because A^{-n}(z)=B^{-1}T^{-n}B(z)$

$=B^{-1}(B(z)-n)$

故由(1)(2)得知 $A^n(z)\to\xi$ 且 $A^{-n}(z)\to\xi$ 當 $n\to\infty$，$\forall z\neq\xi$

$A^n(K)=\{A^n(z)\mid z\in K\}\to\{\xi\}$，且 $A^{-n}(K)=\{A^{-n}(z)\mid z\in K\}\to\{\xi\}$，當 $n\to\infty$。

(ii) $\because\cdots\cdots, T^{-2}(z), T^{-1}(z), z, T(z), T^2(z),\cdots\cdots$，均在 $\ell_z: y=\mathrm{Im}z$ 之直線上。

$\therefore\cdots\cdots, T^{-2}B(z), T^{-1}B(z), B(z), TB(z), T^2B(z),\cdots\cdots$，均在 $\ell_{B(z)}: y=\mathrm{Im}B(z)$ 之直線上。因線性變換具有保圓性（即線性變換將一圓映至一圓），且 $B^{-1}(\infty)=\xi$，故$\cdots\cdots$，$B^{-1}T^{-2}B(z)$, $B^{-1}T^{-1}B(z)$, $B^{-1}B(z)=z$, $B^{-1}TB(z)$, $B^{-1}T^2B(z),\cdots\cdots$，均在 $B^{-1}(\ell_{B(z)})$ 之圓上，令 $C_z=B^{-1}(\ell_{B(z)})$，且 $C_z$ 通過

$z$與$\xi$。

當 $\mathrm{Im} z_1 \quad \mathrm{Im} z_2$，則 $\ell_{B(z_1)} \cap \ell_{B(z_2)} = \{\infty\}$（即 $\ell_{B(z_1)}$與 $\ell_{B(z_2)}$ 爲平行的兩直線）

則 $B^{-1}(\ell_{B(z_1)}) = C_{z_1}$ 與$B^{-1}(\ell_{B(z_2)}) = C_{z_2}$爲相切的兩圓，且切點爲 $B^{-1}(\infty) = \xi$

(iii)因$C_z^{\perp}$爲過 $z$ 與 $\xi$ 且與$C_z$正交之圓，且 $B(\xi) = \infty$, 故 $B(C_z^{\perp})$爲過$B(z)$且與$B(C_z) = \ell_{B(z)}$正交之直線。令$E$爲介於$C_z^{\perp}$與$C_{A(z)}^{\perp}$之間的開區域，則$B(E)$爲介於$B(C_z^{\perp})$與$B(C_{A(z)}^{\perp})$兩直線之間的開區域。

$B(F) = B[(C_z^{\perp} - \{\xi\}) \cup E] = B(C_z^{\perp} - \{\xi\}) \cup B(E) = (B(C_z^{\perp}) - \{\infty\}) \cup B(E)$

$\Rightarrow T^n B(F) = T^n [B(C_z^{\perp} - \{\infty\}) \cup T^n B(E) = (T^n B(C_z^{\perp}) - \{\infty\}) \cup T^n B(E)$

$B(C_z^{\perp})$與$\ell_{B(z)}$正交，且 $\ell_{B(z)}: y = \mathrm{Im} B(z) \therefore B(C_z^{\perp}): x = \mathrm{Re} B(z)$同理$B(C_{A(z)}^{\perp}): x = \mathrm{Re} TB(z)$ 則$T^n B(C_z^{\perp}): x = \mathrm{Re}(B(z)+n)$且$T^n B(C_{A(z)}^{\perp}): x = \mathrm{Re}(T^{n+1}B(z)) = \mathrm{Re}(B(z)+n+1) \therefore T^n B(E)$爲介於$x = \mathrm{Re}(B(z)+n)$與$x = \mathrm{Re}(B(z)+n+1)$兩直線之間的帶狀開區域，且$T^n B(F) \cap T^m B(F) = \phi \quad \forall m, n, m \neq n$，且

$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} T^n B(F) = \hat{\mathbb{C}} - \{\infty\}$, $B^{-1} T^n B(F) = [B^{-1} T^n B(C_z^{\perp}) - B^{-1}(\infty)] \cup B^{-1} T^n B(E)$，即 $A^n(F) = [A^n(C_z^{\perp}) - \{\xi\}] \cup A^n(E)$ 且 $A^n(E)$爲介於$B^{-1}(x = \mathrm{Re}(B(z)+n))$與$B^{-1}(x = \mathrm{Re}(B(z)+n+1))$之間的開區域，故$A^n(E)$爲介於$C_{A^n(z)}$與$C_{A^{n+1}(z)}$之間的開區域，且$A^n(F)$爲$A^n(C_z^{\perp}) - \{\xi\} = C_{A^n(z)} - \{\xi\}$和介於$C_{A^n(z)}$與$C_{A^{n+1}(z)}$之間的開區域的聯集。

$\therefore \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} A^n(F) = B^{-1}(\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} T^n B(F)) = B^{-1}(\hat{\mathbb{C}} - \{\infty\}) = B^{-1}(\hat{\mathbb{C}}) - B^{-1}(\{\infty\}) = \hat{\mathbb{C}} - \{\xi\}$

且 $A^n(F) \cap A^m(F) = B^{-1}(T^n B(F) \cap T^m B(F)) = B^{-1}(\phi) = \phi, \forall m, n, m \neq n$。

(II)橢圓型：考慮 $A_1(z) = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{6}} z}{e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{3}} z$, $A_2(z) = \dfrac{e^{i\frac{1}{4}} z}{e^{-i\frac{1}{4}}} = e^{i\frac{1}{2}} z$

因爲$(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}})^2 = (2\cos\frac{\pi}{6})^2 = (2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 3 < 4$，且$(e^{i\frac{1}{4}} + e^{-i\frac{1}{4}}) = (2\cos\frac{1}{4})^2 < 4$，所以$A_1(z)$，$A_2(z)$均爲橢圓型線性變換，且固定點均爲 $0, \infty$

(1) $A_1^2(z) = e^{i\frac{2}{3}\pi} z$, $A_1^3(z) = e^{i\frac{3}{3}\pi} z, \cdots\cdots, A_1^n(z) = e^{i\frac{n}{3}\pi} z, \cdots\cdots;$

$A_1^{-1}(z) = e^{-i\frac{\pi}{3}} z, A_1^{-2}(z) = e^{-i\frac{2}{3}\pi} z, \cdots\cdots\cdots, A_1^{-n}(z) = e^{-i\frac{n}{3}\pi} z, \cdots\cdots$.

則 $\{\cdots\cdots, A^{-1}(z), z, A(z), A^2(z), \cdots\cdots\}$

$= \{ e^{-i\frac{5}{3}\pi} z, e^{-i\frac{4}{3}\pi} z, e^{-i\frac{3}{3}\pi} z, e^{-i\frac{2}{3}\pi} z, e^{-i\frac{\pi}{3}} z, z, e^{i\frac{\pi}{3}} z, e^{i\frac{2\pi}{3}} z,$

$e^{i\frac{3}{3}\pi}z, e^{i\frac{4}{3}\pi}z, e^{i\frac{5}{3}\pi}z\}$

所以 $\{\cdots\cdots, A^{-1}(z), z, A(z), A^2(z), \cdots\cdots\cdots\}$ 爲有限集合，且此冪序列 $\{z, A(z), A^2(z), \cdots\cdots\cdots\}$ 爲發散序列，當 $z \neq 0, \infty$。

(1) $A_2^2(z)=e^{i\frac{2}{2}}z, A_2^3(z)=e^{i\frac{3}{2}}z, A_2^4(z)=e^{i\frac{4}{2}}z, \cdots\cdots, A_2^n(z)=e^{i\frac{n}{2}}z, \cdots;$

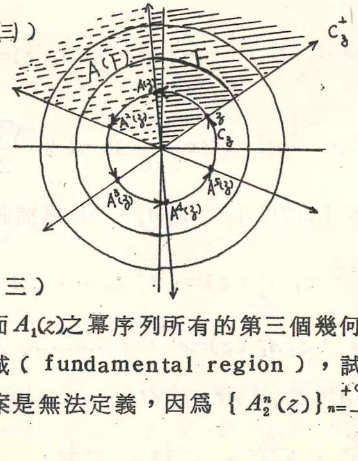
$A_2^{-1}(z)=e^{-i\frac{1}{2}}z, A_2^{-2}(z)=e^{-i\frac{2}{2}}z, A_2^{-3}(z)=e^{-i\frac{3}{2}}z, \cdots\cdots, A_2^{-n}(z)=e^{-i\frac{n}{2}}z, \cdots$

$A_2^n(z)=e^{i\frac{n}{2}}(z)=(\cos\frac{n}{2}+i\sin\frac{n}{2})z$, $\{\cos\frac{n}{2}\}_{n=0}^{\infty}$ 與 $\{\sin\frac{n}{2}\}_{n=0}^{\infty}$ 均爲發散序列，所以 $\{A_2^n(z)\}_{n=0}^{\infty}$（定義 $A_2^0(z)=z$）爲發散序列，當 $z \neq 0, \infty$。因爲 $e^{i\frac{n}{2}} \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}-\{0\}$，則 $e^{i\frac{n}{2}} \neq e^{i\frac{m}{2}}$, $\forall m \neq n$。

所以 $\{A_2^n(z)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 爲無限集合。

(2) $\{A_1^n(z)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 均在以 0 爲圓心，以 $|z|$ 爲半徑的圓上，且 $\{A_2^n(z)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 亦均在以 0 爲圓心，以 $|z|$ 爲半徑的圓上，且這些圓爲同心圓，$\forall z \neq 0, \infty$ 且 $\{A_2^n(z)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 在圓上具有稠密性。

(3) 令 $C_z^{\perp}$ 爲以 0 爲端點，且過 $z$ 之射綫，且 $F$ 爲 $C_z^{\perp} \setminus \{0, \infty\}$ 和介於 $C_z^{\perp}$ 與 $C_{A_1(z)}^{\perp}$ 之間的開區域的聯集，則 $\bigcup_{n=-\infty}^{n} A_1^n(F)=\hat{\mathbb{C}}-\{0, \infty\}$，且 $A_1^n(F) \cap A_1^m(F)=\phi$ $\forall m, n$ 且 $m \neq n$（參閱圖㈢）




圖（三）

(3) $A_2(z)$ 之冪序列不具有前面 $A_1(z)$ 之冪序列所有的第三個幾何性質。若我們稱例中之 $F$ 爲 $A_1(z)$ 之基本域（fundamental region），試問 $A_2(z)$ 之基本域將如何定義？我們的答案是無法定義，因爲 $\{A_2^n(z)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 在圓上具有稠密性。

由前面所列舉的兩個例子，我們可以看出來，雖然 $A_1$ 和 $A_2$ 均爲橢圓型之綫性

變換，但$A_1$和$A_2$分別所構成的冪序列卻有許多不同的幾何性質。歸納如下：

(i) $z$，$A(z)$，$A^2(z)$，……，$A^n(z)$，……爲發散序列，($A=A_1$，$A_2$) 當$z\neq\xi_1,\xi_2$

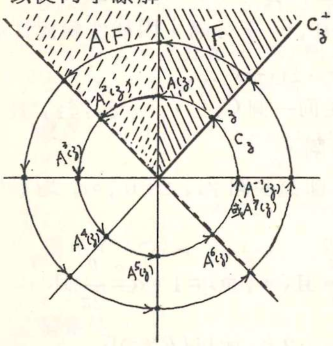
(ii) $A(z)$之兩個固定點$\xi_1$，$\xi_2$，($A=A_1$，$A_2$) 均在同一圓$C_z$上，且這些圓分隔了$\xi_1$，$\xi_2$。

(iii) $\{A_1^n(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,\ldots}$爲有限集合 ( finite set )，而$\{A_2^n(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,\ldots}$爲無限集合 ( infinite set)且在$C_z$上具有稠密性 ( dense in $C_z$ )。

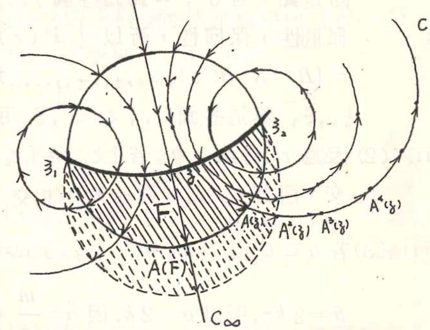
(iv) $A_1(z)$ 具有基本域，但$A_2(z)$卻沒有。

問題：一般的橢圓型綫性變換是否具有上列$A_1$和$A_2$所共有之性質，而在何種情況下其冪序列爲有限集合，或無限集合，又在何種情況下具有基本域。

這一連串的問題，我們將建立起下列定理一一回答。在此定理之前，將先給予圖形，以便同學瞭解。




固定點0，∞




固定點$\xi_1$，$\xi_2$

橢圓型：$A(z)\sim$" $z\mapsto e^{2\pi i\alpha}z$, $\alpha\in Q$，圖形如上，若$\alpha\notin Q$，圖形與上同但沒有$F$

定理：設$A$爲橢圓型綫性變換且$\xi_1$，$\xi_2$爲$A$的兩個固定點，且$A(z)\sim$"$z\mapsto e^{2\pi i\alpha}z$"

(i) $z$，$A(z)$，$A^2(z)$，………爲發散序列，當$z\neq\xi_1$或$\xi_2$

(ii) $\{A^n(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,\ldots}$ 均在圓$C_z$上，且 $\{A^n(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,\ldots}$爲有限集合 (iff $\alpha\in Q$, i.e., $\alpha$ 爲有理數)，或 $\{A^n(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,\ldots}$在$C_z$ 上具有稠密性，且這些圓$C_z$，$\forall z\neq\xi_1$，$\xi_2$，均不相交，且$\xi_1$，$\xi_2$ 爲這些圓$C_z$所分隔

(iii) 令$C_z^\perp$爲過$\xi_1$，$\xi_2$與$z$且$C_z$正交之圓，且$F$爲$C_z^\perp-\{\xi_1,\xi_2\}$和介於$C_z^\perp$與$C_{A(z)}^\perp$之間的開區域的聯集，當$\alpha=\dfrac{1}{n}$時，則

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} A^n(F)=\hat{\mathbb{C}}-\{\xi_1,\xi_2\}\text{ 且 }A^n(F)\cap A^m(F)=\phi,\ \forall m,n\text{，且 }m\neq n$$

證明：(i)令$R(z)=e^{i\theta}z=e^{i2\pi\alpha}z$，其中$\alpha=\dfrac{\theta}{2\pi}$，則$A(z)=B^{-1}RB(z)$，且

$A^n(z)=B^{-1}R^nB(z)$。

$R^n(z)=e^{in\theta}z(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))z$

$\because$ $\{\cos(n\theta)\}_{n=0}^{\infty}$，$\{\sin(n\theta)\}_{n=0}^{\infty}$爲發散數列$\therefore$ $\{R^n(z)\}_{n=0}^{\infty}$發散，且

$\{R^nB(z)\}_{n=0}^{\infty}$發散，當$z\neq\xi_1$，且$z\neq\xi_2$，則 $\{A^n(z)\}_{n=0}^{\infty}$發散。因若

$\{A^n(z)\}_{n=0}$收斂，i.e.$\{B^{-1}R^nB(z)\}_{n=0}^{\infty}$收斂，且因綫性變換爲連續，則

$\{R^nB(z)\}_{n=0}^{\infty}=\{B(B^{-1}R^nB(z)\}_{n=0}^{\infty}$收斂，與 $\{R^nB(z)\}_{n=0}^{\infty}$ 發散矛盾。

(ii)欲證：(1) $\{A^n(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,\ldots\ldots}$均在$C_z$上，且$\xi_1,\xi_2$爲這些圓$C_z$所分隔；(2)這些圓$C_z$均不相交；(3) $\{A^n(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,\ldots\ldots}$爲有限集合$\Leftrightarrow\alpha\in Q$；(4)若$\alpha\notin Q$則 $\{A^n(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,\ldots\ldots}$在$C_z$ 上具有稠密性。

(ii)-(1) $R^n(z)=e^{in\theta}z\Rightarrow|R^n(z)|=|z|\ \forall n$，所以 $\{R^n(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,\ldots\ldots}$均在以0爲圓心，以$|z|$爲半徑的圓$\gamma_z$上$z\neq0,\infty$。 0，$\infty$爲$R(z)$固定點，且0，$\infty$爲這些圓$\gamma_z$，$z\neq0,\infty$ 所分隔，因綫性變換具有保圓性，保向性，所以 $\{A^n(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,\ldots\ldots}$
$=\{B^{-1}R^nB(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,\ldots\ldots}$均在同一圓$C_z$上，$z\neq\xi_1,\xi_2$，且$\xi_1,\xi_2$爲這些圓$C_z$，$z\neq\xi_1,\xi_2$所分隔。

(ii)-(2) 因爲$\gamma_{z_1}\cap\gamma_{z_2}=\phi$，若$|z_1|\neq|z_2|$。即這些圓$\gamma_z$，$z\neq0,\infty$，均不相交，所以$C_z$這些圓亦均不相交。

(ii)-(3)若$\alpha\in Q$則$\exists\, m,n\in\mathbb{Z}$，$\ni\alpha=\dfrac{m}{n}$且$(n,m)=1$。$\alpha=\dfrac{\theta}{2\pi}$且

$\theta\neq2k\pi$,所以$\alpha\neq2k$. 因$\alpha=\dfrac{m}{n}$，且$\alpha\neq2k$，所以$\{R^k(z)\}_{k=0,\pm1,\pm2,\ldots}$

$=\{R^{k-1}(z),R^{k-2}(z),\ldots\ldots,R(z),z,R^{-1}(z),\ldots\ldots,R^{-(k-1)}(z)\}$

即 $\{R^n(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,}\cdots$爲有限集合，故 $\{A^n(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,\ldots}$爲有限集合。

設$\{A^n(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,\ldots}$爲有限集合，則$\{R^n(z)\}_{n=0,1,2,\ldots\ldots}$爲有限集合，則$\exists k\in\mathbb{Z}-\{0\}\ni R^k(z)=z\ \therefore e^{ik\theta}=1$

$\Rightarrow k\theta=2m\pi\ \ \exists\, m\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow2\pi\alpha k=2m\pi\Rightarrow k\alpha=m\Rightarrow\alpha=\dfrac{m}{k}\in Q$

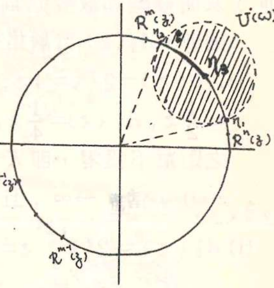
(ii)-(4) 設$\alpha\notin Q$，欲證$\{A^n(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,\ldots\ldots}$在$C_z$上具有稠密性，即證$\{R^n(z)\}_{n=0,1,2,\ldots\ldots}$在$\gamma_z$上具有稠密性，則只需證明：

$\forall U_{\gamma_z}$爲$\gamma_z$上之開集且$U_{\gamma_z}\cap\gamma_z\neq\phi$則

$U_{\gamma_z}\cap\{R^n(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,\ldots\ldots}\neq\phi$

設$\exists U_{\gamma_z}$爲$\gamma_z$之開集且$U_{\gamma_z}\cap\gamma_z\neq\phi$，且$U_{\gamma_z}\cap\{R^n(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,\ldots\ldots}$$=\phi$則$\exists\, U(w)=\{\eta\mid\|\eta-w\|<\gamma,\gamma>0\}\ni U(w)\cap\{R^n(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,\ldots}$

$=\phi$（因為 $\{U(w)\}_{w\in\mathbb{C}}$ 為 $(\mathbb{C},\ \mathcal{T}_{\|\ \|})$ 之一組基底（basis），其中 $\mathcal{T}_{\|\ \|}$ 乃為由"$\|\ \|$"所導出之位相（Topology），則 $\{U(w)\cap\gamma_z\}_{w\in\mathbb{C}}$ 為 $(\gamma_z,\ \mathcal{T})$ 之一組基底，$(\gamma_z,\ \mathcal{T})$ 為 $(\mathbb{C},\ \mathcal{T}_{\|\ \|})$ 之子空間）




設 $\{\eta\mid\|\eta-w\|=\gamma_1,\ \gamma>0\}\cap\gamma_z=\{\eta_1,\eta_2\}$，

且設 $R^n(z)$, $R^m(z)$ 為最靠近弧 $\eta_1\eta_3\eta_2$ 之兩點（見右圖），$R^n(z), R^m(z)\in\{R^n(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,\ldots}$，即介於 $R^n(z)$ 與 $R^m(z)$ 之間，沒有任何 $\{R^n(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,\ldots\ldots}$ 中之元素，則介於 $R^{n-1}(z)$ 與 $R^{m-1}(z)$ 之間亦無任何 $\{R^n(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,\ldots}$ 中之元素。因若 $\exists k\ni R^k(z)$ 介於 $R^{n-1}(z)$，與 $R^{m-1}(z)$ 之間，則 $R^{k+1}(z)$ 介於 $R^n(z)$ 與 $R^m(z)$ 之間，與無任何 $\{R^n(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,}$ ……中之元素介於 $R^n(z)$ 與 $R^m(z)$ 之間矛盾。同理亦無任何 $\{R^n(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,}$ ……中之元素介於 $R^{n-2}(z), R^{m-2}(z)$ 之間，………。

設 $N=|\ \{R^n(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,\ldots\ldots}\ |$ 則

$$N<2\left(\frac{2\pi}{\arg\eta_2-\arg\eta_1}\right)\text{ 其中 }0\leq\arg\eta_1,\ \arg\eta_2<2\pi\text{。}$$

則 $\{R^n(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,\ldots\ldots}$ 為有限集合，故 $\{A^n(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,\ldots}$ 亦為有限集合，則 $\alpha\in Q$，正與假設 $\alpha\notin Q$ 矛盾。故 $\{R^n(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,\ldots\ldots}$ 在 $\gamma_z$ 上具有稠密性。

(iii) 由前一個定理得知，我們只需看 $R(z)$ 在此條件下，所表現的行為，可推得我們所需要的結果。故令 $\gamma_z^{\perp}$ 為過 $0$，$\infty$ 與 $z$，且與 $\gamma_z$ 正交之射線，且 $F$ 為 $\gamma_z^{\perp}-\{0,\infty\}$ 和介於 $\gamma_z^{\perp}$ 與 $\gamma_{R(z)}^{\perp}$ 之間的開區域的聯集，欲證，當 $\alpha=\dfrac{1}{n}$ 時則

$$\bigcup_{m=-\infty}^{+\infty}R^m(F)=\hat{\mathbb{C}}-\{0,\infty\}\text{ 且 }R^k(F)\cap R^m(F)=\phi\ \ \forall m,k,\text{ 且 }m\neq k\text{。}$$

$$\alpha=\frac{1}{n},\ R(z)=e^{\frac{i2\pi}{n}}z\text{ 則 }R^n(z)=z\text{，故 }\{R^n(z)\}_{n=0,\pm1,\pm2,\ldots\ldots}$$

$$=\{R^m(z)\}_{m=0}^{n-1}$$

$$\therefore\ \bigcup_{m=-\infty}^{+\infty}R^m(F)=\bigcup_{m=0}^{n-1}R^m(F),\ R^m(F)=\{R^m(w)\mid w\in F\}=\{e^{i\frac{2\pi m}{n}}w\mid w\in F\}$$

$0$，$\infty$ 為 $R(z)$ 之兩固定點，且 $R^m(z)=e^{i\frac{2\pi m}{n}}z$，所以 $R^m(\gamma_z^{\perp}-\{0,\infty\})$

$=\gamma_{R^m(z)}^{\perp}-\{0,\infty\}$ 且 $R^m(\gamma_{R(z)}^{\perp})=\gamma_{R^{m+1}(z)}^{\perp}$。則 $R^m(F)$ 為 $\gamma_{R^m(z)}^{\perp}-\{0,\infty\}$ 和介於 $\gamma_{R^m(z)}^{\perp}$ 與 $\gamma_{R^{m+1}(z)}^{\perp}$ 之間的開區域的聯集（即將 $F$ 旋轉 $\dfrac{2m\pi}{n}$）故

$R^m(F)\cap R^k(F)\neq\phi$，$\forall m.k$，且 $m\neq k$，且 $\bigcup_{m=0}^{n-1} R^m(F)=\hat{\mathbb{C}}-\{0,\infty\}$。

（Ⅲ）双曲綫型和嚴格偏斜型：考慮 $A_1(z)=2z$，$A_2(z)=2e^{i\frac{\pi}{3}}z$，則 $A_1(z)$ 爲双曲綫型，$A_2(z)$ 爲嚴格偏斜型，且固定點均爲 0，∞．

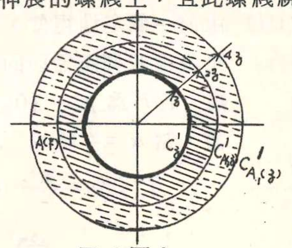
(1) $A_1^2(z)=2^2z=4z$，$A_1^3(z)=8z$，……，$A_1^n(z)=2^nz$，………，且 $A_1^{-1}(z)=\frac{1}{2}z$，$A_1^{-2}(z)=\frac{1}{4}z$，…………，$A_1^{-n}(z)=2^{-n}(z)$，………．令 $K\subset\hat{\mathbb{C}}$ 且 $K$ 與 0，∞ 之距離不爲零，即 $K\subset\hat{\mathbb{C}}-\{\infty\}$，則 $A_1^n(z)=2^nz\to\infty$，且 $A^{-n}(z)=2^{-n}z\to 0$，當 $n\to\infty$，且 $\forall z\in K$。所以 $A_1^n(K)\to\{\infty\}$，$A_1^{-n}(K)\to\{0\}$，當 $n\to\infty$

(i) $A_2^2(z)=2^2e^{i\frac{2\pi}{3}}z=4e^{i\frac{2}{3}\pi}z$，$A_2^3(z)=2^3e^{i\frac{3}{3}\pi}z$，………，$A_2^n(z)=2^ne^{i\frac{n}{3}\pi}z$，………；且 $A_2^{-1}(z)=\frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2}z$，$A_2^{-2}(z)=\frac{e^{-i\frac{2}{3}\pi}}{4}z$，……，$A_2^{-n}(z)=2^{-n}e^{-i\frac{n}{3}\pi}z$，……。令 $K\subset\hat{\mathbb{C}}$ 且 $K$ 與 0，∞ 之距離不爲零，則 $A_2^{-n}(z)=2^{-n}e^{-i\frac{n}{3}\pi}z\to 0$，且 $A_2^n(z)=2^ne^{i\frac{n}{3}\pi}z\to\infty$，當 $n\to\infty$，且 $\forall z\in K$．所以 $A_2^n(K)\to\{\infty\}$，$A_2^{-n}(K)\to\{0\}$，當 $n\to\infty$。

(2) 因爲 $|A_1^n(z)|=2^n|z|$，且 $\arg A_1^n(z)=\arg z$，$\forall n=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots\}$，所以 $\{A_1^n(z)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 位在以 0 爲端點，且過 $z$ 之射綫上。

(2′) $|A_2^n(z)|=2^n|z|$，且 $\arg A_2^n(z)=(\arg z)+\frac{n}{3}\pi$，$\forall n\in\{0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots\}$，所以 $\{A_2^n(z)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 位在以 0 爲中心向外伸展的螺綫上，且此螺綫繞 0 無數多圈。

(3) 令 $C'_{\zeta_0}=\{\zeta\mid|\zeta|=|\zeta_0|\}$，且 $F$ 爲 $C'_{\zeta_0}$ 和介於 $C'_z$ 與 $C'_{A_1(z)}$ 之間的開區域的聯集，$\forall z\neq 0,\infty$，則 $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} A_1^n(F)=\hat{\mathbb{C}}-\{0,\infty\}$，且 $A_1^m(F)\cap A_1^n(F)=\phi$，$\forall m,n$，$m\neq n$。（參閱圖四）



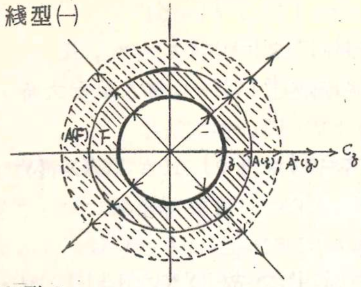

圖（四）

(3′) $A_2(z)$ 之冪序列亦具有 $A_1(z)$ 之冪序列所具有的第三個幾何性質。

問題：一般的双曲綫和嚴格偏斜型綫性變換之冪序列是否亦具有 $A_1(z)$，$A_2(z)$ 之冪序列所有的幾何性質。

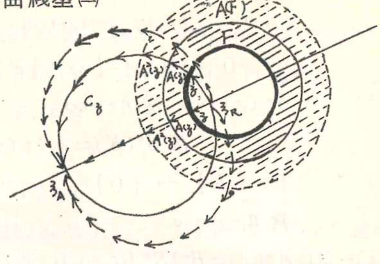
我們的答案是肯定的，下列我們將給予一定理將前面兩個例子一般化，但在敍述定理之前，我們仍先看看此兩種綫性變換之冪序列在複數平面上的圖形。

雙曲線型(一)



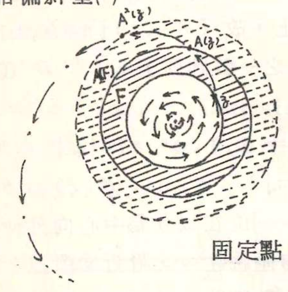

固定點 0 ，∞

雙曲線型(二)



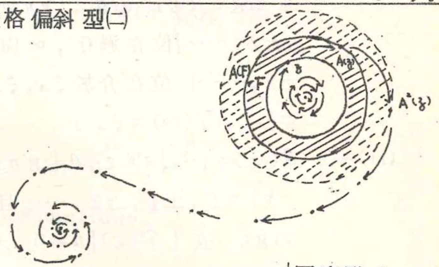

固定點 $\xi_A$ ，$\xi_R$

嚴格偏斜型(一)




固定點 0 ，∞

嚴格偏斜型(二)




固定點 $\xi_A$ ，$\xi_R$

定理：設 $A$ 爲双曲線型或嚴格偏斜型，且 $\xi_A$,$\xi_R$ 爲 $A$ 之固定點

(i) $A^n(k) \to \{\xi_A\}$ ( attiactive fixed point )，且 $A^{-n}(k) \to \{\xi_R\}$ (repellent fixed point) 當 $n \to \infty$，其中 $K \subseteq \hat{\mathbb{C}}$，且 $K$ 與 $\xi_A$，$\xi_R$ 之距離不爲零。

(ii)－(1)若 $A$ 爲双曲線型則 $\{A^n(z) \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots\}$ 位在介於 $\xi_A$，$\xi_R$ 之間 $C_z$ 上之圓弧上。

(ii)－(2)若 $A$ 爲嚴格偏斜型則 $\{A^n(z) \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots\}$ 密集圍繞在 $\xi_A$，$\xi_R$ 附近。

(iii)令 $C''_{z_0} = \{\zeta \mid |\zeta| = |\zeta_0|\}$ 且 $B$ 爲一線性變換滿足下列性質：$BAB^{-1}$ 具有兩個固定點 0 ，∞。若 $F$ 爲 $B^{-1}(C''_{B(z)}) = C'_z$ 和介於 $C'_z$ 與 $C'_{A(z)}$ 之間的開區域的聯集（ $z \neq \xi_A, \xi_R$ ），則

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} A^n(F) = \hat{\mathbb{C}} - \{\xi_A, \xi_R\} \text{ 且 } A^n(F) \cap A^m(F) = \phi \ \forall m, n \text{，且 } m \neq n .$$

證明：(i)－(1) $A$ 爲双曲線型，$A \sim |\lambda_A| z = S(z)$，故只需檢驗 $S(z)$。

$S^n(z) = |\lambda_A|^n z$, $|\lambda_A| \neq 0, 1$，且 $S^{-n}(z) = |\lambda_A|^{-n} z$ 則

$S^n(z) \to \infty$, $S^{-n}(z) \to 0$ 當 $n \to \infty$ 且 $z \neq 0, \infty$

故 $S^n(K) = \{S^n(z) \mid z \in k\} \to \{\infty\}$，且 $S^{-n}(k) = \{S^{-n}(z) \mid z \in k\} \to \{0\}$ 當 $n \to \infty$

(i)－(2) $A$ 爲嚴格偏斜型，$A \sim |\lambda_A| e^{i\theta} z = S(z)$ 且 $S^n(z) = |\lambda_A|^n e^{in\theta} z$，

$S^{-n}(z)=|\lambda_A|^{-n}e^{-in\theta}z$

$|S^{-n}(z)|=|\lambda_A|^{-n}|e^{-in\theta}||z|=|\lambda_A|^{-n}|z|\to 0$ 當 $n\to\infty$，且

$\forall r>0$，$|S^n(z)|=|\lambda_A|^n|e^{in\theta}||z|=|\lambda_A|^n|z|>r$，當 $n$ 足夠大時，故 $S^n(z)\to\infty$ 當 $n\to\infty$，

故 $S^n(K)=\{S^n(z)\,|\,z\in K\}\to\{\infty\}$ 且 $S^{-n}(K)=\{S^{-n}(z)\,|\,z\in K\}\to\{0\}$

當 $n\to\infty$。

(ii)−(1) $A^n(z)=B^{-1}S^nB(z)$ 且 $S^n(z)=|\lambda_A|^nz$，故 $|S^n(z)|=|\lambda_A|^n|z|$ 且 $\arg S^n(z)=\arg z$ $\forall n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$。則 $\{S^n(z)\,|\,n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots\}$ 位在過 0，∞ 與 $z$ 之射綫上，故 $\{A^n(z)\,|\,n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots\}$ 位在介於 $\xi_A$，$\xi_R$ 之間 $C_z$ 上之一個圓弧上。（$\because B^{-1}(0)=\xi_R$，$B^{-1}(\infty)=\xi_A$）

(ii)−(2) $S(z)=|\lambda_A|e^{i\theta}z$，$\theta\neq 2n\pi$，且 $|\lambda_A|\neq 0,1$，$S^n(z)=|\lambda_A|^ne^{in\theta}z$，$\forall n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$ 且 $|S^n(z)|=|\lambda_A|^nz$，$\arg S^n(z)=n\theta+\arg z$，故 $\{S^n(z)\,|\,n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots\}$ 位在以 0 爲中心向外伸展的螺綫上，且當 $n$ 足夠大時，$S^n(z)$ 均圍繞在∞之附近。所以 $\{A^n(z)\,|\,n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots\}$ 密集的圍繞在 $\xi_A$ 與 $\xi_R$ 附近。

(iii) 令 $\gamma'_z=\{\zeta\,|\,|\zeta|=|z|\}$，且 $F$ 爲 $\gamma'_z$ 和介於 $\gamma'_z$ 與 $\gamma'_{S(z)}$ 之間的開區域的聯集（$z\neq 0$，∞），欲證

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty}S^n(F)=\hat{\mathbb{C}}-\{0,\infty\} \text{ 且 } S^n(F)\cap S^m(F)=\phi.\ \forall m,n \text{ 且 } m\neq n$$

(iii)−(1) $A$ 爲双曲綫型，則 $S(z)=|\lambda_A|z$，令 $E$ 爲介於 $\gamma'_z$ 與 $\gamma'_{S(z)}$ 之間的開區域，則 $F=\gamma'_z\cup E$，且 $S^n(F)=S^n(\gamma'_z)\cup S^n(E)$。

$\forall\zeta\in\gamma'_z$，$|\zeta|=|z|$，$z\neq 0$，∞，$S^n(\zeta)=|\lambda_A|^n\zeta$，則 $\zeta=(|\lambda_A|^n)^{-1}S^n(\zeta)\Rightarrow|\lambda_A|^{-n}|S^n(\zeta)|=|z|\Rightarrow|S^n(\zeta)|=|\lambda_A|^n|z|$。

故 $S^n(\gamma'_z)=\{\eta\,|\,|\eta|=|\lambda_A|^n|z|=|S^n(z)|\}=\gamma'_{S^n(z)}$，同理 $S^n(\gamma'_{S(z)})=\gamma'_{S^{n+1}(z)}$。$\therefore S^n(F)$ 爲介於 $\gamma'_{S^n(z)}$ 與 $\gamma'_{S^{n+1}(z)}$ 之間的開區域，且

$S^n(F)$ 爲 $\gamma'_{S^n(z)}$ 和介於 $\gamma'_{S^n(z)}$ 與 $\gamma'_{S^{n+1}(z)}$ 之間的開區域，且 $S^n(F)$ 爲 $\gamma'_{S^n(z)}$ 和介於 $\gamma'_{S^n(z)}$ 與 $\gamma'_{S^{n+1}(z)}$ 之間的開區域的聯集，故得證。（$\because\gamma'_z$ 均爲以 0 爲圓心，$|z|$ 爲半徑之同心圓）

(iii)−(2) $A$ 爲嚴格偏斜型，則 $S(z)=|\lambda_A|e^{i\theta}z$，且 $S^n(F)=S^n(\gamma'_z)\cup S^n(E)$，其中 $E$ 定義於 (iii)−(1)。

$\forall\zeta\in\gamma'_z$，$|\zeta|=|z|$，$z\neq 0$，∞，且 $|S^n(\zeta)|=||\lambda_A^n|e^{in\theta}\zeta|=|\lambda_A|^n|e^{in\theta}||\zeta|=|\lambda_A|^n|\zeta|=|\lambda_A|^n|z|$ 故 $S^n(\gamma'_z)=\{\eta\,|\,|\eta|=|\lambda_A|^n$

$|z|=|S^n(z)|\} = \gamma_{S^n(z)}$，同理 $S^n(\gamma_{S(z)}) = \gamma_{S^{n+1}(z)}$。所以 $S^n(E)$ 爲介於 $\gamma_{S^n(z)}$ 與 $\gamma_{S^{n+1}(z)}$ 之間的開區域，則 $S^n(F)$ 爲 $\gamma_{S^n(z)}$ 和介於 $\gamma_{S^n(z)}$ 與 $\gamma_{S^{n+1}(z)}$ 之間的開區域的聯集。且 $\gamma_z$ 均爲以 0 爲圓心，以 $|z|$ 爲半徑之同心圓，$\forall z \neq 0, \infty$ 故得證。

註：我們稱圓 $C_z$ 在 $A(z)$ 之映射下不變卽 $A(C_z)=C_z$。

系理 1：$A(z)$ 爲嚴格偏斜型 $\Rightarrow \nexists C_z \ni A(C_z)=C_z$

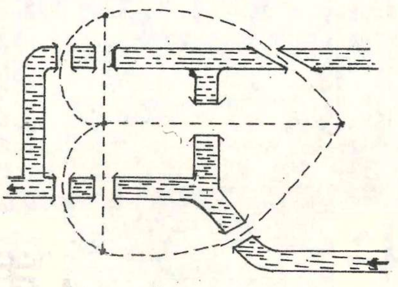
系理 2：(i) 若 $A \neq \mathrm{id}$，且 $A^n=\mathrm{Id} \Rightarrow A$ 爲橢圓型且 $A \sim$ “$z \mapsto e^{i2\pi\alpha} z$” 其中 $\alpha \in Q$

(ii) $\{A^n(z) \mid n \in Z\}$ 具有兩個以上的凝集點 (accumulation point) $\Leftrightarrow A$ 爲橢圓型且 $A \sim$ “$z \mapsto e^{i2\pi\alpha} z$”，其中 $\alpha \notin Q$。

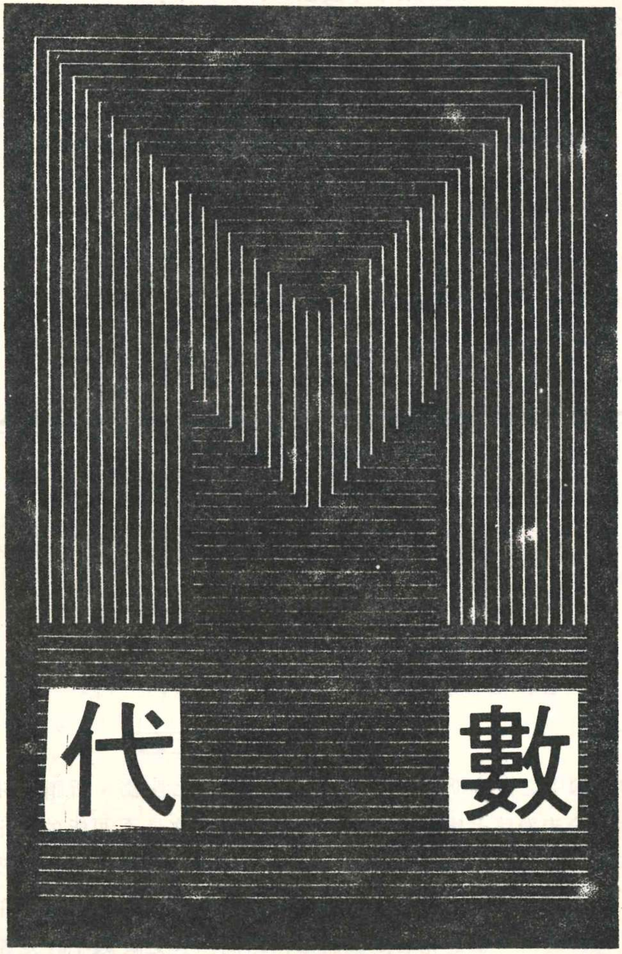
參考資料：


1. Ahlfors: Complex Analysis.
2. Greenleaf: Introduction to Complex Variables.
3. Lester R. Ford: Automorphic Functions.


## 格林斯堡橋的問題



在普魯士國中之格林斯堡市中有如上圖所示之七座橋，所謂格林斯堡橋的問題，便是證明完全走過該七座橋，而每橋不能走過兩次是不可能的。此問題，奧衣勒(Euler)曾證明過。分析此問題時，吾人只須如上圖所示之虛綫及虛綫之交點來加以研究，而上述之問題，變成走完各虛綫而每兩點之間的虛綫不許走兩次是不可能的。吾人能夠證得，欲走完各虛綫而每兩點間所連之虛綫不許走兩次若且若虛綫之個數爲奇數時，其點之個數必須小於3，格林斯堡橋的問題共有虛綫七條爲奇數，而其點則爲4不小於3，故得證格林斯堡橋的問題。


代
數

# A BIBLIOGRAPHY OF APPLIED LINEAR ALGEBRA

The university of Tennessee Knoxuille

郭王月娥

Linear algebera can be classified into two types of applications : namely, applications in the other branches of mathematics and applications in the sciences.

The first type-Applications to other branches of mathematics - can be in the following areas : (a) Linear equations, (b) Taylor series, (c) Systems of ordinary differential equations.

The second type-Applications in the other sciences-can be in the following areas :

1. Optimization : (a) Linear programming, (b) Non - linear programming, (c) Theory of games.
2. Applications to computing (a) Linear equations, (b) Eigenvalue problems.
3. Statistics (a) Least squares and regression, (b) Markov chains.
4. Physical sciences and engineering (a) Dynamics of particles, (b) Vibrating systems, (c) Electrical networks, (d) Control theory, (e) Structures.
5. Nonphysical sciences (a) Economics, (b) Biological sciences, (c) Social sciences.

The following is a relatively comprehensive bibliography of applied linear algebra. The following abbreviations are used for areas of applications :

M - Applications to other branches of mathematics

C - Applications to computing

O - Optimization

S - Statistics

P - Physical sciences and engineering

N - Nonphysical sciences


1. Allen, Roy G. Mathematical Economics, 2nd ed. New York, St. Martin's Press, Inc., 1959. (N)
2. Almon, Clopper. Matrix Methods in Economics. Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1967. (N)
3. Amundsen, Neal R. Mathematical Methods in Chemical Engineer-ing : Matrices and their Applications. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall Inc., 1966. (P)
4. Bartholomew, D. J. Stochastic Models for Social Processes. New York, John Wiley and Sons, Inc., 1968. (N)
5. Bellman, Richard. Stability Theory of Differential Equations. New York, Dover Publications, 1969. (M)
6. Bellman. R., Cooke, K.L. Modern Elementary Differential Equations, 2nd ed., Addison-Wesley, 1971. (M)
7. Borg, S.F., Matrix-Tensor Methods in Continuum Mechanics, Van Nostrand 1963. (P)
8. Ben-Israel, Adi and Greville, T.N.E., Generalized Inverses : Theory and Applications, Wiley, New York, 1974. (M)
9. Boot, Johannes. Mathematical Reasoning in Economics and Management Science, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1967. (N)
10. Braae, R. Matrix Algebra for Electrical Engineers. Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1964. (P)
11. Bronson, R. Matrix Methods, Academic Press, 1970. (C)
12. Brouwer, W. Matrix Methods in Optical Instrument Design. Menlo Park, California, W.A. Benjamin, Inc., 1964. (P)
13. Crowell, R.H. and Williamson, R.E. Calculus of Vector Functions.

Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1962. (M)

14. Dantzig, George B. Linear Programming and Extensions. Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1963. (O)

15. Davies, Owen L., ed. Design and Analysis of Industrial Experiments, 2nd ed. New York, Hafner Publishing Company, 1967. (P)

16. Forsythe, George E. and Moler, C.B. Computer Solution of Linear Algebraic Systems. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1967. (C)

17. Frazer, Robert A., et al. Elementary Matrices and Some Applications to Dynamics and Differential Equations. New York, Cambridge University Press, 1938. (M)

18. Gale, David. Theory of Linear Economic Models. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1961. (O)

19. Gass, Saul I. Linear Programming. New York, McGraw-Hill Book Company, 1969. (O)

20. Gennaro, J.J. Computer Methods in Solid Mechanics, MacMillan (1965). (P)

21. Gibbs, W.J. Tensors in Electrical Machine Theory, Chapman and Hall, 1952. (P)

22. Glicksman Abraham M. Linear Programming and the Theory of Games. New York, John Wiley and Sons, Inc., 1963. (O)

23. Goldberg, Samuel. Introduction to Difference Equations. New York, John Wiley and Sons, Inc., 1958. (M)

24. Goldstein, Herbert. Classical Mechanics. Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1950. (P)

25. Goodman, A.W. and Ratti, J.S. Finite Mathematics with Applications. New York, The Macmillian Company, 1971. (N)

26. Graybill, Franklin A. Introduction to Linear Statistical Models, Vol. I New York, McGraw-Hill Book Company, 1961. (S)

27. Graybill, Franklin A. Introduction to Matrices with Applications in Statistics. Belmont, California, Duxbury Press, 1969. (S)

28. Guillemin, Ernst A. Mathematics of Circuit Analysis. Cambridge, Massachusetts, M.I.T. Press, 1949. (P)

29. Heading, J. Matrix Theory for Physicists. New York, John Wiley

and Sons, Inc., 1958. (P)

30. Higman, Bryan. Applied Group-Theoretic and Matrix Methods. New York, Dover Publications, 1964. (P)

31. Householder, A.S. Lectures on Numerical Algebra, Mathematical Association of America, 1972, (C)

32. Howard, Ronald A. Dynamic Programming and Markov Processes. Cambridge, Massachusetts, M.I.T. Press, 1960. (S)

33. Hyvarinen, L.P. Mathematical Modeling for Industrial Processes. New York, Springer-Verlag New York, 1970. (N)

34. Intriligator, Michael D. Mathematical Optimization and Economic Theory. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1971. (O)

35. Johnston, J.B., et al. Linear Equations and Matrices. Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1966. (N)

36. Johnston, John Econometric Methods. New York, McGraw-Hill Book Company, 1963. (N)

37. Karlin, S. Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics, vols. I and II. Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1959. (O)

38. Kemeny, John G., et al. Finite Mathematics with Business Applications. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1966. (N)

39. Kemeny, John G., et al. Introduction to Finite Mathematics, 2nd ed. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1966. (O)

40. Kemeny, John G. and Snell, J. Laurie. Mathematical Models in the Social Sciences. Waltham, Massachusetts, Blaisdell Publishing Company, 1962. (N)

41. Keyfitz, Nathan. Introduction to the Mathematics of Population. Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1968. (S)

42. Kron, G, Tensor Analysis of Networks, Wiley, 1939. (P)

43. Kron, G. Tensors for Circuits, Dover, 1959. (P)

44. Kron, G. Diakoptics, Macdonald, 1963. (P)

45. Lancaster, P. Lambda-Matrices and Vibrating Systems, Pergamon, 1966. (P)

46. LeCorbeiller, P. Matrix Analysis of Electrical Networks, Harvard Univ. Press, 1950. (P)

47. Maki, D. P., Thompson, M. Mathematical Models and Applications, Prentice-Hall, 1973. (P)

48. Manne, Alan S. Economic Analysis for Business Decisions. New York, McGraw-Hill Book Company, 1961. (N)

49. Noble, B. Applications of Undergraduate Mathematics in Engineering. New York, the Macmillan Company, 1967. (P)

50. Noble, Ben, and Daniel, J.W. Applied Linear Algebra. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1977. (M)

51. Nodelman, H. M. and Smith, F. W. Mathematics for Electronics with Applications. New York, McGraw-Hill Book Company, 1956.

52. Pestel, Edward C. and Leckie, Frederick A. Matrix Methods in Elastromechanics, New York, McGraw-Hill Book Company, 1963.(P)

53. Pielou, E.C. Introduction to Mathematical Ecology. New York, John Wiley and Sons, Inc., 1969. (N)

54. Pipes, Lousi A. Matrix Methods for Engineering. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1963. (P)

55. Rao, C.R. and Mitra, S.K. Generalized Inverse of Matrices and its Applications, John Wiley and Sons, New York, 1971. (M)

56. Rogers, Andrei. Matrix Analysis of Interregional Population Growth and Distribution. Berkley, California, University of California Press, 1968. (S)

57. Searle, S.R. and Hausman, W.H. Matrix Algebra for Business and Economics. New York, John Wiley and Sons, Inc., 1970. (N)

58. Searle, Shayle R. Matrix Algebra for the Biological Sciences. New York, John Wiley and Sons, Inc., 1966. (N)

59. Schwartz, J. T. Lectures on the Mathematical Method in Analytical Economics, Gordon and Breach, 1961. (N)

60. Simonnard, M. Linear Programming, translated by W.S. Jewell, Prentice-Hall, 1966. (O)

61. Strang, G. Linear Algebra and its Applications, Academic Press, New York, 1976. (M)

62. Wang, C.K. Matrix Methods of Structural Analysis, International Text-Book Company, 1966. (P)

63. Wang, P.C. Numerical Matrix Methods in Structural Mechanics, Wiley, 1966. (P)

64. Williams, G. Computational Linear Algebra with Models, Allyn and Bacon, 1975. (C)

65. Yan, C.S. Introduction to Input-Output Economics. New York, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969. (N)

註：作者撰寫本文的目的，乃在於提供一些綫性代數及其應用的參考資料，更進一步使我們深刻體認到數學不只是一種藝術，而且其應用範圍之廣，是無可比擬的，更盼望有志研究的同學，善加利用這些寶貴的資料。

——編輯小組

# ON VERONESE MAPPING

紀文鎮

題目： On Veronese Mapping

In this note we are interested in a simple method to transform certain problems connected with hypersurfaces to the case of hyperplanes. If no ambiguity, all the varieties are considered to be ouer $\mathbb{C}$, the field of complex numbers.

We know that $\mathbb{P}^n$ can be viewed as $\mathbb{C}^n$ plus a "hyperplane at infinity." For example, $\mathbb{P}^n - H_0$ is naturally isomorphic to $\mathbb{C}^n$, where $H_0$ = the set of points a in $\mathbb{P}^n$ such that $a_0 = 0$. In general, for any hyperplane H, H= locus of solutions of $\sum_{i=0}^{n} b_i X_i = 0$, (not all $b_i = 0$), we find that $\mathbb{P}^n - H \cong \mathbb{C}^n$ via

$$(a_0, \cdots, a_n) \rightarrow \left(\frac{a_0}{\sum b_i a_i}, \cdots, \frac{a_n}{\sum b_i a_i}\right)$$

$\uparrow$

omit one of these for which the corresponding $b_i$ is nonzero.

This shows the variety $\mathbb{P}^n - H$, where H is a hyperplane in $\mathbb{P}^n$, is affine. We may look at the following question:

Is the variety $\mathbb{P}^2 - X$, where $X$ is the plane conic $XY - Z^2$ in $P^2$, affine ?

Consider the mapping $T$ of $\mathbb{P}^2$ into $\mathbb{P}^5$ defined by

$T(u_0, u_1, u_2) = (u_0^2, u_1^2, u_2^2, u_0 u_1, u_0 u_2, u_1 u_2)$. Obiviously it is regular, and in some subset of $\mathbb{R}^5$, the mapping is isomorphic embedoling, for example, in the open subset $\mathbb{P}^5 - H_0$, define

$(v_0, v_1, \cdots, v_5) \xrightarrow{S} (v_0, v_3, v_4)$. Then

$ST(u_0, u_1, u_2) = S(u_0^2, u_1^2, u_2^2, u_0u_1, u_0u_2, u_1u_2) = (u_0^2, u_0u_1, u_0u_2)$
$= (u_0, u_1, u_2)$.

$TS(u_0^2, u_1^2, u_2^2, u_0u_1, u_0u_2, u_1u_2) = T(u_0^2, u_0u_1, u_0u_2) = (u_0^4,$
$u_0^2u_1^2, u_0^2u_2^2, u_0^3u_1, u_0^3u_2, u_0^2u_1u_2) = (u_0^2, u_1^2, u_2^2, u_0u_1, u_0u_2, u_1u_2)$.

Thus $T$ is an isomorphic embedding. $T(X)$ is the intersection of $T(\mathbb{P}^2)$ and the hyperplane H with the equation $V_2 - V_3 = 0$ in $\mathbb{P}^5$. So $T(\mathbb{P}^2 - X) = T(\mathbb{P}^2) \cap \mathbb{P}^5 - \mathrm{H}$ is affine, and hence $\mathbb{P}^2 - X$ is affine. The transformation $T$ makes it possible to reduce the problem connected with hypersurface $X$ to the case of hyperplane H. In fact, the variety $\mathbb{P}^2 - X$, where $X$ is a conic in $\mathbb{P}^2$, is affine.

We now turn our attention to the general case. Let $W$ be the set of all homogeneous polynomials $F$ of degree m in the variables $S_0, \cdots, S_n$. $W$ is a linear space whose dimension is easily calculated to be $\binom{n+m}{m}$. We denote homogeneous coordinates in $\mathbb{P}^{\nu_{n,m}}$ by $v_{i_0 \cdots i_n}$, where $\nu_{n,m} = \binom{n+m}{m} - 1$ and $i_0, \cdots, i_n$ are any non-negativ integers such that $i_0 + \cdots + i_n = m$. Consider the mapping $V_m$ of $\mathbb{P}^n$ into $\mathbb{P}^{\nu_{n,m}}$ defined by the formulae

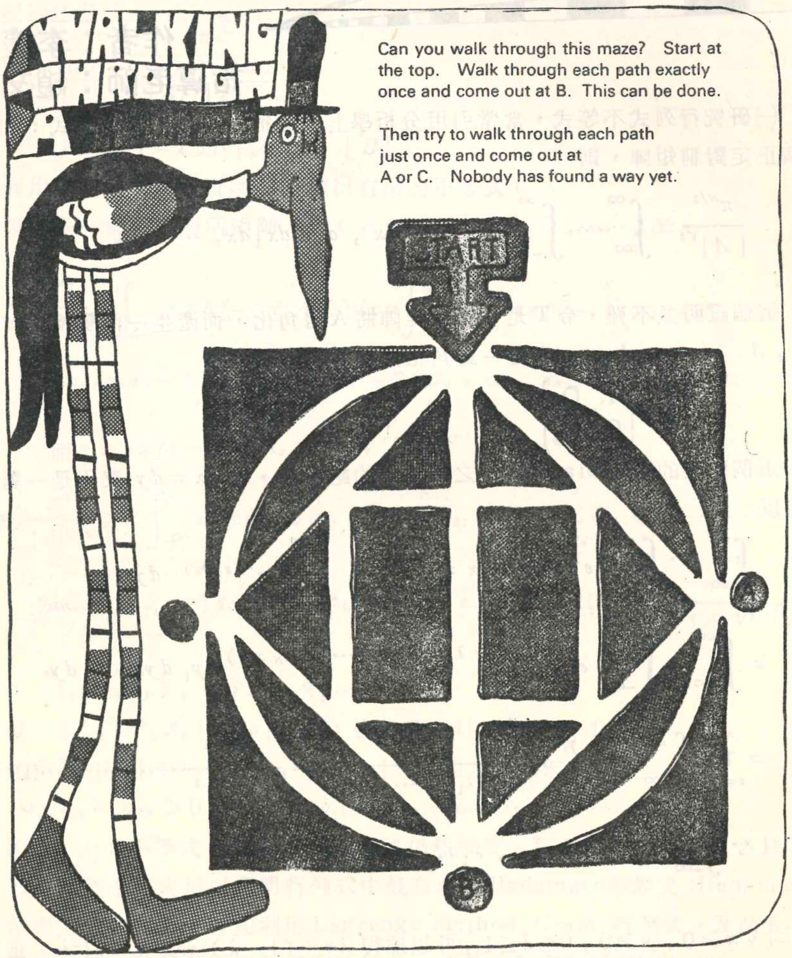
$V_{i_0 \cdots i_n} = u_0^{i_0} \cdots u_n^{i_n}, \quad i_0 + \cdots + i_n = m$.

This $V_m$ is called a Veronese mapping, and $V_m(\mathbb{P}^n)$ a Veronese variety. From the defining formulae it follows that on $V_m(\mathbb{P}^n)$

$V_{i_0 \cdots i_n} V_{j_0 \cdots j_n} = V_{k_0 \cdots k_n} V_{l_0 \cdots l_n}$ if $i_0 + j_0 = k_0 + l_0, \cdots,$
$i_n + j_n = k_n + l_n$.

By the preceding equality, it is easy to derive that at least one coordinate of the form $V_{0 \cdots m \cdots 0} \neq 0$ and that, for example, in the open set $V_{m0 \cdots 0} \neq 0$ the mapping $u_0 = V_{m0 \cdots 0}, u_1 = V_{m-1\,1\,0 \cdots 0}, \cdots, u_n = V_{m-1, 0, \cdots, 0, 1}$ is inverse to $V_m$. Therefore $V_m$ is an isomorphic embedding of $\mathbb{P}^n$ into $\mathbb{P}^{\nu_{n,m}}$.

The significance of a Veronese mapping lies in the fact that if $F = \Sigma a_{i_0 \cdots i_n} u_0^{i_0} \cdots u_n^{i_n}$ is a form of degree m and if H is the hypersurface defined by the equation $F = 0$ in $\mathbb{P}^n$, then $V_m(\mathrm{H})$ is the intersection of $V_m(\mathbb{P}^n)$ and the hyperplane with the equation $\sum a_{i_0\cdots i_n} V_{i_0\cdots i_n} = 0$ in $\mathbb{P}^{V_{n,m}}$. Therefore a Veronese mapping makes it possible to reduce certain problems connected with hypersurfaces to the case of hyperplane.



# 簡單的行列式不等式

作者：李慶俊
指導老師：趙文敏

㈠研究行列式不等式，常常引用分析學上一個很有價值的積分等式：如果A是一個正定對稱矩陣，則

$$\frac{\pi^{N/2}}{|A|^{1/2}}=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x,Ax)}\,dx\ ,\quad dx=dx_1\,dx_2\cdots\cdots dx_N$$

這個證明並不難，令T是一正交矩陣將A對角化，而產生一個變換 $x=Ty$，則 $(x, A_x)=(y,\Lambda y)$，$\Lambda$是一對角化矩陣

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N\end{bmatrix}$$

∵這個變換的 Jacobian等於$T$之行列式的絕對值，∴ $dx=dy$ 又$T$是一對一變換，所以

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x,Ax)}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(y,\Lambda y)}\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots\cdots+\lambda_Ny_N^2)}\,dy_1\,dy_2\cdots\cdots dy_N$$

$$=\prod_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda_i y_i^2}\,dy_i=\frac{\pi^{N/2}}{(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_N)^{1/2}}=\frac{\pi^{N/2}}{|A|^{1/2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$(\because\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\pi^{\frac{1}{2}}\ ,\quad \lambda_1\lambda_2\cdots\cdots\lambda_N=|A|\ )$$

㈡ $\forall x\geqslant0$，$y\geqslant0$，$0\leq\lambda\leq1$，可以推得 $\lambda x+(1-\lambda)y\geqslant x^{\lambda}y^{1-\lambda}$，這就是常見的不等式，而行列式亦有類似的結果。

設$A$，$B$都是正定矩陣，$0\leq\lambda\leq1$，則

$$\frac{\pi^{N/2}}{|\lambda A+(1-\lambda)B|^{1/2}}=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda(x,Ax)-(1-\lambda)(x,Bx)}\,dx$$

利用Hölder 不等式，其中 $p=\frac{1}{\lambda}$ , $q=\frac{1}{1-\lambda}$ , 則

$$\frac{\pi^{N/2}}{|\lambda A+(1-\lambda)B|^{1/2}}\leqslant\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x,Ax)}dx\right)^{\lambda}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x,Bx)}dx\right)^{1-\lambda}$$

$$\leqslant\frac{\pi^{\frac{N\lambda}{2}}\pi^{\frac{N(1-\lambda)}{2}}}{|A|^{\frac{\lambda}{2}}|B|^{\frac{1-\lambda}{2}}}=\frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{|A|^{\frac{\lambda}{2}}|B|^{\frac{1-\lambda}{2}}}$$

即 $|\lambda A+(1-\lambda)B|\geqslant|A|^{\lambda}|B|^{1-\lambda}$

(三)利用積分等式(1)可以導出一個很有用的不等式。

設 $A$ 是一個正定對稱矩陣 $A=(a_{ij})$ , $i,j=1,2,\cdots\cdots,N$

$$\frac{\pi^{N/2}}{|A|^{1/2}}=\int_{R^N}exp[-(x,Ax)]dx=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}exp[-\sum_{i=1}^{N}a_{ii}x_i^2$$

$$-2\sum_{j=3}^{N}a_{2j}x_2x_j-2\sum_{j=4}^{N}a_{3j}x_3x_j-\cdots\cdots-2a_{N-1\,N}x_{N-1}\,x_N]\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)dx_1dx_2\cdots dx_N$$

而 $z=exp[-2\sum_{j=2}^{N}a_{ij}x_1x_j]$ , $\because z+z^{-1}\geqslant 2$ , $\forall z\geqslant 0$

$$\text{因此}\ \frac{\pi^{N/2}}{|A|^{1/2}}\geqslant\left(\int_{-\infty}^{\infty}exp[-\sum_{i=2}^{N}a_{ii}x_i^2-2\sum_{j=3}^{N}a_{2j}x_2x_j-2\sum_{j=4}^{N}a_{3j}x_3x_j-\cdots\cdots-\right.$$

$$\left.2a_{N-1\,N}x_{N-1}x_N]dx_2dx_3\cdots\cdots dx_N\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}exp(-a_{11}x_1)^2dx_1\right)\geqslant\frac{\pi^{\frac{N-1}{2}}}{|A_2|^{1/2}}\cdot\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{|a_{11}|^{1/2}}$$

其中 $A_2=(a_{ij})$ , $i,j=2,3,\cdots\cdots,N$

所以 $|a_{11}|^{1/2}|A_2|^{1/2}\geqslant|A|^{1/2}$，也就是 $|A|\leqslant|a_{11}||A_2|$

如此作下去 $|A|\leqslant|a_{11}a_{22}\cdots\cdots a_{NN}|$，又因 $A$ 是正定

故 $a_{11}a_{22}\cdots a_{NN}>0$, $\therefore$ $|A|\leqslant a_{11}a_{22}\cdots\cdots a_{NN}$…………………(2)

事實上，上面不等式，對於非負定矩陣仍然成立。而且等號成立時A必爲對角矩陣。利用這個不等式可以證明行列式中最有名的Hadamard不等式；Hadamard不等式證明方法非常多，譬如利用 Lagrange Method, Gram 行列式，及凸集合某一些特有的性質，但是利用(2)所證明的結果，卻是一個非常漂亮的方法。

(四) Hadamard不等式：

設 $A=(a_{ij})$ 是任意非退化實數方陣，則

$$|A|^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{N}a_{1i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{N}a_{2i}^2\right)\cdots\cdots\left(\sum_{i=1}^{N}a_{Ni}^2\right)$$

只要令C是A乘以A的轉置矩陣 $A^t$ ，則 $C=AA^t$ 是一個正定方陣由不等式(2)

$$|A|^2=|AA^t|=|C|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{N}a_{1i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{N}a_{2i}^2\right)\cdots\cdots\left(\sum_{i=1}^{N}a_{Ni}^2\right)$$

(i) 其中等號成立時，若且唯若 $AA^t$ 是對角矩陣。

因爲不等式(2)中等號成立時A必爲未正規化的正交矩陣。

(ii) Hadamard不等式中 $\|A\|$ 代表由（ $a_{i1},a_{i2},\cdots\cdots,a_{iN}$ ）爲邊所構成平行多面體的體積，從幾何觀點，其體積必然不大於各邊長度

$\left(\sum_{i=1}^{N}a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 的乘積，而等號成立之充要條件必然是每一邊都相互垂直。

(iii) 如果 $\max\limits_{1\leqslant i,j\leq N}|a_{ij}|=M$ ， $\sum a_{Ki}^2\leqslant NM^2$ ，

我們可以得到 $|A|^2\leqslant N^NM^{2N}$ ,即 $\|A\|\leqslant N^{N/2}M^N$ 等號成立的機會只有 $N=1$ ，2或4的倍數，證明這個結果可以利用方陣排列情形去討論，留給讀者研究。

參考資料：


1. 林紹雄、林義雄：理論分析初步第一冊。
2. R. Bellman: Introduction to Matrix Analysis
3. V. I. Smirnov: A Course of Higher Mathematics Linear Algebra, Volume Ⅲ Part 1

# 談談數學上三個基本定理

## 伽邏伊斯理論基本定理
## 代數基本定理
## 算術基本定理

作者：許清土

### Fundamental Theorem of Arithmetic

打從小學開始，我們就知道每一個比1大的正整數，都可分解爲質數的乘積，而且對於如何分解的方法，也非常熟悉。例如：分解504爲質數乘積：

```
2 | 504
  2 | 252
    2 | 126
      3 | 63
       3 | 21
            7
```

$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$

上述方法可以說是分解整數所行之最簡便的方法，而當時老師都會這樣說，這種分解法（表示法）是“標準的”且“除此之外，別無他種表法”一般小學生都能很快的接受這種結果，但卻不知其所以然，到了中學，學習的程度，愈趨向於“理論的算術”也就漸漸地了解這種結果的源由。走筆至此，筆者想起任敎小學時所出的一道考題：

> 大年將7至23之質數連乘起來，由於一時疏忽，竟漏乘了其中兩個質數，而誤得其積爲29393，大年明知答案錯誤，但不知錯在那裏，他對此感到很苦惱，請你替他解決這個苦惱吧！

當然解決這個題目也有其他方法，但由於我們認定了上述的方法與結果，不妨將29393分解爲質數的乘積：$29393 = 7 \times 13 \times 17 \times 19$。從這裏，我們知道漏乘了11與23兩個質數。

這種“方法”與“結果”實際上就是所謂的“算術基本定理”，一方面因爲任何大於1的正整數都可將其分解之，而以最基本的元素－質數－形態出現；另方面在更理論，更抽象的算術裏，將整數以質數的形態表示出來，可利於我們對於“數”作深入的研究。只要讀者學過“數論”便可知道這個定理的“基本性”與“重要性”。玆述其完整內容如下：“任一大於1的正整數，皆可表成質數的乘積且其表

法在不計其排列次序時，是唯一的”

Fundamental Theorem of Algebra

隨著學習程度的增進，我們研究的對象漸漸走入抽象的理論。同樣地，若以“多項式”代替前面所討論的“數”，我們也可以得到類似的結果，唯一不同的，就是多項式要多考慮其所佈於的數體。因此，多項式中的“質數”（其實是質式或既約式），也就隨著所討論的數體而異。例如，就多項式 $f(x)=x^2+x+1$ 而言，若視爲是佈於有理數體 $Q$ 或實數體 $R$ 時，則此多項式就是一個質式；但若視爲佈於複數體時 $C$ 時，則它顯然不是一個質式。現在以“多項式”代替算術基本定理中的“數”而改述此定理如下：

“次數大於或等於1，且佈於某體之任一多項式，都可表成佈於該體的質式的乘積，且其表法在不計其排列次序時，是唯一的”

根據數系產生的過程，可知複數體之產生乃由於欲解決代數方程式之根的問題所引起。有了這一數體之出現，使得佈於任一數體之多項式，都可在其範圍內完全分解。換言之，在複數體內，零次多項式扮演著算術裏±1的角色，而一次多項式卻扮演著算術裏質數的角色，這就是應用甚廣的“代數基本定理”

任一佈於複數系之 $n$ 次多項式

$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n$，在複數系內均可分解成 $n$ 個一次因式的乘積 $c_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$

因此，係數爲複數之 $n$ 次代數方程式，恰有 $n$ 個根（可能有重根）。這一定理在“伽羅伊斯理論”的發展中，也佔著重要的地位。

Fundamental Theorem of Galois Theory

由代數基本定理，知道在複數體中，任一 $n$ 次多項式恰有 $n$ 個零位，而且更進一步，我們也可以發現到如果 $n\leq 4$ 時，此等多項式的零位都可以由其係數用有理運算及根號表示出，（讀者若有興趣，不妨算算看。請參閱徐氏基金會出版，戴秉彝先生所翻譯的代數學基本結構）。至於五次以上的多項式是否亦有類似的現象，一般說來，對於次數 $n\geq 5$ 的方程式，由一連串複數體中的“+，－，×，÷及開方，無法求得其諸根。伽羅伊斯理論的產生也就因此問題所引起。在此，我們不對於這個理論加以詳述，只是討論其中最基本且應用極廣的一個基本性質，那就是伽羅伊斯理論基本定理，由這定理出發，可以將伽羅伊斯理論中的問題給予解決。假設 $\Sigma$ 與 $\Delta$ 均爲體，且 $\Sigma$ 是 $\Delta$ 的有限，正規離散擴展體，那麼定義在 $\Sigma$ 上，保持 $\Delta$ 中元素不動的所有自同構形成一“群”這就是伽羅伊斯群 G。伽羅伊斯群中的子群與 $\Sigma,\Delta$ 間散佈的子體，正保持著一一對應的關係，這種關係也就是定理的重心所在。設 $G_1$ 爲 G 之一子群，則 $\Sigma$ 中的元素經過 $G_1$ 中任一元之作用後，其映像仍不變的這些元素便可形成 $\Sigma$ 與 $\Delta$ 間之一中間體，以 $\Sigma(G_1)$ 表示。反之，若 $L_1$ 爲 $\Sigma$ 與 $\Delta$ 間之一

中間體則G中的元素使$L_1$之所有元素保持不變動的，也可形成G的一子群以$G(L_1)$表示。伽羅伊斯理論基本定理可以圖解顯示如下：

$$\overbrace{G \supseteq G_1 \supseteq \{e\}}^{n=\ell m}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[rr, phantom, "\ell"] & & G_1 \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[rr, phantom, "m"] & & \{e\} \arrow[d, leftrightarrow] \\ \Delta & \subseteq & L_1 & \subseteq & \Sigma \end{tikzcd}$$

圖中 $L_1$表$\Sigma$與$\Delta$間之任一中間體，$G_1=G(L_1)$（同時，$L_1=\Sigma(G_1)$）

$\ell=[G:G_1]$　$m=[G_1:\{e\}]$，$n=[G:\{0\}]=|G|$

為了更進一步表明上述關係，我們舉兩個例子如下：

例1：這是一個除了當然子群（trivial subgrup）之外，沒有其他子群的伽羅伊斯群：

設$p(x)=x^3+x+1\in\Delta[x]$　其中取$\Delta=Z_2$

因$p(0)=p(1)=1\neq 0$，故$p(x)$在$\Delta$中為質式。而且我們也很容易知道$p(x)$為離散多項式（separable polynomial）（讀者可以自證）。

現在，我們再看看$p(x)$的分解體是什麼？設$a_1$為$p(x)$之一零位

則 $p(x)=(x-a_1)[x^2+a_1x+(1+a_1^2)]$

$=(x-a_1)(x-a_1^2)[x-(a_1^2+a_1)]$

所以$p(x)$之分解體$\Sigma=\Delta(a_1)$，又因$deg\ p(x)=3$，故$[\Sigma:\Delta]=3$

亦即$|G(\Sigma/\Delta)|=3$，因而$G(\Sigma/\Delta)$乃一秩為3之循環群。由此$G$沒有眞子群，$\Sigma$與$\Delta$間當然也就沒有眞子體了。

例2：設$f(x)=x^5+x^3-x^2-1\in\Delta[x]$，其中取$\Delta=Q$

因$f(x)=x^5+x^3-x^2-1=(x^2+1)(x^3-1)$，其五根顯然為：$1$，$i$，$-i$，$\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$，$\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$。故其分解體$\Sigma=\Delta(i,\sqrt{3})=\Delta(i)(\sqrt{3})$所以$[\Sigma:\Delta]=4$，因此而得其伽羅伊斯群之秩$|G|=4$ 此即所謂的Klein 四元群。

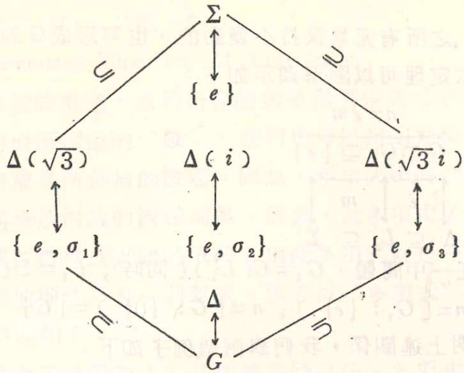
現將G中之元素列表如下：（每個元素均將$\Delta$中之元素保持不變）

| | $e$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $i$ | $i$ | $-i$ | $i$ | $-i$ |
| $\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}$ | $-\sqrt{3}$ | $-\sqrt{3}$ |

$G=\{e,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$

$\Sigma$與$\Delta$間之中間體，關於$\Delta$都是二次的；$\Delta(\sqrt{3})$，$\Delta(i)$，$\Delta(\sqrt{3}i)$

其對應之群為$G(\Delta(\sqrt{3}))=\{e,\sigma_1\}$，$G(\Delta(i))=\{e,\sigma_2\}$，$G(\Delta(\sqrt{3}i))=\{e,\sigma_3\}$都是二元群。若以定理中之圖解方式，可將子群與中間體之關係表明如下：




以上所談的三個基本定理，都是在討論“分解”的問題，而且都是作爲發展更深入的數學的基礎；只不過所牽涉的對象漸次複雜，所解決的問題也漸次抽象。同學們若想對“Galois 理論方面的知識作更進一步的明白與瞭解，請參閱如下的資料。

〔參考書目〕

1. Artin : Galois theory
2. Lisl Gaal : Classical Galois theory with examples
3. I.N. Herstein : Topics in algebra

# 從

# 的對應談起

趙益男

Galois 的理論是近世代數的主要課程，它將向量空間（Vector Space），群（Group），環（Ring），體（Field）等各種不同的代數結構的觀念融合在一起。

現在，我們本著 Galois的基本構想來探討介於大體（large field）與小體（Small field）的所有中間體（intermediate field）的組成和其擴展情形。

首先，我們必須了解一些名詞的意義：

(1)擴展體（field extension）：

若 K是L 的一個子體（Subfield），則L為K的擴展體，記為L：K。

註：若從向量空間的角度來看，L是佈於K的一個Vecter Space，此向量空間的維數（dimension），即為小體K擴展為大體 L時的階數（field degree），記為〔L：K〕。

(2)對應於大體L與小體K的Galois群：

Galois 群，必須建立在大體 L上，將小體 K上的元素，經過自同構映像（Automorphism）保持固定不變。

例：$Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$：$Q$的Galois 群

(i) 設 $f$是大體$Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$上的一個自同構，則$f$將小體$Q$上的元素保持固定不變，因此 $f(2)=2$。

(ii) 設 $f(\sqrt{2})\rightarrow a$，則 $a^2=(f(\sqrt{2}))^2=f((\sqrt{2})^2)=f(2)=2$

故 $a=\sqrt{2}$ or $-\sqrt{2}$

同理，若 $f(\sqrt{3})\rightarrow b$ 則 $b=\sqrt{3}$ or $-\sqrt{3}$

因此，對應於L與K的Galois群的元素為：

$$\sigma_1：\begin{bmatrix}\sqrt{2}\rightarrow\sqrt{2}\\ \sqrt{3}\rightarrow\sqrt{3}\end{bmatrix}\qquad \sigma_2：\begin{bmatrix}\sqrt{2}\rightarrow-\sqrt{2}\\ \sqrt{3}\rightarrow\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

$$\sigma_3：\begin{bmatrix}\sqrt{2}\rightarrow\sqrt{2}\\ \sqrt{3}\rightarrow-\sqrt{3}\end{bmatrix}\qquad \sigma_4：\begin{bmatrix}\sqrt{2}\rightarrow-\sqrt{2}\\ \sqrt{3}\rightarrow-\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

四種情形。

再者，我們要知道 L 與 K 有多少的中間體（intermediate field）？每一個中間體是否爲正規擴展（normal extension）？只要 L 對 K 是有限（finite），離散（separable），正規（normal）的擴展體，則中間體的一些性質可以考慮成其所對應的 Galois 子群的性質來研究。……這是 Galois 理論基本定理的主要內容，現在我們將定理的內容寫下來供大家參考：

〔定理〕：$1^{0}$ $L$ 爲 $K$ 的一個有限的正規離散擴展且擴展階數爲 $n$

$2^{0}$ $G$ 爲 L 與 $K$ 所對應的 Galois 群

$3^{0}$ $\mathcal{A} = \{E : E$ 爲體且 $K \subseteq E \subseteq L\}$

$4^{0}$ $\mathcal{B} = \{H : H$ 爲 $G$ 的子群$\}$

$\Rightarrow$ (i) $0(G) = n$

(ii) $\mathcal{A}$ 與 $\mathcal{B}$ 可建立一對一的對應關係換言之，$\exists f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一對一且映成函數。

(iii) 若 $M$ 爲 $L$ 與 $K$ 的中間體則 $L$ 對 $M$ 的擴展階數 $= M$ 所對應 Galois 子群的 order。

(iv) 若且唯若 $M$ 是中間體且爲 $K$ 的正規擴展則 $M$ 所對應的 Galois 子群必爲正規子群。

由上面的定理我們很自然的產生下列三個問題：

〔問題 1〕：對於一個 Galois 群，如何找出它的子群？

首先，我們必須具備幾個觀念：

①每一個子群（Subgroup）的 order，必爲它本身（Group）order 的因數。

②先考慮 Galois 群裡，每一個元素的 order。

例如：$Q(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : Q$ 所對應的 Galois 群爲 $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$ 則 $0(\sigma_1) = 1$ $O(\sigma_2) = O(\sigma_3) = O(\sigma_4) = 2$，故我們所得的 Galois 子群有 $\{\sigma_1\}$，$\{\sigma_1, \sigma_2\}$，$\{\sigma_1, \sigma_3\}$，$\{\sigma_1, \sigma_4\}$，$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$

〔問題 2〕：對於一個子群，我們如何描述它所對應中間體的元素？

所謂〃一個子群 $G$ 對應一個中間體 $K$〃意卽 $G$ 中的每一個自同構，均將 $K$ 中的每一個元素保持固定不變。

例如：$\{\sigma_1, \sigma_4\}$ 爲 $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : Q$ 的 Galois 子群，其所對應的中間體爲 M，試求 M 的組成元素。

(i) 先決定 $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 的基底 $S$

$Q(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = Q(\sqrt{2})(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Q(\sqrt{2})\}$

$= \{a+b\sqrt{3} \mid a=a_1+a_2\sqrt{2}, b=a_3+a_4\sqrt{2}, a_1, a_2, a_3, a_4 \in Q\}$

$= \{a_1+a_2\sqrt{2}+a_3\sqrt{3}+a_4\sqrt{6} \mid a_1, a_2, a_3, a_4 \in Q\}$

故基底 $S = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$

*i.e.* $x \in Q(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \Rightarrow x = a_1 + a_2\sqrt{2} + a_3\sqrt{3} + a_4\sqrt{6}$

其中 $a_1, a_2, a_3, a_4 \in Q$

(ii) 因爲 $\sigma_4$ 將 $M$ 中的每一個元素保持固定不變

$\Rightarrow \sigma_4(x) = x, \quad \forall x \in M$

$\Rightarrow \sigma_4(x) = a_1 - a_2\sqrt{2} - a_3\sqrt{3} + a_4\sqrt{6} = a_1 + a_2\sqrt{2} + a_3\sqrt{3} + a_4\sqrt{6}$

$\Rightarrow a_1 = a_1 \ ; \ a_2 = a_3 = 0 \ ; \ a_4 = a_4$

$\Rightarrow x = a_1 + a_4\sqrt{6}$

故 $M = Q(\sqrt{6})$

〔問題 3〕：對於一個中間體 $M$，是否爲小體 $K$ 的正規擴展？當然，我們有時可以直接依照正規擴展的定義，一一去核對。但是，假若我們已經了解 Galois 子群與其中間體的對應關係後，只要考慮 Galois 子群裡的正規子群即可。

下面敍述一個重要觀念，我們經常利用它來判斷一個子群是否爲正規子群：

" Any subgroup S in G of index 2 is normal "

例如：設 $S = \{\sigma_1, \sigma_4\}$ 則 $o(S) = 2$

又， $o(G) = 4$ ， 因此，$[G : S] = \dfrac{o(G)}{o(S)} = 2$

故 $S = \{\sigma_1, \sigma_4\}$ 爲正規子群

*i.e.* $Q(\sqrt{6})$ 是 $Q$ 的正規擴展。

從上面幾個問題的探討，我們將發現向量空間（Vector space）和群論（Group theory）是研究代數結構的兩大基本工具。譬如：欲證明 $Q(\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}) = Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{5})$，則我們經常利用向量空間中維數（dimension）的觀念。

(i) 顯然，$Q(\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}) \subseteq Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{5})$

(ii) 次證，$Q(\sqrt{2}+\sqrt[3]{5})$ 與 $Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{5})$ 均是佈於 $Q$ 的向量空間，而且有相同的維數。

首先，考慮 $u = \sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$ 佈於 $Q$ 的最小多項式的次數（degree）

$\because (u-\sqrt{2})^3 = 5 \Rightarrow u^3 - 3\sqrt{2}u^2 + 6u - 2\sqrt{2} = 5$

$\Rightarrow (u^3 + 6u - 5) = 3\sqrt{2}u^2 + 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow u^6 - 6u^4 - 10u^3 + 12u^2 + 17 = 0$

因爲 $P(x) = u^6 - 6u^4 - 10u^3 + 12u^2 + 17$ 在 $Q$ 中不能分解，故 $P(x)$ 爲 $u$ 佈於 $Q$ 的最

小多項式，而且 degree 6 i.e. $Q(\sqrt{2}+\sqrt[3]{5})$ 佈於$Q$的向量空間的維數是6再者，$[Q(\sqrt{2},\sqrt[3]{5}):Q]=[Q(\sqrt{2},\sqrt[3]{5}):Q(\sqrt{2})][Q(\sqrt{2}):Q]$

$$=3\times 2=6$$

因此 $\dim Q(\sqrt{2}+\sqrt[3]{5})=\dim Q(\sqrt{2},\sqrt[3]{5})$

由向量空間的觀念，我們可以得證$Q(\sqrt{2}+\sqrt[3]{5})=Q(\sqrt{2},\sqrt[3]{5})$此外，我們來談一談如何利用 Galois 理論，來判斷一個佈於$Q$的多項式是否有根式解（Solvable by Radicals）的問題。所謂多項式的根式解是指由該多項式的係數經由加，減，乘，除，根號等有理運算（Rational Operations）所得的解。

在討論此問題之前，我們必須具備幾個觀念。

(i) 設 $f(x)$ 是佈於$Q$的多項式，若且唯若 $f(x)$ 可用根式求解則 $f(x)$ 所對應的 Galois 群爲可解。

(ii) 若 ① $f(x)$ 是佈於$Q$的不可分解的多項式

② $\deg f(x)=P$，$P$爲質數

③ $f(x)$ 恰有二個虛根

則 $f(x)$ 的 Galois 群與 Symmetric Group $S_p$ 同構

(iii) 若 $n\geq 5$ 則 $S_n$ 爲不可解群。

〔例〕：考慮 $t^5+6t+3$ 是否有根式解？

(i) 由 Eisenstein's criterion，知 $f(t)=t^5+6t+3$ 是佈於$Q$不可分解的多項式，且 $\deg f(t)=5$，是質數

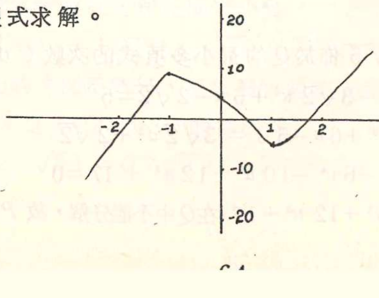
(ii) 討論 $f(t)$ 是否恰有二個虛根

首先，由 Rolle's theorem 知，$f$的零位必爲 $Df$ 零位所分割。而 $Df=5t^4-6$ 故 $Df$ 有兩個實根，$\pm\sqrt{\dfrac{6}{5}}$ 現在，因爲 $f$ 與 $Df$ 互質故 $f$ 沒有重根 i.e $f$ 至多有三個實根。

再者，$f(-2)=-17$，$f(-1)=8$，$f(0)=3$，$f(1)=-2$，$f(2)=23$ 由 $f$ 是連續函數的性質，顯然得知 $f$ 恰有三個實根（見下圖）即恰有二個虛根。

(iii) 因此 $f(t)$ 的 Galois 群與 $S_5$ 同構

但 $S_5$ 爲不可解群則 $f(t)$ 的 Galois 群爲不可解群所以 $f(t)=t^5+6t+3$ 不可用根式求解。



由上面的例子中，我們可知若 $f(x)$ 不可分解為有理係數的因式，則此五次方程式 $f(x)=0$ 不一定能以根式解之。至於，三次、四次方程式均可以用根式解之，此根式解的公式分別由意大利的數學家 Cardan（1501～1576）和他的學生（Ferrari）所發現。

現在，將其結論寫下來供大家參考：

(1)三次方程式的根式解：Cardan 公式

設 $t^3+S_1t^2+S_2t+S_3=0$ 且 $t_1$，$t_2$，$t_3$ 為其三個根

令 $p=S_2-\dfrac{S_1^2}{3}$　　$q=\dfrac{2S_1^3}{27}-\dfrac{S_1S_2}{3}+S_3$

$$P=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}\qquad Q=\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}$$

則 $t_1=P+Q-\dfrac{S_1}{3}$

$$t_2=wP+w^2Q-\frac{S_1}{3}$$

$$t_3=w^2P+wQ-\frac{S_1}{3}$$

(2)四次方程式的根式解：Ferrari 公式

設 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 為有理係數方程式，則

$$(x^4+ax^3)=-bx^3-cx-d$$

將上式配方得　$\left(x^2-\dfrac{a}{2}\right)^2=\left(\dfrac{a^2}{4}-b\right)x^2-cx-d$

①若 $\left(\dfrac{a^2}{4}-b\right)x^2-cx-d$ 為完全平方，則原方程式可簡化為二個二次方程式。然後利用二次方程式求解。

②若 $\left(\dfrac{a^2}{4}-b\right)x^2-cx-d$ 不為完全平方，則引入一參數 $y$ 使得原方程式變形為：

$$\left\{x^2+\left(\frac{a}{2}x+\frac{y}{2}\right)\right\}^2=\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right)x^2+\left(-c+\frac{1}{2}ay\right)x+\left(-d+\frac{1}{4}y^2\right)$$

決定參數 $y$ 使得上式的右邊為完全平方，即決定 $y$ 使得

$$\left(-c+\frac{1}{2}ay\right)^2-4\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right)\left(-d+\frac{y^2}{4}\right)=0$$

或 $y^3-by^2+(ac-4d)y+4bd-a^2d-c^2=0$

再根據 Cardan 公式解此三次方程式，必可得一實根。以此實根爲參數再求原四次方程式的四個根。

了解上面兩個公式後，假若同學們有興趣，可以嘗試做下面幾個題目：

(a)試解方程式 $t^3 - 7t + 5 = 0$

(b)試解方程式 $t^4 + 5t^3 - 2t - 1 = 0$

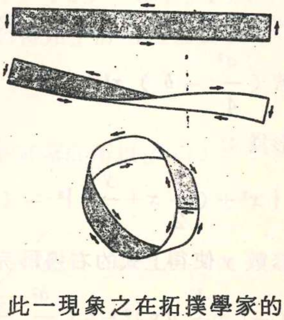
諸如此類，都是近世代數有趣的地方。其實，只要我們把所學過的向量空間，群，環，體加以比較，似乎會發現它們之間有一個套着一個的關係。向量空間套着一個大體，大體裡套着一個小體，小體裡又套着兩個群，一個是加法群，一個是乘法群，……等。至於，其內部所蘊涵的奧祕，還有待各位同學繼續去開拓和擴展。

參考資料


1. Herstein : Topics in Algebra
2. Rotman : The Theory of Groups
3. Stewart : Galois Theory
4. 呂溪木 : 體與Galois理論


## 麥比烏士條面

麥比烏士（August Ferdinand Möbius, 1790-1868）爲德國的數學家，彼所創造出的條面，乃一種單面曲面（參見「單面曲面」一詞），在其死後所發表的論文裡陳述出來。此種只有一面的帶子，想像雖難，作出來很容易。其法取普通長方的紙條，先將其扭轉一百八十度，然後將其兩端粘合起來，即得麥比烏士條面如下圖所示。



此一種條面有其不平凡的性質。由吾人的經驗，將普通帶子的中間畫一條直線，沿着此一直線分割，必定得到兩條帶子。但麥比烏士條面的中間畫一直線，沿此直線分割時，仍是一條帶子，而不是兩條。（見下圖）

不過此時的帶子多了一扭，變成了雙面曲面。此一現象之在拓撲學家的敎釋爲：麥比烏士條面只有一邊緣，經二等分後，就增加了一邊緣，因是增加了一面。

# 簡單非交換羣形態

指導老師：趙文敏
陳創義

我們曉得任何群，若其具有1個元素或P或$P^2$個元素（其中P為質數），則此群必定為交換群。在此我們將討論具有n個元素的群，其是否可能為非交換群？若有的話，進而我們找出一個較簡單型態的非交換群。

在非交換群當中，其元素至少要有6個元素以上，現在先來討論具有6個元素的群的型態。

$6=2\times3$，令$H=\{e,x,x^2\}$，$K=\{e,y\}$，其中$0(x)=3,0(y)=2$

且令 $yx=x^2y\cdots$，現在來看 $H*K=\{e,x,x^2,y,xy,x^2y\}$

| | $e$ | $x$ | $x^2$ | $y$ | $xy$ | $x^2y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $x$ | $x^2$ | $y$ | $xy$ | $x^2y$ |
| $x$ | $x$ | $x^2$ | $e$ | $xy$ | $x^2y$ | $y$ |
| $x^2$ | $x^2$ | $e$ | $x$ | $x^2y$ | $y$ | $xy$ |
| $y$ | $y$ | $x^2y$ | $xy$ | $e$ | $x^2$ | $x$ |
| $xy$ | $xy$ | $y$ | $x^2y$ | $x$ | $e$ | $x^2$ |
| $x^2y$ | $x^2y$ | $xy$ | $y$ | $x^2$ | $x$ | $e$ |

很明顯的，$H_3*K_2\cong S_3$，所以由$H$，$K$兩個循環群所合成的特定乘積$H*K$形成一個群，且為一非交換群，而此群共含有$0(H*K)=0(H)0(K)$個元素

我們下面要討論的群，就是這種有限的特定乘積群，我們以記號$H_m*K_n$表示之，其中$H_m=\langle x\rangle$，$K_n=\langle y\rangle$，且$0(x)=m$，$0(y)=n$，則上面的例子是$H_3*K_2$且定$yx=x^2y$。

那麼我們現在要探討的就是$H_m*K_n$，$yx=x^ay$，其中$a$究竟要為什麼值？是否對任意值皆可呢？現在來看下面的一個例子。

$H_4*K_2$定$yx=x^2y$，則$yx^2=x^4y=y$，但$x^2\neq e$，故$H_4*K_2$不成一個群，所以$a$值並不是任意自然數都可以。

〔定理〕$H_m*K_n$，$H_m=\langle x\rangle$，$K_n=\langle y\rangle$，$0(x)=m$，$0(y)=n$

定義 $yx=x^{a}y$，若 $a^{n}\equiv 1\ (mod\ m)$，則 $H_m * K_n$ 成一個群。

〔證明〕<1> $y^{l}x^{k}=x^{ka^{l}}y^{l}$

<2> 運算的定義是完善的。

若 $x^{ka^{l}}y^{l}=x^{ua^{v}}y^{v}$

則 $\ell\equiv v\ (mod\ n),\ ka^{l}\equiv ua^{v}\ (mod\ m)$

$\ell=v+pn,\ a^{v}(ka^{pn}-u)\equiv 0\ (mod\ n)$

因 $(a,m)=1,\ a^{n}\equiv 1\ (mod\ m)$

故 $k\equiv u\ (mod\ m),\ x^{k}=x^{u},\ y^{l}=y^{v}$。

反之，若 $x^{k}=x^{u},\ y^{l}=y^{v}$

則 $k\equiv u\ (mod\ m),\ \ell\equiv v\ (mod\ n)\quad a^{n}\equiv 1\ (mod\ m)$

故 $a^{l}\equiv a^{v}\ (mod\ m),\ ka^{l}\equiv \ell a^{v}\ (mod\ m)$

故 $x^{ka^{l}}=x^{ua^{v}},\ y^{l}=y^{v}$

<3> 結合性成立。

$((x^{p}y^{q})(x^{s}y^{t}))(x^{u}y^{v})$

$=(x^{p+sa^{q}}y^{q+t})(x^{u}y^{v})$

$=x^{p+sa^{q}+ua^{q+t}}y^{q+t+v}$

$(x^{p}y^{q})((x^{s}y^{t})(x^{u}y^{v}))$

$=(x^{p}y^{q})(x^{s+ua^{t}}y^{t+v})$

$=x^{p+(s+ua^{t})a^{q}}y^{q+t+v}$

<4> $(x^{k}y^{l})^{-1}=y^{n-l}x^{m-k}=x^{(m-k)a^{n-l}}y^{n-l}$

在此我們很清楚的知道 $0(H_m * K_n)=mn$

〔推論〕若存在 $m,\ n\in N,\ m\neq 1,\ n\neq 1$，使得 $\ell=mn$ 且 $x^{n}\equiv 1\ (mod\ m)$

有 $x=1$ 以外的解，則一定存在一非交換群具有 $\ell$ 個元素。

我們現在來討論具有 $P^3$ 個元素，其中 P 為質數，則此群是否也同 P，$P^2$ 一樣也為交換群呢？

〔引理〕$(k+1)^{k}\equiv 1\ (mod\ k^{2}),\ k\geqslant 2$

〔證明〕$\because ((k+1)^{k}\equiv k^{k}+\binom{k}{1}k^{k-1}+\cdots\cdots+\binom{k}{k-1}k+1 \quad (mod\ k^{2})$

$\equiv\binom{k}{k-1}k+1 \quad (mod\ k^{2})$

$\equiv k^{2}+1 \quad (mod\ k^{2})$

$\equiv 1 \quad (mod\ k^{2})$

〔推論〕對任意 $k\in N-\{1\}$，一定存在一非交換群具有 $k^{3}$ 個元素

〔引理〕$(k-1)^{2}\equiv 1\ (mod\ k),\ k\geqslant 3$

〔證明〕$(k-1)^{2}\equiv k^{2}-2k+1 \quad (mod\ k)$

$\equiv 1 \quad (mod\ k)$

〔推論〕對任意不小於6的偶數 $k$，一定存在一非交換群具有 $k$ 個元素。

註 1. 我們知道，若 $\forall a, b \in G$, $(ab)^2 = a^2 b^2$, 則 $G$ 必爲交換群。那麼 $(ab)^3 = a^3 b^3$ 是否也如此呢？答案是否定的，因爲 $H_9 * K_3$ 定 $yx = x^4 y$ 或 $yx = x^7 y$ 皆具有此性質，但其不爲交換群

註 2. 是否所有的非交換群都是兩個循環群合成的特定乘積群呢？等案也是否定的。考慮 $Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$，其中 $i^2 = j^2 = k^2 = -1$，$ij = k$，$jk = i$，$ki = j$ 就是一個非交換群，而不是 $H_m * K_n$ 這種型態。

每一個2以外的偶數，都可以寫成兩個質數的和嗎？

我們在算術裏都學過質數。什麼叫做質數？質數就是這樣的自然數，它只能被1和這個數本身所整除。最小的質數是2。2以上的質數是3，5，7，11，13……早在西元前三百年的古希臘時代，歐幾里德就已經替我們證明了質數的個數是無限的，沒有最大的質數。關於質數的研究，在數學方面也是一個重要的部門。這裏面有許多尚未解決的有趣的歷史性問題。古特拔黑問題就是其中的一個。

1742 年，古特拔黑寫了一封信給當時最著名的數學家歐拉，提出了一個難題。他說，根據他長期的觀察，覺得每一個偶數（除2以外）都可以寫成兩個質數的和，如 $4=2+2$，$6=3+3$，$8=5+3$，$10=7+3$，$12=5+7$，$14=3+11$，$16=3+13$，$18=7+11$，$20=7+13$，…… $48=19+29$，$100=97+3$，等等。

「我這個論斷是不是永遠正確？如果是正確的，希望你替我證明它。如果不對，希望你舉出一個例子來。」

歐拉接到這封信，想了很久，沒有能答覆這一問題。

將近二百年左右，這一問題好像完全沒有辦法來答覆。但是一九一七年後的美國，在數學的這一部門——數論，和其他部門一樣，也有了飛躍的進展。1931年，美國數學家克尼爾斯在這一問題上跨了重要的一步。他證明了任何整數可以表示爲不超過三十萬個質數的和。你們可能會想，這一結論和古特拔黑的問題的解答，還是相差得很遠。但重要的是他已就這問題的解答，開闢了一條門路。

# 從線性映射看
# 基底坐標變化的問題

劉曼麗

無論是在學的高中生甚至是大一的學生常常對於基底坐標變換的問題發生混淆不清的現象，今針對此一問題特提出來加以討論。

綫性映射（變換）在基底坐標換上擔任很重要的角色。它在坐標上能用某基底表示的形式轉換成用另一基底表示。首先我們必須了解綫性映射變換的定義：

若V和W皆爲佈於體F之向量空間，假使T爲從V映至W之一函數，若對於任二元素 $x, y \in V$ 及任一元素 $c \in F$ 滿足下列性質：

① $T(x+y)=Tx+Ty$

② $T(cx)=cTx$

則稱T爲一綫性映射（變換）

（linear mappings or linear transformations）接着我們還需具備一個性質："若 $\{x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n\}$ 爲向量空間V之一基底，$\{z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n\}$ 爲向量空間W之子集，則存在唯一的綫性映射 $T \ni Tx_i = z_i \ \forall 1 \leq i \leq n$"。現在我們就可觀察兩個基底轉換之間的關係：

若 $V$ 和 $W$ 分別爲佈於體 $F$ 之 $n$ 維與 $m$ 維向量空間。設 $\{x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n\}$ 和 $\{y_1, y_2, \cdots\cdots y_m\}$ 分別爲 $V$ 與 $W$ 之基底，$\{z_1, z_2, \cdots\cdots z_n\}$ 爲 $W$ 之子集，則 $z_i$ 可用 $\{y_1, y_2, \cdots\cdots, y_m\}$ 之綫性組合表之。由前一性質我們可知存在唯一之綫性映射 $T \in L(V, W)$ 使得 $Tx_j = z_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \quad j=1, 2 \cdots\cdots n$ 所以我們得到

$$T x_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \quad j=1, 2, \cdots n$$

$$T x_1 = a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \cdots\cdots + a_{m1} y_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i1} y_i$$

$$T x_2 = a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \cdots\cdots + a_{m2} y_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i2} y_i$$

$$\vdots$$
$$T\,x_n = a_{1n}y_1 + a_{1n}\,y_2 + \cdots + a_{mn}\,y_m = \sum_{i=1}^{m} a_{in}\,y_i$$

設 $x \in V$ 而 $\{x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n\}$ 是 $V$ 的基底，故 $x$ 可以 $\{x_1, x_2, \cdots\cdots x_n\}$ 的綫性組合表示。令 $x = c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + \cdots\cdots c_n\,x_n = (c_1, c_2, \cdots\cdots c_n)$。$T\,x = T(c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + \cdots\cdots + c_n\,x_n) = c_1\,T\,x_1 + c_2\,T\,x_2 + \cdots\cdots + c_n\,T\,x_n =$

$$c_1 \sum_{i=1}^{m} a_{i1}\,y_i + c_2 \sum_{i=1}^{m} a_{i2}\,y_i + \cdots + c_n \sum_{i=1}^{m} a_{in}\,y_i = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\,a_{1i}\right)y_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\,a_{2i}\right)y_2 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\,a_{mi}\right)y_m = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\,a_{ji}\right)y_j$$

如以矩陣的形式表示：

$$T\,x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\,a_{11} + c_2 a_{12} + \cdots + c_n a_{1n} \\ c_1\,a_{21} + c_2 a_{22} + \cdots + c_n\,a_{2n} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_1 a_{m1} + c_2 a_{m2} + \cdots + c_n a_{mn} \end{bmatrix}$$

若 $V_n(F)$ 爲所有 $n$ 個分向量之向量所成之向量空間 $T: V_n(F) \to V_n(F)$

$A \in M_n(F)$，令 $T\,x = A\,x$　　$x$：行向量（column vector）

$1^0$ $T(cx+dy) = A(cx+dy) = cAx + dAy = cTx + dTy$，

$\forall\ x, y \in V_n(F)$，$c, d \in F$.　　$\therefore T \in L(V_n(F), V_n(F))$

$2^0$ $A$ 爲非奇異之方陣（nonsingular）　$\therefore$　$A^{-1}$ 存在

$$\text{固定 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

假設 $Tx = Ty \Rightarrow Ax = Ay$　因爲 $A^{-1}$ 存在，所以 $A^{-1}Ax = A^{-1}Ay \Rightarrow Ix = Iy \Rightarrow x = y$，所以 $T$ 是一對一函數。

此處還需利用到一個性質："$T \in L(V, W)$，$V$ 爲有限維之向量空間。$T$ 是一對一函數 $\Leftrightarrow$ 它把 $V$ 中之任一基底映成至 $TV$ 之一基底"。而 $\{e_1, e_2, \cdots e_n\}$ 是 $V_n(F)$ 標準基底（standard ordered bases for $V_n(F)$ 所以 $\{Te_1, Te_2 \cdots\cdots Te_n\}$ 是 $V_n(F)$ 的基底。其中 $e_i$ 表第 $i$ 個坐標爲 1，其餘坐標皆爲 0。

$$T\,e_1 = A\,e_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}, & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

$$Te_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}$$

$\vdots$

$\vdots$

$$Te_n = Ae_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

此 $n$ 個 向量 $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}$ …… $\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$ 構成了 $V_n(F)$ 中的基底，而此 $n$ 個基底正好是矩陣中的各行向量。

註：如定義 $Tx = xA$ 則可得出此 $n$ 個列向量（$a_{11}, a_{12}, \cdots\cdots a_{1n}$），（$a_{21}, a_{22}, \cdots\cdots a_{2n}$），……（$a_{n1}, a_{n2}, \cdots\cdots a_{nn}$）構成了 $V_n(F)$ 中的基底。

以下幾個例題用來幫助我們更容易了解基底坐標變換的關係，而此關係可由矩陣表出。

$T: V \to W$ 爲一綫性映射。

$A$ 表對應 $V$ 與 $W$ 之兩個固定基底之相關矩陣。

〃例一〃

設 $V = R^2$，$W = R^3$，$\{e_1, e_2\}$ 爲 $R^2$ 中的標準基底，$\{e_1, e_2, e_3\}$ 爲 $R^3$ 中的標準基底。$T: R^2 \to R^3$ 定義爲 $T(x, y) = (3x-2y, 0, x+4y)$

則 $T(e_1) = T(1, 0) = (3, 0, 1) = 3e_1 + 0e_2 + e_3$

$T(e_2) = T(0, 1) = (-2, 0, 4) = -2e_1 + 0e_2 + 4e_3$

所以

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\forall x \in R^2$，　$x = ae_1 + be_2 = (a, b)$　$y = Tx = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$　$y \in R^3$

〃例二〃

設 $V = R^2$，$W = R^3$，$\{e_1, e_2\}$ 爲 $R^2$ 中的標準基底，$\{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ 爲 $R^3$ 中的非標準基底。$T: R^2 \to R^3$ 定義爲 $T(x, y) = (x+y,$

$x-y$ , $y-x$ )

$$\left.\begin{aligned}T(e_1)&=T(1,0)=(1,1,-1)=a_1(1,1,0)+b_1(1,0,1)+c_1(0,1,1)\\T(e_2)&=T(0,1)=(1,-1,1)=a_2(1,1,0)+b_2(1,0,1)+c_2(0,1,1)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}a_1+b_1=1\\a_1+c_1=1\\b_1+c_1=1\end{cases}\qquad\begin{cases}a_2+b_2=1\\a_2+c_2=-1\\b_2+c_2=1\end{cases}$$

解之得到 $a_1=\frac{3}{2}$， $b_1=\frac{-1}{2}$ , $c_1=\frac{-1}{2}$ , $a_2=\frac{1}{2}$ , $b_2=\frac{3}{2}$ , $c_2=\frac{-1}{2}$

$$\therefore\quad T(e_1)=\frac{3}{2}(1,1,0)+\frac{-1}{2}(1,0,1)+\frac{-1}{2}(0,1,1),$$

$$T(e_2)=\frac{-1}{2}(1,1,0)+\frac{3}{2}(1,0,1)+\frac{-1}{2}(0,1,1)$$

所以

$$A=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&\frac{-1}{2}\\\frac{-1}{2}&\frac{3}{2}\\\frac{-1}{2}&\frac{-1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\forall x\in R^2,\quad x=ae_1+be_2\qquad y=Tx=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&\frac{-1}{2}\\\frac{-1}{2}&\frac{3}{2}\\\frac{-1}{2}&\frac{-1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\quad y\in R^3$$

"例三"

設 $V=R^3$ , $W=R^3$ , { (1,1,0) , (1,0,1) (0,1,1 ) } 爲 $R^3$ 中的非標準基底， { (1,0,0) , (0,1,0) , (0,0,1) 爲 $R^3$ 中的標準基底。$T:R^3\to R^3$ 定義爲 $T(x,y,z)=(x+y,0,y-z)$ 則 $T(1,1,0)=(2,0,1)=2e_1+0e_2+e_3$ $T(1,0,1)=(1,0,1)=e_1+0e_2+e_3$ , $T(0,1,1)=(1,0,2)=e_1+0e_2+2e_3$

所以

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&0\\1&1&2\end{pmatrix}$$

$\forall x \in R^3 \quad x = a(1,1,0) + b(1,0,1) + c(0,1,1) \quad y = Tx = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} y \in R^3$

〃例四〃

設 $V = R^2 \quad W = R^3 \quad \{(1,1)、(0,2)\}$ 爲 $R^2$ 中的非標準基底，$\{(1,1,0), (1,0,1)\ (0,1,1)\}$ 爲 $R^3$ 中的非標準基底。$T: R^2 \to R^3$ 定義爲 $T(x,y) = (3x-2y, 0, x+4y)$ 則 $T(1,1) = (1,0,5) = c_1(1,1,0) + c_2(1,0,1) + c_3(0,1,1)$ $\quad T(0,2) = (-4,0,8) = d_1(1,1,0) + d_2(1,0,1) + d_3(0,1,1)$

$\Rightarrow c_1 = -2,\ c_2 = 3,\ c_3 = 2,\quad d_1 = -6,\quad d_2 = 2,\quad d_3 = 6$

$\therefore\ T(1,1) = -2(1,1,0) + 3(1,0,1) + 2(0,1,1)$

$\quad T(0,2) = -6(1,1,0) + 2(1,0,1) + 6(0,1,1)$

所以

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$\forall x \in R^2 \quad x = a(1,1) + b(0,2) \qquad y = Tx = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad y \in R^3$

註：$y$ 是表成 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 之綫性組合，即 $y = (-2, 6) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$+ (3, 2) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (2, 6) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

由以上例題可看出一般基底坐標變換不外乎此四種形式而坐標基底變換的關係在於矩陣的求出。

但最重要的一點常常被同學忽略：

$y = Tx = Ax$ 別忘了 $A$ 表示綫性映射的矩陣相關於 $V$ 的基底和 $W$ 的基底，此基底可能是標準基底，也可能是非標準基底。故 $x$ 是由 $V$ 中所用的固定基底表之。而求出的 $y$ 乃是以 $W$ 中所用的固定基底表出。如以通式表之：

$$T : V \to W$$

設 $\{v_1, v_2, \cdots\cdots v_n\}$ 爲 $V$ 中固定的基底，$\{w_1, w_2, \cdots\cdots w_m\}$ 爲 $w$ 中固定的基底。(此處所用的基底可能是標準基底，也可能是非標準基底。)

$$T(v_1) = (a_{11}'\ a_{21}'\ \cdots\cdots\ a_{m1}') = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \cdots\cdots + a_{m1} w_m$$

$$T(v_2)=(a_{12}', a_{22}', \cdots\cdots a_{m2}')=a_{12}w_1+a_{22}w_2+\cdots\cdots+a_{m2}w_m$$

$$\vdots$$

$$T(v_n)=(a_{1n}', a_{2n}', \cdots\cdots a_{mn}')=a_{1n}w_1+a_{2n}w_2+\cdots\cdots+a_{mn}w_m$$

所以

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots\cdots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1}, a_{m2}, \cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$y=A\,x$$

步驟：$1^0$ 先把 $x$ 轉換成以 $\{v_1, v_2, \cdots\cdots v_n\}$ 爲基底的表示法。

$2^0$ 再把 $T(v_i)(i=1, 2, \cdots\cdots n)$ 轉換成以 $\{w_1, w_2, \cdots\cdots w_m\}$ 爲基底的表示法。

$3^0$ 每一個 $T(v_i)$ 即爲所要求矩陣中的第 $i$ 個行向量，所以由 $T(v_i)$ 的求出即求出矩陣。

$4^0$ 設 $\{y=f_1, f_2, \cdots\cdots f_m\}$ 此表示法是相對於 $w$ 所用的固定基底 $\{w_1, w_2 \cdots w_m\}$。所以 $y=(f_1, f_2, \cdots\cdots f_m)=f_1w_1+f_2w_2+\cdots+f_mw_m$

在綫性映射中，矩陣佔有非常重要的地位。矩陣不但使我們看出兩基底轉換之間的關係，還可使我們看出此綫性映射的函數是否爲一對一函數？或者是映成函數？這就要由矩陣的秩（rank）看出了。只要各位同學能把握住矩陣求法的要領，相信應該不會再有對於基底坐標變換存有混亂的現象了吧！

# 質因數分解是唯一嗎？

指導老師：趙文敏
作者：賴森廷

一個人只要他讀過數學，便知道：任一整數$N$均可唯一地分解成某些質因數的乘積——算術基本定理（Fundamental Theorem of Arithmetic）例如60可分解成$2^2$，3和5的乘積。現在我們要探討的是它對其他數系是否也成立呢？我們的答案爲“否”。且看下例：

例：設　$A=\{a+b\sqrt{-6} \mid a,b\in Z\}$

定義：$(a+b\sqrt{-6})+(c+d\sqrt{-6})=(a+c)+(b+d)\sqrt{-6}$

$(a+b\sqrt{-6})(c+d\sqrt{-6})=(ac-6bd)+(ad+bc)\sqrt{-6}$

其中$a,b,c,d\in Z$

我們看到，6在此數系中可分解成

(1)　$6=2\cdot 3=-\sqrt{-6}\cdot\sqrt{-6}$

我們看到6可分解成二種不同形式。而且2，3和$\sqrt{-6}$在此數系中均是質數。亦即不能再加以分解。（Why？）

定義：數$a+b\sqrt{-6}$的長度（norm）定義爲數$a+b\sqrt{-6}$和$a-b\sqrt{-6}$之乘積。即

$$N(a+b\sqrt{-6})=(a+b\sqrt{-6})(a-b\sqrt{-6})=a^2+6b^2$$

一個數的長度總是正的、正整數。依照乘法律

$$\begin{aligned}N[(a+b\sqrt{-6})(c+d\sqrt{-6})]&=[(ac-6bd)+(ad+bc)\sqrt{-6}][(ac-6bd)-(ad+bc)\sqrt{-6}]\\&=(ac-6bd)^2+6(ad+bc)^2\\&=a^2c^2+36b^2d^2+6a^2d^2+6b^2c^2\\&=a^2(c^2+6d^2)+6b^2(c^2+6d^2)\\&=(a^2+6b^2)(c^2+6d^2)\\&=N(a+b\sqrt{-6})N(c+d\sqrt{-6})\end{aligned}$$

亦即二數之積的長度等於他們各個長度的乘積。

假如 2 可分解成二個數（在新數系中）則

$$2=(a+b\sqrt{-6})(c+d\sqrt{-6})$$

因此 $\quad N(2)=N(a+b\sqrt{-6})N(c+d\sqrt{-6})$

但是 2 的長度是：$N(2)=(2+0\sqrt{-6})(2-0\sqrt{-6})=4$

故 $\quad 4=(a^2+6b^2)(c^2+6d^2)$

亦即 4 可以分解成二個正整數的乘積，只有二種情況：㈠二個因數都是 2；或一個是 4，另一個是 1，前者不可能，後者雖可以，但我們並不視爲一種因數分解，就好比 $5=1.5$ 在整數系中一樣。同樣地，亦可證明 3 和 $\sqrt{-6}$ 亦爲質數。

⑴式指出 6 在新數系中可分解成二種不同之質數乘積。可見在一般的數系中，因數分解的唯一性並不一定成立，至於整數系中，因數分解的唯一性，可以證明如下：

引理 1：任二數的每一公倍數必爲他們最小公倍數的倍數。

此證明乃據於 $a$，$b$ 的二個公倍數之差仍爲 $a$，$b$ 之公倍數。設 $m$ 是 $a$，$b$ 的最小公倍數。$N$ 是任一公倍數。則 $N-nm$，$\forall n\in N$。仍爲 $a$，$b$ 之公倍數，顯然地 $N-nm$ 中必有一個爲負數。設 $N-xm$ 是這些正數中之最後一個。它仍是 $a$，$b$ 之公倍數，但不大於 $m$，因爲再減 $m$ 便得下一個公倍數爲負數。因 $m$ 是最小公倍數，唯一可能是 $N-xm=m$，因此 $N=xm+m=(x+1)m$，是 $m$ 之倍數。

引理 2：$a$，$b$ 之積被 $m$ 除所得的商，即 $d=ab/m$，是 $a$，$b$ 之公因數。因 $d\cdot m/a=b$ 而 $m/a$ 爲一整數，因此 $d\mid b$。同理可證 $d\mid a$。

定理：假如 $p\mid xy$，$p$ 爲質數 $\Rightarrow p\mid x$ 或 $p\mid y$。

系理：假如一質數整除數個數之乘積，則它至少整除其中之一個。

令 $m$ 是 $p$，$x$ 之最小公倍數，而 $xy$ 是 $p$ 之倍數，顯然亦是 $x$ 之倍數，因此 $xy$ 是 $p,x$ 之公倍數，由引理 1 知，$xy$ 爲 $m$ 的倍數。故

⑵ $\quad xy=hm \quad , \quad h\in Z$

由引理 2 知，

⑶ $\quad d=px/m$

是整數，且爲 $p,x$ 之公因數。$d\mid p$，$p$ 爲質數，所以 $d=p$ 或 $d=1$。若 $d=p$，則 $p\mid x$。若 $d=1$，那麼⑸式變成 $1=px/m$ 或 $m=px$，因此⑵式 $xy=h(px)$，得 $y=hp$，即 $p\mid y$，故知 $p$ 必至少整除其中之一。

定理：質因數分解唯一性。

設 $N$ 有二種不同因數分解法。

$$N=pqr\cdots=PQR\cdots$$

則 $P\mid N$，因此 $p$ 整除右邊之積。由系理知，它整除其中之一，然而一個質數整除另一質數，此二數必相等，即 $p$ 必出現於右邊。同樣地，$q$，$r\cdots$ 亦然，同理

可證 $P$，$Q$，$R\cdots$ 亦必出現於左邊。

現在我們只要看每個質數在兩邊出現之次數相同。設 $P$ 在右邊出現 A 次，在左邊出現 $a$ 次，$a$，$A\in N$，則

$$N=p^{a}q^{b}r^{c}\cdots=p^{A}q^{B}r^{C}\cdots$$

假如 $a$ 和 $A$ 不相等，設 $A$ 較大。則

$$M=N/p^{a}=q^{b}r^{c}\cdots=p^{A-a}q^{B}r^{C}\cdots$$

$M$ 之二種不同表示式。$p$ 在左邊沒出現，故 $A=a$，同樣地，亦可得 $b=B$，$c=C$，…那也就是說在不同因數分解中每一個質數出現同樣多次。

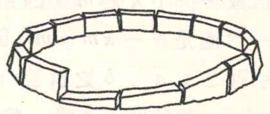
很自然地，我們會懷疑，為什麼同樣的證明在這個數系 $a+b\sqrt{-6}$ 中不能成立。事實上幾乎大部分證明在此數系中仍可行得通，唯一的是引理 1 不能成立，因為最小公倍數根本不存在。因此引理 1 可說是此證明的基本步驟。

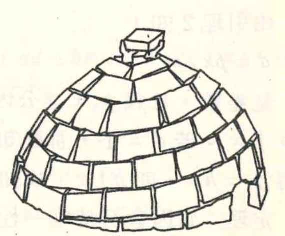
參考：The Enjoyment of Mathematics.

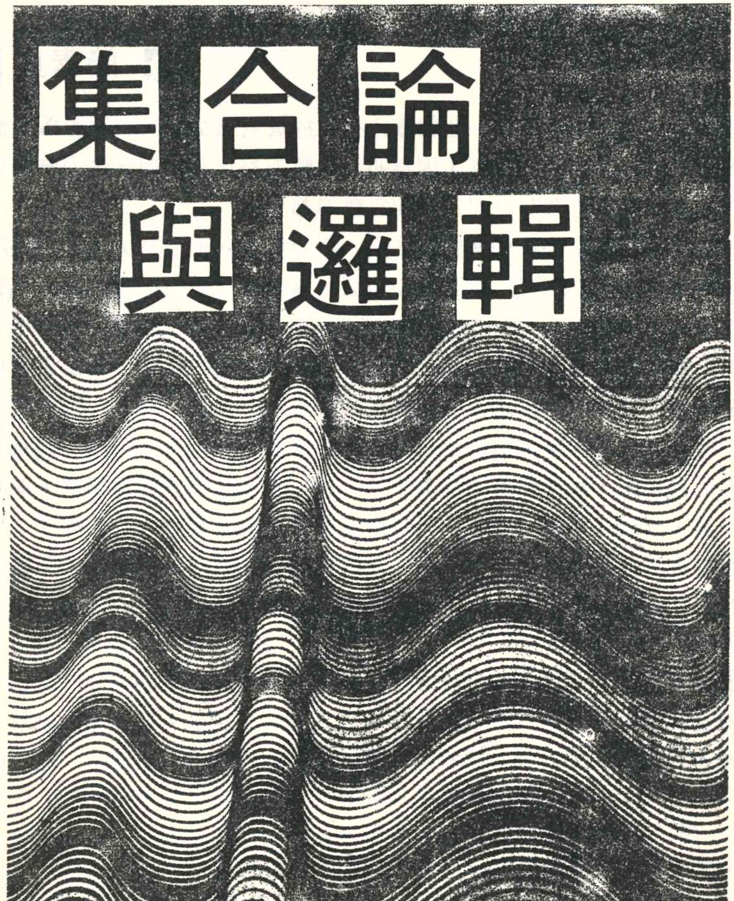
愛斯基摩人圓頂屋的建造，是先把雪好好地均勻壓實，再用14至20吋長的寬身刀，切成24 × 18 × 6吋的雪磚。

首先砌出圓形基礎；直徑以10呎為宜；基中三塊雪磚切出一個坡度以作為螺旋形牆的起頭。人站在裏頭砌雪牆，每層稍向內作些傾斜。如果每一磚砌合得很緊實，這個圓頂屋是不會倒塌的。（參見右列三圖）

然而，我們數學知識的累積，是否也應像愛斯基摩人建造圓頂屋一樣，把每一個層次，作札實的了解，而後，再將其緊緊的銜接在一起，那麼，我相信我們數學知識的寶塔是不會倒塌的。






集合論
與邏輯

# 無窮大

簡素貞

在一些落後的民族中，碰到一些稍微大一點的數就無法領受，而認為是很多很多；但事實上我們並不怕討論大數，因為再大的數它終究是有限，然而無窮就不同於大數，它比我們無論花多少時間所寫出的數目都大。

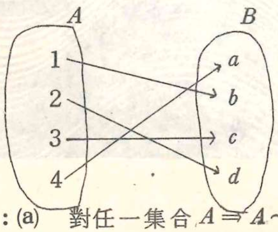
數學所研究的對象不外是一些數的集合，點的集合，而且絕大部份為無限集合；所以"數學導源於無限的觀念"此說法並不誇大。拿微積分來說，微分中的導數 $f'(a)$ 即是說函數 $f(x)$ 當 $x$ 趨近於 $a$ 時兩點所連線段之斜率，此"$x$ 趨近於 $a$"即表示 $x$ 與 $a$ 非常靠近其距離為無窮小；而積分中的窮盡法亦含此無窮的觀念；甚至齊諾(Zeno)的詭論「善跑的 Achilles 永遠追不上比他早跑 100 碼的烏龜」也是用此無窮的觀念。(但當時的希臘人尚無無窮級數的概念)。在康脫(Cantor, 1873)之前無限的觀念一直未能被接受，甚至數學大亨高斯(Causs)亦不贊同採用無窮數，並認為它是數學所不容，他認為無窮並不是數，只是極限裏一種無窮增大的過程：$\lim_{x\to\infty}\cdots$，一直到康脫說明如何用有限集合的方法來計算無窮集合，並明白定義了觀念，如順序(order)，基數(cardinal number)，可數性(denumerablity)，才將無窮變得可理喻。

在講無窮集合之前我們先看一些有限集合的性質

(1)集合 $A$ 對等於 $B$ 以 $A \sim B$ 表之。

定義：若存在一函數 $f\ A \to B$，為一對一且映成函數則說 $A \sim B$

例：




推論：(a) 對任一集合 $A \Rightarrow A \sim A$

(b) 若 $A \sim B$ 則 $B \sim A$

(c) 若 $A \sim B$ 且 $B \sim C$ 則 $A \sim C$

(d) $A \sim A \times \{a\}$

(2)基數：設A爲任意集合，又設 $\alpha$ 表示與A對等的集合所構成的集合族，則 $\alpha$ 稱爲集合A的基數，記爲 $\alpha=\#(A)$。並且規定若A爲有限集合時，以A的元素個數表示其基數，如 $\#(\phi)=0$，$\#(\{2\})=1$，$\#(\{7,9,11,13,15\})=5$

定義：設 $\alpha=\#(A)$，$\beta=\#(B)$ 且 $A \cap B=\phi$

則 $\alpha+\beta=\#(A \cup B)$，$\alpha\beta=\#(A \times B)$

推論：(a) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

(b) $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$

(c) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

(d) $\alpha\beta=\beta\alpha$

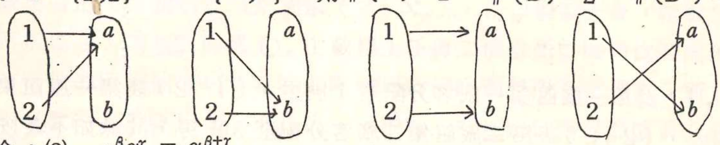
(e) $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$

(f) $\alpha+\beta=\alpha+\gamma \Rightarrow \beta=\gamma$

(g) $\alpha\beta=\alpha\gamma \Rightarrow \beta=\gamma$

(3)設 $\alpha=\#(A)$，$\beta=\#(B)$，$B^A$ 表示從 $A$ 對應到 $B$ 的所有函數集則 $\beta^\alpha=\#(B^A)$

例： $A=\{1,2\}$  $B=\{a,b\}$  則 $\#(A)=2$  $\#(B)=2$  $\#(B^A)=2^2=4$



推論：(a) $\alpha^\beta\alpha^\gamma=\alpha^{\beta+\gamma}$

(b) $(\alpha^\beta)^\gamma=\alpha^{\beta\gamma}$

(c) $(\alpha\beta)^\gamma=\alpha^\gamma\beta^\gamma$

(4)設 $\alpha=\#(A)$，$\beta=\#(B)$，且 $A$ 和 $B$ 之一子集對等則

記爲 $A \preceq B$ 且 $\alpha \leq \beta$

推論：$\forall$ 集合 $A \Rightarrow A \prec 2^A$  i.e.  $\alpha<2^\alpha$

看完有限集合我們開始看無限集合，有限集合與無限集合雖同是集合，但是他們的性質却完全不同，有些在有限集合上不可能的運算却能輕易的用在無限集合上。舉例來說，在每間只能住一人且每間都有房客的旅館中若要再安排一位多來的房客住進來似乎是不太可能，但是若發生在同樣情形但却有無限多房間的旅館中，就不愁沒房間住，此時老板可將1號房客移至2號，2號的移至3號，……，$n$ 號的移至 $n+1$ 號，……而新來的旅客住進1號房，如此問題便輕易的解決了。有天另一間旅館的無窮旅客一口氣都要搬到此已客滿的旅館住，諸位可想到對策？此時老板將1號的移至2號住，2號移至4號，3號移至6號，…… $n$ 號移至 $2n$ 號，……，如此便空下奇數號的房間，如此便可安排住下新來的無窮房客。然而更大的

問題又接著而來，那就是宇宙間所有無窮旅館中的無窮旅客均要遷到此旅館住，而老板却不能掛出客滿的牌子來拒絕旅客，則這無窮又無窮的旅客該如何的安插在這每間已有人的無窮房間的旅館中呢？有人說用質數，將第一旅館的旅客安排在$2^1$號，$2^2$號，$2^3$號，$2^4$號，……，將第二旅館的旅客安排在$3^1$號，$3^2$號，$3^3$號，$3^4$號，……，將第三旅館的旅客安排在$5^1$號，$5^2$號，$5^3$號，$5^4$號，………將第四旅館的旅客安排在$7^1$號，$7^2$號，$7^3$號，$7^4$號，……（相異質數$p,q$又$m,n\in N$，$p^m \neq q^n$，且質數有無窮個）。不錯，這樣每個旅客均可找到一間房間住，但旅館老板却不滿意此種方法，因為按此方法分配，則將有很多房間空下無人住，而不合乎旅館的經濟原則，最後旅館老板終於想出解決的方法，首先他將所有旅客排列如下表：

$$
\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4)\cdots\cdots & (1,n) & \cdots\cdots \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4)\cdots\cdots & (2,n) & \cdots\cdots \\
 & \vdots & & & \vdots & \\
 & \vdots & & & \vdots & \\
(n,1) & (n,2) & (n,3) & (n,4)\cdots\cdots & (n,n) & \cdots\cdots \\
 & \vdots & & & \vdots & \\
 & \vdots & & & \vdots & 
\end{array}
$$

其中（1，1）表第一旅館第一旅客分配至1號房，（1，2）表第一旅館第二旅客分配至2號房，（2，2）表第二旅館第二旅客分配至3號房，其餘如下表按前頭方向安排。

$$
\begin{array}{cccccccccc}
(1,1) & \rightarrow & (1,2) & & (1,3) & & (1,4) & \cdots\cdots & (1,n) & \cdots\cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
(2,1) & \leftarrow & (2,2) & & (2,3) & & (2,4) & \cdots\cdots & (2,n) & \cdots\cdots \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
(3,1) & \leftarrow & (3,2) & \leftarrow & (3,3) & & (3,4) & \cdots\cdots & (3,n) & \cdots\cdots \\
 & & & & & & \downarrow & & \downarrow & \\
(4,1) & \leftarrow & (4,2) & \leftarrow & (4,3) & \leftarrow & (4,4) & \cdots\cdots & (4,n) & \cdots\cdots \\
 & & & & & & & & \downarrow & \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & & & \downarrow & \\
(n,1) & \leftarrow & (n,2) & \leftarrow & (n,3) & \leftarrow & (n,4) & \leftarrow\cdots\leftarrow & (n,n) & \cdots\cdots \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & 
\end{array}
$$

由上知雖然是無窮又無窮的旅客只要經過適當的安排，均能住進以自然數為編號的

房間中，在此將說明取自然數的集合當作無限的量度。

我們都知道自然數爲無窮集合，而自然數的平方所成的集合：{ 1，4，9，16 ，…… }亦爲一無窮集合，在此我們會想到究竟此二集合何者所含元素較多？很顯然後者每一元素皆在前者中，爲前者的一子集，既然如此我們是否可說前者所含無限個元素，要較後者所含的無限個要來的多；回想我們最前面提的有限集合對等關係，兩集合若彼此之間有一對一且映成的關係則我們說此二集合對等，而$A\sim B\Rightarrow \#(A)=\#(B)$（具有相同基數），現在我們也可在剛提的二個無限集合中找出這樣關係。

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots\cdots\cdots & n & \cdots\cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\
1 & 4 & 9 & 6 & \cdots\cdots\cdots & n^2 & \cdots\cdots
\end{array}$$

所以我們說這二個無限集合對等，具有相同的基數，而有限集合與無限集合的定義便爲下。

有限集合——若集合$M$沒有一個眞子集$M_1$能$M\sim M_1$

無限集合——若集合$M$有一個眞子集$M_1$能$M\sim M_1$

自然數所成集合的基數我們以 $\aleph_0$ 表示（或 $\aleph_0$），所以偶數集合，奇數集合，自然數立方所成集合，其基數均爲 $\aleph_0$。在數線上任何二個自然數間可找到無限多有理數，而依有理數的稠密性我們又可在二兩有理數間找到無限多有理數，所以我們可能會認爲有理數的基數要比 $\aleph_0$ 來的大，但事實上有理數却與自然數具有相同的基數 $\aleph_0$ ，我們可將有理數如下排列，第一行分子全爲1，分母依次爲1，2，3，4，……，第二行分子全爲2，分母依次爲1，2，3，4，……，如此排列下去。

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1} & & \frac{5}{1} \\
\frac{1}{2} & & \left(\frac{2}{2}\right) & & \frac{3}{2} & & \left(\frac{4}{2}\right) & & \frac{5}{2} \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \left(\frac{3}{3}\right) & & \frac{4}{3} & & \frac{5}{3} \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \left(\frac{4}{4}\right) & & \frac{5}{4}
\end{array}$$

凡是分子、分母有公約數的分數捨棄，則每一有理數在表中只出現一次。依上圖箭頭指示方向爲計數順序，則我們可找出其與自然數一對一的關係。

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\cdots\cdots\cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{3}{2} & \frac{2}{3}\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

由上所述可能有人會懷疑這是否就表示所有無窮大都對等（基數相同）若如此則又有何意義呢？事實上並非如此，像前面所舉這可與自然數建立一對一關係的無限集合是屬於可數性的，而我們還可找到不可數的無窮集合，其所具有的無窮多就要比自然數，有理數的無窮多要更多。

我們知道任何實數（直線上任一點皆爲實數）皆可表示成無窮小數如：

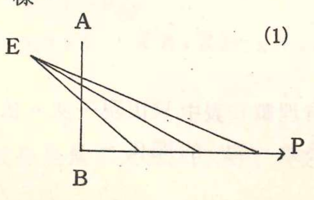
$$\frac{1}{5} = 0.199999\cdots\cdots \qquad \log 6.82 = 0.83378\cdots\cdots$$

$$\frac{3}{7} = 0.428571428\cdots\cdots \qquad e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = 2.7182\cdots\cdots$$

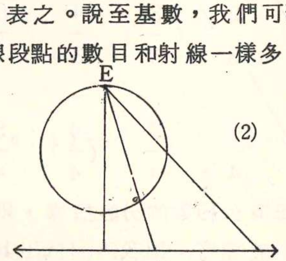
先假設這些實數爲可數與自然數具有相同基數，如此，便可找出其一對一的關係，（我們討論 $0 < \gamma < 1$ 之間的實數）

$$
\begin{array}{l}
1 \longleftrightarrow 0.Z_{11}\ Z_{12}\ Z_{13}\ Z_{14}\cdots\cdots\cdots \\
2 \longleftrightarrow 0.Z_{21}\ Z_{22}\ Z_{23}\ Z_{24}\cdots\cdots\cdots \\
3 \longleftrightarrow 0.Z_{31}\ Z_{32}\ Z_{33}\ Z_{34}\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

其中 $Z_{ij} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 但 $Z_{ij}$ 不全爲0且不全爲9 若實數與自然數具有相同基數，則任一實數皆可和某一自然數對應，即如上表之對應關係，但從上表中我們却可找到另一實數沒被列在表中，即無法找到其與某一自然數對應，如實數 $\gamma = 0.a_1 a_2 a_3 a_4\cdots\cdots$ 其中 $a_i \neq Z_{ii}$ 即 $a_1 \neq Z_{11}$，$a_2 \neq Z_{22}$，$a_3 \neq Z_{33}$，……而如此的實數 $\gamma$ 有無限多種，並且我們無法從上表所列的實數中找出與這種實數 $\gamma$ 相等，因 $\gamma$ 與上表任一數至少有一位數不等，如與數(2)至少其第二位不等，與數 $n$ 至少其第 $n$ 位不等，因此我們知實數的基數要比自然數基數大的更多，而實數的基數我們以 $\mathfrak{c}$ 或 $\aleph_1$ 表之。說至基數，我們可發現一些很妙的問題即線段的基數與射線的基數一樣（線段點的數目和射線一樣多），圓的基數和直線一樣。

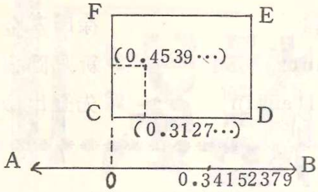



(1)




(2)

上圖(1)表示 $\overline{AB}$ 經過光源 $E$ 皆可在 $\overrightarrow{BP}$ 上找到一點對應之點，而圖(2)亦同此理，對無窮大的研究有項更驚人的結果，即平面上所有點的數目與直線上所有點的數目相等。




(3) 設直線上一點 0.34152379 ⋯⋯⋯，我們從其中選出偶數位及奇數位並在一起而得二個新數即

0.3127 ⋯⋯

0.4539 ⋯⋯

而後分別在水平與垂直方向找出這二數距離的點，如此直線上任一點皆可在平面上找到其對應的一點，反之平面上一點由 0.9412 ⋯⋯、0.4073 ⋯⋯ 兩位數字代表，我們可將其混合得 0.94401723 ⋯⋯，而在直線上找到對應之點，證得平面上無窮多點數目等於直線上無窮多點數目。同樣方法我們也可知空間無窮多點的數目亦與直線相同，（將代表數線上一點的數目分成3組），從上述我們可知歐幾里得的公設〃全量大於分量〃之說就不再適用於無窮集合中，而我們也不難想像康脫提出集合論之時給數學界帶來多大的震撼。

而無窮集合的運算與有限集合大不相同

$$a + a = 1 + a = a$$

$$a\,a = 1\,a = a$$

$$a + c = c$$

$$a\,c = c$$

至此我們只提到二個無窮基數 $a$ 和 $c$，且 $a < c$，那麼是否有一集合其基數為 $\beta$，而 $a < \beta < c$ 呢？而又是否存在一基數 $\gamma$，使得 $c < \gamma$ 呢？關於第一個問題至今仍未獲得解決，但在康脫提出之集合論中却有這麼一個公設〃不存在一基數 $\beta$，使得 $a < \beta < c$〃，在 1963 年有人證出這個公設獨立於集合論的其他公設的。這種情形正如同歐幾里得的平行公設一般，獨立於該幾何系統的其他公設。

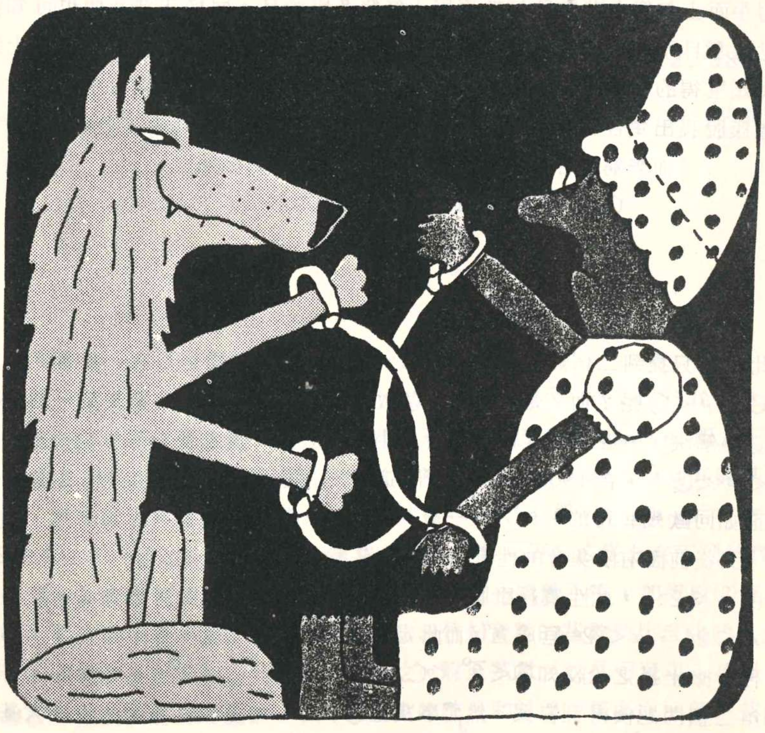
又從前面有限集合的性質，知道〃對任意有限集合 $A$，$\alpha = \#(A)$，$A \lesssim 2^A$ 恒成立，即 $\alpha < 2^\alpha$〃，此性質經康脫推廣後可適用於任意集合即“$\forall$ 集合 $A$，若 $\alpha = \#(A)$ 則 $A \lesssim 2^A$，$\alpha < 2^\alpha$ 恒成立”，而此定理即稱為康脫定理。根據此定理可得到 $a < 2^a$，再根據上提之公設知 $a < 2^a < c$ 不成立，因此 $c \leq 2^a$ 是必然的，若 $c < 2^a$ 則第二個問題便得到答案，然而事實上 $c = 2^a$，那麼 $c$ 是否就是最大基數呢？其實不然，再次引用康脫定理，我們知道 $c < 2^c$。所以 $c$ 並非最大的基數，尚有無數多種基數要遠比 $c$ 要來得大，而對這些基數比 $c$ 要來得大甚至大的很多的集合，我們可能一時不能完全接受它，而我們所處的這種情形不正就如同那非洲蠻族無法接受大於3的數目一樣嗎？

參考資料：


1. 一、二、三……無窮大　列樂凱譯　徐氏基金會
2. 無窮與集合　黃克寧譯　徐氏基金會
3. Set Theory　Lipschntz　新月圖書公司
4. Stories about Sets　N.Ya.Vilenkin　先登出版社


試試看：

此人與狼被繩子繫著，其中一條繩子是套著另一條的，請問這個人若是您，您將如何解開這個繩套逃脫呢？但不可解開任一方手上的繩結，亦不可將任一方的繩子弄斷。



# 淺談基數與序數

謝卿宏

本文除簡介基數（cardinal number）和序數（ordinal number）外，並對序型加以討論，而且將以序型說明序數。

何謂基數？若我們討論的集合 $A$ 是有限的，則此集合的基數就是這集合的元素個數，集合 $A$ 的基數以 $\#(A)$ 表示，例如 $\{1,2,\cdots\cdots,n\}$ 的基數就是 $n$，要是集合為無限時，若此集合是可數的亦即可以按自然數次序排列出來，則我們說此集合擁有基數 $\aleph_0$ 亦即 $\#(N)=\aleph_0$，這是顯而易見的。因為 $Z$ 可表成 $\{0,1,-1,2,-2,3,-3,\cdots\cdots\}$ 故 $\#(Z)=\aleph_0$ 同理 $\#(E^+)=\aleph_0$；若 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$ 則 $\#(A)=\aleph_0$ 要是此無限集合為不可數時，且和實數 $R$ 間有一函數 1—1 且映成對應，則我們說此集合的基數為 $c$，如 $\#(0,1)=c$，$\#(R)=c$。

所謂序數呢？於此又要將其分為有限集合和無限集合來討論，所謂一有限集合 $A$ 的序數，就是在 $A$ 中定義一個次序（order）"$\prec$"，而且 $A$ 中任二元素皆以此次序可比較。若 $A$ 中含有 $n$ 個元素，則稱集合 $A$ 的序數為 $n$，以 $o(A,\prec)$ 表之，或簡記 $o(A)$ 例如 $A'=\{1,2,4\}$，則 $o(A,\prec)=3$，其中 $\prec$ 代表自然數之次序，然而在集合 $A$ 上不僅可以定義出一個次序，譬如我們定義次序 $\prec'$ 使得 $a\prec' b\Rightarrow b\mid a$ 也是可以的，則 $4\prec' 2\prec' 1$ 然而我們常說一個集合若為整序集，（well-ordered set）則其序型（order type）稱為此集合的序數，如 $A'$ 的序型就是 3，以後我們定義自然數具有的序型 $\omega$，Q 具有 $\eta$ 序型，因此我們可推廣序型之討論至序數之中。

在日常生活中，只要你稍加留意必可察覺趣事之多，不勝枚舉，在這廣大的空間都是如此的，那末，在數學的領域之內又何嘗不是這樣呢？在這裡我們將就數和序數之有趣性質做一些較為基本的討論，依下面順序討論本題(1)對某集合（equivalent sets）(2)基數(3)相似性函數（similarity mappings）(4)序型與序數。我們將以對等集合間之關係做為基礎，來研究基數的一些性質，而序型和序數之討論將以相似函數來引入。

設$A,B$為兩集合，若存在一函數$f$，使得$f: A\to B$是1—1且映成，則稱A和$B$對等記為$A\sim B$，對等集合間將會有很微妙的關係，先來看個例題。

〔例1〕：令$L_1$表$\overline{AB}$之長度，$L_2$表$\overline{CD}$之長，$A,B,C,D$為平面上四點，若$L_1=a>0$，$L_2=b>a$ 則$\overline{AB}\sim\overline{CD}$

證明：在圖1中，若自點D向$E$區域內任一點畫一綫必和$\overline{AB}$，$\overline{CD}$各交於一點

設$x\in\overline{AB}$，若$\overrightarrow{ox}\cap\overleftrightarrow{CD}=\{y\}$，

令$f:\overline{AB}\to\overline{CD}$且$f(x)=y$

顯而易見，$f$是1−1且映成。

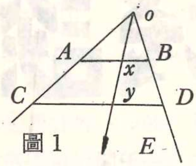


圖1

從例1，不難推得$(0,1)\sim R$，$R$實數所成集合。因此我們也能夠建立一函數使得所有自然數所成的集合$N$和所有整數所成集合$Z$對等，或許會讓你更驚訝的是$N$和$Q$會有相同的個數，亦即對等，雖然$N$不見稠密性，而$Q$却見有。於此大家或許已察覺到一個事實，欲找二集合對等是輕而易舉的，但是若給任二集合是否就能夠決定其對等？並不一定能夠 例如$A=N$，$B=\{2^{2^n}+1 \mid n\in N,\ 2^{2^n}+1$是質數$\}$，至目前我們無法判斷兩者是否對等。

$[0,1)\sim[3,8]$：設$A,B,C,D$為四集合，如果$A\sim B$，$C\sim D$且$A\cap C=B\cap D=\phi$則不難證明，$A\cup C\sim B\cup D$同理若$A\sim B$，$C\sim D$且$A\supset C\supset B\supset D$則$A-C\sim B-D$，亦不難了解若$A\sim B$且$B'\subset B$，則在$A$中存在一子集$A'$，使得$A'\sim B'$知道上面三個性質，將有助於理解一個非常有趣的定理，由於此定理存在使得證明某些集合對等變得較容易，此定理便是堪托一布恩斯坦定理（ The cantor- Bernstein Theorem ）。

〔定理 1〕：若$A,B,A_1,B$，是四個非空集合，使得$A_1\subset A$，$B_1\subset B$，$A\sim B_1$，$B\sim A_1$，則$A\sim B$。

證明：因為〞～〞具有反身性，對稱性，遞移性，因此若能證明$A\sim A_1$，則$A\sim B$於此分二種情形來討論。

(i) 若$A_1=A$或$B=B_1$則$A\sim B$

(ii) 若$A_1\neq A$且$B\neq B_1$，設$A=A_0$，$B=B_0$

因為$B\sim A$，且$B_1\subset B$，因此在$A_1$中，存在一子集$A_2$，使得$A_2\sim B_1$，同樣地，在$B$，中亦存在$B_2$，$B_2\subset B$，使得$A_1\sim B_2$，若$B_2=B_1$或$A_1=A_2$則$A\sim B$。

若$B_1\neq B_2$且$A_1\neq A_2$則分別在$B_2$，$A_2$中可以找到$B_3$，$A_3$使得$A_2\sim B_3$，$B_2\sim A_3$依歸納法，若$A_{n-1}\neq A_n$，$B_n\neq B_{n-1}$對所有自然數$n$皆成立，則我們可以找到無數多個$A_n$，和$B_n$使得$A_n\supset A_{n+1}$，$B_n\supset B_{n+1}$且$A_n\sim B_{n+1}$，$B_n\sim A_{n+1}$．$\forall n\in N$

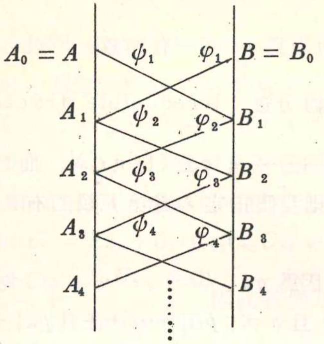



圖 2

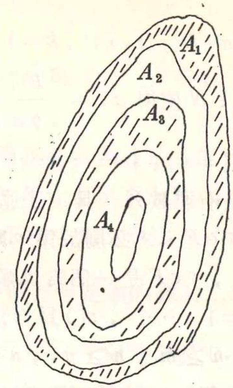



圖 3

在圖2中，$\psi_n ： A_{n-1} \to B_n$， $\varphi_n ： B_{n-1} \to A_n$ $n \in N$

$\psi_n$ ，$\varphi_n$ 都是1－1且映成函數

同時 $A_{2n} = \psi_{2n} \circ \varphi_{2n-1} ( A_{2n-2} )$ $A_{2n+1} = \varphi_{2n+1} \circ \psi_{2n} ( A_{2n-1} )$

所以 $A \sim A_2 \sim A_4 \sim A_6 \sim A_8 \sim \cdots\cdots$ ，$B \sim A_1 \sim A_3 \sim A_5 \sim A_7 \sim A_9 \sim \cdots\cdots$

從圖3，可以明白地看出

$A = ( A - A_1 ) \cup ( A_1 - A_2 ) \cup ( A_2 - A_3 ) \cup ( A_3 - A_4 ) \cup \cdots\cdots$

$A_1 = ( A_1 - A_2 ) \cup ( A_2 - A_3 ) \cup ( A_3 - A_4 ) \cup ( A_4 - A_5 ) \vee \cdots\cdots$

因爲 $A_{2n-2} \sim A_{2n}$ 且 $A_{2n-1} \sim A_{2n+1}$ $\forall n \in N$

且 $A_{2n-2} \supset A_{2n-1} \supset A_{2n} \supset A_{2n+1}$

故 $( A_{2n-2} - A_{2n-1} ) \sim ( A_{2n} - A_{2n+1} )$ $\forall n \in N$

因此 $( A - A_1 ) \sim ( A_2 - A_3 )$ ，$( A_2 - A_3 ) \sim ( A_4 - A_5 )$ ，……

又因爲 $A_n - A_{n+1} = A_n - A_{n+1}$ $\forall n \in N$

∴ $( A_n - A_{n+1} ) \sim ( A_n - A_{n+1} )$， $\forall n \in N$

故 $A \sim A_1$， 因此 $A \sim B$

由堪托－布恩斯坦定理，可以推得〔0,1）～〔3,8〕，這是用定義所不能直接地證明的，至此我們已提及某些集合是對等的，如$N \sim N$，$N \sim Q$，〔0,1）～〔3,8〕，（0,1）～$R$但是$N$和〔0,1）對等嗎？這有待下面更進一步探討。

所有代數數的集合是可數的，我們說集合$A$若和$N$對等，則$A$是可數的。因此，我們知道$N$，$N$，$E^+$，甚至$Q$都是可數的，然而，開區間（$a$，$b$），$a \neq b$是可數的嗎？所有的代數數所成的集合（the set of all algebraic numbers）或超越數所成的集合（the set of all transcedental numbers）是否可數？這一連串的問題刺激我們能夠更前進。

[定理 2]：所有有限的有理數數列所成的集合是可數的。

證明：令$F = \{ s \mid s$ 爲一有限有理數數列$\}$ 若 $s \in F \Rightarrow s = ( r_1 , r_2 , \cdots\cdots , r_m )$

for some $m \in N$ , $r_k \in Q$ , $k=1$ , …… , $m$因爲 $r_k$ 爲一有理數，所以必存在 $p_k \in Z$ , $q_k \in N$使得 $r_k = \dfrac{p_k}{q_k}$ 爲一不可約分數（irreducible fraction）

若$n = |p_1| + |p_2| + \cdots\cdots + |p_m| + q_1 + \cdots\cdots + q_m$ 則$n \in N$ 而且$n$是有意義的，若有限有理數列 $s$ 具有上述之性質，則我們指定 $s$ 爲第 $n$ 類的有限有理數列，因此任一 $s \in F$ , $s$ 必屬於第$n$類，$n \in N$。

令 $n \in N$ , $s \in F$ 是一個第 $n$類的數列，因爲 $q_k$（$k=1$，……，$m$）均爲自然數 $|p_k|$ （$k=1$，……，$m$）爲自然數或零，且 $n = |p_1| + \cdots\cdots + |p_m| + q_1 + \cdots\cdots + q_m$ 所以 $n \geq m$ , $n \geq q_k$ , $n > |p_k|$ 對 $k=1$，……，$m$都成立。

由 $n \geq m$，我們知道，任一個第 $n$類的數列 $s$ 至多只能有 $n$ 項，而由 $n \geq q_k$ , $n \geq |p_k|$，我們更可得到這些數列的每一項僅能有有限個分子和分母，因此，第 $n$類的有理數列只能是有限個（不難察覺到第$n$類有限有理數列的個數少於 $(2n^2)^n$ 個）因此，如果依第1類，第2類，……，第 $n$類，……次序將這些數列依次排列，就足以說明這定理是成立的。

說明了定理 2 之後，若說空間中所有座標爲有理數點所成的集合是可數的那也就不覺爲奇了，從這定理我們更可以推得一個事實，〃一個可數集合的所有有限子集所成的集合是可數的〃。這是無可置疑的，於是我們將道出一件事實，所有代數數所成的集合是可數的。

設 $p = a_0 + a_1x + \cdots\cdots + a_nx^n$ , $a_i \in Z$ , $i=0, 1, \cdots, n$ , $a_n \neq 0$ , $n > 1$ 爲一多項式，則令$\varphi(p) = (a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n)$爲一個 $n+1$項數列，顯而易見的函數$\varphi$在係數爲整數的單元非常數多項數的集合和項數大於 2 且末項不爲 0的有限整數數列所我的集合間建立了，1－1 且映成的關係，因此所有係數爲整數的單元非常數多項式的集合是可數的，因爲一代數數就是一個整係數的單元非常數多項式的根因爲任一個一元$n$次多項式至多只能有$n$ 個相異根，也就是說所有代數數所成的集合是可數的。

$R \not\sim N$:前面提過了，所有自然數有限數列所成的集合是可數的。（$\because Q \supset N$）但是所有自然數的無限數列是否還是可數呢？答案絕對不會是肯定的，但是此處不加以說明，只是把它提出來罷了，在前面我們已提出了一個問題，就是$R \sim N$是否成立？顯然地，這關係是不會成立的，也因此就很容易推得，所有無理數的集合是不可數的，甚至所有超越數所成的集合亦是不可數的，（一個數若非代數數則爲超越數）現在就是證明$R$是一個不可數集合的時候了，在證明這一個定理之前，我們先說明正規小數表示法（normal decimal, representation），所謂正規小數表示法就是說，一個實數的十進位小數表示法中，擁有無限多個數字不是9的，例如：$0.5000\cdots$和 $0.\overline{419}$，$0.\overline{431}$ 等都屬於這個表示法，雖然 $0.4\overline{9} = 0.5000\cdots$，

但是 $0.4\bar{9}$ 這種小數表示法却不是正規的。

定理 3：在一個無窮數列（$x_1$，$x_2$，…）中，我們能夠定義一個函數 $f$，使得 $f$

$$(x_1, x_2, \cdots) = x, \quad x \neq x_n \quad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

證明：設（$x_1$，$x_2$，…）爲實數中任一數列，依照正規小數表示法之定義，顯然的，每一個實數，僅能以一種方法來表示，若 $Ex_n$ 表示不大於 $x_n$ 的最大整數，則 $x_n = Ex_n + 0_1\ C_{n1}C_{n2}C_{n3}\cdots\cdots$ 爲 $x_n$ 的正規小數表示法，$\forall_n \in N$，令

$$C_n = \begin{cases} 0 \text{ 若 } C_{nn} \neq 0 \\ 1 \text{ 若 } C_{nn} = 0 \end{cases}$$

因此我們可以得到一個完善定義的數列（$c_1$，$c_2$，$c_3$，…）

若令 $f(x_1, x_2, \cdots\cdots) = x = 0.c_1\ c_2\ c_3\cdots\cdots$，顯而易見 $0.c_1\ c_2\cdots$ 是一正規表示法，而且 $x \neq x_n \quad \forall\ n \in N$，因此本定理得證。

因爲所有實數的集合是無窮的，所以由定理 3 我們知道 $R$ 是不可數的，也就是說 $R \sim N$ 不成立。

在討論對等關係後，現在就可以定義基數了！在前言中，我們已大概了解了什麼是基數，但此刻，我們將以較抽象的概念來開始說明：

若 $a = \{B \mid B \sim A\}$ 則符號 $a$ 就是集合 $A$ 的基數，以 $\#(A)$ 表之。

因此我們知道，若一個集合的基數爲 $a$，則 $a$ 就是所有和 $A$ 對等的集合所成的集合，因爲〃～〃爲一對等關係，所以不同類（class）的集合其交集也就是空集合了，亦卽不同類的集合其基數就不等，也就是說若且唯若二集合 $A$，$B$ 對等，則 $\#(A) = \#(B)$ 於此我們先討論基數的加法。

c＋c＝c：設 $A$，$B$ 爲二集合，且 $\#(A) = m$，$\#(B) = n$，$A \cap B = \phi$ 若 $r = \#(A \cup B)$，則 $m + n = r$ 例如：$A = \{a, b, c\}$，$B = \{1, 2, 3, 4\}$ $C = \{2, 3, 5, 7, 8\}$ 則 $\#(A) = 3$，$\#(B) = 4$，$\#(C) = 5$，因此 $\#(A \cup B) = 7 = \#(A) + \#(B)$，$\#(B) + \#(C) = 9 \neq 7 = \#(B \cup C)$ 在基數的討論中，對加法而言，基數是可交換的，可結合的，但是對消去律是不成立的，由前言，我們已曉得 $\#(N) = \aleph_0$，$\#(R) = c$，若 2，3，5 均表基數，直覺地，我們知道下面這些事實：

(1) $2 + 3 = 5$　(2) $\aleph_0 + 3 = \aleph_0$　(3) $c + \aleph_0 = c$　(4) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$　(5) $c + c = c$

在(3)中只要令 $A = R - Q$，$B = Q$ 則 $\#(A) = c$，$\#(B) = \aleph_0$ 且 $A \cap B = \phi$，$A \cup B = R$　$\#(A \cup B) = c$ 因此 $c + \aleph_0 = c$ 令 $A = [0, 1]$，$B = [1, 2]$ 則 $\#(A) = c$，$\#(B) = c$ 且 $A \cap B = \phi$，$A \cup B = [0, 2]$，$\#(A \cup B) = c$，$\therefore\ c + c = c$ 這證明了 (5)

$c \cdot c = c$：若 $m = \#(A)$，$n = \#(B)$ 且 $r = \#(A \times B)$，則 $r = mn$，此卽爲基數之乘法從對等的關係，我們也不難證明基數的乘法是可交換的，可結合的，同時乘法對加法的分配律也成立，但是對消去律乃是不成立的，設 2，3，6 均爲基數且 $\#(N) = \aleph_0$，$\#(R) = c$ 則下面五式亦成立。

(1) $2\times 3=6$

(2) $3\cdot\aleph_0=\aleph_0$

(3) $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$

(4) $\aleph_0\cdot c=c$

(5) $c\cdot c=c$

此處只證明(2)，(4)，(5)其餘二者都是不難證明的。

(2) 令 $A=\{a,b,c\}$ $B=N$ 如果我們能夠證明 $A\times N\sim N$ 則本定理也就成立。定義 $f: A\times N\to N$ $f(a,m)=3m-2$，$f(b,m)=3m-1$，$f(c,m)=3m$，$m\in N$，則我們不難證明 $f$ 是 1－1 且映成，是故 $3\aleph_0=\aleph_0$

(4) 因為 $\#(Z)=\aleph_0$，$Z$ 是所有整數所成的集合

$\#([0,1))=c$，$[0,1)=\{x\mid 0\leq x<1\}$

$Z\times[0,1)=\{(x,y)\mid x\in Z, y\in[0,1)\}$

定義：$f: Z\times[0,1)\to R$ $f(x,y)=x+y$

則我們知道 $f$ 是 1－1 且映成的函數，因此

$Z\times[0,1)\sim R$ $\therefore\aleph_0 c=c$（參考圖4）

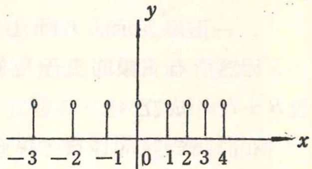


圖4

(5) $A=(0,1)$，$\#(A)=c$

若 $x\in A$ 則 $x=0.x_1\,x_2\,x_3\cdots\cdots$

$y\in A$ 則 $y=0.y_1\,y_2\,y_3\cdots\cdots$

$A\times A=\{(x,y)\mid x,y\in A\}$

定義 $f: A\times A\to A$

$f(x,y)=0.x_1y_1\,x_2y_2\,x_3y_3\cdots\cdots$,

$x=0.x_1\,x_2\,x_3\cdots\cdots$, $y=0.y_1\,y_2\,y_3\cdots\cdots$

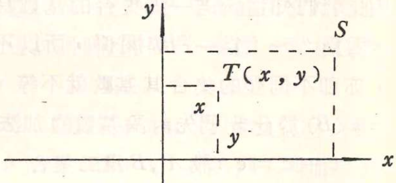


圖5

則 $(0,1)\times(0,1)\sim(0,1)$ 因此 $cc=c$ （參考圖5）

$R^2\neq R$：因為 $cc=c$ 成立，亦即 $R\times R\sim R$ 成立，也就是敘述着這一個事實，我們能夠將平面（二度空間）映入直綫（一度空間）了！顯然地，這豈不搞亂了我們對維度（dimensions）的觀念嗎？其實這僅是一種粗淺的想法罷了！因為這定理的眞正作用只是用來推翻我們直覺的錯誤，那也就是用來澄清不同維度的空間不能對等這錯誤的想法而已！其實不同維度的空間之間將有甚多的不同差別，例如不同維度的空間之間不存在一個 1－1 且連續的函數。讓我們來說明：不存在一個含有二位變數 $x$，$y$ 的函數 $f(x,y)$ 使得若 $(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)$ 則 $f(x_1,y_1)\neq f(x_2,y_2)$ $\forall x_1,x_2,y_1,y_2\in R$。這也就是說，不存在一函數 $f$，使得 $f$：$R\times R\to R$ 不是一對一且映成。假設存在一個連續函數 $f(x,y)$，令 $\varphi(x)=f(x,0)$ 則對變數 $x$ 而言，$\varphi(x)$ 為一連續函數（continuous function）設 $\varphi(0)=a$，$\varphi(1)=b$ 因為 $(0,0)\neq(1,0)$ 所以 $f(0,0)\neq f(1,0)$ 亦即 $a\neq b$ 令

$a<b$，因爲 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 內連續所以對所有的 $c\in(a,b)$ 存在 $x\in(0,1)$ 使得 $\varphi(x)=c$，以是存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $\varphi(x_0)=\frac{1}{2}(a+b)$

令 $\psi(y)=f(x_0,y)$ 則對變數 $y$ 而言 $\psi(y)$ 爲一連續函數且 $\psi(0)=f(x_0,0)$ $=\varphi(x_0)=\frac{1}{2}(a+b)$，因爲 $a<b$，$a<\psi(0)<b$ 且 $\psi(y)$ 在 $y=0$ 連續，如果我們將 $y$ 取得足夠小，則 $a<\psi(y)<b$ 亦成立，亦即 $a<f(x_0,y)<b$ 成立，然而 $a<f(x_0,y)<b$ 對 $y\neq 0$ 不成立，發生矛盾，故得證。

$2^{\aleph_0}=c$：定理 1 已經證明了基數不等式，但在此之前我們所討論的大都限於基數的等式或二集合含有不同之基數，然而却沒有加以比較，此時我們就要着手進行此工作，也順便提及冪集（Power sets）之基數。設 $m,n$ 爲基數，且 $A,B$ 爲二集合，使得 $\#(A)=m$，$\#(B)=n$，若存在一函數由 $A$ 映至 $B$ 是 $1-1$ 則我們說 $m\leq n$。因爲 $A\sim f(A)$，且 $f(A)\subseteq B$，所以 $A$ 和 $B$ 的一子集合對等，於此，要提及一個符號，若 $A$，$B$ =集合且 $A$ 和 $B$ 的一子集對等則說 $A$ 小於（Precede）$B$ 記爲 $A\leq B$，因此，如果 $\#(A)=m$，$\#(B)=n$，若且唯若 $m\leq n$ 則 $A\leq B$ 例如：$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{a,b,c\}$ 則 $\#(A)=4$，$\#(B)=3$，因爲 $3<4$ 所以 $B\leq A$，集合 $A$ 存在一子集 $A'$，使得 $A'\sim B$，同理 $\aleph_0<c$，於此必須說明的是，若 $m<n$，則 $m\leq n$ 且 $m\neq n$，因此，若 $\#(A)=m$，$\#(B)=n$，則 $A\leq B$ 但 $A$ 和 $B$ 不對等記爲 $A\nsim B$。

設 $A=\{a,b\}$，$B=\{1,2,3\}$，則從 $A$ 映入 $B$ 的函數 $f$ 有 $3^2$ 種方法，而從 $B$ 映入 $A$ 的函數 $g$ 有 $2^3$，這都是擁有簡單的排列組合觀念的人所極易懂得的。

設 $m$，$n$ 都是基數，且 $r=\#\{f\mid f:B\to A$ 是一函數，且 $\#(A)=m$，$\#(B)=n\}$ 則 $r=m$。

[定理 4]：設 $A$ 爲任一集合，則 $A\leq 2^A$ 此處 $2^A$ 表 $A$ 的冪集

證明：定義 $f:A\to 2^A$ $f(a)=\{a\}$ $\forall a\in A$

很明顯的：$f$ 是 $1-1$ 函數，若 $f$ 爲映成函數

令 $B=\{x\mid x\notin f(x)\}$ 因爲 $\phi\in 2^A$，所以存 $b\in A$，使得 $f(b)=\phi$ 但 $b\notin\phi$，故 $B\neq\phi$

因爲 $f$ 爲映成，且 $B\neq\phi$ 所以存在，$c\in A$，使得 $f(c)=B$

(i) 若 $c\in B$ 則 $c\notin f(c)=B$ 即 $c\notin B$

(ii) 若 $c\notin B$ 則 $c\in f(c)=B$

由 (i)(ii) 知道發生矛盾，因爲 $C\in A$，又 $C\notin B$ 且 $C\notin A-B$

所以 $f$ 非映成，故定理得證。

由定理得知，若 $\beta$ 爲一基數，則 $\beta<2^\beta$。

故 $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{2^{\aleph_0}}} \cdots\cdots$，$c < 2^c < 2^{2^c} < 2^{2^{2^c}} < \cdots\cdots$

因爲 $\aleph_0$ 爲可數集合中的最大基數，而 $c$ 則爲不可數集合中的最小基數，已知 $\aleph_0 < c$，又 $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ 則此 $2^{\aleph_0}$ 是介於 $\aleph_0$ 和 $c$ 之間或有其他情況發生呢？這就有待大家來共同證明了，同時，大家或許已察覺了一件事實，是否存在一最大的基數答案，大家可能都想到了，是沒有的！於此先簡單的說明一下特徵函數（ characteristic function ）。

設 $A$ 爲一集合，且 $\#(A) = m$，令 $B = \{0, 1\}$

則 $2^m = \#\{f \mid f: A \to B, \#(A) = m, \#(B) = 2\}$

顯然 $\#(2^A) = 2^m$，此爲大家都知道的！

定義在一個集合 $X$ 的所有特徵函數所成的集合，記爲 $C(X)$，則定義，

$C(X) = \{f_A \mid A \subset X \quad f_A(a) = 1$ 若 $a \in A$，$f_A(a) = 0$ 若 $a \notin A\}$

因爲 $X$ 所有的子集合所成的集合爲 $2^X$，所以對 $X$ 的每一子集 $A$ 必存在一特徵函數 $f_A$ 很容易的，我們知道 $C(X) \sim 2^X$ 因此若 $\#(X) = m$，則 $\#(C(X)) = 2^m$

現在我們可以證明 $2^{\aleph_0} = c$ 了從定理1，我們知道，只要證明 $2^{\aleph_0} \leq C$ 且 $C \leq 2^{\aleph_0}$ 則 $2^{\aleph_0}$ 因爲 $\#(Q) = \aleph_0$ 故 $\#(2^Q) = 2^{\aleph_0}$，且 $\#(R) = C$

定義 $f: R \to 2^Q \quad f(x) = \{r \mid r < x, r \in Q\}$

若 $x_1 \neq x_2$，$x_1, x_2 \in R$ 假設 $x_1 < x_2$ 則存在 $r \in Q$

使得 $x_1 < r < x_2$，則 $r \notin f(x_1)$，但 $r \in f(x_2)$

所以 $f(x_1) \neq f(x_2)$，故 $f$ 是 1－1，但 $f$ 不是映成，因爲自然數 $13 \in Q$，所以 $\{13\} \subset Q$，因此 $\{13\} \in 2^Q$，但是在 $R$ 中不存在 $x$，使得 $f(x) = \{13\}$，所以 $C \leq 2^{\aleph_0}$，因爲 $\#(N) = \aleph_0$ $\#(2^N) = 2^{\aleph_0}$

因此 $\#(C(N)) = 2^{\aleph_0}$（因爲 $C(N) \sim 2^N$）

定義 $F: C(N)$ —— ，〔0，1〕

$F(f) = 0\,f(1)\,f(2) \cdots\cdots\cdots f(n) \cdots\cdots$，$f \in C(N)$

顯然的 $F$ 爲一函數，且 $f(n) = 0$ 或 $f(n) = 1 \quad \forall n \in N$

現在只要證明 $F$ 是 1－1，則 $2^{\aleph_0} \leq C$ 就成立了。

若 $f\,g \in C(N)$，且 $f \neq g$，則存在 $m \in N$ 使得 $f(m) \neq g(m)$

因爲 $F(f) = 0.\,f(1)\,f(2) \cdots\cdots\cdots f(m) \cdots\cdots$

$F(g) = 0.\,g(1)\,g(2) \cdots\cdots\cdots g(m) \cdots\cdots$

所以 $F(f) \neq F(g)$ 故 $F$ 是 1－1，因此 $C \leq 2^{\aleph_0}$

在基數討論中，就和自然數有四則運算一樣，除了加法，乘法外，亦有減法和除法，只是減法和除法都是分別建立在加法和乘法之定義上，於此不再加以討論，讀者有此雅興則可參考有關於基數和序數的書，於此基數的討論要宣告結束了！現在談談序數吧！

設 $A,B$ 爲兩集合，若 $R\subset A\times B$，則 $R$ 稱爲從 $A$ 到 $B$ 的一個關係。若 $(a,b)\in R$，則以符號 $aRb$ 表之，若 $(a,b)\notin R$，則表爲 $a\not R b$ 若 $A=B$ 則稱 $R$ 爲 $A$ 中之一關係，例如：$A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，$R=\{(a,1),(a;4),(b,3)\}$ 故 $R$ 爲從 $A$ 到 $B$ 的一關係且 $aR1$，$a\not R2$，$a\not R3$，$aR4$，$bR3$，$b\not R2$，………

設 $R$ 爲定義於集合 $A$ 的一個關係，若 $A$ 中之任何不等之兩元素都是可比較的（亦即 $a,b\in A$，且 $a\neq b$，則 $aRb$ 和 $bRa$ 兩者恰有一成立），$R$ 是可遞移的（若 $aRb$ 且 $bRc$ 則 $aRc$）且 $a\not R a\ \forall a\in A$，則稱 $A$ 爲一個由 $R$ 所決定之序集（ordered set）以 $(A,\prec)$ 表之，此時記 $R$ 爲 $\prec$。例如 $(Q,\prec)$ 爲一序集，其中 $a\prec b\Leftrightarrow a<b$，$a,b\in Q$，同理我們也可定義 $a\prec b\Leftrightarrow a>b$，同樣地 $(\mathbb{C}\ \prec)$ 也是個序集，只要定義。

$$a+bi\prec c+di \Rightarrow a<c \text{ 或 } a=c \text{ 而 } b<d$$

（例如：$2+3i\prec 3+2i\prec 3+5i\prec 5-16i\prec 5$）

然而，並非所有的集合都能夠定義使其成爲一序集，例如所有實數集合所成的集合（the set of all sets of real numbers）與僅含一實變數的所有實函數所成的集合都不能定義使之成爲序集（蓋其任兩元素並非都可比較的）。

若 $A$ 爲由"$\prec$"所定義的序集，且 $a,b\in A$，$a\prec b$ 則 $b\prec a$ 不存在否則 $a\prec a$ 成立，（因爲 $\prec$ 具有遞移性），若 $a\prec b$ 則稱 $a$ 小於（preceds）$b$ 或 $b$ 大於（dominates）$a$。

[定義 1°] 設 $R$ 爲定義在集合 $A$ 上的一個關係，若 $A$ 中之任兩元素有的可比較，有的不可比較，且 $R$ 具遞移性，$a\not R a$，$\forall a\in R$，則稱 $A$ 爲由 $R$ 所定義的一個偏序集（partial ordered set），以 $(A,R)$ 表之。$P$ 稱爲定義在 $A$ 上的一個偏序。

[例 2]：$S=\{a,b,c,d\}$

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ \swarrow & & \searrow \\ b & & c \\ \downarrow & & \\ d & & \end{array}$$

圖6

在圖6中說明了 $S$ 中元素之次序，$c\prec a$，且 $d\prec b\prec a$ 故我們知道，$a$ 和 $c$ 是可比較的，且 $a$ 和 $b$ 和 $d$ 都是可比較的，但是 $c$ 和 $b$ 或 $b$ 和 $d$ 卻不可比較，故 $(S,\prec)$ 是一偏序集

[例 3]：$S=N\cup\{0\}$ "$\prec$"表自然數中之大小次序，則 $1\prec 2\prec 3\prec$………

$$\begin{array}{cc} & \vdots \\ & \downarrow \\ & 3 \\ & \downarrow \\ & 2 \\ 0 & \downarrow \\ & 1 \end{array}$$

圖7

［定義2°］1.設（$A$，$\prec$），（$B$，$\prec'$）均爲偏序集（或序集）

2.若存在函數$f$，使得$f$: $A \to B$是1－1且映成，並且$a \prec b \Leftrightarrow f(a) \prec' f$ $\forall a, b \in A$，則稱$A$和$B$相似（similar）記爲（$A$，$\prec$）$\simeq$（$B$，$\prec'$），或簡記爲$A \simeq B$，$f$稱爲相似函數（similarity mopping）。

顯而易見的，相似的關係是一種對等的關係，亦即(i) $A \simeq A$ (ii)若$A \simeq B$成立，我們就知道$B \simeq A$成立，也就是說若$f$爲一相似函數則$f^{-1}$亦爲一相似函數。(iii)若$A \simeq B$，$B \simeq C$則$A \simeq C$，同理，若$f$，$g$是相似函數，則合成函數$f \circ g$亦是相似函數。

［例4］：令$A_1 = \{a, b, c, d, e\}$，$B = \{$甲、乙、丙、丁、戊$\}$設$\prec$和$\prec'$分別爲定義在$A_1$和$B$上的次序。

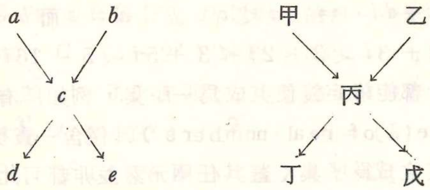



圖8

如圖8所示 $a \to c \to e$，$a \to c \to d$，$b \to c \to d$和$b \to c \to e$其意思分別是$e \prec c \prec a$，$d \prec c \prec a$，$d \prec c \prec b$和$e \prec c \prec d$顯然地（$A_1$，$\prec$）爲一偏序集，同理；若$\prec'$和$\prec$有相同之意義，則不難發現（$B$，$\prec'$）亦爲一偏序集很顯然地，在（$A_1$，$\prec$）和（$B$，$\prec'$）之間，能夠找到四種相似函數。

［例5］：(1)　（$A$，$\prec$）是一偏序集

(2)　$\mathcal{S}(a) = \{x \mid x \prec a, x \in A\}$

(3)　$\mathscr{A} = \{\mathcal{S}(a) \mid a \in A\}$　　（$A$，$\prec'$）爲一偏序集

$\mathcal{S}(a) \prec' \mathcal{S}(b) \Rightarrow \mathcal{S}(a) \subset \mathcal{S}(b)$　且$\mathcal{S}(a) \neq \mathcal{S}(b)$

則　$A \simeq \mathscr{A}$

設（$A$，$\prec$）爲一偏序集（或序集），如果存在$a \in A$，使得$a \prec x$，$\forall x \in A$，則我們稱$a$爲（$A$，$\prec$）的首元素（first element），若存在$b \in A$，使得$x \prec b$，$\forall x \in A$，則稱$b$爲（$A$，$\prec$）的一末元素（last element）若存在首元素或末元素，則將會是唯一存在，在例4中對（$A_1$，$\prec$）而言，很顯然的，（$A_1$，$\prec$）即無首元素也沒有末元素，原因是$d \prec e$和$e \prec d$兩者都不成立，與$a \prec b$和$b \prec a$兩者亦不成立，在序集（$N$，$\prec$）中，若$a \prec b \Leftrightarrow a \prec b$則1爲（$N$，$\prec$）的首元素，但其末元素則不存在。若（$A$，$\prec$）$\simeq$（$B$，$\prec'$），且（$A$，$\prec$）有首元素，則（$B$，$\prec'$）必具首元素。設$a$爲（$A$，$\prec$）的首元素

若$f: A \to B$爲一相似函數，則$f(a)=b$是$(B, \prec')$的首元素。如果存在$c \in B$，使得$c \prec' b$則$f^{-1}(c) \prec f^{-1}(b)$（因$f^{-1}$亦爲相似函數），因爲$f^{-1}(c) \neq a$，$f^{-1}(c) \in A$，且$f^{-1}(c) \prec a$和$a$爲$(A, \prec)$的首元素發生矛盾，故$f(a)$爲$(B, \prec)$的首元素，同理若存在$e$，使得$e$爲$(A, \prec)$的末元素，則$f(e)$必爲$(B, \prec')$的末元素，此時還須提及一件事，若$(A, \prec)$，$(B, \prec')$爲兩序集，且其中一序集和另一序集的子集相似，則$(A, \prec) \sim (B, \prec')$不會永遠成立的。設$(A, \prec)$表所有不大於1且不小於0的所有有理數所成的集合，$a \prec b \Leftrightarrow a < b$，$a, b \in A$，$(B, \prec') = (A, \prec) - \{1\}$定義在$A$和$B$上的關係相同，顯而易見的我們可定義一函數$f$，使得$(B, \prec)$和$(A, \prec)$的子集相似，令$f$從$B$映入$A$的子集使得$f(x) = \frac{1}{2}x$，$x \in B$，即可，然而$(A, \prec)$具有末元素1$(B, \prec')$卻不具末元素。

顯而易見的，我們能夠定義兩個含有相同個數的序集，使相似若序集$(A, \prec)$含有$n$個元素，設$B = \{1, 2, \cdots\cdots n\}$ "$\prec'$"爲定義在$B$上之一關係，且$a \prec' b \Leftrightarrow a \prec b$，$a, b \in B$，則存在一函數$f$，使得$(A, \prec) \simeq (B, \prec')$，因爲對所有的$k \leq n$，定義$f(k)$爲$(A, \prec)$的一元素，令$f(k) = a_k$，則$A = \{a_1, a_2, \cdots\cdots a_n\}$，且令$a_i \prec a_j \Rightarrow i \prec' j$，$1 \leq i, j \leq n$，當然經過上述之步驟後，若說$(A, \prec) \simeq (B, \prec')$也就無可置否了。
此外，我們還可得到一件事實，那就是若$(A, \prec)$，$(B, \prec')$爲兩有限序集且$A \sim B$，則$(A, \prec) \simeq (B, \prec')$，但是這在無限集合就不見得成立了。

例如$N \sim Q$，但$(N, \prec)$就不與$(Q, \prec')$相似了，（$\prec$，$\prec'$分別爲定義在$N$，$Q$上之關係），且$a \prec b \Leftrightarrow a < b$，$a, b \in N$，$a \prec' b \Leftrightarrow a < b$，$a, b \in Q$），因爲$(N, \prec)$具有首元素1，而$(Q, \prec')$卻沒有。

$Z$具有$w$序型，$Z$不具$w$序型：本文從現在開始要介紹所謂的序型（order type）了！於前言中，我們已說過，若一序集，其元素個數爲$n$，則定義其序型爲$n$，因此，若兩有限序集相似，則其序型相同。若$(A, \prec) \simeq (N, \prec')$，$\prec$和$\prec'$爲分別定義在$A$和$N$上的次序，且$a \prec' b \Rightarrow a < b$，$a, b \in N$，則我們稱$(A, \prec)$具有$w$序型。例如，任何一個具有不相同項（term）的無窮數列，$S = (a_1, a_2, \cdots\cdots)$，若$a_m \prec a_n \Leftrightarrow m < n$，則吾人得知$(S, \prec)$的序型爲$w$，同理，若我們定義$0 \prec -1 \prec 1 \prec -2 \prec 2 \prec \cdots\cdots \prec -n$，則$(Z, \prec)$具有$w$序型，同樣地，我們也能夠定義一次序，使得所有正奇數或正偶數所成的集合，具有$w$序型，如果設$P = \{x > 0 \mid x \in R\}$且$a \prec b \Leftrightarrow a < b$，$a, b \in P$，則顯而可見地，$(P, \prec)$就並非所謂具有$w$型的序集了！我們至此已講了一些有關於$w$型的序集，相信大家已感覺出一件事來了，那就是所有具有$w$型的序集都是可數的，

然而，可數的序集就不一定具有$w$序型了！如（$Z$，$\prec$），$a \prec b \Leftrightarrow a < b$，$a, b \in Z$，因爲（$N$，$\prec$）有首元素1，但（$Z$，$\prec$）就沒有了！

設$A_1$爲序集（$A$，$\prec$）的子集，使得若$a \in A_1$，$x \in A$，且$x \prec a$則$x \in A_1$，那麼$A_1$稱爲（$A$，$\prec$）的一個節（Segment），若$A_1 \neq \phi$，且$A_1 \neq A$，則$A_1$稱爲（$A$，$\prec$）的一個眞節（proper segment），很顯然的，任何具有$w$型的序集必須是無限集合，且其任一眞節必定是有限的，亦即具有首元素，但是不具末元素。

R不具$\eta$序型：若（$A$，$\prec$）$\simeq$（$Q$，$\prec'$），$\prec$和$\prec'$爲分別定義在$A$和$Q$上的關係，且$a \prec' b \Leftrightarrow a < b$，$a, b \in Q$，則我們稱（$A$，$<$）具有$\eta$序型。

令$A = \{ x \in Q . -1 \prec x < 1 \}$，顯而易見的（$Q$，$\prec$）和（$A$，$\prec'$）均爲具有$\eta$型的序集其中$a < b \Leftrightarrow a < b$，$a, b \in Q$，且$a \prec' b \Leftrightarrow a < b$，$a, b \in A$，此地，我們還要說明$Q$和$N$之間有一個很大的差別，那就是$Q$具有稠密性（density）若一個序集（$A$，$\prec$）的任兩元素之間必存在有第三元素，則（$A$，$\prec$）具有稠密性，若以數學術語表示即爲「（$A$，$\prec$）是稠密的若且唯若$a, b \in A$，使得$a \prec b$，則至少有一$x \in A$，使得$a \prec x$且$x \prec b$」，顯然地，任一具有稠密性的序集，在其任兩個元素之間必存在有無窮多個此集合的元素。

[定理 5]：若且唯若一個序集有$\eta$型，則其必須具有這三條件：

(1)即不含有首元素也不含末元素

(2)具有稠密性

(3)是可數的

若定義$a \prec b \Leftrightarrow a < b$，$a, b \in Q$，則不難看出（$Q$，$\prec$）爲$\eta$型序集，而且使得定理5之三個條件均成立。任一序集（$A$，$\prec'$）若和（$Q$，$<$）相似，則顯而可見的（$A$，$\prec'$）亦具有定理5之三個條件，因爲若（$A$，$\prec'$）$\simeq$（$Q$，$\prec$），則存在一$f$，使得$f : A \to B$是一對一且映成$a \prec b \Rightarrow f(a) \prec f(b)$相反地，若證明任兩個具有上述三條件的兩序集必相似，則本定理亦得證（因爲兩相似序集，具有相同序型，且（$Q$，$\prec$）具有上述三條件和$\eta$序型），於此略而不提。因此（$Q^+$，$\prec$）（$Q^+ = \{ x \in Q : x > 0 \}$ $a \prec b \Leftrightarrow a < b$，$a, b \in Q^+$）（$A$，$\prec$）（$A = \{ x \in Q : a < x < b$，$a, b \in Q$且$a < b \}$，$x \prec y \Leftrightarrow x < y$，$x, y \in A$）與（$B$，$\prec$）（$B = \{ x : x$爲一代數數$\}$，$x \prec y \Leftrightarrow x < y$，$x, y \in B$）都相似，而且具有$\eta$序型。至此，尙未提過$R$所成序集之序型爲何？顯而可見的其序型絕非$\eta$型，這是無可置否的，因爲$R$是不可數的，於此我們不再做任何說明與討論只是將它提出，讓讀者能夠有所認識。

於此我們和基數一樣，以較抽象的概念來說明序型。若$a = \{ (B, \prec) \mid (B, \prec') \simeq (A, \prec) \}$ 其中"$\prec$"和"$\prec'$"爲分別定義在$A$和$B$上的次序（關係）

則我們稱符號 $a$ 爲 $(A, \prec)$ 的序型，以 $\overline{A}$ 表之，於是我們知道，若 $a$ 爲 $(A, \prec)$ 的序型，則 $a$ 就是所有和 $(A, \prec)$ 相似的序集所成的集合，因爲〃$\simeq$〃爲一對等關係，所以〃$\simeq$〃將所有序集分爲許多不相交的類（class），亦即不同的序型，其所代表的類也就不相交了，很明顯的，若 $\overline{A}=\overline{B}$，則 $\#(A)=\#(B)$，但若 $\#(A)=\#(B)$，$\overline{A}=\overline{B}$ 不見得成立，例如 $\#(Q)=\#(N)$ 但 $\overline{N}\neq\overline{Q}$，如果 $A$ 和 $B$ 均爲有限集合若 $\#(A)=\#(B)$，則我們可定義一函數 $f$ 使得 $\overline{A}=\overline{B}$，這亦是顯然可見的。在前言中也曾經提過一有限序集的序型就是它所含元素的個數，但是在基數的討論中，我們也以相同的符號（即0和自然數）來表示那些有限集合的基數，很明顯地，它們所代表之意義完全不同。

$1+w\neq w+1$：就像基數的討論一樣，對於序型，我們也要定義其加法和乘法，然後再更進一步研究！設 $(A, \prec_A)$ 和 $(B, \prec_B)$ 爲兩序集且 $A\cap B=\phi$，$\overline{A}=\alpha$，$\overline{B}=\beta$，若 $S=A\cup B$，$a, b\in S$，$\prec$ 爲定義在 $S$ 上的次序 $a\prec b\Leftrightarrow a, b\in A$ 且 $a\prec_A b$，或 $a, b\in B$ 且 $a\prec_B b$ 或 $a\in A$，$b\in B$，令 $\overline{S}=\gamma$，則 $\gamma=\alpha+\beta$，且 $S$ 以 $(A, B)$ 表之，這就是序型的加法定義。

〔例6〕：(1)若 $\alpha$，0爲序型，則 $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$

(2)令 $A=\{1, 2, 3\}$，$\prec_A$ 爲定義在 $A$ 之一個次序，且 $1\prec_A 2\prec_A 3$，則 $\overline{A}=3$，$B=\{a, b, c, d\}$，$\prec_B$ 爲定義在 $B$ 之一個次序且 $a\prec_B b\prec_B c\prec_B d$，則 $\overline{B}=4$，若 $S=A\cup B$，且 $\prec$ 爲定義在 $S$ 上之一次序 $1\prec 2\prec 3\prec a\prec b\prec c\prec d$，則 $\overline{S}=7$。

(3) $A=\{0\}$，$B=N$ 很顯然的 $\overline{A}=1$，且 $\overline{B}=w$，若令 $S_1=A\cup B$，$\prec_1$ 爲定義在 $S$ 上的一個次序，且 $a\prec_1 b\Leftrightarrow a<b$，$a, b\in S$，則顯而可見的，$\overline{S}_1=w$，因此 $1+w=w$，令 $S_2=B\cup A$，$\prec_2$ 爲定義在 $S_2$ 之次序，且 $b\prec_2 a\Leftrightarrow a, b\in B$ 且 $b<$ 或 $b\in B$ 且 $a\in A$，很顯然地，$w+1=\overline{S}\neq w$，因爲 $(S_2, \prec_2)$ 具有末元素0，但 $(S_1, \prec_1)$ 卻不具末元素。

$\eta+1+\eta=\eta$：從例6中，我們已看出序型對加法之運算不具有交換性，而且 $w=1+w\neq w$ 這結果是何等的不可思議呀！這也絕非基數之運算可以同日而語的，然而由加法之定義，我們可以證明 $(w+1)+w=w+(1+w)=w+w$ 因此 $w+1+w=w+w$，然而 $w+1+w$ 必和 $w$ 不相等亦即 $w\neq w+w$，這也是顯而可見的，但是對 $\eta$ 而言 $\eta+1+\eta$ 也和 $\eta$ 不相等嗎？令 $A=\{0\}$，$B=\{x\in Q: x>0\}$，$C=\{x\in Q: x<0\}$，則 $\overline{A}=1$，$\overline{B}=\eta$，$\overline{C}=\eta$，再利用加法之定義，則 $\overline{C}+(\overline{A}+\overline{B})=\overline{Q}$，亦即 $\eta+(1+\eta)=\eta$，而且由定義吾人亦可證得 $\eta+(1+\eta)=(\eta+1)+\eta=\eta+1+\eta$，故 $\eta+1+\eta=\eta$，同樣地，我們亦可證明 $\eta+\eta=\eta$，或許讀者會感到異常的驚訝，其實這也沒什奇怪的，必然的結果嘛！

$\underline{2w \neq w2}$:設 ( $A$ , $\prec_A$ ) , ( $B$ , $\prec_B$ ) 爲兩序集，且 $\overline{A}=\alpha$ , $\overline{B}=\beta$ ，若 $P=A\times B$ , $\prec$ 爲定義在 $P$ 上的次序， ( $a_1$ , $b_1$ ) , ( $a_2$ , $b_2$ ) $\in P$ , ( $a_1$ , $b_1$ ) $\prec$ ( $a_2$ , $b_2$ ) $\Leftrightarrow b_1\prec_B b_2$ 或 $b_1=b_2$ 且 $a_1\prec_A a_2$ 令 $\overline{P}=\gamma$ ，則 $\gamma=\alpha\beta$ ，此即爲序型乘法之定義很顯然地對所有的序型 $\alpha$ ， $\alpha\cdot 1=1\cdot\alpha=\alpha$ ， $1=\overline{A}$, $A=\{0\}$

〔例 7〕: (1)令 $A=\{1,2\}$ ， $B=\{2,3,5,7,11\}$, $P=A\times B$ ，則 $\overline{P}=10$

(2) $A=\{1,2\}$ ， $B=N$ ，設 $\prec_A$ , $\prec_B$ 爲分別定義在 $A$ 和 $B$ 上的次序，且 $1\prec_A 2$ , $a\prec_B b\Leftrightarrow a<b$ , $a$ , $b\in N$

(i) 設 $P=A\times B$ ，若 $\prec$ 和序型乘法定義中，定義在 $P$ 上的次序相同，則由定義知 $\overline{P}=2w$ 且 ( 1 , 1 ) $\prec$ ( 2 , 1 ) $\prec$ ( 1 , 2 ) $\prec$ ( 2 , 2 ) $\prec$ ( 1 , 3 ) $\prec$ ( 2 , 3 ) $\prec$ ………顯而可見的 $\overline{P}=\omega$ ，所以 $2\cdot w=w$ 。

(ii) 設 $P=B\times A$ ，若 $\prec$ 和序型乘法定義中定義在 $P$ 上的次序相同，則由定義知： $P=w\cdot 2=\omega+\omega$ ，且 ( 1 , 1 ) $\prec$ ( 2 , 1 ) $\prec$ ( 3 , 1 ) $\prec$ ( 4 , 1 ) $\prec$ ……… $\prec$ ( 1 , 2 ) $\prec$ ( 2 , 2 ) $\prec$ ( 3 , 2 ) $\prec$ ( 4 , 2 ) ………顯然地： $\omega\cdot 2\neq\omega=2\cdot\omega$ ，因爲序集 ( $P$ , $\alpha$ ) 所有的眞節並非都是有限的。

由上例我們得知序型的乘法不具交換性。同樣地由乘法的定義，我們可證明序型對乘法具有結合律，如果再運用加法的定義，則知序型乘法之運算對加法具有分配律，亦即對各種序型 $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$ , $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)=\alpha\beta\gamma$ , $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ 。

$\underline{2\cdot\eta\neq\eta\cdot 2}$:如果運用序型加法之可結合性，和乘法對加法之分配律，我們知道對任何有限個序型 $\alpha$ , $\beta_1$ , $\beta_2$ , $\beta_3$ , …… $\beta_n$

$$\alpha(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\cdots+\beta_n)=\alpha\beta_1+\alpha\beta_2+\alpha\beta_3+\cdots+\alpha\beta_n$$

若 $\beta_1=\beta_2=\cdots\beta_n=1$ ，則上式變爲 $\alpha n=\underbrace{\alpha+\alpha+\cdots\cdots+\alpha}_{n\text{ 項}}$

因此 $\alpha\cdot n=\alpha+\cdots+\alpha$ ，對所有的序型 $\alpha$ 和所有的自然數 $n$ 都成立，若取 $n=2$ , $\alpha=\eta$ ，則 $\eta\cdot 2=\eta+\eta$ ，已知 $\eta+\eta=\eta$ ，所以 $\eta\cdot 2=\eta$ ，但是 $2\cdot\eta\neq\eta$ ，（此可和 $2\cdot w=w$ ，但 $w\cdot 2\neq w$ 相比較，由此可見其中之差異是何等的大）令 $A=\{1,2\}$ ， $B=Q$ ，設 $\prec_A$ , $\prec_B$ 分別爲定義在 $A$、$B$ 上的次序且 $1\prec_A 2$ $a\prec_B b\Leftrightarrow a<b$ $a$ , $b\in Q$ ，若 $P=A\times B$ $\prec$ 和乘法定義中定義在 $P$ 上的次序相同，則若 $r\in B$ 很顯然地， ( 1 , $r$ ) $\prec$ ( 2 , $r$ ) ，但是對任一 $r\in B$ 在 ( 1 , $r$ ) 和 ( 2 , $r$ ) 之間不存在任何屬於 $P$ 的第三元素亦即不具稠密性，由定理 5 知 ( $P$ , $\prec$ ) 不具 $\eta$ 序型，故 $\overline{P}\neq\eta$ ，即 $2\cdot\eta\neq\eta$ 所以 $2\cdot\eta\neq\eta\cdot 2$ ，於此我們可以將有限個序型之和與積擴展到無限個。這些也都只是提出來談談罷了，並非眞正要加以探討。

兩整序集的聯集仍爲整序集嗎？若（$A$，$\prec$）爲一序集（或偏序集）而$B \subset A$且$a$，$b \in B$，$a \prec' b \Leftrightarrow a \prec b$，$\prec$ 爲定義在$B$上的次序，則（$B$，$\prec'$）稱爲（$A$，$\prec$）的一個子偏序集例如（$N$，$\prec$），（$E^+$，$\prec'$）其中$a \prec b \Rightarrow a < b$，$a,b \in N$，且$a \prec' b \Leftrightarrow a < b$，$a,b \in E^+$，因此（$E^+$，$\prec'$）爲（$N$，$\prec$）的一個子偏序集。若序集（或偏序集）（$A$，$\prec$）之所有非空子序集（或子偏序集）都含有首元素則稱（$A$，$\prec$）爲一整序集（Well-ordered Set），若$S \subset A$，$S \neq \phi$，且（$A$，$\prec$）爲一整序集（$S$，$\prec'$）爲（$A$，$\prec$）的子序集則不難知道（$S$，$\prec'$）亦爲整序集。顯而可見的，任何有限的序集必爲整序集，因爲任何有限序集必具有首元素和末元素，這亦是有限序集的一個特性。同樣地，具有$\omega$，$\omega+1$，$\omega+\omega$，和$\omega \cdot \omega$序型的序集必爲整序集然而具有$\eta$序型者就不是整序集了！於前面提過的$Z$其情況就較複雜了，若定義$a \prec b \Leftrightarrow a < b$ $a,b \in Z$則很顯然的（$Z$，$\prec$）就非整序集了，若定義$0 \prec -1 \prec +1 \prec -2 \prec +2 \prec -3 \prec +3 \prec +3 \prec \cdots$ 則（$Z$，$\prec$）却爲一整序集。

〔例 8〕：(1)（$A_i$，$\prec_i$）爲整序集，$\forall i \in \Lambda$　$\Lambda$爲足碼集（indexed set）且$A_i \cap A_j = \phi$，若$i \neq j$，$i$，$j \in \Lambda$

(2)（$\Lambda$，$\prec$）爲整序集。若$a$，$b \in \bigcup_{i \in \Lambda} A_i$，$a \prec b \Rightarrow a$，$b \in A_i$ 且$a \prec_i b$或

$a \in A_i$，$b \in A_j$，且$i \prec j$

則（$\bigcup_{i \in \Lambda} A_i$，$\prec$）爲整序集。

證明：設$S \subset \bigcup_{i \in \Lambda} A_i$且$S \neq \phi$，則$S = \bigcup_{i \in \Lambda} S_i$其中$S_i \subset A_i$ 考慮$I = \{ i \mid i \in \Lambda$，且$S_i \neq \phi \}$ 因爲$S \neq \phi$且$\Lambda$是整序集所以$I \neq \phi$，且$I$必有首元素，設爲$\lambda$因爲$S_\lambda \subset A_\lambda$，$S_\lambda \neq \phi$，所以$S_\lambda$必有最首元素，設爲$a$，顯然$a$爲$I$的首元素。

兩整序集若相似則相似函數唯一存在：現在我們來討論相似函數和整序集間兩個有趣之性質。若（$A$，$\prec$）爲整序集，（$B$，$\prec$）爲（$A$，$\prec$）的子整序集，且$f : A \to B$爲一相似函數則$x \preceq f(x)$，$\forall x \in A$。欲證明此性質是不難的，令$D = \{ y \in A \mid f(y) \prec y \}$，若$D \neq \phi$，則$D$有首元素$d$，故$f(d) \prec d$，又因爲$f$爲相似函數，所以$f(f(d)) \prec f(d)$，因爲$f(d) \in A$，故$f(d) \in D$，然而$d$爲$D$之首元素，所以$d \prec f(d)$，故發生矛盾，因此，$D = \phi$，所以$x \prec f(x)$，$\forall x \in A$，由上面之性質我們可推得：若（$A$，$\prec$），（$B$，$\prec'$）爲兩整序集，且（$A$，$\prec$）$\simeq$（$B$，$\prec'$），則相似函數惟一存在。設$f$和$g$均爲從$A$映至$B$之相似函數，設$f \neq g$，則存在$x \in A$使得$f(x) \neq g(x)$，我們可令$f(x) \prec' g(x)$（同理亦可設$g(x) \prec' f(x)$），因$g$爲從$A$映至$B$之相似數，所以$g^{-1}$爲

$B$映至$A$之相似函數，因爲$f(x) \prec g(x)$則$g^{-1}(f(x)) \prec g^{-1}(g(x))$亦即$(g^{-1}\circ f)(x) \prec$ ，顯而易見的$g^{-1}\circ f$是一相似函數，故發生矛盾。

定義$4^0$設$(A,\prec)$爲任一整序集，若$\alpha$爲其序型，則$\alpha$稱爲$(A,\prec)$的序數。

定義$4^0$中所言即爲整序集$(A,\prec)$的序型，稱爲序數；亦即$\bar{A}=o(A)$，如$(N,\prec_1)$ $a\prec_1 b \Rightarrow a\prec b$，$a, b\in N$，$N=w=o(N)$同樣的，$\bar{Q}=\eta=o(Q)$很顯然地，序型的加法導致序數的加法，只要我們將序集或偏序集全部定義成整序集就可以。

定義$5^0$設$\alpha,\beta$爲序數，則$\alpha+\beta=o(A;B)$，其中$o(A)=\alpha$，$o(B)=\beta$，且

$A\cap B=\phi$

上面定義中$(A;B)$即爲序型加法定義中之符號，因此我們知道$1+w=w\neq w+1$，$1=0(\{0\})$；$2w=w\neq w2$，$2=0(\{1,2\})$這些討論都和序型之討論同，故本處不再多言。同理，我們亦可定義序數之乘法。

定義$6^0$設$\alpha,\beta$爲序數，$\alpha=0(A)$，$\beta=o(B)$，若$P=A\times B$，且$o(P)=r$

則$r=\alpha\cdot\beta$；其中$(a,b)$，$(c,d)\in A\times B$

$$(a,b)\prec(c,d) \Rightarrow \begin{cases} b\prec_B d \text{ 或} \\ b=d \text{ 且 } a\prec_A C \end{cases},\ \prec_A,\prec_B,\prec \text{爲}$$

分別定義在$A,B,P$之次序。

依定義$5^0$和$6^0$，我們若仿照序型的討論，則可得知在序數中，加法與乘法均不具交換性，而乘法可具結合性，且在有限序集中，乘法對加法具有分配性。

因本人所懂的也只有這些，不便再多談，故於此擱筆。本文承蒙吳淑蓉、韋泉輝、李朝鵬、熊耀文與陳金生等諸位同學之幫忙謄稿，始能大功告成，願我們的努力能夠讓大一的學弟妹們對集合論裏討論的東西有點大概的了解，更願它對舊生們會多少有所助益，這是我們一個小小的希望。

參考資料：

1. Seymour Lipschutz : Theory and Problems of Set Theory and Related Topics.
2. Sierpinshi Waclaw : Cardinal and Ordinal numbers.
3. William J. Pervin : Foundations of General Topology.

# 數學邏輯概況

## 李國偉先生演講筆錄

編輯小組

在這裏，我們將對數學邏輯它的起源和發展，作一個簡單的介紹，我們未談數學邏輯之前，先來談談邏輯，邏輯可分爲兩大部分：(一)哲學邏輯，(二)數學邏輯。其英文全名爲logic，有些人爲了筆劃簡便起見，將它翻譯成"羅基"，其實亦無此必要，同樣由英文音譯而成，况且大家已用慣"邏輯"一詞。以前日本人譯爲論理學，孫中山先生譯爲理則學，這也是現在一般學院開邏輯課程時所用的科目名稱。

邏輯最早發源於希臘時代，"邏輯"其原本之希臘文全名所涵蓋的意義非常廣泛，不僅包含了現在研究思想方法之學問，還包括有系統的知識、規則，甚至涵蓋了某些度量的單位等等。所以在我們的觀念中，基本上都認爲邏輯學是從希臘時代開始成爲一種系統學問，事實上，任何一個民族在古代的時候，他們在思考的過程中，都慢慢的想要整理一些思考的原則，想歸納出這些原則，但因爲每一民族生活的環境與主要的與趣不同，所以發展的程度不同，重點也不一樣。在我們中國古代（至少我們目前所能看到的），後期墨家在墨經中也有些基本的理則學的原則，也包括某些像是公設法的幾何學的端倪。談到這裏，同學可能要問，爲什麼這些東西在中國沒有發展開來？這也是科學史上有待解決的問題。但是主要是說在古代主要的文化中都已經有了這個學問的萌芽，但是目前我所接受的這套學問，主要是由亞里斯多德開創的。因爲古希臘的許多哲學家或智者，沒事就是辯論，但很多都是巧辯，使得思想很紊亂，所以大家都開始比較認眞的講，應該怎麼講，怎麼論證，才能得到正確的結果，所以亞里斯多德就綜合這方面的知識，使其成爲一門學問，闢了許多原則，這可以說是邏輯學最早的發皇，成爲一門系統的學問。這門學問在中古歐洲，大都被經院派的學者搞得非常繁瑣，研究了各式各樣的論證形式，每種論證形式，他們都給定一個很特別的名字，就像我們叫颱風一樣，每一個有著美麗女子的名字。那時的和尙就是研究這種學問而向他人炫耀這些東西，但這些學問並沒有實質的內容，對其他方面的影響也不大。雖然傳統上，西方敎育認爲一個有學問的人像數學與邏輯訓練，是很基本的一部分，但這個學問基本上說來，在後來的一千五百年間並沒有很根本的發展，因爲人的很多理論性的思想，並非憑空而來的，若只是坐著空想一個系統是沒有什麼意義的，也發展不遠，而總是有個具體的對象。而邏輯主要的對象是思考的形式，而什麼思考裏面用到的規格是最嚴密的？就是數學，因此數學這門學問若沒有相當的發展，那麼邏輯也可以預期的，不可能發展到更深的階段。雖然古希臘時期，已經有像歐基里德公設這樣好的學問，但是它本身只是一個比較單純的現象，事實上，歐洲的數學發展，也沒有順著這樣的公設法邁向前去，整個中古，全世界數學的特徵均以計算性爲主，發展在代數方面、算術方面，因此邏輯學一直停留在經驗裏面。一直到了十九世紀中期時才開始出現了將邏輯數學化的幾個重要的人。

在這之前，我們先來談談一個比較重要的人物。大約是在十七世紀的萊布尼茲（Leibniz），是一個德國的數學家、哲學家，很了不起 個人。他開始想，我能不能造一套規則，這套規則可以把我們一切思考的方法都很有系統的講出來，甚至把內容都剝掉，完全跟代數、算術式子一樣，很具體的把規則寫出來，他曾經嚐試了很久，但沒有太大的成就。因爲當時的數學還沒有很深的發展，但這却是把邏輯數學化的轉捩點。

到了十九世紀時才有英國的笛摩根（De Morgan）布耳（Boole）、美國的皮爾斯（C.C.Peirce），這些人，因爲他們都有很好的數學基礎，像笛摩根是數學家，布耳也有很好的數學訓練，皮爾斯雖然是美國很重要的哲學家，但他生前對數學很有研究，只是因爲他的數學手稿一直沒有被出版過，所以從前大家對他了解不夠深入，但近十年來，他有很多數學手稿被出版，顯示出他也是很好的數學家。而他們所想要作的工作是把萊布尼茲的觀念更具體化，把一些基本的邏輯推論完全寫成代數式。爲什麼到他們這個時期會有這種想法？也是有歷史背景的影響。因爲十九世紀時，人們對於代數本身的性質，已經不再局限在光是數値的運算，而有更深的了解，尤其是哈密爾敦（Hamilton）發明的四元數（quaternion）產生了重大的影響，笛摩根等人就是這個時代的人，所以這才慢慢的往這個方向發展下去。像我們所熟悉的布氏代數（Boolean Algebra）的基本原則，就是布耳當時所提出來的。但是這套邏輯還沒有發展到我們現在的形式。譬如我們現在常講邏輯時，如果只牽涉到“且”（and）、“或”（or），這些連詞的東西，我們稱作一個句式演算（Sentential Calculus），若系統牽涉到“存在……”或“對所有……”，則稱作一個述詞演算（Predicate Calculus），或叫作量化理論（Quantification Theory）。

對我們現在比較熟悉的有量詞的數理邏輯系統，最有系統研究，最有重要貢獻的是Frege，但他在開始研究時，一直是默默無聞的，基本上他是一個哲學家，但在哲學上也不是非常有名的，他想要去了解邏輯基本的性質是什麼？和它跟數學之間的關係。因爲邏輯這樣嚴謹的學問，和數學有許多相似的地方，那麼到底相似到什麼程度呢？然而他就這麼默默的研究了許多年，後來他終於了解了，他有辦法從最簡單的邏輯原則，不但要把邏輯全部推出來，而且要把數學全部推出來。但在這過程中很難突破的一層就是數學裏最基本的概念——自然數；1,2,3,4,5,6,7,……。那麼這些自然數怎樣從邏輯概念推出來呢？所謂邏輯概念，最基本的就是關於類（Class）的問題，什麼東西是不是屬於這個類，和這些“且”或“非”所結合在一起的性質。然而Frege解決這個問題的方法，就是“到底什麼是1呢？”1的概念就是某個類它含有一個元素，那麼宇宙中所有的類，若有個類能與這個類一一對應的話，那麼那個類裡也含有一個元素，所以若想把“1”這個概念抽象化，“1”就是所有能和這個類一一對應的這些類所組成的東西，所以這個“1”反成不了數字，而是一個非常非常大的一個類。但是不論如何，他這個概念至少算是奠定了數學的基礎。然而，他寫了一本書，因爲書裏所用的符號太怪，所以幾乎沒有人看它，但就有一個人看了這本書，這個人就是羅素（Russell）。

羅素研究的方向，大體上說來，和Frege 所走的路徑類似，而他也差不多達到了這個境地，但在這裏，羅素却發現了一個很困難的問題。不錯，我們可以定義1,2,3,4,……，都成爲一個很大很大的類，不過這套學問，如果是正確的，沒有問題的話，關於類的這個概念本身不能有矛盾要很穩固，才能建立起其他的學問。但偏偏有個難題在這裏，什麼難題呢？若用現在的符號來表示，定義一個類 $X=\{y \mid y \notin y\}$，則X是不是屬於X？若 $X \in X$，則 $X \notin X$，（根據X之定義）；若 $X \notin X$，則 $X \in X$，（根據X之定義），則得到一個矛盾的結果，即 $X \in X$ 若且唯若 $X \notin X$，（這個問題即是羅素詭論（Paradox）。當羅素發現這個現象的時候，覺得非常的困惑，這時Frege 已經把他的結果向前推演，也就是說包括數學更多，而且他的書的第二卷已寫好拿給出版商出版。因爲羅素發現有關類的詭論，所以大約1903年時，寫了一封信給Frege，從來沒有一個數學家會遭受到這麼慘重的打擊，他一生的學問都在這本書上，就爲了一個突然來的一個簡簡單單的東西而付諸流水。

從這個時候開始，數學家對“類”這個概念的分析，產生了濃厚的興趣，這是一個發展方向的開始，這個方向是由邏輯正統的發展方向來的，另外一個方向是因爲萊布尼茲跟牛頓發明了微積分學，然後用到無窮小的概念。這無窮小的概念實在讓人摸不透。如我們作微積分時，若用古典的寫法，$\frac{dy}{dx}$ 可能會等於像 $a_0+a_1dx+a_2dx^2$ 的東西，則等式右邊的 $dx$ 爲無窮小而可以捨棄，

得到我們所要的微分 $a_0$，（若看一些比較舊的書還有這種寫法）。但問題是在右邊的$dx$可以視爲“0”捨棄，那麼左邊的 $dx$ 將如何處理？在我們目前的課程中，是將 $\frac{dy}{dx}$ 看成一個運算符號，但古代是眞把 $dy$ 用 $dx$ 去除，而用邊 $dx$ 就可以視爲零而捨棄，爲什麼左邊的 $dx$ 就不能？如此這個問題本身就產生了很大的矛盾，但是當時數學家的態度是不管這個方法是對或錯，只要得到的結果是正確的，就可以用，至於那些問題，以後再慢慢的解決。整個十八世紀都在累積微積分重要的定理和各方面的應用，這個興盛的時代過去以後，到了十九世紀，人們再也不能忍受這種荒謬的事情，都認爲像這種本身不健全的學問，怎會產生這麼多的結果。於是人們就很嚴肅的考慮微積分中無窮小的觀念到底是什麼？因而希望從許多不同的方向把分析學的基礎建立起來。重要的人物有柯西（ Cauchy ），柯西開始主張有系統的應用極限（ limit ）的概念，而柯西本身並沒有把無窮小排斥掉，而且自己也犯了許多嚴重的錯誤，如我們所說的均勻連續（ Uniform Continuous)與連續(Continuous)的區別。但古典的分析學到了Weierstrass 的時期，已把微積分鞏固起來了，雖然如此，但誠如大家所熟悉的，也是很重要的一點，就是整套微積分的學問是建立在實數這個系統的基本性質上，而實數這個系統有一個很重要的基本性質就是最小上界(least upperbound ）即若一個非空集合有上界，則必定有最小上界。但是我們都知道對任一個集合，它的最小上界不一定就能精確的算出來，換個方向說，我們如果要由有理數定義無理數時，不管用割切（ Cut ）的方法，或是用一個柯西數列（ Cauchy sequence ）來逼近，都要用到無窮集合，因爲受了古典分析學的影響，有個很有名的康托(Cantor ），發明了集合論，對於每一個集合可以定義它的基數（ Cardinal Number ），即是這個集合元素的個數，這些基數是可以由小而大排列出來，但是這些基數所成的集合也應該有一個基數，而這個集合的基數應該比任何一個基數都大，但根據康托的一個定理，它的冪集合應該有更大的基數，因此這裏也產了一個內在的矛盾。總而言之，粗略的說來，一方面從傳統的邏輯學發展來看，是想把邏輯數學化的過程，一方面是想給分析學嚴格基礎的過程，這兩個過程，到了十九世紀末，都發生了一些根本上的困難，於是才有各式各樣的詭論（ Paradox ），這樣的詭論我們再來看兩個例子，有一個是理髮師的詭論，有一天，理髮師說，凡是那些自己給自己剃頭的人，我都不爲他們剃頭，而凡是自己不給自己剃頭的人，我都將爲他們剃頭。然而這位理髮師想，他自己若給自己剃頭，那麼根據他自己的原則，他就不能給自己剃頭，若他不給自己剃頭，而根據他自己的原則，他就必須給自己剃頭，於是他就很困惑，到底要不要給自己剃頭，另外一個詭論就是說：我們要了解一個數字，而這個數字是可以用文字描述出來的，如“2也者，乃1加1也”，又如“$\sqrt{2}$也者，乃2的開平方也”等等，所以說可以用一句話把它描述出來。我們若暫且不管描述這個數字的這麼一串文字的意思，那麼它們就只是有限的一些符號，假設我們用一百個字來描述數字，因爲一百個字只是有限個，那麼所能用一百個字描述的數字也應該是有限個，所以一定有一個最小的數是不能用一百個字把它描述出來。然而，那個不能用一百個字描述出來的最小的數字，可以用不到一百個字把它描述出來；如我們前面那句話，“那個不能用一百個字描述出來的最小的數字”，就不到一百個字；因此就產生了矛盾。

雖然理髮師和數字這兩個詭論在當時曾給人們帶來困惑，但我們現在看它，並不覺得那麼可怕，例如理髮師詭論，我們可說他定的規則根本就是錯誤的，而數字的詭論其所謂的“可描述”，並沒有很明確的定義，或很嚴謹的規則。甚至於有許多其他的例子，不是那麼簡單可以排斥掉的，我們也可以說，這是我們自然的語言裏有矛盾，但是只要我們日常生活中，不說一些奇奇怪怪的話，則那些詭論對我們學數學的人來說，都沒有關係，這是我們近代的看法。但是 $X=\{y \mid y \notin y\}$ 這種涉及類的詭論就不一樣，因爲這是很數學化的東西，便不能輕而易舉的將它捨棄，於是，在這兩方面的合流和種種詭論產生的時候，即是二十世紀時，對於數學研究比較前端的數學家，都開始比較嚴肅的在考慮數學的一些論證的方法，和基本的

假設到底是什麼。康托大約在 1880 年左右，就提出了集合論，當時數學界的反應也是相當的壞，結果他因忍受不了這種壓力，以致精神失常，一生就這麼不了了之。但是這個概念發展到二十世紀的時候，在函數論或各方面都有很重要的應用，所以慢慢的許多前進的數學家覺得不能忽視集合論，但集合論本身却存在像羅素詭論這種矛盾，所以大家便覺得非常惶恐，那時候，數學界頂尖的領導人物，如Hilbert，Lebesque，Baire，Borel 等，這些人都開始在研討這種數學基礎的問題。從不同的態度和以不同的分析方法，以及想要保有古典的數學程度，於是在思想上，基本上就分成了三種主要的學派，那就是邏輯學派，直觀學派和形式學派。

邏輯學派，以A.N.Whitehead和羅素師徒二人爲代表，他們寫了一本書Principia Mathematica，這本書共有三卷，前兩卷是羅素寫的，第三卷是Whitehead 所寫的。每卷的篇幅都很大，而且也很難以接受，例如僅爲了證明 $1+1=2$，就寫到第二卷的七十六頁。爲什麼他們會如此辛苦呢？雖然羅素在數學物理這方面有很好的基礎，但基本上他是一個哲學家，所以受了傳統西方哲學的限制，而迫使他往這方面發展，需要將數學找出一個很穩固的基礎，則必需從最基本最簡單的概念開始，這些概念就是由邏輯所提供的，所以就想從邏輯把數學建立起來。雖然前面已經提過Frege的這套學問本身有重大的錯誤，但羅素捨不得丟棄這整個系統，所以他認爲雖然有錯誤也有辦法修正。現在我們再來仔細考慮 $X=\{y \mid y \notin y\}$ 這個東西，事實上，X的產生比這些 y 都來得晚。因爲X是要等所有這類 y 都有了之後，再組合而成的，所以不能把X和 y 同等視之。因此在建立一個類的過程中，將其分成一層一層的，而若比較前面這層才能成爲後一層的元素，則“X是不是自己的元素”這個問題就沒有意義了，因爲前面提過X是要等這些 y 都找到了才能產生。那麼 X 是比 y 較後層的東西，故“X是不是自己的元素”這個問題便可免除。但是要免除這個問題並不是那麼容易，否則羅素也不需寫那麼厚的書。總之，他是想嚐試免除這問題，所以他必須擬訂其他的原則來免除這個問題，最重要的是前面所提的“一層一層”的觀念，而什麼是“一層一層”的觀念？因爲他想從最簡單的邏輯概念——類的概念，作爲出發點，而這個類的概念本身却沒有“一層一層”的概念，所以他必需引進許多其他的基本原則，來解釋“一層一層”的概念。但這些原則並不能使人明確的接受，所以在實行的過程中，這個學派的想法和主張，就受到了阻礙。但是跟隨這種思想的人並不是完全沒有，尤其是哲學家。談到這裏，我們要提出很重要的一點，就是說，大家不可誤解所有的邏輯學家都屬於邏輯學派，其實不然，而只是這個學派主張由邏輯推出數學。

直觀學派，是以荷蘭的數學家 Brouwer 爲代表。於古典數學中，Brouwer 認爲它的缺點是：若有些東西是存在的，但却沒有很具體的方法把它給找出來。譬如說，有一個選擇公設（Axiom of Choice），選擇公設就是說，若有一個非空集合族（A family of non-empty sets），那麼就可以從每一個集合裏選出一個元素，成爲另外一個集合，即存有一個選擇函數（Choice function）。然而，這裏若是有限集合，例如，我們到生生皮鞋公司去，告訴老闆說，要所有盒子裏右脚的那支鞋子，那麼這就是一個選擇函數，把每一個盒子當作一個集合，而選擇右脚的那支鞋子。所以這種原則是很精確的，大家也沒有任何爭論。但若是無窮的集合，而集合裏存在某一種東西，而又沒有方法說出來這個元素是如何造的（Construct），這就很難爲人所接受，不僅直觀學派有這種感覺，也有很多人有這種想法。然而Brouwer 認爲於古典數學中，像這種無限集合存在某個元素，無法很具體的找出來，只是利用古典邏輯的排中律，即是，若不是A對；就是 $\neg A$（not A）對，而絕不可能A和 $\neg A$ 都對。所以若要證明某個東西存在，則假設它不存在而導出一個矛盾，但在這個證明中，却沒有明確的說明，若要具體把它給造出來，應該如何造法。所以 Brouwer 認爲這是憑空說白話，於是他就捨棄古典數學所用的邏輯中的排中律，而用他的建造系統來處理數學。雖然他的想法很好，但不論如何，他捨棄那樣簡單明瞭的排中律，就很難把有用的數學都建立起來，不說別的，連實數要全部造出來都很難做到。

形式學派，是以Hilbert爲代表。

Hilbert是一個很優秀的數學家，雖然他對於數學的概念當然曉得有很具體的涵意，但他為了逃避這兩個學派的論調，所以他只好說數學什麼都不是，只是一套符號的遊戲，認為只要把符號、公設，推論法則定義完整，那麼就可以有一個由符號所組成的系統。但是如此必定要保證在這個系統中，自己不會產生矛盾，如果產生矛盾，那麼這個系統也就沒有什麼意義。當然有一方面他逃掉了別人的攻擊，但另一方面，他給自己帶來一個難題，就是要證明一個公設系統是相容而沒有矛盾的，假如是用一個很強的方法來證明，而那些方法本身是否不矛盾又需驗證，那就沒有意思了，所以Hilbert他想要有一個很強的公設系統，在裏面可以討論古典數學，但是要證明這個公設系統本身是沒有矛盾的方法，必需是很簡單的。這就是形式系統必需夠強到可以討論古典數學，但是要證明它沒有矛盾所使用的方法，必需簡單到使每一個人都能接受。

以上三個學派，各有各的目標，因此使得數學界的數學基礎問題弄得很紊亂。在這紊亂的當兒，1931 年出現了K.Gődel 這個人，他研究出一個很巧妙的方法，就是只要有一套形式的數學系統（如Hilbert所說的），只要強到可以討論自然數的理論，那麼他便可以找到一個敍述P，它在這個系統中是不能被證明的，而且它的否定在這個系統中也不能被證明，但是我們知道，在古典數學中P和┐P一定有一個是眞的。如此一來Hilbert的研究等於是白費了，但如今却有很多眞的命題沒有辦法在形式系統中被證明，Gődel 繼續論證，只要有一套形式系統強到可以討論自然數，而本身沒有矛盾的話，無論我們如何把前面所說的不可決定的敍述的（undecidable）P，再放置於這個系統中，仍就會有不可決定的敍述存在。這就是Gődel Incompletness定理，另外還有一個Gődel Completeness定理，此二者同為現代數學邏輯的基礎。

為了要把直觀講得很精確，我們要建立一些形式系統，在這些系統中，規定某些公設和推論方法。如果我們把符號給予具體的意義，在這些具體的東西中，若能滿足形式系統中的公設的話，我們便稱其為形式系統的模型。而Gődel Completeness定理，即是在某些很基本的形式系統中，在形式系統中推論為眞的定理，則在具體的模型亦為眞，而且若有一語句在這形式系統的所有模型中都為眞的話那它一定是這系統中的定理。然而在所有模型為眞的語句，其中牽涉到所有的模型，而模型的類是很龐大的，"是眞的"這件事，變成是很強的一件事，這就是Gödel Completeness 定理。

現在我們來談談當代三個數學邏輯的主要方向。首先我們談「集合論」，前面我們曾經提到"類"，"類"是一個很龐大的東西，所以有人就要澄淸這"類"的概念，而最早作集合論之公設法的是 Zermelo 。公設化的集合論的理論是怎樣的呢？經過了很多的嚐試以後，人們就發覺要使公設化的集合論不發生矛盾的話，必需在集合的創造過程中有一階一階的觀念（與羅素的想法類似。）。最原始的集合為空集合$\phi$，從這$\phi$出發，可以將$\phi$作為元素，而造出$\{\phi\}$這樣的一個集合，如此地將前面各層所造出的集合，作為下面要造的集合的元素，如此一層一層的造下去，便成為一個層系（cumulative hierarchy），但每次要造一個集合，它的元素必需要在前面都出現過。在同學們讀書中往往會弄不清楚什麼是 set，class？對於 set，簡單的說來，是它要眞正出現在某一層中，亦即可以為其他 class之元素。但class則是本身不能出現在固定的一層，卽不可以為其他 class之元素，則前面所提羅素的詭論便不可能發生，因為$X=\{y|y=y\}$為 class，並不可以為其他 class的元素。這套公設法可以將數學上所有的基本的理論一步步的建立起來。但這套理論本身也有一些問題，最有名的問題一個是Axiom of Choice（選擇公設），一個是Continuum hypotheses（連續統假設）。選擇公設可以導出一些結果是我們直覺上所不喜歡的東西，在積分上可以用Axiom of Choice證明在實數上有一個集合不是Lebesque 可測度，另外還可以導出一個結果，就是可以將單位球適當的割成兩部分，每部分可以割成有限塊，兩部分個數一樣多（其中割是保持歐氏空間距離剛性）再分別將其重新排列，則各可排成一單位球，這是我們直觀所不能接受的，但這是沒有錯誤的，只不過是 Axiom of Choice 可以幫助我們證明的事

情比直覺多一點。而什麼是Continuum hypotheses？就是所有自然數所成之集合（爲可數），其所有子集合所成的集合之cardinal number(基數）爲何呢？假如自然數所成之集合，其cardinal number最少也有無窮基數 $\aleph_0$，我們可以證明其子集所成集合之基數 $2^{\aleph_0}$ 大於或等於下一個無窮基數 $\aleph_1$，但是究竟會不會相等呢？假如設其爲相等的，則這就是Continuum hypotheses。然而這是從其他古典集合論的論證所不能證明的。至1940年Gödel證明在已有的集合論，是沒有辦法證明連續統假設與選擇公設的否定命題，而至1963年，P. T. Cohen 證明二者本身也沒有辦法在已有的集合論中證明。所以這二件事是與其他集合論的假設相獨立無關的，所以要證明其對與否必須要用其他的原則，以現在集合論的原則是不能證明的，這是集合論很重要的發展。在此我要強調的是集合論在基本上可以建立其他古典數學，所以對於這些"類"等等東西作深入的了解是有必要的。

粗略的說，研究形式系統與模型之間的關係，即稱爲模型論，例如滿足怎樣的形式系統其模型會有多少個？這些模型之間是否相同？其中所包含元素個數有多少？諸如此類，最近模型論有一個很重要的應用，就是Nonstandard Analysis，這是在1960年A. Robinson 所研究出來的。以前萊布尼茲所提的，無窮小要滿足的性質和實數差不多一樣，然而這是不清楚的，因爲無窮小與實數明明是不同的，但又相當的一樣，究竟要相同到何種程度？但是利用數學邏輯，所謂相同也者，就是這兩個系統要滿足某一類的形式語句，那種形式語句足夠強到可以講古典分析學基本定理，但是又沒有強到把這兩個分得清清楚楚。所以假設你是某一種只了解那種語言的生物，則你看包含無窮小的形式系統跟古典的形式系統一模一樣的。但我們人類比較聰明，可以用無窮小來證明一定理，而定理本身沒有涉及無窮小，即證明完了以後之結果可以用那國語言來表示的話那麼我們就可以騙他這就是原來實數系統的結果。也就是可以用數理邏輯來澄清無窮小與實數之差別，並且給予一嚴格的基礎，而可以被我們所使用。這是一個新的方法、新的觀點，其實任何用這個方法證明之結果，用古典數學亦可證明，那麼我們研究這個方法作什麼？這只是有些新方法可以幫助我們把一些問題簡化，更接近直觀，證明來的更簡便，因而有可能幫助我們較容易的找到新定理。

遞迴論是什麼？它是研究一個函數何時可以被計算；亦即理論上去模擬一個計算機要作什麼？最原始的概念是從Gödel 來的，而Turing 在1930年時，想要用理論抽象的去定義一個計算機，其能力大到人類可以算的函數，它都可以算出來。遞迴論基本上促進計算機與程式語言設計等問題，並且可以幫助我們澄清一些古典數學上的問題，最有名的是Hilbert的第10問題，是否可以用機械的方法來判斷整係數多項式有無整數解，換言之，就是是否有一計算機，只要我們把這樣一個多項式放進去，它便可以告訴我們有解或沒解。但什麼叫作"一個計算機，放進去就可以"？這個概念就需要靠遞迴論來澄清。等到把什麼叫"可以計算"，"可以決定"弄清楚以後，剩下來的工作便是很技巧的數論的應用。從1950年代，美國M. Davis, J. Robinson 便有了一些基本成就，但其中有一步始終無法突破，至1970年，Matijasevič解決了Hilbert第10問題利用遞迴論澄清了一古典數學的敍述，證明那樣的計算機不可能存在。

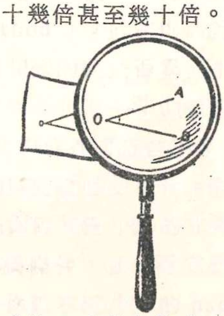
總而言之，整個數學邏輯，一方面是受哲學上基本思考的影響，一方是受要澄清數學一些基本思想的要求，所以有其近代的發展。而數學邏輯雖然不是數學發展的主流，不能和分析、幾何、代數相抗，但是它是數學裏很重要的一支。最要緊的是我們對這些問題的態度要正當，因爲數學邏輯有它眞正關心的事情，就是每當數學的論證發展到某個程度時，因爲數學家在研究數學時，常不管他是用什麼方法得到這個結果；有些是嚴格的，有些是不嚴格的，有些是暫時不嚴格的，等到數學結果累積到某種程度便需要整頓，數學邏輯的工作變成很有意義，結果也是相當有深度的，而且對於其他方面的發展也有間接性的影響。在數學的世界裏，知識並不可能找到像岩石一樣的基礎放在那裏，一切東西便可建立起來。人類的知識是不斷的在流動，數學邏輯所能做的事也無非是在某一個階段裏面，把那些知識組合起來，找

到它們之間最基本的假設及其間的相關性。最後我以法國一位數學家所講的話作爲結束，「數學的世界並不是像城堡一樣，建立在某種基礎的岩石上，每一種理論都是城堡的一座高塔，而數學家只是在裏面找那些秘密的小通道。不！數學並不是這樣的。數學是像一塊大陸，有很多東西值得我們去探討，不論是基礎也好；抽象的理論也罷，僅僅是一些幫助我們達到探險的地方的公路和交通工具，而我們必須經常的換路走，經常的換交通工具，而且最要緊的是，我們所探索的並不是那些公路或交通工具，而是那塊大陸。公路和交通工具並不是整個大陸的全部！」。

## 爲什麼放大鏡不能把「角」放大？

我們看到老人家看報、讀書，往往戴上老花眼鏡，或者拿上一面放大鏡。因爲老花眼鏡片和放大鏡片都能把文字或圖畫放大，所以老人家看起來，可以清楚一些。

放大鏡的確可以把任何東西放大幾倍、十幾倍甚至幾十倍。如果要放大幾千、幾萬甚至幾億倍，還可以用顯微鏡或電子顯微鏡。



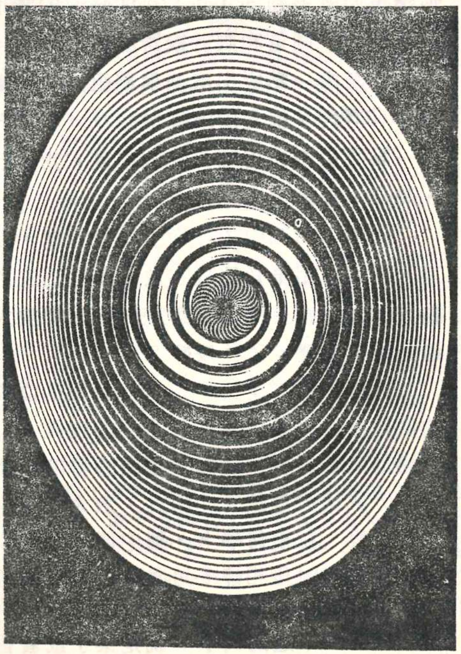

可是，有一件東西却無論如何也放大不了，你猜，這是什麼東西呢？這就是幾何學裏面所用到的「角」。「角」的實用價值很大，測量和設計機器都要用到它。「角」是由一點所引兩條射線組成的。譬如$AOB$角，就是由兩條射線$OA$和$OB$組成的。「角」的大小，是指同一點所引兩條射線張開的程度。我們已經知道一個角的大小是用幾度、幾分、幾秒來表示的。

例如，右圖中的「角」是 30 度，在放大鏡下面看起來，它還是30度。你可以用量角器放在放大鏡片上去量，不多不少，仍舊是 30 度。雖然放大鏡把畫面上的射線和字母都放大了，可是這個角張開的程度，還是沒有改變。爲什麼呢？

這是因爲：第一，這兩條射線的位置，總是不變的。$OB$佔有水平的位置，放大後仍舊佔着水平的位置；$OA$原來是這麼斜着的，放大後它還是這麼斜着。所以，張開的程度不變。第二，放大鏡只能把東西的各部份成比例地放大。因此，放大後東西的形狀，和這件東西原來的形狀相比較，在幾何學上，稱它們爲「相似形」。根據幾何學裏的定理：相似形的對應角相等，可見放大鏡下的角$AOB$，與畫面上的角$AOB$，在大小上是相等的，並沒有被放大。

最明顯不過的例子，就是桌子或者書的四角，不管怎麼放大，它們的四個角仍舊都是直角。因此可以說，隨便多少度數的角，「放大」以後的度數是不會改變的；也就是說，「角」是不會被放大鏡放大的。

# 應數與電算



林國棟


# 乘數法則一般化 —— KTP之介紹

高等微積分學中，在介紹反函數定理及隱函數定理之後，一定會提到 Lagrange乘數法則（Lagrange multiplier method）。此法則告訴我們一個有等式限制之函數其局部極小點的必要條件，至於所得到的點是否爲極小點或局部極小點（有時甚至於兩者都不是），此法則並沒有提供任何進一步的消息。本文主要的目的在介紹此法則的一般化── KTP（函數之限制條件同時含不等式及等式的情形），並列出極小點的一些充分條件及較原法則爲強的必要條件。全文共分三節，第一節先介紹非線性規劃問題，並證明某些特殊函數其極小點的充要條件，第二節敍述二次可微分函數局部極小點的充分條件和必要條件，並說明它們與 KTP的關係，第三節換另外一種方法討論，我們將考慮一函數在極小點的 pseudoconvex 與 quasiconvex 等等性質，並對於 Singh的定理〔5，定理2.2〕提出一個反例。

## 第一節　非線性規劃問題

設集合 $\Omega \subset R^n$，且函數 $f:\Omega\to R$，$g:\Omega\to R^m$ 與 $h:\Omega\to R^k$，其中 $g=(g_1\ g_2\cdots\cdots g_m)^T$，$h=(h_1\ h_2\cdots\cdots h_k)^T$。所謂非線性規劃問題（Non-linear Programming Problem）（以下簡稱問題（NLP））就是求極小值問題:

欲極小：$f(x)$，$x\in\Omega$，

受限於：$g_i(x)\leqslant 0$，$i=1,2,\cdots,m$，

$h_j(x)=0$，$j=1,2,\cdots,k$.

爲了方便起見，對於 $R^p$ 中的兩點 $x=(x_1\ x_2\cdots x_p)^T$，$y=(y_1\ y_2\cdots y_p)^T$ 定義

$$x=y \iff x_i=y_i\ ,\ \forall i=1,2,\cdots,p\ ;$$

$$x\leqslant y \iff x_i\leqslant y_i\ ,\ \forall i=1,2,\cdots,p。$$

如此，問題（NLP）可改寫成

欲極小：$f(x)$，$x\in\Omega$，

受限於：$g(x) \leq 0$ ,

$h(x) = 0$ .

有時亦寫成

欲極小：$f(x)$ , $x \in X = \{ y \mid y \in \Omega, g(y) \leq 0, h(y) = 0 \}$ 。

Lagrange乘數法則所考慮的問題爲問題（NLP）的一個特殊情形：限制條件只有等式 $h(x) = 0$。

〔定理 1〕：（Lagrange乘數法則）若

(1) $\Omega$ 爲 $R^n$ 中的開集，且 $f : \Omega \to R$ 與 $h : \Omega \to R^k$ 均爲連續可微分函數，（continuous differentiable functions）

(2) $\bar{x} \in X = \{ x \mid x \in \Omega, h(x) = 0 \}$ 爲 $f$ 在 $X$ 上的極小點或局部極小點，且

(3)向量 $\nabla h_i(\bar{x}) = \left( \frac{\partial h_i}{\partial x_1}(\bar{x}) \frac{\partial h_i}{\partial x_2}(\bar{x}) \cdots\cdots \frac{\partial h_i}{\partial x_n}(\bar{x}) \right)$ , $i = 1, 2, \cdots, k$ 是線性獨立，則

$$\exists\ \bar{v} = (v_1 v_2 \cdots v_k)^T \in R^k \ni$$

$$\nabla f(\bar{x}) + (\bar{v})^T \nabla h(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) + v_1 \nabla h_1(\bar{x}) + \cdots\cdots + v_k \nabla h_k(\bar{x}) = 0 \cdots (L)$$

證明：參見Apostal〔1，定理13.12〕。

由上定理知：在條件 $h(x) = 0$ 限制之下，函數 $f$ 的某些局部極小點 $\bar{x}$ 將可在方程式 $(L)$ 的解（$\bar{x}$, $\bar{v}$）中找到。而其中的 $v_1$, $v_2$, $\cdots$, $v_k$ 稱爲 Lagrange 乘數，因利用它們，來幫助尋找 $\bar{x}$，故稱此種求局部極小點的方法爲Lagrange乘數法則。

若定理 1 中的 $f$ 爲二次函數（不一定爲 Convex 函數），h 爲線性函數，且 $\Omega = R^n$，則可得極小點的充要條件如下：

〔定理 2〕若

(1)函數 $f : R^n \to R$ 定義成 $f(x) = p^T x + \frac{1}{2} x^T Q x$，其中 $x$, $p \in R^n$ , $Q$ 爲 $n \times n$ 階的對稱矩陣，

(2)函數 $h : R^n \to R^k$ 定義成 $h(x) = Hx + d$，其中 $x \in R^n$ , $d \in R^k$ 且

$$H = \begin{pmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_k \end{pmatrix} \text{ 爲 } k \times n \text{ 階矩陣，}$$

(3)向量 $H_1$ , $H_2$ , $\cdots$ , $H_k$ 是線性獨立，則

$\bar{x} \in X = \{ x \mid h(x) = 0 \}$ 爲 $f$ 在 $X$ 上極小點的充要條件爲

(i) $\exists\ \bar{v} \in R^k \ni p + Q\bar{x} + H^T \bar{v} = 0$ , 且

(ii) $\forall\ w \in R^n$ , $Hw = 0 \Rightarrow w^T Q w \geq 0$ 。

證明：（必要性）　(i) 由定理 1 知

$\exists\, \bar{v} \in R^k \ni$

$$\nabla f(\bar{x}) + (\bar{v})^T \nabla h(\bar{x}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (p+Q\bar{x})^T + (\bar{v})^T H = 0$$

$$\Rightarrow \quad p+Q\bar{x} + H^T \bar{v} = 0$$

(ii) $\forall\, w \in R^n$，且 $Hw = 0$，令 $x = w + \bar{x}$，則

$$h(x) = H(w+\bar{x}) + d = Hw + H\bar{x} + d \doteq 0,$$

$$i.e. \quad x \in X,$$

$$\therefore \quad f(x) - f(\bar{x}) \geq 0,$$

$$\Rightarrow \quad \left(p^T x + \frac{1}{2} x^T Q x\right) - \left(p^T \bar{x} + \frac{1}{2} \bar{x}^T Q \bar{x}\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad -(\bar{v})^T H(x-\bar{x}) + \frac{1}{2}(x-\bar{x})^T Q (x-\bar{x}) \geq 0 \qquad (\text{由 (i)})$$

$$\Rightarrow \quad -(\bar{v})^T H w + \frac{1}{2} w^T Q w \geqq 0$$

$$\Rightarrow \qquad w^T Q w \geqq 0 .$$

（充分性）　$\forall\, x \in X \Rightarrow Hx + d = 0$

$$\Rightarrow H(x-\bar{x}) = 0$$

令 $w = x - \bar{x}$，由 (i)，(ii) 得　$f(x) - f(\bar{x}) = \frac{1}{2} w^T Q w \geq 0$

$$\therefore \quad f(x) - f(\bar{x}) \geq 0 .$$

若定理 2 中之 $Q$ 不爲對稱矩陣時，可另找到一對稱矩陣 $Q' = \frac{1}{2}(Q+Q^T)$ 使得 $x^T Q x = x^T Q' x$，$\forall\, x \in R^n$．因此在不失去一般性的情形下，可設 $Q$ 爲對稱矩陣。若將條件 $h(x)=0$ 改成 $h(x) \leq 0$，則另外可得 $f$ 在 $X = \{x \mid h(x) \leq 0\}$ 上局部極小點的充要條件，此爲 Majthay〔2〕的結果。其實，將限制條件擴充成同時含有線性不等式及等式的情形時，亦可得到類似的結論，其證明方法可由合併上面定理 2 與 Majthay 定理的證明而得，此地我們只列出結果。

〔定理 3〕若定理 2 中 (1)．(2) 之假設成立，且

(3) 函數 $g: R^n \to R^m$ 定義成　$g(x) = Gx + C$，其中 $x \in R^n$，$c \in R^m$，且

$$G = \begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_m \end{pmatrix} \text{ 爲 } m \times n \text{ 階矩陣，}$$

(4) 向量 $G_1, G_2, \cdots, G_m, H_1, H_2, \cdots H_k$ 是線性獨立，則

$\bar{x} \in X = \{ x \mid Gx + C \leq 0 \ , Hx + d = 0 \}$ 爲 $f$ 在 $X$ 上局部極小點的充要條件爲

(i) $\exists\ \bar{u} = (u_1\ u_2 \cdots u_m)^T \in R^m \ , \ \bar{v} \in R^k \quad \ni$

$$p + Q\bar{x} + G^T\bar{u} + H^T\bar{v} = 0 \ ,$$

$$(G\bar{x} + C)^T\bar{u} = 0 \ ,$$

$$\bar{u} \geq 0 \ , \text{且}$$

(ii) 若 $w \in R^n$ ，$Hw = 0$ ，且

$$G_i w = 0 \ , \forall\ i \in J = \{ i \mid u_i > 0 \} \ ,$$

$$G_i w \leq 0 \ , \forall\ i \in I - J \ , \text{此地 } I = \{ i \mid G_i\bar{x} + C = 0 \} \ ,$$

則 $\quad w^T Q w \geq 0$ .

## 第二節 KTP與局部極小點的關係

本節考慮問題（NLP）中的函數如果在點 $\bar{x}$ 二次連續可微分時，$\bar{x}$ 成爲局部極小點的必要條件（定理4）及充分條件（定理5）。

〔定理4〕若問題（NLP）中，$\Omega = R^n$ ，$\bar{x} \in X = \{ x \mid g(x) \leq 0 \ , h(x) = 0 \}$ ，且

(1) $f$ ，$g$ 與 $h$ 在 $\bar{x}$ 是二次連續可微分，

(2) 向量 $\nabla g_i(\bar{x})$ ，$\nabla h_j(\bar{x})$ ，（所有 $i \in I = \{ i \mid g_i(\bar{x}) = 0 \}$ ，$j = 1, 2, \cdots, k$ ）是線性獨立，則

$\bar{x}$ 爲 $f$ 在 $X$ 上局部極小點的必要條件爲

(i) $\exists\ \bar{u} = (u_1\ u_2 \cdots u_m)^T \in R^m \ , \ \bar{v} = (v_1\ v_2 \cdots v_k)^T \in R^k \quad \ni \ (\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ 滿足

$$(\text{KTP}) \begin{cases} \nabla f(\bar{x}) + (\bar{u})^T \nabla g(\bar{x}) + (\bar{v})^T \nabla h(\bar{x}) = 0 \ , \\ (\bar{u})^T g(\bar{x}) = 0 \ , \\ \bar{u} \geq 0 \ , \\ g(\bar{x}) \leq 0 \ , \\ h(\bar{x}) = 0 \ , \text{且} \end{cases}$$

(ii) 若 $y \in R^n$ ，$\nabla g_i(\bar{x})\, y = 0 \ , \forall i \in I = \{ i \mid g_i(\bar{x}) = 0 \}$ ，

$$\nabla h_j(\bar{x}) \cdot y = 0 \ , \forall j = 1, 2, \cdots, k \ ,$$

則

$$y^T \left[ \nabla^2 f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla^2 g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{k} v_j \nabla^2 h_j(\bar{x}) \right] y \geq 0 \ .$$

證明：參見 Mc Cormick〔3，定理4和5〕.

上定理(i)中之KTP（Kuhn-Tucker stationary-point problem）爲Lagrange乘數法則的一般化，由Kuhn和Tucker首先提出，非線性規劃中的定理幾乎都以它爲中心。其中的 $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$ 是用來幫助我們尋找 $\bar{x}$，$\bar{u} \geq 0$ 的出現要歸因

於問題（NLP）中的限制條件 $g(x)\leq 0$，這也是KTP與Lagrange乘數法則主要不同的地方。

如果問題（NLP）中沒有限制條件 $g(x)\leqq 0$ 與 $h(x)=0$ 時，則定理4中的必要條件 (ii) 表示 $\nabla^2 f(\bar{x})$ 爲一半正定（ positive semidefinite ）矩陣，而下面定理5之充分條件 (ii) 則表示 $\nabla^2 f(\bar{x})$ 爲一正定（ positive definite ）矩陣。

〔定理5〕問題（NLP）中，若

(1) $\Omega = R^n$ ， $\bar{x}\in X=\{x \mid g(x)\leq 0 ,\ h(x)=0\}$ ，且

(2) $f$，$g$與 $h$是二次連續可微分，則

$\bar{x}$ 爲$f$ 在$X$上孤立局部極小點（ isolated local minimum ）的充分條件是

(i) $\exists\ \bar{u}=(u_1 u_2 \cdots u_m)^T\in R^m$ ， $\bar{v}=(v_1 v_2 \cdots v_k)^T\in R^k$ $(\bar{x},\bar{u},\bar{v})$ 滿足 KTP，且

(ii) 若 $y\in R^n$ ， $\nabla g_i(\bar{x})\ y=0$ ， $\forall i\in J=\{i \mid u_i>0\}$ ，

$\nabla g_i(\bar{x})\ y\leq 0$ ， $\forall i\in I-J$， 此地 $I=\{i \mid g_i(\bar{x})=0\}$ ，

$\nabla h_j(\bar{x})\ y=0$ ， $\forall j=1,2,\cdots,k$，

則

$$y^T\left[\nabla^2 f(\bar{x})+\sum_{i=1}^{m} u_i\nabla^2 g_i(\bar{x})+\sum_{j=1}^{k} v_j\nabla^2 h_j(\bar{x})\right] y>0$$

證明：參見Mc Cormick〔3，定理5和6〕。

定理 4和定理5中的條件同時含有KTP，由此可見KTP之重要性，但兩定理中的條件 (ii) 就不太一樣，到目前爲止，還未有人能將二者之間的空隙補起來而得到局部極小點的充要條件。

## 第三節　Convex, pseudoconvex 和 quasiconvex 函數

本節將換另外一種方法來討論函數極小點的充分條件與必要條件，首先我們定義幾個名詞。

〔定義〕設$\Omega$爲 $R^n$ 中的開集，且函數 $f:\Omega\rightarrow R$在 $\bar{x}\in\Omega$連續可微分，若下列條件（C1），（C2）和（C3）分別成立時，就分別稱函數$f$ 在 $\bar{x}$是 Convex, pseudoconvex 與 quasiconvex 。

$$(C1)\qquad \left.\begin{array}{c} x\in\Omega \\ 0\leq\lambda\leq 1 \\ (1-\lambda)\bar{x}+\lambda x\in\Omega \end{array}\right\rangle \Rightarrow (1-\lambda)f(\bar{x})+\lambda f(x)\geqslant f((1-\lambda)\bar{x}+\lambda x)$$

$$(C2)\qquad \left.\begin{array}{c} x\in\Omega \\ \nabla f(\bar{x})(x-\bar{x})\geq 0 \end{array}\right\rangle \Rightarrow f(x)\geq f(\bar{x})$$

$$(C3)\quad \left.\begin{array}{c} x \in \Omega \\ f(x) \le f(\bar{x}) \\ 0 \le \lambda \le 1 \\ (1-\lambda)\bar{x}+\lambda x \in \Omega \end{array}\right\} \Rightarrow f((1-\lambda)\bar{x}+\lambda x) \le f(\bar{x})$$

上定義中，若 $-f$ 在 $\bar{x}$ 是Convex，則稱 $f$ 在 $\bar{x}$ 是Concave。若 $f$ 對 $\Omega$ 的每一點都是 Convex 時，則稱 $f$ 在 $\Omega$ 上為 Convex 函數。模仿這種定義，我們可定義出在 $\Omega$ 上的 Concave, pseudoconvex, pseudoconcave, quasiconvex 以及 quasiconcave函數。由條件 $(C1)$ 與 $(C3)$ 可分別導出下面的 $(C1)'$ 和 $(C3)'$，Mangasarian〔4，P. 83與 P.134〕，

$(C1)'\quad x \in \Omega \ \Rightarrow\ f(x) - f(\bar{x}) \geqq \nabla f(\bar{x})(x-\bar{x})$；

$(C3)'\quad x \in \Omega$，且 $f(x) \leqq f(\bar{x}) \ \Rightarrow\ \nabla f(\bar{x})(x-\bar{x}) \le 0$ .

又上定義中的 $\Omega$ 若為開的凸集合（open convex set）時，則可微分函數 $f$ 在 $\Omega$ 上的性質有下列關係，Mangasarian〔4，P.164〕，

Convex $\Rightarrow$ pseudoconvex $\Rightarrow$ quasiconvex，

Concave $\Rightarrow$ pseudoconcave $\Rightarrow$ quasiconcave.

關於一個函數極小點的充分條件與必要條件又有下列二定理。

〔定理6〕在問題（NLP）中，若 $\Omega$ 為開集，$\bar{x} \in X = \{x \mid y(x) \le 0,\ h(x) = 0\}$，且

(1) $f$，$g$ 與 $h$ 在 $\bar{x}$ 是連續可微分，

(2) $f$ 在 $\bar{x}$ 是pseudoconvex，$g_I$ 在 $\bar{x}$ 是 guasiconvex，其中 $I = \{i \mid g_i(\bar{x})=0\}$，（即 $g_i$ 在 $\bar{x}$ 是 quasiconvex, $\forall i \in I$），$h$ 在 $\bar{x}$ 是 quasiconvex 且 quasiconcave，則 $\bar{x}$ 為 $f$ 在 $X$ 上極小點的充分條件為

$\exists\, \bar{u} \in R^m$，$\bar{v} \in R^k \ni (\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ 滿足

$$(KTP)' \left\{\begin{array}{l} [\nabla f(\bar{x}) + (\bar{u})^T \nabla g(\bar{x}) + (\bar{v})^T \nabla h(\bar{x})](x-\bar{x}) \ge 0,\ \forall x \in X, \\ (\bar{u})^T g(\bar{x}) = 0, \\ g(\bar{x}) \le 0, \\ h(\bar{x}) = 0, \\ \bar{u} \ge 0. \end{array}\right.$$

證明：參見Mangasarion〔4，P. 162〕.

〔定理7〕在問題（NLP）中，若 $\Omega$ 為開集，$\bar{x} \in X = \{x \mid g(x) \le 0,\ h(x) = 0\}$，且

(1) $f$，$g$ 與 $h$ 在 $\bar{x}$ 是連續可微分，

(2) $g_I$ 與 $h$ 在 $\bar{x}$ 是pseudoconcave，其中 $I = \{i \mid g_i(\bar{x})=0\}$，且 $h$ 在 $\bar{x}$ 也是 pseudoconvex，則

$\bar{x}$是$f$在$X$上局部極小點的必要條件爲

$\exists\ \bar{u}\in R^m$ ，$\bar{v}\in R^k$ ∋ ( $\bar{x}$ , $\bar{u}$ , $\bar{v}$ ) 滿足 KTP 。

證明：參見Mangasarian〔 4 , P . 173 〕。

定理 6 中的充分條件 ( KTP )′ 較KTP爲弱，如將條件(2)換成(2)′ ：$f_1 g_I$ 和 $h$ 在$\bar{x}$是 quasiconvex ，$h$ 在$\bar{x}$也是 quasiconcave ，且 $\nabla f(\bar{x})\neq 0$ ；則定理 6 依然成立。理由是(1)，(2)′ 與 ( KTP )′ 可導出：$f$在$\bar{x}$是 pseudoconvex ，〔 6 ，定理3 , P . 6 〕。

若問題 ( NLP ) 中的 $g$ 與 $h$ 均爲線性函數時，我們可得極小點的充要條件如下:

〔 定理8 〕在問題 ( NLP ) 中，若

(1) $\Omega = R^n$ , $g(x) = Gx + C$ , 且 $h(x) = Hx + d$ , $\forall x\in\Omega$ , 其中$C\in R^m$ , $d\in R^k$ ,
$G$與$H$分別爲 $m\times n$ 與 $k\times n$ 階矩陣，

(2) $f$在$\bar{x}$爲連續可微分，則

$\bar{x}$是$f$在$X$上極小點的充要條件爲

(i) $\exists\ \bar{u}\in R^m$ ，$\bar{v}\in R^k$ ∋ ( $\bar{x}$ , $\bar{u}$ , $\bar{v}$ ) 滿足KTP，且

(ii) $f$ 在$\bar{x}$是 pseudoconvex 。

證明：利用定理6 ，定理 7及線性函數均爲 pseudoconvex, pseudoconcave, quasiconvex 與 quasiconcave 函數的性質。

第一節定理 3 中的$f$爲二次函數，但定理 8 中的$f$却不受此限制。若將定理6 中的 ( KTP )′ 以KTP代替，且KTP 中的 $\bar{v}\geq 0$ ，則函數 $h$只需要求在$\bar{x}$是 quasiconvex ( 不必是 quasiconcave ) ，這是 Singh的結果〔 5 ，定理2 . 1 〕，但很不幸地，同一篇文章中，由於對Mangasarian 的定理〔 4 ，定理2 . 4 . 4〕會錯意， Singh導出一個錯誤的結果〔 5 ，定理 2 . 2 〕，我們將此結果敍述於下，並舉出反例。

〔 Singh的定理〕問題 ( NLP ) 中，若Ω爲開集，$\bar{x}\in X = \{ x \mid x\in\Omega,\ g(x)\leq 0,\ h(x) = 0 \}$ ，且

(1) $f$ , $g$與 $h$ 在Ω上爲可微分函數，

(2) $f$在Ω 上是 Convex ，$g$ 與 $h$在Ω上是 quasiconvex ，則$\bar{x}$爲$f$在$X$上極小點的充分條件爲

$\exists\ u_i\in R$ , $\bar{u}\in R^m$ 及 $\bar{v}\in R^k$ ∋

$$u_0 \nabla f(\bar{x}) + (\bar{u})^T \nabla g(\bar{x}) + (\bar{v})^T \nabla h(\bar{x}) = 0 ,$$

$$(\bar{u})^T g(\bar{x}) = 0 ,$$

$$g(\bar{x}) \leq 0 ,$$

$$h(\bar{x}) = 0 ,$$

$$(u_i, \bar{u}, \bar{v}) \geq 0 , \quad (u_0, \bar{u}, \bar{v}) \neq 0 。$$

〔Singh 定理的反例〕考慮下面非線性規劃問題：

$$欲極小：f(x)=x_1^2+x_2^2\ ,\ x\in R^2=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\Big|\ x_1,x_2\in R\right\},$$

$$受限於：g(x)=\begin{pmatrix}x_2-1\\-x_2+1\end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

$$h(x)=0=0\ ,$$

則 $X=\{x\mid x\in R^2\ ,\ g(x)\leq 0\ ,\ h(x)=0\}=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\1\end{pmatrix}\Big|\ x_1\in R\right\}$，且 $f$ 在 $X$ 上的極小點只有 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$。但取 $\bar{x}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$u_0=0$，$\bar{u}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 與 $\bar{v}=0$ 時，Singh 定理的充分條件却能滿足。

## 結 語

由以上三節的討論，可知KTP在求極值問題中扮演著相當重要的角色。但定理6和定理7中對 $g_I$ 的要求，一個是 quasiconvex，而另一個却是 pseudocon - cave，因此在一般情形下，二者似乎永不碰頭，極小點的充要條件也就不太好找。其實，想要找出一般函數 $f: R\rightarrow R$（沒有限制條件）局部極小點的充要條件就已經很不容易了。

## 參考書目


〔1〕 T.M. Apostol : "Mathematical analysis", second edition, 1973。

〔2〕 A.Majthay : "Optimality conditions for quadratic programming," Mathematical Programming 1(1971) 359–365. North – Holland Publishing Company.

〔3〕 G.P. McCormick : " Second order conditions for constrained minima, SIAM J.Appl. Math. Vol. 15, No.3, May, 1967.

〔4〕 O.L. Mangasarian : " Nonlinear programming", McGraw– Hill Book Company, New York, 1969.

〔5〕 C. Singh : " Sufficient optimality criteria in nonlinear programming for generalized equality–inequality constraints " , Journal of optimization theory and applications : Vol. 22, No. 4, August 1977.

〔b〕 林國棟："非線性規劃中的一些論題"，碩士論文，國立台灣師範大學數學研究所，1976.

# 網路上的極大流程極小切問題

指導老師：吳森源
作　　者：呂玉琴

在線性規劃中，我們常常遇到求極值的問題。例如：交通問題，分派問題，網流問題……等。在網流問題（network flows problem）中，常使我們聯想到如何求網路中的極大流程（maximal flow）？網路中的切（cut）是什麼？極大流程和極小切之間有什麼關係？有些什麼性質？現在就針對這些問題來如以討論！

首先討論的是如何求網路中的極大流程：

在一個網路中，設有一點稱為水源地（sourse），另有一點稱為窪地（sink），並且每一線（line）上有一個數字〔b〕表示該線的容量（capacity），今假設我們要將某些物品由水源地送到窪地，在各線不超過其容量下，求這種運送物品的最大數量是多少的問題，就是在網路中，求極大流程的問題。

在一個網路中，將水源地之點標上$N_s$，窪地之點標上$N_t$，其他各點標上$N_1, N_2 \cdots, N_n$。令 $b_{ij}$ 表示由點 $N_i$ 到點 $N_j$ 的容量，$x_{ij}$ 表示由點 $N_i$ 到點 $N_j$ 的流程，$A_{ij}$ 表示由點 $N_i$ 到點 $N_j$ 的有向線，則極大流程問題可用線性規劃表成下列形式：

$$\sum_{i\neq s} x_{j} - \sum_{k\neq s} x_{jk} = \begin{cases} -v & \text{若 } j=s\text{；} \\ o & \text{若 } j\neq s, t\text{；} \\ v & \text{若 } j=t\text{。} \end{cases}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq b_{ij} \qquad \text{對所有的 } i, j\text{。}$$

一般極大流程問題係利用〝Eord-Fulkerson 標示技術〞解之較為簡便，在介紹此技術之前，我們先定義：

1° 若 $x_{ij} = b_{ij}$，則稱有向線 $A_{ij}$ 是飽和的（saturated）

2° 若有向線 $A_{ij}$ 不是飽和的，或 $x_{ji} \neq 0$，則稱此有向線有正的剩餘容量（positive excess capacity）。

3° 令 $g_{ij} = b_{ij} - x_{ij}$；則 $g_{ij}$ 稱為剩餘容量（excess capacity），亦即表示線 $A_{ij}$ 尚可增加的流程量。

標示技術與求極大流程方法：

步驟 $1^0$：由點 $N_s$ 開始，若有向線 $A_{sj}$ 有正的剩餘容量，則在對應的點 $N_j$ 標上序對（ $t_j$ , $k_j$ ），其中 $t_j = g_{sj}$ ， $k_j = N_s$ 。接步驟 $2^0$

步驟 $2^0$：在各標出的點中，設 $i$ 是該網路中尚未被討論過的最小指數。若有一線 $A_{ij}$ 由此點開始，而其終點 $N_j$ 尚未被標出來，且 $g_{ij} > 0$，則在點 $N_j$ 標上序對（ $t_j$ , $k_j$ ），其中 $t_j = g_{ij}$， $k_j = N_i$，接步驟 $3^0$

步驟 $3^0$：若 $N_t$ 不能被標出，則接步驟 $4^0$ ；若 $N_t$ 可被標出，則接步驟 5 。

步驟 $4^0$：目前的流程就是極大流程，停止。

步驟 $5^0$：設 $N_t$ 被標出的序對是（ $\ell_1$ , $m_1$ ），則 $N_{m1}$ 必可被標出，設 $N_{m1}$ 被標出的序對是（ $\ell_2$ , $m_2$ ），則 $N_{m2}$ 必可被標出，設 $N_{m2}$ 被標出的序對是（ $\ell_3$ , $m_3$ ），如此繼續下去，最後，設 $N_s$ 被標出的序對是（ $\ell_k$ , $m_k$ ），取 $\varepsilon = min\{\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_k\}$ 則此標出路線上的每一線可增加 $\varepsilon$ 流程，且得到一個新網路。接步驟 $1^0$

〔例題 1 〕：求圖(一)的極大流程為何？

解法： $1^0$ 由 $N_s$ 開始， $g_{01} = b_{01} - x_{01} = 3 = t_1$ , $k_1 = N_s$ ，所以在 $N_1$ 標上（3 , $N_s$）。同理在 $N_2$ 標上（4 , $N_s$ ）。在 $N_1$ ，$N_2$ 中，因 1 是尚未被討論過的最小指數，所以由 $N_1$ 開始，用標示技術在 $N_3$ 標上（2 , $N_1$ ），在 $N_4$ 標上（3 , $N_1$ ），在 $N_3$ , $N_4$ 中，因 3 是尚未被討論過的最小指數，所以由 $N_3$ 開始，用標示技術在 $N_t$ 標上（3 , $N_3$ ），而得到路線 1 ： $N_s - A_{s1} - N_1 - A_{13} - N_3 - A_{3t} - N_t$ ，取 $\varepsilon_1 = min\{3, 2, 3\} = 2$，且得到新網路如圖(二)。

$2^0$ 在新網路圖(二)中，用標示技術得到路線 2 ： $N_s - A_{s1} - N_1 - A_{14} - N_4 - A_{43} - N_3 - A_{3t} - N_t$ ，取 $\varepsilon_2 = min\{1, 3, 2, 3\} = 1$ 且得到新網路如圖(三)。

$3^0$ 反覆使用〃標示技術〃而得到路線 3 ： $N_s - A_{s2} - N_2 - A_{21} - N_1 - A_{14} - N_4 - A_{4t} - N_t$ ，取 $\varepsilon_3 = min\{4, 2, 2, 3\} = 2$，得新網路如圖(四) ；在圖(四)中得路線 4 ： $N_s - A_{s2} - N_2 - A_{24} - N_4 - A_{4t} - N_t$ ，取 $\varepsilon_4 = min\{2, 1, 1\} = 1$，得新網路如圖(五)。

$4^0$ 在圖(五)中，用標示技術已無法求得新路線，所以極大流程為 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 2+1+2+1=6$

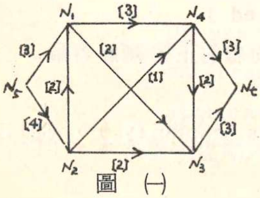


圖 (一)

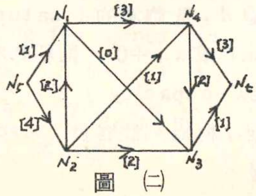
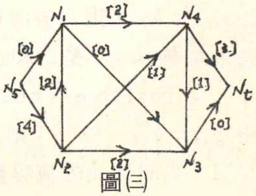


圖 (二)



圖(三)

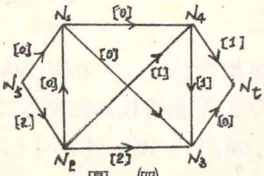



圖 (四)

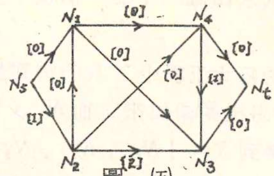



圖 (五)

其次討論的是網路中的切：

設 $T$ 是一個網路，把 $T$ 分割成兩個互斥的非空集合，$X$ 和 $\overline{X}$，使 $N_s \in X$，$N_t \in \overline{X}$，且 $X \cup \overline{X} = T$。則這種分割稱為網路 $T$ 中的一個切，以 $(X, \overline{X})$ 表示，設 $(X, \overline{X})$ 是網路 $T$ 中的一個切，以 $C(X, \overline{X})$ 表示 $(X, \overline{X})$ 的值（value）。則定義 $(X, \overline{X})$ 的值為：$C(X, \overline{X}) = \sum\limits_{\substack{i \in X \\ j \in \overline{X}}} b_{ij}$。以 $f(X, \overline{X})$ 表示 $(X, \overline{X})$ 的流程，則定義 $(X, \overline{X})$ 的流程為：$f(X, \overline{X}) = \sum\limits_{\substack{i \in X \\ j \in \overline{X}}} x_{ij} - \sum\limits_{\substack{i \in X \\ j \in \overline{X}}} x_{ji}$ 因為 $x_{ij} \leqslant b_{ij}$，故 $f(X, \overline{X}) \leqslant C(X, \overline{X})$。當 $f(X, \overline{X}) = C(X, \overline{X})$ 時，則稱 $f(X, \overline{X})$ 為網路 $T$ 中的極大流程，而 $C(X, \overline{X})$ 稱為網路 $T$ 中的一個極小切。在任意一個網路中，是否都可以找到一個切，使 $f(X, \overline{X}) = C(X, \overline{X})$ 呢？ Ford 和Fulkerson首先為這個問題找到解答，即下面這個定理：

極大流程、極小切定理（Max-Flow Min-Cut Theorem）：
在一個網路中，一定存在一個切，使其值等於此網路的極大流程。

證明：

在標示技術反覆操作過程的最後一個步驟，我們可以發現水源地之點以及其他某些點仍可用序對 $(t_j, k_j)$ 標示出來，但窪地之點及其他某些點則不能被標出來，我們可根據以下規則來求出一個集合 $X$：

1° $N_s \in X$。

2° 若 $N_i \in X$，且 $x_{ij} < b_{ij}$，則 $N_j \in X$。（即被標出之點全部在 $X$ 中）

3° 若 $N_i \in X$，且 $x_{ji} > 0$，則 $N_j \in X$。（即若一個有向線的終點在 $X$ 中，且此線的實際運輸量大於0時，則此有向線的起點亦在 $X$ 中）

4° 令 $\overline{X}$ 是 $X$ 的餘集合。

根據以上規則，我們可以得到網路上的一個切 $(X, \overline{X})$，且所有由 $X$ 到 $\overline{X}$ 的線都是飽和的，即 $x_{ij} = b_{ij}$（根據規則 2°）；而沒有從 $X$ 到 $\overline{X}$ 的線流程，即 $x_{ji} = 0$（根據規則 3°）。

因此 $\sum\limits_{\substack{i \in X \\ j \in \overline{X}}} x_{ij} = \sum\limits_{\substack{i \in X \\ j \in \overline{X}}} b_{ij}$ 且 $\sum\limits_{\substack{i \in X \\ j \in \overline{X}}} x_{ji} = 0$。

故得到　　　$f(X,\overline{X}) \doteq C(X,\overline{X})$。　　　　Q.E.D.

〔例題２〕：試求出圖(一)中的一個極小切。

解法：

在求圖(一)的極大流程中，我們得到最後一個網路如圖(五)，在圖(五)中，$N_s$，$N_2$，及 $N_3$ 能用標出技術標出來，而 $N_1$，$N_4$，$N_t$ 則不能用標示技術標出來。根據上述規則，我們得到 $X=\{N_s, N_1, N_2, N_3, N_4\}$，$\overline{X}=\{N_t\}$，所以 $C(X,\overline{X})=b_{3t}+b_{4t}=3+3=6=$ 極大流程。

故求得 $(X,\overline{X})$ 爲圖(一)的一個極小切。

在一個網路的路線上，設有一線 $A_{ij}$，其 $x_{ij}>0$，則稱 $A_{ij}$ 爲向前弧（forward arc），若 $x_{ji}>0$，則稱 $A_{ij}$ 爲向後弧（ blackward arc ）。若一個路線上的所有向前弧都是 $x_{ij}<b_{ij}$，且所有向後弧都是 $x_{ji}>0$，則稱此路線爲流程增大路線（flow augmenting path），令 $F_{st}$ 表示從點 $N_s$ 到點 $N_t$ 的流程量，則我們可以得到下面的系理：

系理：流程 $F_{st}$ 是極大若且唯若對應於 $F_{st}$ 沒有流程增大路線若且唯若 $N_t$ 不能用 Ford - Fulkerson標示技術標出來。

最後以一個與極小切有關的定理作爲此次討論的結束。

定理：設 $(X,\overline{X})$ 與 $(Y,\overline{Y})$ 均爲極小切，則 $(X\cup Y,\overline{X\cup Y})$ 與 $(X\cap Y,\overline{X\cap Y})$ 亦均爲極小切。

證明：

1° 若 $X\subset Y$，則 $X\cup Y=Y$ 且 $X\cap Y=X$，所以 $(X\cup Y,\overline{X\cup Y})=(Y,\overline{Y})$，$(X\cap Y,\overline{X\cap Y})=(X,\overline{X})$ 均爲極小切。

2° 若不爲上述情形，則考慮圖(六)：

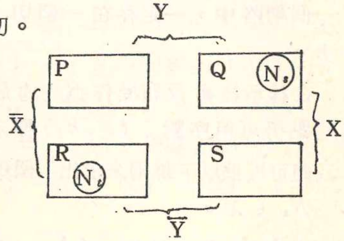



圖 (六)

令 $N_s\in Q$，且 $N_t\in R$。

而 $X=Q\cup S$，$\overline{X}=P\cup R$，

$Y=P\cup Q$，$\overline{Y}=R\cup S$，

則 $X\cap Y=Q$，$X\cap\overline{Y}=S$，

$\overline{X}\cap Y=P$，$\overline{X}\cap\overline{Y}=R$，

令 $C(P,Q)=\Sigma\, b_{ij}$　式中　$N_i\in P$，$N_j\in Q$。

因 $(X,\overline{X})$ 爲極小切，而 $(Q, P\cup R\cup S)$ 亦爲切，

所以 $C(X,\overline{X})\leqslant C(Q, P\cup R\cup S)$

即 $C(Q,P)+C(Q,R)+C(S,P)+C(S,R)\leqslant C(Q,P)+C(Q,R)+C(Q,S)$

故得 $C(S,P)+C(S,R)\leqslant C(Q,S)$…………(1)

又因 $C(X,\overline{X})\leqslant C(P\cup Q\cup S, R)$，

所以$C(Q,P)+C(Q,R)+C(S,P)+C(S,R)\leqslant C(P,R)+C(Q,R)$

$+C(S,R)$；

故得$C(Q,P)+C(S,P)\leqslant C(P,R)$ ………(2)

同理$C(Y,\overline{Y})\leqslant C(Q,P\cup R\cup S)$。

故得$C(P,R)+C(P,S)\leqslant C(Q,P)$ ………(3)

且$C(Y,\overline{Y})\leqslant C(P\cup Q\cup S,R)$，

故得$C(P,S)+C(Q,S)\leqslant C(S,R)$ ………(4)

又(1)＋(2)＋(3)＋(4)得：

$2C(S,P)+2C(P,S)\leqslant 0$。

但$b_{ij}\geqslant 0$，所以$C(S,P)=C(P,S)=0$ ………(5)

將(5)式代入(1)，(2)，(3)，(4)得：

$C(S,R)\leqslant C(Q,S)$，

$C(Q,P)\leqslant C(P,R)$，

$C(P,R)\leqslant C(Q,P)$，

$C(Q,S)\leqslant C(S,R)$，

即$C(S,R)=C(Q,S)$ ………(6)

$C(Q,P)=C(P,R)$ ………(7)

由(5)，(6)，(7)，我們得到：

$$\begin{aligned}C(X,\overline{X})&=C(Q,P)+C(Q,R)+C(S,R)\\&=C(Q,P)+C(Q,R)+C(Q,S)\\&=C(X\cap Y,\overline{X\cap Y}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C(X,\overline{X})&=C(Q,P)+C(Q,R)+C(S,R)\\&=C(P,R)+C(Q,R)+C(S,R)\\&=C(X\cup Y,\overline{X\cup Y}),\end{aligned}$$

故$(X\cap Y,\overline{X\cap Y})$與$(X\cup Y,\overline{X\cup Y})$均爲極小切。

參考書籍：


1. D.R. Fulkerson : Flow Networks and combinatonal operations research, A.M.S. Monthly, vol 73 (1966). 115 — 138.

2. T.C. Hu : Integer programming and Netwark flows,' Addison - Wesley Co., 1969. ( chapter 8. )。

# 電子計算機概論

編輯小組：

.....COMPUTER

電子計算機自問世以來短短二十年間，已發展成影響當代人類文明生活最爲巨大的一種工具。由於電子計算機龐大的記憶，精確及快速的計算能力，已使其普遍的應用於各行各業。隨著電子工業的迅速進步以及分時系統技術不停的改進，我們相信電子計算機在短期內將成爲不可或缺的文明工具，因此生活在這一時期的人們對於它不能沒有適度的認識。

何謂電子計算機？凡能接受資料之裝置並使用其內部儲存之指令（Instruction）及程式（Program）以處理資料產生答案或結果者謂之。目前在世界各先進國家裏，電子計算機已普遍的被利用來做處理資料、控制生產、管理系統，以及計算與分析數值等工作。例如：

1. 在工程方面：電子計算機被利用以設計公路工程，分析電子電路、計算工程結構、管制交通流量以及遙控衛星及太空船之行動等。
2. 在商業方面：不論人事管理、生產管理、市場調査、薪資計算、預算控制、成本分析、計劃評核、車票預購等，均可利用電子計算機處理之。
3. 在自然科學方面：生物的分類、資源之分配、數學函數之產生、公式之證明、實驗室資料之分析與計算、天文氣象與海流之預測等。
4. 在農業方面：肥料之配合，作物之分佈、飼料之配料、土地之規劃、灌溉用水之計劃與分配造林之選擇等。

此外，尙可使用於醫學、教育、法律、警政、運輸等專門性工作資料之處理，其應用範圍之多，可謂不勝枚舉。

自 1974 年電子數值積分器及計算器（Electronic Numerical Integrator And Calculator）問世迄今已步入第四代，其演進大致可分：

1. 1958 年以前乃使用大量眞空管製造者，資料儲存有限，以磁帶（Magnetic Tape）爲媒介，計算速度很慢，以千分之一秒爲單位，是爲第一代電子計算機。

2. 1958年至1964年間，由於電晶體（Transistor）之出現，使計算機之體積縮小很多，計算速度增至以百萬分之一秒爲單位，用磁帶和磁碟（Magnetic Disk）做儲存媒介，資料儲存量乃大爲增加是爲第二代電子計算機。

3. 1964年以後，積體電路（IC）發展成功體積更形縮小約爲第一代之四十分之一，計算速度則以十億分之一秒爲單位，綜合了小巧、迅速、穩定三種特性，並有多種輸入與輸出裝置和媒介，此爲第三代。

4. 1970年以後，大規模積體電路（LSI）相繼誕生，以其應用於計算機內將使體積更形縮小，計算速度更形增加，目前在突飛猛進之中是爲第四代者。

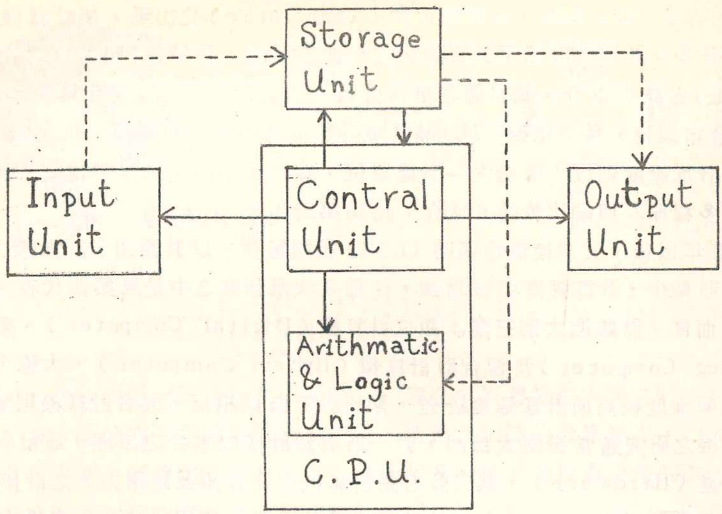
一般而言，計算機大別三類：數位計算機（Digital Computer）、類比計算機（Analog Computer）及混合型計算機（Hybrid Computer），大體上言，數位計算機準確度較高而計算速度較差，類比計算機則相反，混合計算機則兼優之。

計算機之研究通常分兩大部門，其一爲有關計算機本身之原理，設計制造等之研究屬硬體（Hardware），其二爲有關計算機系統計劃及應用方面之計劃的寫作與設計則屬軟體（Software）。軟體又分系統軟體及應用軟體，前者乃由電子計算機廠商所提供的編譯語言（Compiler Language）及操作系統（Operating System），後者則爲程式設計員所撰寫的程式語言。

茲就硬體方面的五大主要部門分述如下：

1. 輸入部門（Input Unit）：使資料與指令進入計算機之裝置如讀卡機（Card Reader），磁帶機（Magnetic Tape Unit），磁碟機（Magnetic Disk Unit）等。
2. 輸出部門（ Output Unit ）：將計算機內部執行作業所獲得之結果予以輸出的的單位，如磁帶機、磁碟機、印製機（Printer）、操作台（Console）等。
3. 儲存部（Storage Unit）：爲儲存資料與指令之設備，其儲存量大小常作爲計算機大小之區分。
4. 管制部（Contral Unit）：係指揮計算機的整體作業，凡程式指令之排列次序及其他四個部門任何作業之督導皆由本部門控制。
5. 計算及邏輯部（Arithematic/Logical Unit）：執行一切計算及邏輯工作的單位。

其中管制部及計算及邏輯部又合稱爲中央處理部門（Central Processing Unit 簡寫爲 CPU），此五部門之結構可以圖形表示之。



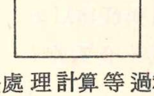

——— 表示控制訊號

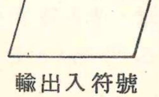
………… 表示資料流動

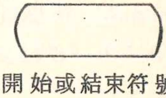
其次如何使用計算機，以解答問題？

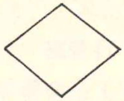
1. 首先須分析問題，求得解決方法之後即可進行寫程式之工作，但通常在寫程式之前，先繪製流程圖（Flow Chart）。
2. 程式寫妥後，將其打在卡片或其他輸入媒介，以便輸入計算機內處理。
3. 如程式的邏輯及規格上有錯誤時，電子計算機會予以顯印出錯誤的地方，提醒撰寫者以改正之。
4. 改進之後再送進計算機內執行，直至得到正確結果為止。

上述所謂的流程圖，乃在複雜的程式中，執行次序有許多分支或環狀的情況，常使設計者疏忽以致未考慮到各種可能的情況，故利用一種簡單圖形作為路徑圖，以使程式設計員清晰的將其欲寫之程式的各步驟寫於紙上，一則使程式設計員不會疏忽某一情況或步驟；二則如果程式需要修改時，利用流程圖可以迅速判斷出應在程式中何處加以修改；三則在程式設計過程中，如必須更換製作人時，流程圖可減少工作接替上的困難。幾種常用的符號及意義如下：

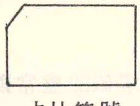

表處理計算等過程


輸出入符號


開始或結束符號

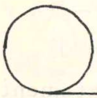


表決定符號

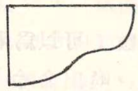


卡片符號

連接符號



磁帶符號



印製報表符號

當我們欲使用電子計算機時，須藉由一種特別設計而能為電子計算機所接受的語言，按照特定的規則寫成程式，再經由輸入媒介送入電子計算機執行。電子計算機程式語言非常之多，依其接近通用的英文程度約可分為㈠高級語言（High - level language），包括有式譯程式語言（FORTRAN），商用程式語言（COBOL）等；㈡中級語言（Median-level language）有彙集程式語言（Assembly language）及㈢下級語言（Low - level language）即最基本的機器語言（Machine language）。今日最常用的程式語言為高級語言，因其係使用人類日常實用語言撰寫，容易為人接受，茲將FORTRAN概述之。

FORTRAN（FORmula TRANslation）語言是由英文字母及幾個特殊符號所構成的一些指令，將這些指令的形式及運用規則等加以巧妙的組合以解決工程與科學上的問題。

以下介紹幾個常用的指令：

㈠讀入命令（READ Statement）及寫出命令（WRITE Statement）

基本形式為：

READ（a，b）LIST

WRITE（a，b）LIST

a：為一不帶正負號之整常數，表各個輸入或輸出機件之代號，隨機器類型的不同而有不同的代號。

b：則為讀入格式的命令號碼。

LIST：表變數名列，由一系列變數名稱組成，各變數名稱間要以逗點分開。

㈡格式命令（FORMAT Statement）

基本形式為：

m FORMAT（$c_1$，$c_2$，$c_3$，……）

m：格式命令的命令號碼，須與讀入命令或寫出命令中的b相同。

$c_1$，$c_2$，$c_3$，……：格式代碼其種類很多，視所需資料而定。

於此先介紹幾種格式代碼：

1.整數型　$I_w$

W：是一個不帶正負號，大於零值的整常數表示欄位長度。

2.實數型　$F_{w.d}$

W：意義同上

d：是一個不帶正負號的整常數（可以為零），說明小數位數。

㈢中止命令（STOP statement），喚出命令（CALL EXIT Statement），終了命令（END statement）：

1.中止命令是告訴電子計算機，停止繼續執行這一個程式，基本型式為 STOP。

2.喚出命令乃計算機執行至此命令即停止執行本程式而自動執行下一個程式，基本型式為　CALL EXIT。

3.終了命令是在編譯（Compile）階段告訴電子計算機，這一程式單元到此為止，以後命令不屬於這一程式單元，基本型式為　END。

㈣無條件轉向命令（Unconditional GO TO statement）及計算轉向命令（Computed GO TO statement）

1.無條件轉向命令基本型式為　GO TO $n$.

$n$：是在此一程式中，某一執行命令的號碼，當機器執行此轉向命令時，執行控制立即轉移到具有此命令號碼 $n$ 的命令。

2.計算轉向命令基本型式為　GO TO（$x_1$，$x_2$，………，$x_n$），i　$x_1$，$x_2$，……，$x_n$ 是此程式中某些執行命令的命令號碼。

i：是一整變數，其數值須在執行這一計算轉向命令之前設定，且 $1 \leqslant i \leqslant n$，例如 i 若等於 2，則執行 $x_2$ 命令號碼的指令。

㈤算術判斷命令（Arithmetic IF Statement）及邏輯判斷命令（Logical IF Statement）

1.算術判斷命令基本型式為　IF ($a$) $x_1$，$x_2$，$x_3$

$a$：是一任何算術式

$x_1$，$x_2$，$x_3$：是程式中的執行性命令號碼

執行此一命令時，計算機先將 $a$ 式的數值求出，若其值為負，則執行 $x_1$ 命令號碼的命令；若其值等於零，則執行 $x_2$ 命令號碼的命令；若其值大於零，則執行 $x_3$ 命令號碼的命令。

2.邏輯判斷命令基本型式為　IF ($a$) S

$a$：為任何邏輯算式

S：為任何執行性命令

此命令表示，$a$ 值若為眞，則執行S命令；若為假，就不執行S命令，而繼

續執行下一命令。

㈥循環命令（DO Statement）

基本型式爲： DO $n$ i $= m_1, m_2, m_3$

$n$：是一個執行性命令的命令號碼，叫做循環範圍終限（range limit），也就是循環範圍內，最後一個命令的命令號碼。

i：是一個整變數，叫做循環指標（DO index）

$m_1, m_2, m_3$：是整變數，$m_1$ 爲初使值（initial value）；$m_2$ 爲測試值（test value）即最高值；$m_3$ 爲增加值（increment value）

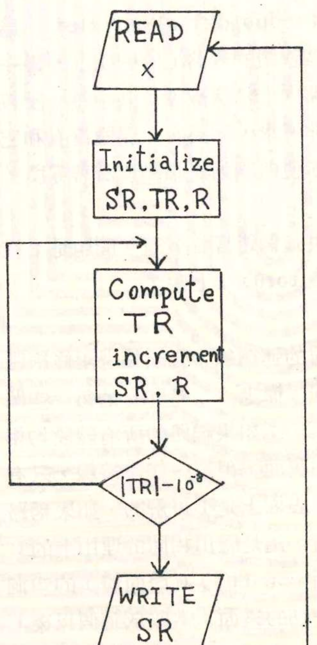
在循環命令開始執行時，循環指標 i 爲 $m_1$，其值不得小於 1，每當執行完畢一個循環時，i 的值增加 $m_3$，再與 $m_2$ 相比，若小於或等於 $m_2$，再執行一次循環圈內的命令，若大於 $m_2$，則脫離循環圈而執行循環範圍終限的下面一個命令。

現舉一例，以說明上項各指令的運用，由 Taylor 級數知

$$exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots$$

試寫一程式以級數法求出 $exp(x)$ 之值，取至絕對值小於 $10^{-8}$ 之項止。

㈠流程圖



㈡程式內容

```
4   READ (2,8)×
8   FORMAT (F 10.5)
    SR=1
    TR=x
    R=2
2   SR=SR+TR
    TR=TR*×/R
    R=R+1
    IF(ABS(TR)-1.E-8)1,2,2
1   WRITE (3,9)SR
9   FORMAT (1×,E15.7)
    GO TO 4
100 CALL EXIT
    END
```

**通過網路**

最古老的"拓撲迷宮"( topological puzzles )爲很多學童所熟知的是：在一個密閉的網路(圖㈠)上，畫一條連續曲線，使該線通過網路內十六個線段，其中每一段只能通過一次。圖中的曲線並非所求，因爲有一線段沒有和它交叉。不能使用"詐術"，如使曲線通過頂點或沿著線段，將紙折疊………等。

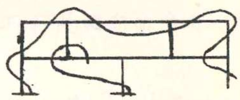


圖 ㈠

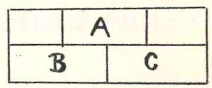



圖 ㈡

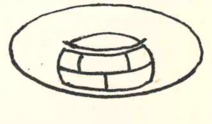


圖 ㈢

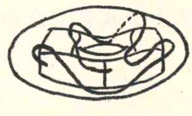


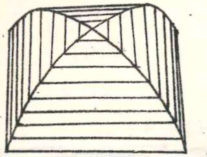
圖 ㈣

要證明在平面上不能解決這個迷宮並不難。問題是：在球面上它是否能解？在環面( torus )上呢？

解答：

進入和離開此長方形空間的連續線，必須橫過兩條線段。因爲在圖㈡，㈢，㈣的空間，標上A，B和C的每一空間均被奇數線段所圍繞。這樣下去；如果網路的所有線段均相交，則每一條線的末端必須在裏面，但是一條連續線，只有兩個末端，所以此迷題在平面表面上是不可解的，如果網路在一球上或一環面的一個面上，這是應用相同的理由上的(畫在右下角)，所以致使環面( torus)(凸面體)的空洞在三個空間A，B和C中的一個的裏面。當做成這個以後，此迷題是極易被解出來的。


中國古算學



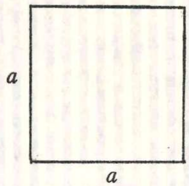
# 九章算術與幾何

孫文先

九章算術是從周、秦以至漢代中國古代數學發展的一個總結性，也是最具代表性的著作。它是以問題集的形式編寫的，這部書共收有二百四十六個問題，分爲“九章”。在舉出一個或數個問題後，即列出這問題的解法或一般解法。九章算術的內容豐富，而且大多和實際生活密切相關。以下我們將專注於九章算術中幾何的問題，也就是專注於第一章“方田”及第四章“少廣”，第九章“勾股”。

方田

術曰：廣從步數相乘得積步

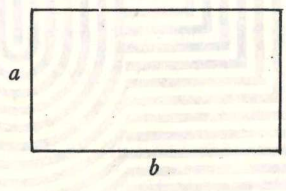



正方形：$S = a^2$

（圖一）

廣田、直田

術同方田




矩形：$S = ab$

（圖二）

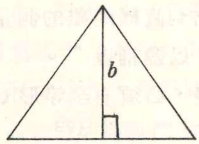
九章算術中，方田、廣田之算法並無區別。但李淳風認爲冪與積步“實二者全殊”，因“冪”是四方單布之名；“積”乃衆數聚居之稱，“不可同之”。冪是根據一邊之長而平方之，而積步則是廣從步數相乘。在廣田之問題中，“初術直有全步而無餘分（整數）”“3”次術空有餘分而無全步（純分數）“，最後″先見全步後有餘分”（帶分數）。故大廣田（邊長爲帶分數）之求法爲“分母各乘其全，分子從之，相乘爲實，分母相乘爲法，實如法而一”（設邊長爲$\frac{b}{a}$，$\frac{d}{c}$，（$b \times d$）

$\div ( a \times c ) )$

二

圭（ㄍㄨㄟ）田

術曰：半廣以乘正從

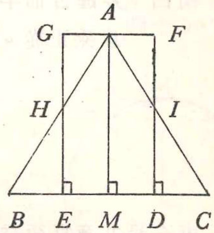



（圖三）

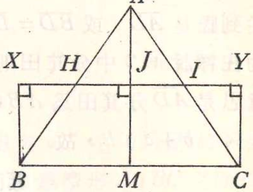
等腰三角形：$S=\frac{1}{2}ab$

（$a$ 爲廣，$b$ 爲從）

劉徽的注解說：「半廣知以盈補虛爲直田也，亦可半正從以乘廣。」他的意思是說：令 $\overline{BE}=\overline{EM}=\overline{MD}=\overline{CD}$；則 $a\triangle BEH=a\triangle HAG$，$a\triangle CDI=a\triangle AFI$，“此盈補虛爲直田也”，此直田之廣爲½ $a$，從爲 $b$，故其積爲½ $ab$（見圖四）。又可令 $\overline{AJ}=\overline{JM}$，則$a\Delta AHJ=a\triangle HBX$，$a\triangle AIJ=a\triangle IYC$，“以盈補虛”可得直田廣 $a$，從爲½ $b$，故積爲“半從以乘廣”（見圖五）。




（圖四）




（圖五）

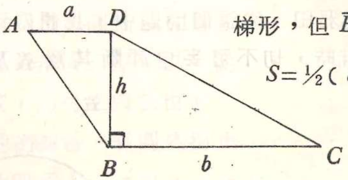
劉徽至少已知面積可“以盈補虛”求得；已知比較面積之大小與相等，以便“以盈補虛”。一般中算學研究者，甚至李儼都誤將圭田當作普通三角形，這可從夏侯陽算經，李淳風注解中證明之。

三

邪田

術曰：並兩邪而半之，

以乘正從。



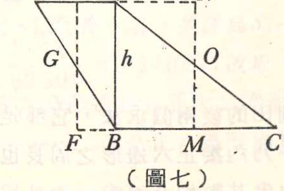

（圖六）

梯形，但 $\overline{BD}\perp\overline{AD}$，$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$

$S=½(a+b)h$

（$a$，$b$ 爲兩邪，$h$ 爲正從）

這一個問題，被一般中算學研究者誤作爲一般的梯形，而無 $\overline{BD}\perp\overline{BC}$ 之條件，這可由“田之形如同股二勾股形，一順一逆相合者。”證明之。劉徽的注釋說：“并而半之者以盈補虛也。”即 $a\triangle AGH=a\triangle FGB$，$a\triangle DNO=a\triangle CMC$，故 $a\square ABCD=a\square HFMN=h\cdot(\frac{a}{2}+\frac{b}{2})=\frac{1}{2}(a+b)h$。（其中 $H$ 爲 $\overline{AD}$ 中點，且 $M$ 爲 $\overline{BC}$ 中




（圖七）

點。)(見圖七)

在圭田、邪田中,九章算術裏內含有幾個特色:

(1)爲了測量正從,故點到直綫距離的測量必須精確。

(2)確知面積之計算可"以盈補虛"。

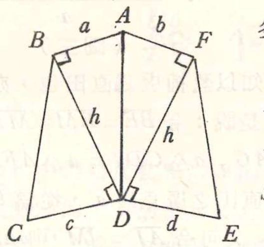
(3)在"以盈補虛"之際,必須有全等形(至少是全等三角形之概念)。

四

箕田

術曰:并踵舌而半之,

以乘正從。



(圖八)

多邊形 $ABCDEF$,

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{AF} \parallel \overline{DE}$,

$\overline{BD} \perp \overline{AB}$, $\overline{DF} \perp \overline{AF}$,

$\overline{BD} = \overline{DF}$

$S = \frac{1}{2}[(a+b)+(c+d)] \cdot h$

唐李籍九章算術音義云:箕田者,有舌有踵,其形哆哆,有如箕然。其意思是:$\overline{AB} \cup \overline{AF}$ 爲舌,$\overline{CD} \cup \overline{DE}$ 爲踵,它的形狀口大身小,有如畚箕。關於箕田之正從到底是 $\overline{AD}$,或 $\overline{BD} = \overline{DF}$,這也有些爭論,但 $\overline{BD} = \overline{DF}$ 爲正從才是正確的。劉徽的注釋說:"中分箕田則爲兩邪田,故其術相似又可并踵舌半正從以乘之"。他的意思是 $\overline{AD}$ 分箕田爲 $ABCD$,$ADEF$ 二邪田 $a\square ABCD = \frac{1}{2}(a+c)h$,$a\square ADEF = \frac{1}{2}(b+d)h$,故

箕田面積 $= \frac{1}{2}[(a+b)+(c+d)]h$ (見圖八)

因爲箕田與邪田面積之計算方法相同,而一般中算史研究者又疏於考據,故通通把箕田誤作爲邪田,從這個問題中,我們得到一個教訓,就是我們在研究古代之科學及數學成就時,切不可妄自評斷其意義及價值。

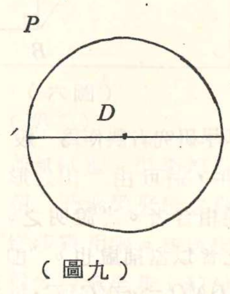
五

圓田

術曰:半周半徑相乘得積步

又術曰:徑自相乘三之四而一

又術曰:周自乘十二而一



(圖九)

圓形,周長 $P$,直徑 $D$

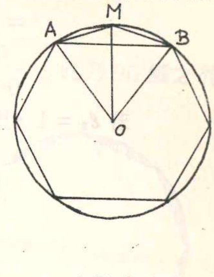
$$S = \frac{1}{2}P \cdot \frac{1}{2}D$$

$$\doteqdot D^2 \cdot \frac{3}{4}$$

$$\doteqdot P^2 \cdot \frac{1}{12}$$

圓田的後兩個求法,它都是用"徑率而外周率三"即 $\pi = 3$。劉徽首先指出周三徑一乃內接正六邊形之周長也。它說:"假令圓徑二尺,圓中容六觚之一面,與圓徑之半其數均合徑率一而外周率三也。"即 $\overline{OC} = 1$,則 $\overline{CF} : \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE}$

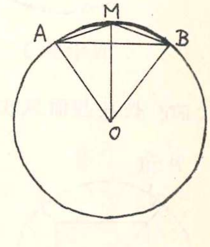
$+\overline{EF}+\overline{FA}=1:3$。劉徽又指出以 $\pi=3$，所得圓面積爲正十二邊形之面積而非圓之面積，他說“以六觚之一面乘半徑二因而六之，得十二弧之冪”即以 $\overline{AB}\times\overline{0M}\times\frac{1}{2}\times 6$；因 $0AMB$ 爲箏形其面積爲 $\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{0M}$，其六倍即爲正十二邊形之面積。劉徽指出：已知圓內接正 $n$ 邊形之邊長，可得圓內接正 $2n$ 邊形之面積，因爲，設 $\ell_n=\overline{AB}$ 爲圓內接正 $n$ 邊形之邊長，以 $\overline{0B}\times\overline{AB}\times\frac{1}{2}$ 即箏形 $A0BM$ 之面積，故內接正 $2n$ 邊形之面積爲



（圖十）

$$S_{2n}=r\times\ell_n\times\frac{1}{2}\times n \quad \text{（見圖十一）}$$

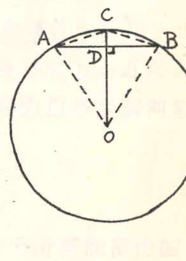
故劉徽所云：以六觚之一面乘半徑二因而六之，得十二觚之冪，若又割三次以十二觚之冪乘半徑二因而十二之則得二十四觚之冪（此處劉徽誤注爲四因而六之，很可能是筆誤）。”是正確的。劉徽更指出“割之彌細，所失彌少，割之又割以至于不可割，則與圓周合體而無所失矣。”這個觀點是非常了不起的極限觀念。



（圖十一）

劉徽又指出：$S_n<S_{2n}<S_{4n}<\cdots\cdots<S$。因他說“觚面之外又有餘徑，以面乘徑則冪出觚矣，若夫觚之細者與圓合體，則表無餘徑，表無餘徑則冪不外出矣。”這句話是說：若 $\overline{AB}$ 爲觚之一邊，則 $\overline{CD}$ 爲餘徑，以 $\overline{AB}\times\overline{CD}\times\frac{1}{2}$ 所得之面積爲箏形 $A0BC$ 之面積，比 $\triangle 0AB$ 之面積爲大，但若觚之邊數爲無窮大則其周與圓合，餘徑之長趨近於零，故其面積與圓面積相等。

劉徽認爲 $\pi$ 是一“至然之數，非周三徑率也，從其六觚之環耳以推圓規多少之較，乃弓之與弦也。” $\pi$ 是至然之數，這也是個很先進的想法，從圓內接正六邊形邊長與此弦對應弧長之比即爲 $1:\pi$ 也。

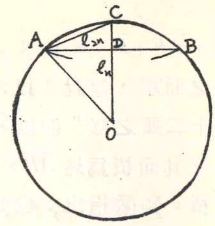


（圖十二）

在圓田算法注釋的最後，劉徽講出古人世傳周三徑一之說法，而”莫肯精覈學者踵古習其謬失，不有明據辯之斯難。“凡物類形象不圓則方”，故求得正確之圓率爲重要。因此劉徽很詳細的從 $S_6$ 算起，以至於 $S_{192}$，並認爲 $S_{192}$ 並不是終結，必可“割之彌細”，他求出 $S_{192}=3.14+\dfrac{64}{62500}=3.141024$，故取 $\pi$ 之近似值爲 $3.14$。他的算法是反覆應用勾股定理，由正六邊形邊長求正十二邊形邊長，再由正十二邊形邊長求正二十四邊形邊長，…………，即令正 $n$ 邊形邊長 $\ell_n=\overline{AB}$，$\ell_{2n}=\overline{AC}$，

$$\ell_{2n}=\overline{AC}=\sqrt{\overline{CD}^2+\overline{AD}^2}$$

$$=\sqrt{(\frac{\ell_n}{2})^2+(r-\sqrt{r^2-(\frac{\ell_n}{2})^2})^2}$$




（圖十三）

若 $\ell_6=1$，則 $\ell_{12}=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(1-\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2})^2}$

$$\doteqdot\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(1-0.8660254)^2}$$

$$\doteqdot\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(0.1339746)^2}$$

$\doteqdot\sqrt{0.267949193445}$，

$$\ell_{24}=\sqrt{(\frac{\ell_{12}}{2})^2+(r-\sqrt{r^2-(\frac{\ell_{12}}{2})^2})^2}$$

$$\doteqdot\sqrt{\frac{0.267949193445}{4}+(1-0.6659254)^2}$$

$\doteqdot\sqrt{0.068148349466}$，

$$\ell_{48}=\sqrt{(\frac{\ell_{24}}{2})^2+(r-\sqrt{r^2-(\frac{\ell_{24}}{2})^2})^2}$$

$$\doteqdot\sqrt{(\frac{\ell_{24}}{2})^2+(1-\sqrt{1-0.01703787366})^2}$$

$$\doteqdot\sqrt{(\frac{\ell_{24}}{2})^2+(1-0.9914448)^2}$$

$\doteqdot\sqrt{0.01711278813}\doteqdot0.13086$，

$$\therefore\quad S_{96}=48\times\ell_{48}\times r\times\frac{1}{2}=3.13+\frac{584}{62500}=3.139344$$

$$\ell_{96}=\sqrt{(\frac{\ell_{48}}{2})^2+(r-\sqrt{r^2-(\frac{\ell_{48}}{2})^2})^2}$$

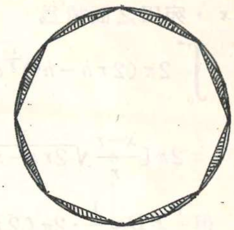
$$\doteqdot\sqrt{(\frac{\ell_{48}}{2})^2+(1-\sqrt{1-0.004277569703})^2}$$

$$\doteqdot\sqrt{(\frac{\ell_{48}}{2})^2+(1-0.9978589)^2}=\sqrt{0.004282154012}$$

$$\doteqdot0.065438$$

$$S_{192} = 96 \times \ell_{96} \times r \times \frac{1}{2} = 3.14 + \frac{64}{62500} = 3.141024$$

$S_{192} - S_{96} = \dfrac{105}{62500}$，$2(S_{192} - S_{96}) = \dfrac{210}{62500}$，此乃96觚之外觚田也（斜綫部份）（見圖十四）



$$S_{96} + 2(S_{192} - S_{96}) = S_{192} + (S_{192} - S_{96})$$

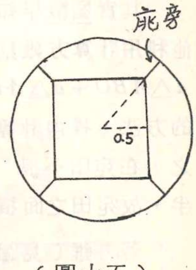
$$= 3.14 + \frac{169}{62500} > S > S_{192}$$

所以令 $S_{192} \doteqdot 3.14 \doteqdot \pi$

劉徽說若取 $\pi = 3.14$，則"周率猶爲微少也。

（圖十四）

爲了證明 $\pi = 3.14$ 的準確，劉徽拿晉武庫中漢時王莽作銅斛"律嘉量斛"來比較。律嘉量斛現存於故宮博物院，其內方尺而圓其外，庣旁0.0095，所得圓冪爲1.620，高一尺，容米十斗。





$\Rightarrow$ 若取 $\pi = 3.14$ 則

$$(\sqrt{(0.5)^2 + (0.5)^2} + 0.095)^2 \times 3.14$$

$$\doteqdot 0.5135156 \times 3.14$$

$$\doteqdot 1.612438984$$

故劉徽說"以此術求之得冪一百六十一有奇，其數相近也。"

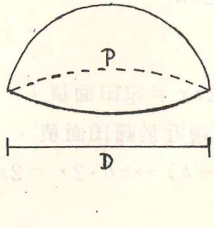
（圖十五）

用正多邊形逐漸增加邊數的方法來計算 $\pi$，遠在西元前第三世紀（比劉徽早約400年），就爲古希臘數學家阿基米德首先採用，但阿基米德用內接和外切正多邊形逼近而計算，而劉徽只用內接正多邊形的逼近來計算，因而比阿基米德的方法簡便的多；更重要的，劉徽的算法是我國數學家獨創發明的，並非沿襲西方的。

## 六

宛田、隆田

術曰：以徑乘周四而一





球被一平面所截餘部份的表面。

$$S = \frac{1}{4} PD$$

其中 $P$ = 宛田周

$D$ = 宛田底圓直徑

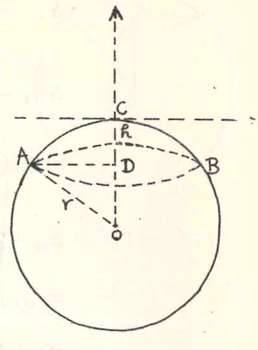
（圖十六）

依照現代的求法宛田面積應是：

令 $\overline{AD}=r$，$\overline{CD}=h \Rightarrow \overline{AD}=\sqrt{r^2-(r-h)^2}$

故圓 $D$ 之周長爲 $2\pi(\overline{AD})=2\pi(2rh-h^2)^{\frac{1}{2}}$

若令點 $C$ 爲座標之原點，向下爲正，故高度爲 $x$，宛田之面積爲




（圖十七）

$$\int_0^x 2\pi(2rh-h^2)^{\frac{1}{2}}dh=2\pi\int_0^x(2rh-h^2)^{\frac{1}{2}}dh$$

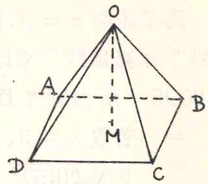
$$=2\pi\left[\frac{x-r}{r}\sqrt{2rx-x^2}+\frac{r^2}{2}\sin^{-1}\frac{x-r}{r}+\frac{\pi r^2}{4}\right]$$

但 $\frac{1}{4}PD=\frac{1}{4}\cdot 2\pi(2rx-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2\cdot(2rx-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$=2\pi rx-\pi x^2$$

其間有誤差，其中 $x$ 爲宛田之隆高

其實劉徽早知 $S=\frac{1}{4}PD$ 只是宛田面積之近似值，他利用計算方錐見幂（方錐除了底之外的表面積，即 $a\triangle ABO+a\triangle ADO+a\triangle CDO+a\triangle BCO$（見圖十八））的方法，推得計算圓錐見幂的方法爲底周乘斜徑而半之，在宛田不很“隆”時，其幂近於圓錐之見幂，而圓錐之邪徑近於宛田之底徑之半，故宛田之面積 $S \doteqdot \frac{1}{2}P\cdot\frac{D}{2}=\frac{1}{4}PD$，它的解釋是：




（圖十八）

若方錐（見圖十八）$\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{BC}=\overline{AD}=6$，$\overline{OM}=4$，利用勾股定理得方錐斜高爲5，故得方錐見幂爲 $5\times3\times4=60$。若令方錐內容一最大之圓錐，則圓錐之見幂與方錐之見幂其率猶爲方幂之與圓幂也（即 $4:\pi$）

“宛田上徑圜穹而與圓錐同術則幂失之于少矣，然其術難用故略舉大較施之大廣田也。”劉徽這段話中有兩個重點：

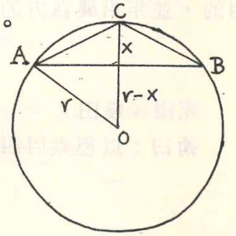
⑴宛田幂大於圓錐之幂，這是正確的，但他沒有驗證。

我們可以證之：圓錐之見幂爲

$$\frac{1}{2}\cdot 2\pi\sqrt{2rx-x^2}\cdot\sqrt{2rx}$$

$$=\pi\sqrt{2rx(2rx-x^2)}$$

$$<\pi\sqrt{2rx(2rx)}=\pi 2rx \doteqdot \text{宛田面積。}$$



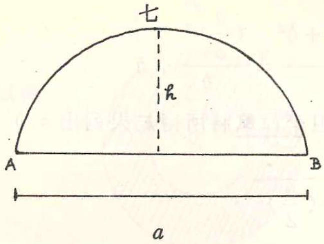

（圖十九）

⑵當 $r\to\infty$，則宛田面積趨近於圓田面積。

$$2\pi rh-\pi h^2=\pi h(2r-h)\to\pi h\cdot 2r=2\pi rh$$

弧田

術曰：弦乘矢，矢又自乘，并之二而一。



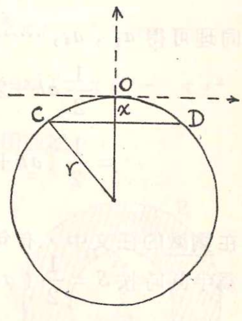

弓形

$$S \doteqdot \frac{1}{2}(ah+h^2)$$

（圖二十）

依照現代的算法，弓形面積之求法為：

$\overline{CD}=2\cdot\sqrt{r^2-(r-x)^2}=2\sqrt{2rx-x^2}$ 若令 $O$ 為座標之原點，向下為正故矢為 $x$ 弧田之面積為 $\int_0^h 2\sqrt{2rx-x^2}\,dx$，這樣所得之值比 $S=\frac{1}{2}(ah+h^2)$ 之值稍大。



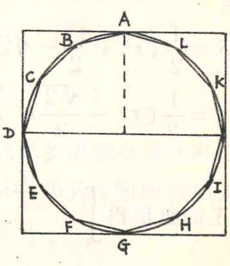

（圖二十一）

劉徽在注文中曾證明若依照 $S=\frac{1}{2}(ah+h^2)$ 的算法，所得半圓之面積，僅是內接正十二邊形部份之面積，這與令 $\pi=3$ 的算法誤差一樣，蓋圓內接正十二邊形面積為圓外切正方形面積之¾。令外切正方形邊形邊長為2，則

$$\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=1$$

$$\frac{1}{2}h^2=\frac{1}{2}\left(=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right)$$

$$\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}h^2=\frac{3}{2}=3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\text{外切正方形面積}$$



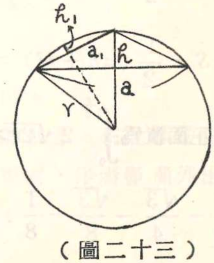

（圖二十二）

在指出此計算式之不準後，劉徽用“鋸圓材之術”來求弧田較正確的算法，這算法又再度表現了劉徽對極限概念的獨見。它是：已知弧田之 $a$，$h$，則可求其所在圓之徑，按

$$r-h=\sqrt{r^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

兩邊平方：$r^2-2rh+h^2=r^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$

$$r=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2+h^2}{2h}$$




（圖二十三）

$$2r=\frac{(\frac{a}{2})^2+h^2}{h}=\frac{(\frac{a}{2})^2}{h}+h$$

（劉徽並未列出算法，但李淳風將所得結果列出。）

既得 $r$，則 $a_1=\sqrt{h^2+(\frac{a}{2})^2}$，

$$h_1=r-\sqrt{r^2-(\frac{a}{2})^2}=r-\sqrt{r^2-\frac{h^2}{4}+\frac{a^2}{16}}\quad,$$

同理可得 $a_2$，$a_3$，……，和 $h_2$，$h_3$，………，則弧田之面積爲

$$\frac{1}{2}ah+2\cdot\frac{1}{2}a_1h_1+4\cdot\frac{1}{2}a_2h_2+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2}(ah+2a_1h_1+4a_2h_2+\cdots\cdots)$$

在劉徽的注文中，有句話"若不滿半圓者益後疏濶"，這句話的意思是說，若弧田爲半圓時按 $S=\frac{1}{2}(ah+h^2)$ 的算法，其誤差只是 $(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2})/\pi$ 倍，但若弧田不滿半圓，其誤差就愈大了。我們可以驗驗他這句話，若令 $h=(1-\frac{\sqrt{2}}{2})r$，用 $S=\frac{1}{2}(ah+h^2)$ 的算法，弧田面積爲

$$S=\frac{1}{2}(r^2+\frac{r^2}{2}-\sqrt{2}r^2+\frac{\sqrt{2}}{2}r^2-\frac{1}{2}r^2)=\frac{1}{2}(r^2+\frac{\sqrt{2}}{2}r^2-\sqrt{2}r^2)$$

$$=\frac{1}{2}(r^2-\frac{\sqrt{2}}{2}r^2)$$

其眞正的面積爲 $\int_0^{(1-\frac{\sqrt{2}}{2})r}2\sqrt{2rx-x^2}\,d_x=\frac{r^2}{2}(\pi-1)$，誤差爲 $\frac{r^2}{2}(\pi-2+\frac{\sqrt{2}}{2})$

若令 $h=\frac{1}{2}r$，則

$$S=\frac{1}{2}(ah+h^2)=\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}r\cdot\frac{r}{2}+\frac{r^2}{4})=\frac{\sqrt{3}+1}{8}r^2$$

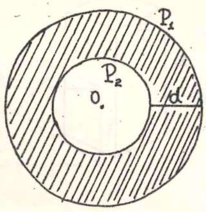
其眞正面積爲 $\int_0^{\frac{r}{2}}2\sqrt{2rx-x^2}\,dx=-\frac{\sqrt{3}}{4}r^2-\frac{\pi}{6}r^2+\frac{\pi}{2}r^2=r^2(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4})$，誤差爲

$(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8})r^2=(\frac{\pi}{3}-\frac{3\sqrt{3}+1}{8})r^2$，故知 $h$ 愈小，誤差愈大。

八

環田

術曰：并中外周而半之，以徑乘之爲積步。




環刑，二半徑不等同心圓中間所夾之部份，

$$S=\frac{1}{2}(P_1+P_2)d$$

其中 $P_1$ 爲外圓周長，$P_2$ 爲內圓周長

若令外圓半徑 $R$，內圓半徑 $r$，則 $P_1=2\pi R$，$P_2=2\pi r$，

$$\frac{1}{2}(P_1+P_2)d=\frac{1}{2}(2\pi R+2\pi r)(R-r)=\pi(R^2-r^2)=\pi R^2-\pi r^2$$

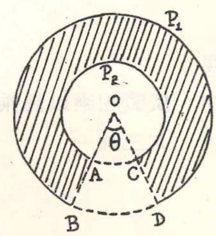
＝（外圓面積）－（內圓面積）＝（環田面積）。

若令外圓半徑 $R$，內圓半徑 $r$，$\angle BOD=\theta$，則 $\overset{\frown}{AC}=r\theta$，$\overset{\frown}{BD}=R\theta$，$P_1=2\pi R-R\theta$，$P_2=2\pi r-r\theta$，則

$$\frac{1}{2}(P_1+P_2)d=\frac{1}{2}(2\pi R-R\theta+2\pi r-r\theta)(R-r)$$

$$=\frac{1}{2}(2\pi-\theta)(R^2-r^2)$$

$$=\pi(R^2-r^2)-\frac{\theta}{2}(R^2-r^2)\text{（參閱圖二十四）}$$




（圖二十四）

因此而驗證這算法無誤。劉徽的解釋是：將圓分割成很多很多小塊，并之則以盈補虛，故可并中外周半之以徑乘之。劉徽認爲又可“以中圓減外圓餘則環實也”。

總括九章算術中，上述八種形狀面積之求法，吾人可知：

(1)定義方田爲廣從相乘。

(2)運用以盈補虛的方法計算邪田、箕田。

(3)利用極限逼近的方法求圓田及弧田。

(4)沒有能力正確的計算宛田，只取大較。

(5)用無限分割，并之，以盈補虛的方法計算圓田及環田。

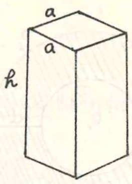
在以上的面積的求法中，九章算術已孕含有相當進步的觀念，在計算體積上，九章算術所含有的觀念及技巧，遠超過以上所云，但限於篇幅，作者僅簡列出其計算方式，而不再詳述。

一、

方堡壔（ㄊㄠˇ）

術曰：方自乘以高乘之

即積尺




正方柱

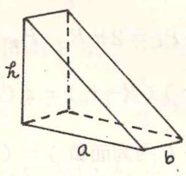
$V = a^2h$

二、

塹堵

術曰：廣袤相乘以高乘

之二而一




斜割長方體爲2，

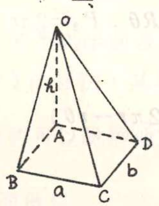
$V = \frac{1}{2}abh$

三、

陽馬

術曰：廣袤相乘以高乘

之三而一

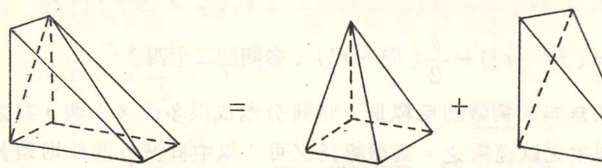



四角錐體

但$\overline{OA}$與平面$ABCD$垂直，

斜割塹堵較大的部份爲陽馬

$V = \frac{1}{3}abh$



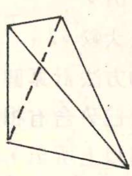
（塹　堵）　=　（陽馬）　+　（鼈臑）

四、

鼈臑

術曰：廣袤相乘以高乘

之六而一



如契形

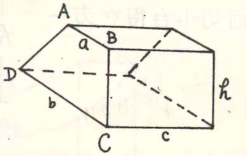
斜割塹堵，較小的部份爲

鼈臑，$V = \frac{1}{6}abh$

以上四者稱之爲“棊”，以後許多立體之體積均用其度之。

五

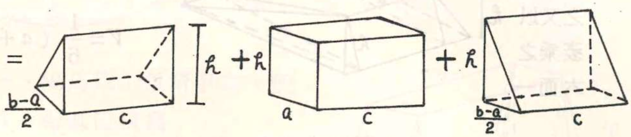
城、垣、隄、溝、塹、渠以深袤相乘，再并上廣下廣乘之二而一




等腰梯形平臺□$ABCD$為

等腰梯形 $V=\dfrac{1}{2}ch(a+b)$

城、垣、隄、溝、塹、渠 ＝



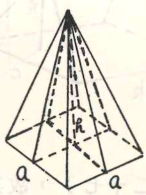

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)ch+hac+\frac{1}{2}hc\frac{b-a}{2}$$

$$=\frac{1}{2}hc(b+a)$$

六

方錐

術曰：下方自乘以高乘之三而一




正方錐

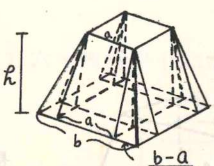
$V=\dfrac{1}{3}a^2h$

切方錐為四陽馬，其體積為 $\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\cdot h\cdot\dfrac{1}{3}\cdot 4=\dfrac{1}{3}a^2h$

七

方亭

術曰：上下方相乘又各自乘并之以高乘之三而一



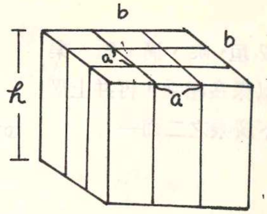

方台

$V=\dfrac{1}{3}(a^2+b^2+ab)h$

四平台為一方堡壔、四塹堵、四陽馬，其體積為

$$a^2h+4\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{b-a}{2}\cdot h+4\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^2h=\frac{1}{3}h(a^2+b^2+ab)$$

$b^2h$ 爲圖二十五中之長方體的體積，得立方一，壍堵八、陽馬十二，$a^2h$ 爲立方一，$abh$ 爲立方一，壍堵四，相加得立方三，壍堵十二，陽馬十二，而切平台得立方一，壍堵四，陽馬四，故三而一卽得。

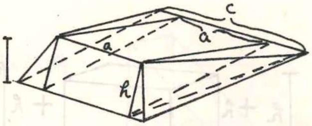



(圖二十五)

## 八

羨除

術曰：并三廣以深乘之又以袤乘之六而一




(圖二十六)

楔

$$V=\frac{1}{6}(a+b+c)\ell h$$

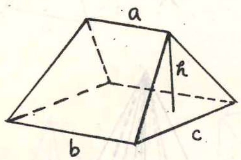
切羨除爲壍堵一，鼈臑甲二，鼈臑乙二，(如圖二十六)，其體積爲

$$\frac{1}{2}a\ell h+\frac{1}{6}\,\frac{b-a}{2}\,\ell\cdot h\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot\frac{c-a}{2}\cdot h\cdot \ell\cdot 2=\frac{1}{6}h\ell(a+b+c)$$

## 九

芻甍(ㄇㄥ)

術曰：倍大袤，上袤從之以廣乘之又以高乘之六而一。



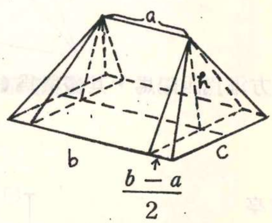

屋蓋之茨

$$V=\frac{1}{6}(2b+a)ch$$

割芻甍爲壍堵一，陽馬四(如圖二十七)，故其體積爲

$$\frac{1}{2}a\frac{c}{2}h\cdot 2+\frac{1}{3}\,\frac{b-a}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot h\cdot 4$$

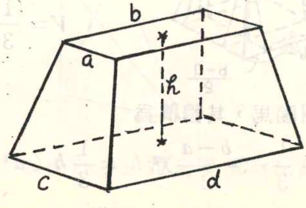
$$=\frac{1}{6}(2b+a)ch$$




(圖二十七)

## 十

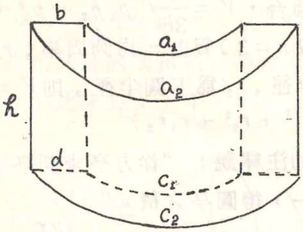
芻童、盤池
冥谷、曲池




長方台

$$V=\frac{1}{6}[(2a+c)b+(2c+a)d]h$$

術曰：倍上袤，下袤從之，亦倍下袤，上袤從之，各以其廣乘之，并以高若梁乘之皆六而一，其曲池者并上中外周而半之，以爲上袤，亦并下中外周而半之以爲下袤。




令 $a=\dfrac{a_1+a_2}{2}$，

$c=\dfrac{c_1+c_2}{2}$

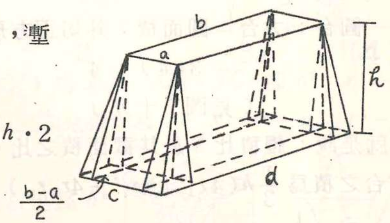
則與長方台術同

割芻童爲立方一、陽馬四、壍堵甲二，壍堵乙二（如圖二十八）得其體積爲

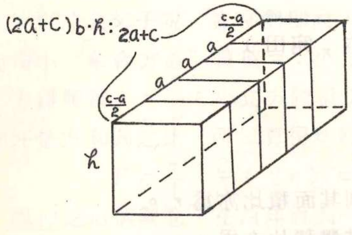
$$abh+\frac{1}{2}a\cdot\frac{d-b}{2}h\cdot 2+\frac{1}{2}b\cdot\frac{c-a}{2}\cdot h\cdot 2$$

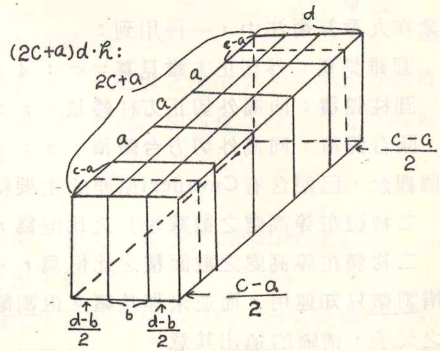
$$+\frac{1}{3}\frac{d-b}{2}\frac{c-a}{2}\cdot h\cdot 4$$

$$=\frac{1}{6}h\left[(2a+c)b+(2c+a)d\right]$$




（圖二十八）



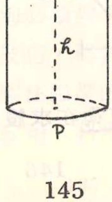

即立方三，壍堵甲四。

即立方三，壍堵甲八，壍堵乙十二，陽馬二十四。

以上二者相加得立方六，壍堵甲十二，壍堵乙十二，陽爲二十四，故除以六。

圓堡壔，圓囷

術曰：周自乘以高乘之十二而一




圓柱體 $V=\dfrac{1}{12}P^2h$（取 $\pi=3$）

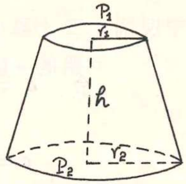
假若 $\pi$ 爲圓周率，$r$ 爲半徑此即 $\pi r^2h$

定義：底面積（圓田面積）乘以高，即其體積。

十二

圓亭

術曰：上下周相乘又各自乘并之以高乘之三十六而一




圓台，$V=\frac{1}{36}(p_1p_2+p_1^2+p_2^2)$（取$\pi=3$）假若$\pi$爲圓周率，$r_1$爲上圓半徑，$r_2$爲下圓半徑，則$V=\frac{\pi h}{3}(r_1^2+r_2^2+r_1r_2)$

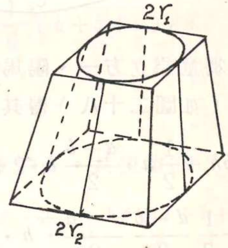
劉徽用外切方台與圓台來比較其體積，他的注釋說：“從方亭求圓亭之積，亦猶方冪中求圓冪，乃令圓率三，乘之方率四而一，得圓亭之積。”

這意思是說：

圓台：方台＝圓面積：外切正方形面積

$=3(\pi):4$

（見圖二十九）




也就是說：體積比等於其截面積之比。

方台之積爲$\frac{1}{3}h(4r_1^2+4r_2^2+4r_1r_2)$，故圓台之

積爲$\frac{\pi}{4}\times\frac{h}{3}(4r_1^2+4r_2^2+4r_1r_2)=\frac{\pi h}{3}(r_1^2+r_2^2+r_1r_2)$。（圖二十九）

劉徽在九章算術注中，一再用到：

圓錐見冪：外切正方錐見冪＝$\pi$：4（見六，宛田）

圓柱體積：同高外切正方柱體積＝$\pi$：4

圓台體積：同高外切方台體積＝$\pi$：4

這個觀念，已隱含有Cavalieri原理的主要精神：

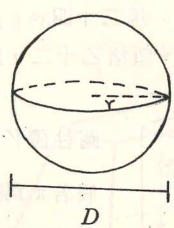
二物體在等高處之截線段長之比恒爲$r$，則其面積比亦爲$r$。

二物體在等高處之截面積之比恒爲$r$，則其體積比亦爲$r$。

可惜劉徽只知運用，而並未理其緒。但劉徽仍是功不可沒，因爲在劉徽後不久，祖冲之父子，清晰的道出其意。

十三

立圓，丸




球

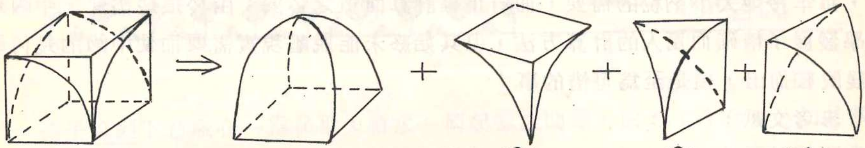
$V=\frac{9}{16}D^3$

這個算法是不正確的，也是九章算術在求體積方面唯一的敗筆。幸好，劉徽指

出了這一錯誤，雖然劉徽的注釋說“欲陋形措意，懼失正理，敢不闕疑，以俟能言者”，但這句話，激發了二百多年後南北朝祖冲之父子正確的解決這問題。

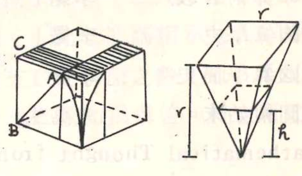
這計算之錯誤是發生在將球的外切圓柱之體積比視作3（$\pi$）：4。（事實上其比爲$\frac{4}{3}\pi r^3 : 2\pi r^3 = 2 : 3$）

劉徽指出球體的體積與“牟合方蓋”（中軸綫在中點垂直相交的兩個相同圓柱體的交集）的比才是$\pi$：4。



(1)　(2)　(3)　(4)

將這四棋併成立方，從距頂高$h$處割之，得$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$ 即 $a^2 = r^2 - h^2 =$ 小“牟合方蓋”之截面積（見圖三十），其餘三棋之截面積$S$，$S = r^2 - a^2 = r^2 - (r^2 - h^2) = h^2$




高長均爲$r$的方錐在距頂$h$處的截面積也爲$h^2$與小“牟合方蓋”的截面積處處相等。

故祖冲之父子說“緣冪勢即同，則積不容異”

因而得小“牟合方蓋”體積＝（小立方體積）－（三棋之體積）＝（小立方體積）－（方錐體積）＝$\frac{2}{3}$（小立方體積）。由於“牟合方蓋”和內接球體在等高處的截面積剛好是方和圓之比，所以算得球體體積

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} (2r)^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

祖冲之這個觀念，在西洋直到一千年後，意大利數學家Cavalieri才發現，而被稱爲Cavalieri 定理，其實該稱爲祖氏定理才對。

在體積的計算方面，我國古數學家運用了直截易懂的方式，非常正確的把各種形狀的體積計算出來。這些說明的方式，在現在一般中學的立體幾何學的課程教學中，是非常有用的。

初級數學的萌芽，往往是在爲了解決日常生活之需要，比較中國數學在幾何方面及西洋幾何學之發展，我們可清楚的發現，中國在幾何方面較重視面積的丈量，體積的計算，而希臘幾何則重視形狀之相似、全等、角度、三角測量。源溯其因，大概是希臘對外貿易頻仍，商船航海必須要有良好的測量方法；戰爭也頻仍，故將領們爲了操兵，必須有研究數目的技巧，研判形勢之能力；最重要的原因該是早期希臘的數學家都是哲學家，故其關注強調的盡是些抽象推理，求眞理、求善、求智慧，他們沈思構想完美的社會與政治，利用數學以了解宇宙的運行。由於研究風

氣的鼎盛，許多學派叢立，諸如：愛奧尼亞學派、畢氏學派、詭辯學派、柏拉圖學派，都有獨出一格的創見。藉助哲學的輔益，希臘幾何脫離了現實的需要閾限，而充分的抽象化，因而建立了許多公設，在公設基礎上，希臘數學家演繹其問題。更由於柏拉圖學派提出了分析法（Method of Analysis）及歸謬法（reductio ad adsurdum），從此希臘的幾何理論都必需有嚴密的推理證明，因而使它更爲完善。在中國方面，地廣物豐，人口衆多，是個繁榮進步的社會，由於王公諸候封田大小，每年按地大小納稅的需要，而有正確計算面積之必要；由於這些需要，中國幾何學發展了精確而驚人的計算方法，但其始終未能脫離現實需要而使中國的幾何學發展脫韁而出，這是至爲可惜的事！

參考文獻：


1. 九章算術　　　　　　　　四章珍本
2. 夏侯陽算經　　　　　　　四章珍本
3. 九章算術音義　　李籍　　四庫珍本
4. 中國算學史　　　李儼　　商務
5. 中國算學簡史　　李儼　　商務（香港）
6. 割圓術始末　　　洪萬生　師大講義
7. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Morris Kline 著，林炎全、洪萬生等譯，問學出版社。

# 大衍求一術

陳碧眞

孫子算經下卷載有一爲後世大衍求一術起源之問題，曰：「今有物不知其數，三三數之賸二，五五數之賸三，七七數之賸二，問物幾何？」此一問題如何解決呢？宋陰陽算術鬼子算有一隱詩：「三歲孩兒七十稀，五留廿一事尤奇，七度上元（註1）重相會，寒食清明（註2）便可知。」另有孫子歌：「三人同行七十稀，五樹梅花廿一枝，七子團圓正半月，除百零五便得知。」此二歌謠指示我們解題之方法，即：以70乘以三三數之所賸之數；以21乘以五五數之所賸之數；以15乘以七七數之所賸之數，將所得三數相加，再除以105，所得餘數即爲解答。將它用式子列出就是：

$70\times 2+21\times 3+15\times 2=233$

$233\div 105=2$ ……………餘 23

23 即爲所求

70 應是 $x\equiv 0\ (mod\ 5)$

$x\equiv 0\ (mod\ 7)$

$x\equiv 1\ (mod\ 3)$

三同餘式的解　其解法也就是找一個 $\alpha$ 使得 $\alpha\cdot 35\equiv 1\ (mod\ 3)$

21 應是 $x\equiv 0\ (mod\ 3)$

$x\equiv 0\ (mod\ 7)$

$x\equiv 1\ (mod\ 5)$

三同餘式的解　其解法也就是找一個 $\beta$ 使得 $\beta\cdot 21\equiv 1 (mod\ 5)$

15 應是 $x\equiv 0\ (mod\ 3)$

$x\equiv 0\ (mod\ 5)$

$x\equiv 1\ (mod\ 7)$

三同餘式的解　其解法也就是找一個 $\gamma$ 使得 $\gamma\cdot 15\equiv 1 (mod\ 7)$

因70除以3，21除以5，15除以7皆餘1，故顯然 $70\times 2+21\times 3+15\times 2$ 各以3，5，7除之，餘數則分別爲2，3，2。另舉一例說明之：「一數七七數之賸一，八八數之賸二，九九數之賸三，問此數爲幾何？」

解：$8\times 9\times\alpha+7\times 9\times\beta+7\times 8\times\gamma$

$$\begin{cases} x \equiv 0 \ (\bmod\ 8) \\ x \equiv 0 \ (\bmod\ 9) \\ x \equiv 1 \ (\bmod\ 7) \end{cases}$$ 即找 $\alpha$，使得 $72 \cdot \alpha \equiv 1 \ (\bmod\ 7)$

$$\begin{cases} x \equiv 0 \ (\bmod\ 9) \\ x \equiv 0 \ (\bmod\ 7) \\ x \equiv 1 \ (\bmod\ 8) \end{cases}$$ 即找 $\beta$，使得 $63 \cdot \beta \equiv 1 \ (\bmod\ 8)$

$$\begin{cases} x \equiv 0 \ (\bmod\ 7) \\ x \equiv 0 \ (\bmod\ 8) \\ x \equiv 1 \ (\bmod\ 9) \end{cases}$$ 即找 $\gamma$，使得 $56 \cdot \gamma \equiv 1 \ (\bmod\ 9)$

在前二例子中，3，5，7及7，8，9兩組除數（以後稱爲「問數」）皆互質，若問數間不互質，該如何處理呢？我們須先將其約分。關於約分，秦九韶曰：「元數者，先以兩兩連環求等，約奇弗約偶（或約得五，而彼有十，乃約偶，弗約奇）或元數皆約畢，可存一位見偶，或皆約而猶有類數存，姑置之，俟與其他約徧，而後乃與姑置者等約之。」其主要意思是約分後使它們互質，如6，4應約作3，4，不可約成6，2。因約成6，2，可再約成6，1，那就與我們求定數的旨意相背馳了！例如：

(1)問數爲　83, 110, 135, 約之

　　　　83, 110 | 135

約數 5　　　　　　27

得　　　83,110,27稱之爲定數。

(2)問數爲　1，2，3，4，約之

　　　　1，2 | 3，4

得　　　1，1，　3，4爲定數

爲了方便討論一般的問題，我們介紹幾個名詞及符號：以 $A$，$B$，$C$，$D$，…，$X$，$Y$，$Z$表問數，並稱其最小公倍數爲衍母 $\theta$；

以 $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, ………，$X'$，$Y'$，$Z'$ 表定數，則 $\theta = A'B'C'D'\cdots\cdots X'Y'Z$

；符號 $\left|\dfrac{A}{B}\right.$ 表 $A$ 除以 $B$ 的餘數，故 $\left|\dfrac{\theta}{(A', B', C', \cdots, X', Y', Z')}\right. = 0$；

稱衍母與定數之商爲衍數，即 $\dfrac{\theta}{A'} = B'C'D'\cdots\cdots X'Y'Z' = Y_1$

$\dfrac{\theta}{B'} = A'C'D'\cdots\cdots X'Y'Z' = Y_2$，$\dfrac{\theta}{C'} = A'B'D'\cdots\cdots X'Y'Z' = Y_3$；

將衍母減去定母（$A'$, $B'$, $C'$, …, $X'$, $Y'$, $Z'$）的倍數之餘數稱爲"奇"，以 $G_1$，$G_2$，$G_3$，…$X'$，$Y'$，$Z'$ 表示。

前面所說的 $\alpha$，$\beta$，$\gamma$，稱爲乘率，如何求出乘率呢？（即求 $\alpha$，使得 $\left|\dfrac{Y_1\alpha}{A'}\right. = 1$）

因 $A'$ 與 $Y_1$ 互質，一定可以存在 $u$ 及 $v$ 爲正整數，使得

$$Y_1 \times u - v \times A' = 1$$

在現代數學裏，我們可以用輾轉相除法很快求出，例如：求 $\alpha$，使得

$$\left. \frac{\alpha \cdot 65}{83} \right| = 1 )$$

$$83 = 65 \times 1 + 18 \Rightarrow 18 = 83 - 65 \times 1$$
$$65 = 18 \times 3 + 11 \Rightarrow 11 = 65 - 18 \times 3$$
$$18 = 11 \times 1 + 7 \Rightarrow 7 = 18 - 11 \times 1$$
$$11 = 7 \times 1 + 4 \Rightarrow 4 = 11 - 7 \times 1$$
$$7 = 4 \times 1 + 3 \Rightarrow 3 = 7 - 4 \times 1$$
$$4 = 3 \times 1 + 1 \Rightarrow 1 = 4 - 3 \times 1$$
$$3 = 1 \times 3$$

則 $1 = 4 - ( 7 - 4 ) = 2 \times 4 - 7$

$= 2 \times ( 11 - 7 ) - 7 = 2 \times 11 - 3 \times 7$

$= 2 \times 11 - 3 \times ( 18 - 11 ) = 5 \times 11 - 3 \times 18$

$= 5 \times ( 65 - 18 \times 3 ) - 3 \times 18 = 5 \times 65 - 18 \times 18$

$= 5 \times 65 - 18 \times ( 83 - 65 )$

$= 23 \times 65 - 18 \times 83$

故得 $\alpha = 23$

我們感興趣的是前人他們如何解決這問題？宋秦九韶的算法如下：

宋秦九韶擺開籌式，把 G 放在右上，把A′放在右下，左上置 1 ，左下讓它空著，如圖式樣：

| | |
|---|---|
| 1 | $G$ |
| 0 | $A'$ |

整個計算就在這個分上下左右排好的包含有四個數目的籌式中進行。現在抄錄秦九韶“大衍求一術”的算法原文如下：「先以右上除右下（即以 G 除 A′）所得商數（$q_1$）與左上一相生（相乘）入左下（加入左下，於此同時把A′改爲 G 除 A′時的餘數 $\gamma_1$）。然後乃以右行上下以少除多，遞互除之（輾轉推除，並不斷的用新的餘數去代替舊的餘數），所得商隨即遞互累乘，歸左行上下，須使右上末後奇一而止（直算至右上角的數變爲 1 乃止）。乃驗左上所得，以爲乘率（即$\alpha_i$）。」其算法可依下列各圖依次表示籌式上下左右四數歷次變化的情況：

（令 $\alpha_i = q_i \alpha_{i-1} + \alpha_{i-2}$ ，$\alpha_1 = q_1$ ，$\alpha_0 = 1$ ）

$$\boxed{\begin{matrix}1 & G\\ 0 & A'\end{matrix}} \rightarrow \boxed{\begin{matrix}1 & G\\ \alpha_1 & \gamma_1\end{matrix}} \rightarrow \boxed{\begin{matrix}\alpha_2 & \gamma_2\\ \alpha_1 & \gamma_1\end{matrix}} \rightarrow \boxed{\begin{matrix}\alpha_3 & \gamma_3\\ \alpha_2 & \gamma_2\end{matrix}} \rightarrow \cdots\cdots \rightarrow \boxed{\begin{matrix}\alpha_n & \gamma_n\\ \alpha_{n-1} & \gamma_{n-1}\end{matrix}}$$

用現代的算式，上圖的變化可記爲：

$$\begin{aligned}
A' &= Gq_1+\gamma_1 & \alpha_1 &= q_1 \quad \alpha_0=1\\
G &= \gamma_1 q_2+\gamma_2 & \alpha_2 &= q_2\alpha_1+\alpha_0\\
\gamma_1 &= \gamma_2 q_3+\gamma_3 & \alpha_3 &= q_3\alpha_2+\alpha_1\\
\gamma_2 &= \gamma_3 q_4+\gamma_4 & \alpha_4 &= q_4\alpha_3+\alpha_2
\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\gamma_{n-2}=\gamma_{n-1}q_n+\gamma_n \qquad \alpha_n=q_n\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2}$$

此時 $n$ 必須爲偶數。若 $\gamma_{n-1}=1$（$n-1$ 爲奇數）時，秦九韶用 1 除 $\gamma_{n-2}$ 令商爲 $\gamma_{n-2}-1$，則第 $n$（偶數）次的 $\gamma_n$ 仍爲 1，即

$$\gamma_{n-3}=\gamma_{n-2}\,q_{n-1}+\gamma_{n-1} \qquad (\gamma_{n-1}=1)$$

$$\gamma_{n-2}=\gamma_{n-1}\times(\gamma_{n-2}-1)+\gamma_n \qquad (\gamma_n=1)$$

故上例求 $\alpha$，使 $\left|\dfrac{\alpha\cdot 65}{83}\right.=1$ 可用下表求出

$$\boxed{\begin{matrix}1 & 65\\ 0 & 83\end{matrix}} \rightarrow \boxed{\begin{matrix}1 & 65\\ 1 & 18\end{matrix}} \rightarrow \boxed{\begin{matrix}4 & 11\\ 1 & 18\end{matrix}} \rightarrow \boxed{\begin{matrix}5 & 7\\ 4 & 11\end{matrix}} \rightarrow \boxed{\begin{matrix}9 & 4\\ 5 & 7\end{matrix}} \rightarrow \boxed{\begin{matrix}14 & 3\\ 9 & 4\end{matrix}} \rightarrow \boxed{\begin{matrix}23 & 1\\ 14 & 3\end{matrix}}$$

要證明秦九韶的算法並不很難。

設 $u_2=q_2$，$u_3=q_3u_2+1$，$u_4=q_4u_3+u_2$；………

$\therefore$ $u_n=q_nu_{n-1}+u_{n-2}$

依術得

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= A-q_1G=A-\alpha_1G\\
\gamma_2 &= G-q_2\gamma_1=G-q_2(A-\alpha_1G)\\
&= (\alpha_1+1)G-q_2A\\
&= \alpha_2G-u_2A\\
\gamma_3 &= \gamma_1-q_3\gamma_2=(A-\alpha_1G)-q_3(\alpha_2G-u_2A)\\
&= (1+u_3q_3)A-(\alpha_1+q_3\alpha_2)G\\
&= u_3A-\alpha_3G\\
\gamma_4 &= \gamma_2-q_4\gamma_3=(\alpha_2G-u_2A)-q_4(u_3A-\alpha_3G)\\
&= (\alpha_2+q_4\alpha_3)G-(u_2+q_4u_3)A
\end{aligned}$$

$$= \alpha_4 G - u_4 A$$

……………………………………………………

當 $n$ 為偶數

$$\gamma_{n-1} = u_{n-1} A - \alpha_{n-1} G$$

$$\gamma_n = \alpha_n G - u_n A$$

即 $\left|\frac{\alpha_n G}{A}\right. = \left|\frac{\gamma_n + u_n A}{A}\right. = \gamma_n$

若 $\gamma_n = 1$，則 $\left|\frac{\alpha G}{A}\right. = 1$，$\left|\frac{\alpha \gamma}{A}\right. = 1$

"孫子問題"不僅是一個有趣的算術問題，其應用亦不少。中國古代曆法的推算與"孫子問題"就有密切的關係。假如在$N$年之前，這年多至夜半時，日月五星曾經在同一個方位上（即所謂日月合璧，五星連珠）。可以把這時日月五星的位置看作是一個共同的起點。日月五星的運動週期各不相同，所以在$N$年以後的某一時刻（M月P日Q時）進行觀測；它們在各自軌道上所佔據的位置是不同的。若設$A_1$，$A_2$，$A_3$，……分別為日月五星的運行週期，用它們分別除N年M月P日Q時所得之餘數$\gamma_1$，$\gamma_2$，……剛好是日月五星從現在起點到軌道上共同起點間的距離。反之，若已知$\gamma_1$，$\gamma_2$，……則根據"孫子問題"的解法，即可求出總年數N年來。把這樣推算得來的上古的一年稱為"上元"。而N則稱為"上元積年"。現在我們還不知"上元積年"的推算究竟是何時，但在祖冲之"大明曆"（西元462年）中，推算相當複雜，其中要考慮的因素有十一個之多，也就是要解十一個聯立一次同餘式的N。在曆法推算中，各行星的週期（$A_1$，$A_2$，……）又都不是整數，因而$\alpha_1$，$\alpha_2$……就不是很容易求得的。很可惜當年天文家的算法沒有流傳下來。元朝的授時曆其算法只取近似值，不再推算"上元積年"。明朝頒行的大統曆基本上仍沿用授時曆，也廢去了"上元積年"的算法。這在曆法上可以說是一大改進，但"大衍求一術"也逐漸失傳了。

在代數上，將分數化成連分數（在埃及數學遺下的資料中，有相當多類似的連分數問題）及不定方程式等許多問題與大衍求一術有關聯，不一一詳述。深望有志於此者將其發揚光大。

註：1. 古稱正中十五為"上元"，所以"上元"暗指"15"。

2. 古稱"各至百六是清明"，寒食是清明前一日，所以"寒食清明"暗指"105"。

參考文獻：


1. 李儼　中算史論叢，臺灣商務印書局出版。

2. 李儼　中國古代數學簡史

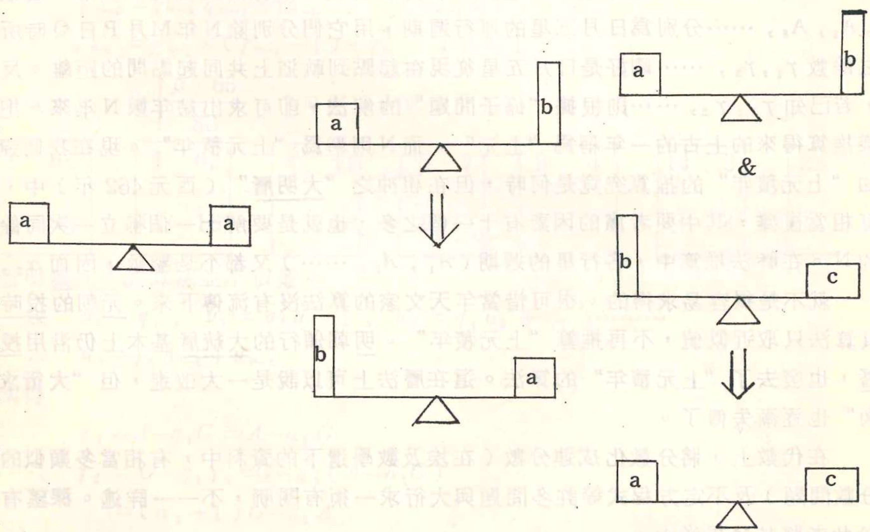
3. 朱文鑫　天文學小史，臺灣商務印書局出版。
4. 程發軔　春秋曆法
5. 孔斷涵刻　載震校　算經十書，臺灣商務印書局出版。
6. 數論導引　先登 出版社

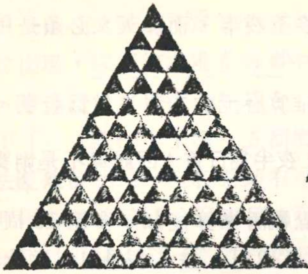
## 等價關係（Equivalence Relation）

㈠反身性（reflexive）　$\forall a, a \sim a$

㈡對稱性（symmetric）　若 $a \sim b$ 則 $b \sim a$

㈢遞移性（transitive）　若 $a \sim b$, 且 $b \sim c$ 則 $a \sim c$





# 大衍求一術 及古曆會積

張永寬、指導老師：洪萬生

## 前　言

從研究科學史的角度來觀看中國古代的科學，我們可以發現一大特徵，即中國科學的發展是基於社會上的各種需要而促成的，是屬於「外鑠性」發展的最佳例子。素有「科學之母」之稱的數學，在中國當然也不例外，幾乎完全是以實用爲主（註一），而其應用範圍大致可分爲兩大類，一爲籌算制度，一爲天文曆法。本文所要談到的便是宋秦九韶在他的數學九章（一稱數書九章）中的「大衍求一術」及它在曆法上的應用，並且將連分數做一簡單的討論。

## 中國的曆法

世界各國所採用的曆法，有以太陽爲準的陽曆，有以太陰月爲準的陰曆，前者如目前各國通用的西曆，後者如回回曆。在中國則兼採陰陽二曆而獨具一格。清梅文鼎說：「朔望弦晦，易見者也；節氣過宮，難見者也。敬授人時，則莫用於易見之事，而但爲之閏月以通之，則四時不忒。」中國向來以農立國，對於四季寒暑的變化要能確實掌握住，農事才得以順利進行，因此節氣的預測成爲當時農業社會最迫切的需要。然而，季節的變化不似月亮的圓缺那麼明顯易見，所以民間一切文化、習俗、宗教儀式皆以月亮的變化爲主，若只採陽曆則不能預示朔望，只採陰曆則農事無所依，中國的曆法便是在這兩種不同的需求下而兼採陰陽二曆。

古人以夜半爲日首，朔旦爲月首，冬至爲歲首；月圓至月圓爲一月，稱爲朔實；以冬至到冬至或夏至到夏至爲一歲，稱爲歲實。因朔實與歲實不相等，所以陰曆和陽曆無法相齊，因此在制定曆法時便要設法消除這個不協調的現象。他們以冬至那天恰逢月圓作爲治曆的根本，再加上中國特有的干支紀日法，便構成了一部兼具陰陽二曆的曆法。朱文鑫說：「古之治曆，首重曆元，必以甲子朔旦夜半冬至齊同，爲起算之端，當斯之際日月五星又須同度，如合璧連珠之象，謂之上元」（見

天文學小史）因此一部曆法的起算之點，必在某年的多至夜半，而那天又必須是甲子日且正逢月圓。

現在以古六曆（黃帝、顓頊、夏、殷、周、魯）推算曆元的方法來做爲說明。這六曆皆以 $365\frac{1}{4}$ 日爲歲實，多至爲歲首，朔旦爲月首，夜半爲日首。因歲實不是朔實的整數倍，所以一年之後多至不復在朔旦，經古人實際觀測推算後知，多至19周恰與月朔235周日數相同，以1年12月計，19年共228月，差7個月朔，因此便19年置7閏（參見例四），則19年後多至與朔旦又相遇，稱爲章。

1章＝19年7閏＝235月＝6939.75日

1章之後至朔齊同，但19年的積日仍有奇零（即不滿一整數日的餘數），所以至朔同日而不同時，若取四章爲蔀，則多至朔旦夜半齊同。

1 蔀＝4章＝76年＝940月＝27759日

又因一蔀之後多至不一定在甲子日（1蔀＝27759日＝462×60日＋39日）於是取二十蔀爲一紀。

1紀＝20蔀＝1520年＝555080日

但一紀之後，干支紀年仍不爲甲子（1紀＝1520年＝25×60年＋20年），又取三紀爲一元，

1元＝3紀＝4560年＝1665240日

則一元後又回到甲子歲甲子日多至朔旦夜半齊同，而稱距今N年前的第一個甲子歲其甲子日多至朔旦夜半齊爲曆元，N則稱爲積年。

簡單的講，推算曆元就是求歲、月、日、時各週期的最小公倍數。古人於曆元之外還求上元，即除了日、月之外五星（金、木、水、火、土）還須在同一方位上，所謂「日月合璧，五星連珠」是也，因此推算之時尚須加人五星的週期與曆元求最小公倍數。然而這些週期又都只是近似值，經過了幾百幾千年後便累積了相當的誤差而與天象不合，此時便需要將原曆加以修改以符天象。歷史上改曆的次數非常多，而每改一次便得依其最新的各種數據求曆元與上元，朱文鑫說：「(漢)後之曆家，顚倒於上元積年間，埋沒於各種週期之內，以求合於算數而冀有驗於天象，一部中國曆法實可謂演紀上元之算史也。」不過由於計算過程非常繁瑣，曆書多不記載演算的方法，直到了宋秦九韶才將這些方法有條理的寫在他的數學九章中，並命名爲「大衍求一術」。

## 大衍求一術

**起源**：大衍求一術最早是起源於孫子算經中的「韓信點兵」問題：「今有物不知其數，三三數之餘二，五五數之餘三，七七數之餘二，問數幾何？答曰廿三」這

是一個一次聯立不定方程式的問題，在孫子算經以後的數學文獻中，此類問題不斷的出現，宋周密志雅堂雜鈔中並將它的解法寫成詩歌：「三歲孩兒七十稀，五留廿一事尤奇，七度上元重相合，寒食清明便可知。」明程大位算法統宗也載有孫子歌：「三人同行七十稀，五樹梅花廿一枝，七子團圓正半月，除百零五便得知。」解法雖然都相同，但名稱却有不同，周密稱爲鬼谷算、隔牆算，宋楊輝續古摘奇算法中則稱爲蕦管術，民間則有孔明點燈的說法。由此可知「不定解析」的研究，在中國發源很早（孫子算經成於四世紀左右）且一直爲中國的數學家所重視，一再的在數學文獻中提到它們。

現在我們來研究一下古人對「韓信點兵」問題的解法，希望由此導出一個此類問題的一般解法。進而看出大衍求一術如何解決曆法上求積年的問題。根據上述的兩首歌謠，此問題的解法是「以70乘上答數用3除之的餘數（即三三數之餘二的二），21乘上答數用5除之的餘數（即3），15乘上答數用7除之的餘數（即2），求三積的和爲233，然後用105除之，得到餘數23即爲所求。」列爲算式如下：

$$70\times 2+21\times 3+15\times 2=233$$

$$233\div 105=2\cdots\cdots\text{餘 }23$$

此處我們有一個疑問，前人的算法是否具有一般性，亦即這是否只是一個特殊解法而已。答案是肯定的，具有一般性。首先我們將問題用同餘式的符號寫出，設 $n$ 爲所求，則我們要做的便是求下列一次聯立同餘式的解：

$$(1)\quad \begin{cases} n \equiv 2 \pmod 3 \\ n \equiv 3 \pmod 5 \\ n \equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$$

根據同餘式的性質，若已知：

$$(2)\quad \begin{cases} 70 \equiv 1 \pmod 3 \\ 21 \equiv 1 \pmod 5 \\ 15 \equiv 1 \pmod 7 \end{cases} \text{ 則 } \begin{cases} 70\times 2 \equiv 2 \pmod 3 \\ 21\times 2 \equiv 3 \pmod 5 \\ 15\times 2 \equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (3)\quad \begin{cases} 70\times 2+3k_1 \equiv 2 \pmod 3 \\ 21\times 3+5k_2 \equiv 3 \pmod 5 \\ 15\times 2+7k_3 \equiv 2 \pmod 7 \end{cases} \quad k_1,\ k_2,\ k_2\in Z$$

$$\begin{aligned} \text{因爲 } 233 &= 70\times 2+21\times 3+15\times 2 \\ &= 70\times 2+(21+5\times 2)\times 3 \\ &= 21\times 3+(14\times 2+3\times 2)\times 5 \\ &= 15\times 2+(10\times 2+3\times 3)\times 7 \end{aligned}$$

所以233滿足(3)式中的每一子式，因此爲(1)式的一個解，而23則爲滿足(1)式

的最小正整數解。若我們將(1)式中的 2，3，2 改為自然數 $a$，$b$，$c$ 則同樣的道理可得：

$$\begin{cases} 70\times a+3k_1\equiv a\ (mod\ 3) \\ 21\times b+5k_2\equiv b\ (mod\ 5) \\ 15\times c+7k_3\equiv c\ (mod\ 7) \end{cases}$$

因此 $70a+21b+15c+105\theta$，$\theta$ 為整數，便為此新聯立同餘式的通解。故我們知道，古人的算法乃是有理論根據的，且可以適用到更廣泛的範圍。然而上述步驟中，整個關鍵所在的(2)式中，70、21、15 三數又是怎麼想出來的呢？我們不妨將這問題改寫成下面三個子題：

(a)何數乘上 35（$=5\times 7$）再除以 3 餘數是 1？

(b)何數乘上 21（$=7\times 3$）再除以 5 餘數是 1？

(c)何數乘上 15（$=3\times 5$）再除以 7 餘數是 1？

事實上，若使用大衍求一術便可求出它們的答案為 2，1，1 如此，則「韓信點兵」的問題便完全解決了。或許有人會說 2，1，1 這麼小的數，隨便湊都湊得出來，幹麼用什麼「大衍求一術」來唬人呢？果真是這樣的話，那麼不妨請找出這個問題的答案：「何數乘上 377873 再除以 499067 餘數是 1？」

**中國剩餘定理**：剛剛我們已將(1)式做了部份的推廣，餘數為任意的 $a$，$b$，$c$ 時仍可用同樣的方法求解。現在請看這個定理：

定理：

$$(4)\quad \begin{cases} X\equiv a\quad (mod\ m_1) \\ X\equiv b\quad (mod\ m_2) \\ X\equiv c\quad (mod\ m_3) \end{cases}$$ 其中 $m_1$，$m_2$，$m_3$ 兩兩互質，

則(4)式對「模（modular）」$Y=m_1$，$m_2$，$m_3$ 有唯一解。這個定理稱為「中國剩餘定理」，因為同餘式的理論是中國首創的，故洋人特冠以「中國」二字。它告訴我們(4)式有唯一解，而這個解的找法仍是(1)式所用的方法，先設法找到三個自然數 $\ell_1$，$\ell_2$，$\ell_3$ 使得 $\ell_1 m_2 m_3\equiv 1\ (mod\ m_1)$，$\ell_2 m_1 m_3\equiv 1\ (mod\ m_2)$ $\ell_3 m_1 m_2\equiv 1\ (mod\ m_3)$ 則 $Z=a\ell_1 m_2 m_3+b\ell_2 m_1 m_3+c\ell_3 m_1 m_2+\theta m_1 m_2 m_3$ 便為(4)式的通解，其中 $\theta$ 為任意整數。在前面我們談到曆法家求算上元、曆元的問題，假設某年距上元共 $N$ 年，則稱 $N$ 為上元積年或積年，因為上元年為甲子歲冬至那天朔旦夜半齊同，日月五星又在同一方位上，我們便可將它們當時所在的位置看成一個共同的起點。設各星周期為 $m_1$，$m_2$，$m_3$，……，$m_n$，因為各星運轉週期不一，所以當某年 $x$ 月 $y$ 日 $z$ 時進行觀測時，各星所在位置便有不同，若以 $m_1$，$m_2$，…，$m_n$ 分別除 $N$ 年 $x$ 月 $y$ 日 $z$ 時，所得餘數分別為 $r_1$，$r_2$，…，$r_n$，則各星從現在觀測到的位置到它們共同起點間的距離，分別與各星對應的 $r_i$ 成一一對應的關係。這情形就如同繞操場跑步一樣，大家從同一處出發，卻因各人速度不一而所在位

置便有不同。因此曆法與天象之間的關係乃可以建立起來。將 $N, m_i, r_i$ 用算式寫出，求積年 $N$ 便是求下列一次聯立同餘式的最小正整數解：

$$(5)\quad \begin{cases} N \equiv r_1 \pmod{m_1} \\ N \equiv r_2 \pmod{m_2} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ N \equiv r_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

我們可以很容易利用數學歸納法知道，中國剩餘定理對於 $n$ 個同餘式時仍然成立，現在將(4)式和(5)式做一比較，它們外表上看起來似乎是一樣，其實(4)式中的 $m_1, m_2, m_3$ 爲兩兩互質，而(5)式中 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 所代表的各星週期往往不是整數，當然就談不上是不是兩兩互質了，因此不能保證(5)式有解。不過秦九韶却在他的數學九章中告訴我們，他可以找到一個恆等於(5)式而具有(4)式條件的聯立同餘式，因此他只要利用(4)式的方法解這個新的聯立式，便求得了所要的積年 $N$。至於要如何找這個聯立式，我們在下面將一併談到。

**秦九韶與大衍求一術**：秦九韶字道古，南宋人，祖籍山東魯郡。當蒙古軍圍攻普州時，他被推爲民兵首領，城陷後與家人避居江浙道湖州。在江浙的日子，曾趁便訪學曆法、數學於掌太史的官吏，以他聰明的才智，沒有多久便完全學會星象、音律、算術、營造的方法。他一生最大成就在於數學方面，爲宋元一代四大數學家之一，而以數學九章爲其代表作，其中以大衍、天時、田域三章在數論，方程式論（尤其高次方程式的求根方法）幾何學等方面的貢獻最大。他最爲人知的就是「大衍求一術」，此術並非他首創的，在他之前的幾位曆算家已經能夠熟練的應用求一術來解決曆法上的問題，但直到秦九韶才將它發揚光大而作完整有系統的解說，並加以命名。

秦九韶在解決積年問題時，是利用下面這個辦法找出一個與(5)式恆等的聯立式：若 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 爲自然數，且滿足下面三個條件。

(i) $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 兩兩互質。

(ii) $t_i$ 皆爲 $m_i$ 的因數， $i = 1, 2, 3, \cdots\cdots, n$

(iii) $t_1, t_2 \cdots, t_n$ 的最小公倍數 $t_1 t_2 \cdots t_n$ 與 $m_1, m_2, \cdots m_n$ 的最小公倍數相等。

則滿足

$$(6)\quad \begin{cases} N \equiv r_1 \pmod{t_1} \\ N \equiv r_2 \pmod{t_2} \\ \vdots \\ N \equiv r_n \pmod{t_n} \end{cases}$$

的每一個解皆能滿足(5)式（註二）

他將 $m_i$ 稱爲問數，然後把他們分爲整數（元數）小數（收數）分數（通數）$10^n$ 的倍數（復數）。問數爲元數時，先「兩兩連環求等」求它們的最小公倍數，但因

他的目的主要在求一組兩兩互質的正整數（定數）所以方法上又要稍加限制，如「約奇弗約偶」等。

例一數學九章「蓍卦發微」題中，元數為1，2，3，4其中2，4不互質。一般求最小公倍數是

$$\begin{array}{r|l} 2 & 1,2,3,4 \\ \hline & 1,1,3,2 \end{array} \qquad \therefore\ 2\times1\times1\times3\times2=12$$

但在「約奇弗約偶」的限制下便要如此：

$$\begin{array}{l|l} 1,2,3,4 & 2 \\ \hline 1,1,3,4 & \end{array} \qquad \therefore\ 1\times1\times3\times4=12$$

（請注意圓圈中的數，1為奇數，2為偶數）因此取定數為1，1，3，4。

若問數為小數時，則各數同乘 $10^n$ 成為整數，再以整數的方法求定數；若問數為分數時，則將各數通分後，拿分子以整數的方法求定數；若問數為 $10^n$ 的倍數，提出公因數後，以整數的方法求定數。

例二「古曆會積」題中，問數為 $365\frac{1}{4}$ 日，$29\frac{499}{940}$ 日，60日

通分得 $\dfrac{1373340}{3760}$，$\dfrac{111036}{3760}$，$\dfrac{225600}{3760}$

取分子　1373340，111036，225600

提公因數12　114445，9253，18800

$$\begin{array}{lll|l} 111445, & 9253, & 18800 & 235 \\ \hline 487, & 9253, & 18800 & 487 \\ \hline 487, & 19, & 18800 & \end{array}$$

取定數　487，19，18800 × 12 = 225600

（此處12之所以和18800相乘是為了符合兩兩互質的條件）

從上述的方法，我們已經可以從(5)式中找到它的恒等式(6)式，現在我們將要用大衍求一術來求(6)式的解，亦即找出(5)式的解。為了方便說明，我們只討論 $n=3$ 的情形，但這方法對一般 $n$ 仍是成立的。首先令 $M=t_1\cdot t_2\cdot t_3$ 稱為衍母，$\dfrac{M}{t_1}$，$\dfrac{M}{t_2}$，$\dfrac{M}{t_3}$ 稱為衍數，以 $t_1$，$t_2$，$t_3$ 分別除衍數得餘數為 $G_1$，$G_2$，$G_3$ 稱為奇數，則 $\dfrac{M}{t_1}\equiv G_1\ (mod\ t_1)$，$\dfrac{M}{t_2}\equiv G_2\ (mod\ t_2)$ $\dfrac{M}{t_3}\equiv G_3\ (mod\ t_3)$ 大衍求一術曰：「置奇（$G$）右上，定（$t$）居右下，立天元1於左上」依此可列式如下：

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1 & G \\ 0 & t \end{array}}$$

（左下本為空位，現在補以零）

「先以右上 $(G)$ 除右下 $(t)$，所得商數 $(Q_1)$ 與左上 1 相生，入左下。」此時設新餘數爲 $R_1$，取代 $t$ 而置於右下，並令 $q_1 = Q_1 \times 1 + 0$ 置於左下

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1 & G \\ & \\ q_1 & R_1 \end{array}} \qquad t = Q_1 G + R_1 \quad , \quad q_1 = Q_1 \cdot 1 + 0$$

「然後乃以右行上下以少除多（以 $R_1$ 除 $G$）遞互除之，所得商數隨即遞互累乘歸左上下。」次右邊 $R_1$ 除 $G$ 得商數 $Q_2$，餘數 $R_2$，以 $Q_2$ 與左邊 $q_1$ 相乘加左上 1 置於左上，以 $R_2$ 置於右上。

$$\boxed{\begin{array}{ll} q_2 & R_2 \\ & \\ q_1 & R_1 \end{array}} \qquad G = Q_2 R_1 + R_2 \quad , \quad q_2 = Q_2 q_1 + 1$$

再以同樣的方法，右邊的兩數不斷輾轉相除，並以新餘數代替原被除數而所得商數與除數左邊的數相乘加上被除數左邊的數，置於被除數左邊。

$$\boxed{\begin{array}{ll} q_2 & R_2 \\ & \\ q_3 & R_3 \end{array}} \qquad R_1 = Q_3 R_2 + R_3 \quad , \quad q_3 = Q_3 q_2 + q_1$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} q_4 & R_4 \\ & \\ q_3 & R_3 \end{array}} \qquad R_2 = Q_4 R_3 + R_4 \quad , \quad q_4 = Q_4 q_3 + q_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

「須使右上末後奇一而止，乃驗左上所得以爲乘率，或奇數已見單一者，便爲乘率。」

$$\boxed{\begin{array}{ll} q_n & R_n \\ & \\ q_{n-1} & R_{n-1} \end{array}} \qquad \begin{array}{l} R_{n-2} = Q_n R_{n-1} + R_n \\ \qquad\qquad , \quad q_n = Q_n q_{n-1} + q_{n-2} \\ R_n = 1 \end{array}$$

以此法求到最後得 $R_n = 1$，若 $n$ 爲偶數時，則 $q_n$ 即爲滿足 $k\dfrac{M}{t} \equiv 1 \pmod{t}$ 的 $k$，稱爲乘數；若 $n$ 爲奇數時，則取 $k = t - q_n$。因爲這方法是「奇一而止」故得「求一」之名，而秦九韶又將它和易經繫傳辭中的「大衍之數」附會起來，才有今日的名稱——大衍求一術。至於爲何 $q_n$ 或（$t - q_n$）就是我們所要找的 $k$ 呢？爲了避免重覆，請讀者參考陳碧眞的大衍求一術文中的敘述，此處不再說明。

最後「置各乘率 $(k)$ 對乘衍數（$\dfrac{M}{t}$）得泛用（$k\dfrac{M}{t}$）併泛課衍母多一者爲正用，或泛多衍母倍數者，驗元數奇偶同類者，損其半（而正同）」（註三）「然後以

其餘（$r$）各乘正用爲各總，併總，滿衍母去之，不滿爲所求率數（$N$）」亦即根據(4)式的解法，因爲 $k_1\cdot t_2\cdot t_3\equiv 1 \pmod{t_1}$，$k_2\cdot t_1\cdot t_3\equiv 1 \pmod{t_2}$ $k_3\cdot t_1\cdot t_2\equiv 1 \pmod{t_3}$ 則 $N'=r_1\,k_1\,t_2\,t_3+r_2\,k_2\,t_1\,t_3+r_3\,k_3\,t_1\,t_2$ 爲滿足(6)式的解，若 $N'>M$，則取適當的整數 $\theta$ 使得 $M>N=N'-\theta M>0$ 則 $N$ 卽爲所求的積年；若 $M>N$ 則取 $N=N'$ 爲所求。

例三：古曆會積

「問四分術，歲實 $365\frac{1}{4}$ 日，朔策 $29\frac{499}{940}$ 日，甲子60日。假令十一月天正朔甲戌日 $\frac{410}{940}$ 日，冬至丁酉日 $\frac{3}{4}$ 日，欲求氣朔甲子一會積年，積月，及歷過未至年數各幾何？答曰：一會積年1512，積月18800，積日555180」（註四）。

解：問數 $365\frac{1}{4}$，$29\frac{499}{940}$，60

根據例二，得定數（$t$）487（氣定），19（朔定），225600（紀定）

衍母（$M$）　$487\times19\times225600=2087476800$

衍數（$\frac{M}{t}$）　4286400（氣衍），109867200（朔衍），9253（紀衍）

奇數（$G$）　313（氣奇），4（朔奇），9253（紀奇）

乘率（$k$）：利用大衍求一衍求出

(i) $\begin{array}{|cc|}\hline 1 & 313\\ 0 & 487\\ \hline\end{array}\rightarrow\begin{array}{|cc|}\hline 1 & 313\\ 1 & 174\\ \hline\end{array}\rightarrow\begin{array}{|cc|}\hline 2 & 139\\ 1 & 174\\ \hline\end{array}\rightarrow\begin{array}{|cc|}\hline 2 & 139\\ 3 & 35\\ \hline\end{array}\rightarrow\begin{array}{|cc|}\hline 11 & 34\\ 3 & 35\\ \hline\end{array}$

$\rightarrow\begin{array}{|cc|}\hline 11 & 34\\ 14 & 1\\ \hline\end{array}$　$R_n=1$ 時，$n$ 爲奇數，故取

氣乘率 $=487-14=473$

(ii) $\begin{array}{|cc|}\hline 1 & 4\\ 0 & 19\\ \hline\end{array}\rightarrow\begin{array}{|cc|}\hline 1 & 4\\ 4 & 3\\ \hline\end{array}\rightarrow\begin{array}{|cc|}\hline 5 & 1\\ 4 & 3\\ \hline\end{array}$　朔乘率 $=5$

(iii) $\begin{array}{|cc|}\hline 1 & 9253\\ 0 & 225600\\ \hline\end{array}\rightarrow\begin{array}{|cc|}\hline 1 & 9253\\ 24 & 3528\\ \hline\end{array}\rightarrow\begin{array}{|cc|}\hline 49 & 2197\\ 24 & 3528\\ \hline\end{array}\rightarrow\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\begin{array}{|cc|}\hline 14068 & 4\\ 10679 & 13\\ \hline\end{array}\rightarrow\begin{array}{|cc|}\hline 14068 & 4\\ 52883 & 1\\ \hline\end{array}$　取紀乘率 $=225600-52883$

$=172717$

泛用（$k\frac{M}{t}$）　氣泛用　$473 \times 4286400 = 2027467200$

朔泛用　$5 \times 109867200 = 549336000$

＋　紀泛用　$172717 \times 9253 = 1598150401$

$M = 2087476800 < 4174953601$

正用（$Z$）　氣正用＝氣泛用－$\frac{1}{2}$衍母＝$2027467200 - 1043738400 = 983728800$

朔正用＝朔泛用＝$549336000$

紀正用＝紀泛用－$\frac{1}{2}$衍母

$= 1598150401 - 1043738400$

$= 554412001$　（註五）

餘數（$r$）　因爲正朔甲戌日$\frac{410}{940}$日，上距甲子$10\frac{410}{940}$日＝$\frac{39240（朔骨）}{3760（日法）}$日多至丁

酉日$\frac{3}{4}$日，上距甲子$33\frac{3}{4}$日＝$\frac{126900（氣骨）}{3760（日法）}$日，故得氣餘數＝0

朔餘數＝$126900 - 39240 = 87660$　（註六）

紀餘數＝$126900$

總數（$rz$）　氣　總＝$0 \times 983728800 = 0$

朔　總＝$87660 \times 549336000 = 48154793760000$

＋　紀　總＝$126900 \times 554412001 = 70354882926900$

$1531274100 + 56771 \times 2087476800 = 118509676686900$

故曆過年＝$\frac{1531274100}{1373340} = 1115$

$1373340 = 940 \times (365 \times 4 + 1)$

一會積年＝$\frac{2087476800}{1373340} = 1520$

一會積月＝$\frac{2087476800}{111036} = 18800$

$111036 = 4 \times (29 \times 940 + 499)$

一會積日＝$\frac{2087476800}{225600} = 555180$

$225600 = 4 \times 940 \times 60$

未至年數＝$1520 - 1115 = 405$　（註七）

現在我們反過來推算原來的干支時日與原題是否相合：

$$積日 = 365\frac{1}{4} \times 1115 = 407253\frac{3}{4} 日$$

$$407253\frac{3}{4} \div 60 = 6787 \cdots\cdots 餘\ 33\frac{3}{4}$$

故知冬至距甲子日 $33\frac{3}{4}$日，其干支紀日爲丁酉日$\frac{3}{4}$日。又（$407253\frac{3}{4} \times 940$）$\div$（$29 \times 940 + 499$）$= 13790 \cdots\cdots$ 餘 $23\frac{295}{940}$ 故平朔距冬至前日數爲 $23\frac{295}{940}$日，因此 $33\frac{3}{4} - 23\frac{295}{940} = 10\frac{410}{940}$日爲平朔後距甲子日數，而甲子後第10天爲甲戌日，所以平朔在甲戌日$\frac{410}{940}$日，完全與原題吻合。

上面的例題乃是最基本的求積年問題（曆元積年），因它只考慮日、月、甲子三個週期。縱使如此，我們計算起來仍然非常繁瑣，更何況古人又缺少一套完善的符號表示法，以幫助計算，更增加了其困難性。可以想見的，若求上元積年，需要考慮的週期增多了，那麼計算的繁重將甚於前者數倍。據說當年祖沖之在大明曆中所要考慮的因素多達11個，眞令人欽佩他居然有如此好的耐心與細心，將整個答案求出來而沒有錯誤。

## 連分數

在談到連分數前，請大家先看看由大衍求一術所得到的這組算式：

$$(7)\quad \begin{cases} t = Q_1 G + R_1 \\ G = Q_2 R_1 + R_2 \\ R_1 = Q_3 R_2 + R_3 \\ \vdots \\ R_{n-2} = Q_n R_{n-1} + R_n \\ R_n = 1 \end{cases}$$

從這裏我們可以看出大衍求一術其實就是歐幾里得的輾轉相除法，不過後者最初是用來求兩數的最大公因數，而前者却用來解決一次聯立同餘式的問題。而我們在此提到連分數，便是因爲它在本質上也是用輾轉相除法得到的，且在曆法上，連分數也有很大的用處。

連分數最早是出現於五世紀的印度，Aryabhata利用連分數於西元476年成功的解決了一次不定方程式 $ax + by = c$，而此方程式又與某些星象的重要現象互

相對應，由這裏可以看出連分數與天文曆法間的密切關係。若我們將(7)式改寫如下：

$$\begin{cases} \dfrac{t}{G} = Q_1 + \dfrac{R_1}{G} \\[2ex] \dfrac{G}{R_1} = Q_2 + \dfrac{R_2}{R_1} \\[2ex] \dfrac{R_1}{R_2} = Q_3 + \dfrac{R_3}{R_2} \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \dfrac{R_{n-2}}{R_{n-1}} = Q_n + \dfrac{R_n}{R_{n-1}} = Q_n + \dfrac{1}{R_{n-1}} \\[2ex] \dfrac{R_{n-1}}{R_n} = \dfrac{R_{n-1}}{1} = R_{n-1} \end{cases}$$

則 $\dfrac{t}{G} = Q_1 + \dfrac{R_1}{G} = Q_1 + \dfrac{1}{\dfrac{G}{R_1}} = Q_1 + \dfrac{1}{Q_2 + \dfrac{R_2}{R_1}}$

$$= Q_1 + \cfrac{1}{Q_2 + \cfrac{1}{Q_3 + \cfrac{R_3}{R_2}}} = \cdots\cdots\cdots$$

$$= Q_1 + \cfrac{1}{Q_2 + \cfrac{1}{Q_3 + \ddots + \cfrac{1}{R_{n-1}}}}$$

因此對於任意有理數，我們均可利用大衍求一術將它寫成連分數的型式，通常為方便起見，記為 $\dfrac{t}{Q} = Q_1 + \dfrac{1}{Q_2 +} \dfrac{1}{Q_3 +} \cdots\cdots \dfrac{1}{+ Q_{n-1} +} \dfrac{1}{R_{n-1}}$ 或〔$Q_1, Q_2, \cdots\cdots, Q_{n-1}, R_{n-1}$〕設 $a_0 + \dfrac{1}{a_1 +} \dfrac{1}{a_2 +} \cdots\cdots \dfrac{1}{+ a_n}$ 為任意的有窮連分數，其中 $a_i \in N$，$a_i \neq 0$，$i = 1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ 則

$$[a_0] = a_0 = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}$$

$$[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$$

$$[a_0, a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 +}\ \frac{1}{a_2} = \frac{a_2 a_1 a_0 + a_2 + a_0}{a_2 a_1 + 1} = \frac{p_2}{q_2}$$

……………

$$[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 +}\ \frac{1}{a_2 +} \cdots\cdots \frac{1}{+\, a_n} = \frac{p_n}{q_n}$$

此時稱 $\frac{p_n}{q_n}$ 爲此連分數的第 $n$ 個漸近分數，利用這個定義我們來看下面的例子：

例四：陰曆的閏月

前面提過，因爲太陽、月亮的週期無法相齊，所以一年12個月外尚有10多天無法安排，因此古人便以置閏的辦法來安插它們，但何者才是正確（或最近似）的閏率，則一直困擾者曆代的曆算家。劉宋的大明曆（西元463年）爲祖沖之所創，它以365.242814日爲歲實，以29.530591日爲朔實，而定閏率爲 $\frac{144}{391}$。因爲 $\frac{365.242814}{29.530591} = 12\frac{1087592}{29530591}$，將 $\frac{1087592}{29530591}$ 展成連分數爲 $\frac{1087592}{29530591} = \frac{1}{2+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{20}$ ………則得其前面六個最佳漸近分數爲 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{3}{8}$，$\frac{4}{11}$，$\frac{7}{19}$，$\frac{144}{391}$。請看第六個漸近分數爲 $\frac{144}{391}$，恰與祖沖之的閏率相同，可見他的計算是相當準確的。又第五個漸近分數爲 $\frac{7}{19}$，恰爲三統曆（西元前7年，劉歆創）的閏率，由此可見大明曆要比三統曆來的進步。

例五：月蝕的週期是多少？

所謂朔望月就是相同的月面位相隔的時間，爲29.5306日，交點月就是月球在它軌道上從「交點」（月球繞地球軌道與地球繞太陽軌道的交點）開始繞地球一周再回到這個交點所需的時間，等於27.2123日，當朔望月與交點月一點時便產生月蝕，故其週期可如此推算：將 $\frac{29.5306}{27.2123}$ 展開 $\frac{29.5306}{27.2123} = 1 + \frac{1}{11+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{4+}\ \frac{1}{2+}$ ……考慮第六個漸近分數 $[1, 11, 1, 2, 1, 4] = \frac{242}{223}$，即經223個朔望月，或242個交點月便產生一次月蝕，故月蝕的週期爲 $223 \times 29.5306$ 日＝

6585 天 = 18 年零 11 天。

## 結　語

中國曆法的演進到了元郭守敬又有了一大改變，他首先廢棄上元積年法，改以元至元辛巳歲爲曆元，一切根據實際觀測所得的資料，這方法當然比用推算的來得準確，因此上元積年法便逐漸被取代，而大衍求一術也因失去了它的最大應用價值，漸漸被人淡忘了，直到清代的一批考據家才又把它發掘出來。本文介紹「大衍求一術」是希望大家瞭解到輾轉相除法並不只是西方才有的，我們的祖先也有一套相同的東西，且一度在中國的曆法上佔了很重要的地位。自從筆者上學期選修了歷史系的「中國科學史」之後便對它發生了興趣，這篇文章是課餘的研究心得，願與同好共勉之。

〔註一〕有一個例外，便是圓周率 $\pi$ 的發展，以祖沖之當年所求得的疏密二率，實在已經大大超出了當時社會的需要，爲何會有這種特殊現象發生，是研究科學史的一個有趣題材，讀者對於中國 $\pi$ 的發展若有興趣，可參考 66 年 5 月號科學月刊本系洪萬生老師著的「中國 $\pi$ 的一頁滄桑」。

〔註二〕這方法僅在 $gcd(m_i, m_j) \mid (r_i - r_j)$ 時才有效，秦九韶雖然沒有明白指出這點，但在數學九章中的例子都是符合這個條件的。至於 $gcd(m_i, m_j)$ $r_i - r_j$ 時，據筆者猜想，當時的曆法家可以從距當時 $n$ 年前的資料中找出合於條件的數據，求出積年 $N$ 後，則 $N+n$ 爲當年的積年。直到今天，中國的天文資料仍是世界上最豐富最完整的一部，相信古人要找他所要的數據是不難的。

〔註三〕因爲 $k_1 \dfrac{M}{t_1} \equiv 1 \pmod{t_1}$，$k_2 \dfrac{M}{t_2} \equiv 1 \pmod{t_2}$，$k_3 \dfrac{M}{t_3} \equiv 1 \pmod{t_3}$ 所以 $k_1 \dfrac{M}{t_1} + k_2 \dfrac{M}{t_2} + k_3 \dfrac{M}{t_3} \equiv 1 \pmod{M}$，$M = t_1\, t_2\, t_3$

$$k_1 \frac{M}{t_1} + k_2 \frac{M}{t_2} + k_3 \frac{M}{t_3} = \theta M + 1 \text{，}\theta \text{ 爲整數}$$

若 $\theta = 1$，則取 $k_1 \dfrac{M}{t_1}$，$k_2 \dfrac{M}{t_2}$，$k_3 \dfrac{M}{t_3}$ 爲正用。若 $\theta > 1$ 則檢驗元數。(其他問數，像分數，檢驗通分後的分子) 中具有公因數的數，設這類數有 $n$ 個，則在它們對應的泛用內減去 $\dfrac{\theta - 1}{n} M$，但各元素有共同因數時須先提出最大公因數再加以檢驗。秦九韶求正用是爲了計算方便，而將泛用簡化。直接使用泛用也可得相同的答案，像清駱騰鳳就是省去求正用的步驟。

〔註四〕「古曆會積」題原見於數學九章第一卷，但他求已過年數時誤用「紀分」除所得率數，求一會積年時，誤以「氣分」除率數，故所得答數皆不對。(見四庫

全書珍本別輯數學九章）這個例題所用的數據是經沈欽斐修訂後而得的。

〔註五〕我們檢驗問數通分後的三個分子，1373340，111036，225600，提最大公因12後得114445，9253，18800，其中11445與18800有公因數，故氣正用＝氣泛用$-\frac{1}{2}$衍母，紀正用＝紀泛用$-\frac{1}{2}$衍母。

〔註六〕日法＝$4\times940\times60=3760$；氣骨爲多至與甲子日子正時刻的時差，以3760爲分母擴分後的分子（依此法而得的分子稱爲日分）。朔骨爲正朔與甲子日子正時刻的時差的日分，閏骨爲月亮距正朔甲子日子正時刻的時差的日分，故閏骨＝｜氣骨－朔骨｜＝朔餘數。

〔註七〕曆過年爲今年距上次日月甲子相會時的年數；一會積年爲兩次日月甲子相會的間隔年數；一會積月爲這個間隔內的合朔次數，一會積日爲此間隔內的總日數；未至年數爲今年距下次日月甲子相會的年數。

〔參考資料〕


1. 四庫全書珍本別輯數學九章　王雲五主編　臺灣商務印書館
2. 中算史論叢(一)　李儼著　臺灣商務印書館
3. 中國算學史　李儼著　臺灣商務印書館
4. 中國之科學與文明中譯本(四)(五)　李約瑟著　臺灣商務印書館
5. 天文考古錄　朱文鑫著　臺灣商務印書館
6. 天文學小史　朱文鑫著　臺灣商務印書館
7. 春秋曆說（上）　程發軔著　師大國文系出版
8. 代數學發展史　王懷權編著　協進圖書公司
9. 古代中國的科學家　蔡仁堅著　景象出版社
10. 數學傳播第二卷3期　中央研究院數學研究所發行
11. 數學分析導引　凡異出版社
12. 數論導引　先登出版社

## 編　後　語

在此我先要感謝賜稿的每一位師長和同學，更感謝常主任、林義雄老師、林福來老師、陳昭地老師、趙文敏老師、吳森原老師、李虎雄老師和洪萬生老師的指導。

在這幾個月來，編輯小組的幹事，爲了使內容更加充實，使這份刊物更完整，每個人無不日以繼夜，兢兢業業的工作著。同學們在看完這期的〃師大數學〃後，想必發覺到這期與前幾期有所不同，例如這期的稿件是經過有系統的編排與歸類，內容上除了我們所熟知的分析和代數外，還增加了數學邏輯，電子計算機的介紹，部份古算學的介紹，和綫性規劃等等。雖然這樣還不能說是完美的，但至少是值得我們感到安慰的。

各位同學，這份刊物是屬於大家的，是需要各位同學共同的來開拓這美好的園地，而不是少數幾位同學的責任，更不應該只是編輯小組的事。或許大家有個想法，總認爲自已所寫出來的文章，只是拿幾本書抄一抄，既然如此，又何必去寫它呢？我不敢否認這個事實，但我也不贊同這個想法，不論如何，在您想寫一篇文章之前，您是否會先將您所要寫的主題，作徹底的瞭解，然後再依照自已的構想去寫，這就對了，我能說這就是您自已的東西，而不是抄襲別人的，至少我能肯定一點，在您寫完這篇文章後，您一定能把您所寫的主題完全領悟了，這不是莫大的收穫嗎？！寫吧！寫出一份屬於自已的文章吧！要不然，您會失去更多的！

師大數學主編
蔣　永　延　謹啓
中華民國六十七年六月一日

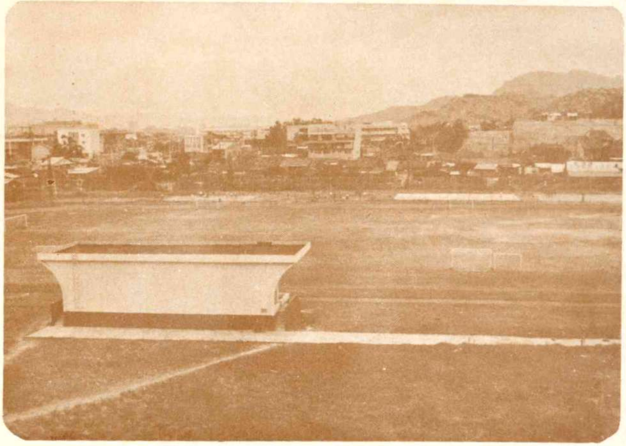
## 六十六學年度數學學會組織概況

常務理事：金　鈐（三丙）
常務監事：楊紹銘（三乙）
文教股長：林明義（三甲）
總務股長：陳榮治（三丙）
康樂股長：張黎明（二乙）
體育股長：宋昭明（三丙）
交通股長：鍾達財（三丙）
服務股長：柯坤山（三甲）
衞生股長：李正琦（二甲）

主　編：蔣永延
編　輯：張永寬
劉曼麗
謝青山

理　事：連麗珠（四甲）　楊老樣（四乙）　李金柯（四丙）
梅文台（三甲）　陳添財（三乙）　金　鈐（三丙）
劉嘉森（二甲）　林飛鳴（二乙）　施朝元（二丙）
蔡勳忠（一甲）　謝瑞康（一乙）　呂勝男（一丙）
陳婉玲（夜一）　高秀華（夜二）　蔡文煥（夜三）
徐成燕（夜四）

監　事：陳竹村，林鈞涵，楊紹銘，賴金生，李　麟



# 師大數學　第十二期


發行人：常法徽

出版者：國立台灣師範大學數學學會

學會理事長：金　鈴

主　　編：蔣永延

編　　輯：張永寬、劉曼麗

謝青山

排印者：有信打字印刷公司

地　址：台北市和平東路三段68之

4號二樓

電　話：702－6563

出版日期：中華民國六十七年六月五日

師大訓課刊登第136號