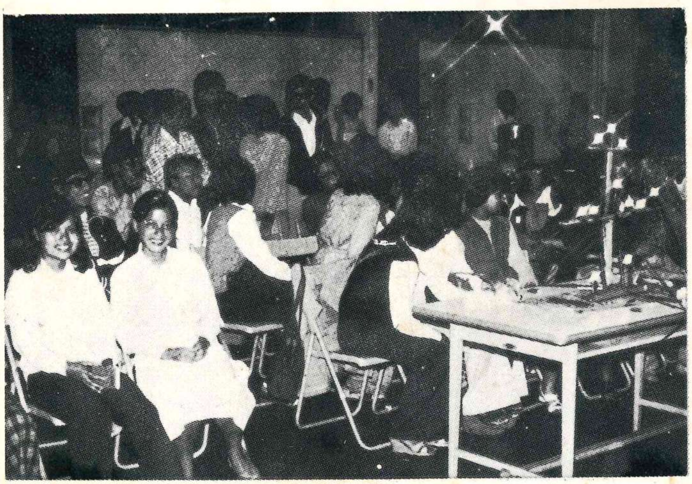
師大數學

13

系運趣味競賽



迎新燭光晚會

系主任序

流光飛逝，本系自民國三十五年八月成立，迄今已三十三載，歷經系中同仁之努力，始具今日規模，現日間部有十二班，夜間部五班，共有同學六百餘人，圖書兩萬餘册（分藏於數學研究所資料室及理學院圖書館）雜誌百餘種，師生孜孜不息，共同為美好遠景而奮勉。

畢業系友，已兩仟餘人，多各有成就，其中獲博士學位已壹佰貳拾餘人，碩士學位者貳佰餘人，或執教於國內外高等學府，或繼續高深研究，餘多服務於中等學校，均能堅守崗位，熱心教學。

邇來科學發展甚速，數學之需要更切，本系之任務日益艱鉅，除學術之研究外，更肩負數學教育之發展及中等數學教育輔導之重要任務，同仁兢兢業業，均獲履薄之心，致力於今後發展，並時時注意下列各項：

㈠ 安定中求充實，再求發展。

㈡ 增強教材教法之研究，鼓勵對數學教育有供獻者出國觀摩。

㈢ 注重高深學術之研究及應用。

㈣ 鼓勵著述及出版。

㈤ 增設電子計算機組以配合中等數學教育之發展。

㈥ 增訂圖書雜誌，並補全過期雜誌。

㈦ 配合課程需要，培育專門人才。

㈧ 延攬專家。

㈨ 培養學生學習興趣。

㈩ 完美系風之建立。

為增強研究風尚，本系於民國五十六年創辦年刊，師生等發表創作及研究成果，切磋琢磨，提高學習及研究興趣。屢經負責同學之辛勞耕耘及師生系友之共同支持，漸茲茁壯。以後更望我師生系友，不吝珠璣，源源賜稿，期以充實壯大。

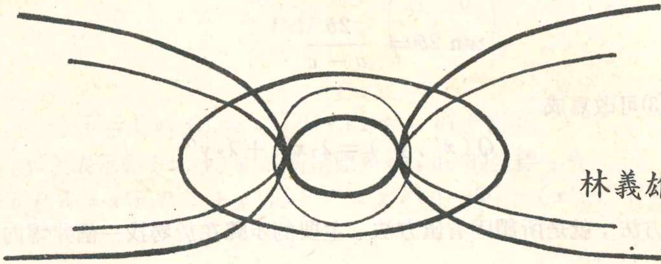
於此，至表謝忱，更盼我師生系友珍貴此片園地！

常　法　徽　謹識

六十八年五月

目　錄

關於二次曲線的標準化



林義雄

(一)

距今約八年前，高中數學課程又經歷另一次的改革運動。當時，數學界對數學教育關心的程度可以說是空前的。討論之熱烈也頗爲令人心折。這些都是衆所週知的事情。其結果之一，就是在同一個課程標準下，產生各種不同的版本；於是，對於相同的主題，不可避免地產生不同的處理方法，取材的深淺當然就各有差異了。緊跟著而來的，就是對許多問題產生“爭論”。概括地說來，這該是個好現象，然追究其原因，有長期積壓下來的主客觀因素，也有一時的悶氣。本文姑不去深究它，僅就學習上的困難及教學上的迷惑，以二次曲綫（式）標準化爲主，提出一點小見。

(二)

給二次式

$$Q(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2,\quad a,b,c,\text{ 常數}，x,y\text{ 變數} \tag{1}$$

則 $Q(x,y)=d$（常數），就在 x,y 平面上決定一個二次曲綫，如用 A 表示二階方陣

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \tag{2}$$

則可以平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上自然內積 $<\ ,\ >$ 的形式將(1)式改寫成

$$Q(x,y)=<\vec{v}A,\vec{v}>=\vec{v}A\vec{v}^*=(x,y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3}$$

$\vec{v}=(x,y)$ 代表一個向量，$\vec{v}^*=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

二次式(1)標準化（即用轉軸運動以消去 xy 項）的古典方法；是用

$$x = x' \cos\theta + y' \sin\theta$$
$$y = -x' \sin\theta + y' \cos\theta \tag{4}$$

代入(1)或(3)，得到所要的旋轉角度 θ 必須滿足

$$\tan 2\theta = \frac{2b}{a-c} \tag{5}$$

此時，(1)或(3)可改寫成

$$Q(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 \tag{6}$$

請參考圖一。

另一種方法，就是所謂固有值方法。主要的步驟在於尋找一個非零向量 $\vec{v}$ 及實數 λ 滿足

$$\vec{v} A = \lambda \vec{v} \tag{7}$$

$\vec{v} \neq \vec{0}$ 爲對應於固有值 λ 的固有向量，注意，A 恒有二個實固有值 λ_1 及 λ_2 而所對對應的固有向量 $\vec{v_1}$ 及 $\vec{v_2}$ 恒會互相垂直。必要時以 $\dfrac{\vec{v_i}}{v_i}$ 代替 $\vec{v_i}$，$i = 1, 2$，不妨設 $|\vec{v_1}| = |\vec{v_2}| = 1$，即 $\vec{v_1}$ 及 $\vec{v_2}$ 都是單位長向量，令

$$P = \begin{pmatrix} \vec{v_1} \\ \vec{v_2} \end{pmatrix} \left(= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\mathrm{ios}\,\theta \end{pmatrix} \right) \tag{8}$$

如令 $\vec{e_1} = (1, 0)$，$\vec{e_2} = (0, 1)$ 表示 $\boldsymbol{R}^2$ 的自然基底，那麼(8)式等於

$$\vec{e_1} P = \vec{v_1}, \quad \vec{e_2} P = \vec{v_2}$$

如用 P^* 表示 P 的轉置方陣，則有

$$PP^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

於是，P 的行列式 $\det P = 1$ 或 -1，而且 P 的逆方陣 P^{-1} 恰爲

$$P^{-1} = P^* \tag{9}$$

這種方陣，稱爲直交方陣。今由(7)式，知

$$\vec{v_1} A = \lambda_1 \vec{v_1}$$
$$\vec{v_2} A = \lambda_2 \vec{v_2}$$

寫成矩陣形式，有

$$\begin{pmatrix} \vec{v_1} \\ \vec{v_2} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v_1} \\ \vec{v_2} \end{pmatrix}$$

亦即

$$PA=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}P$$

或

$$PAP^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} \qquad (10)$$

令

$$\vec{v}=(x,y)=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}=x'\vec{v_1}+y'\vec{v_2}$$

亦即 (x',y') 表示點 (x,y) 對於新坐標系 $\vec{v_1},\vec{v_2}$ 的坐標。令

$$\vec{\omega}=\vec{v}P^{-1}=x'\vec{v_1}P^{-1}+y'\vec{v_2}P^{-1}=x'\vec{e_1}+y'\vec{e_2}=(x',y')$$

那麼，

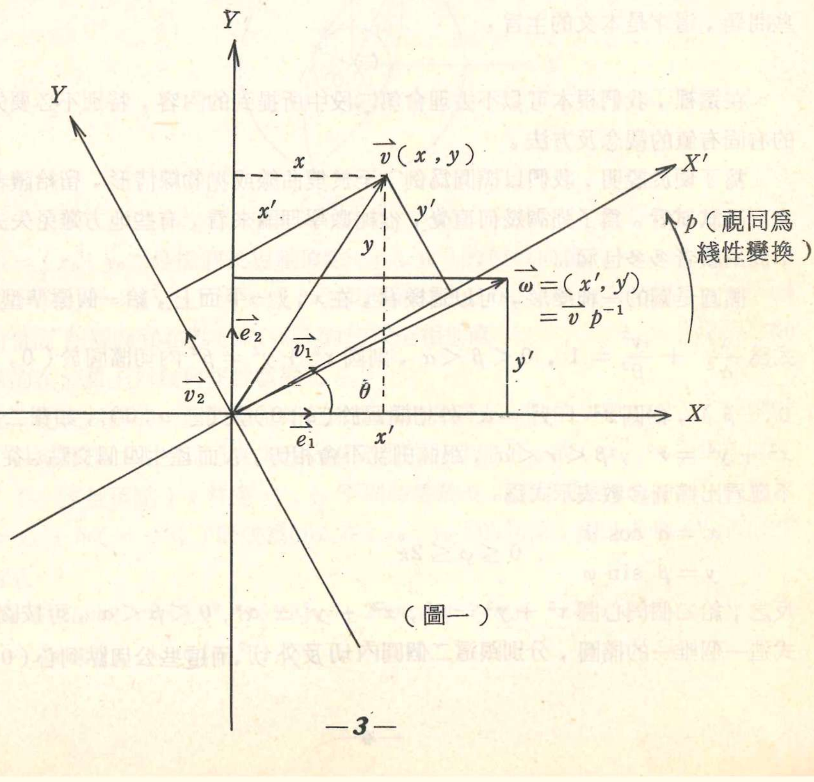
$$\vec{\omega}^{*}=(\vec{v}p^{-1})^{*}=(p^{-1})^{*}\vec{v}-(P^{*})^{-1}\vec{v}^{*}=P\vec{v}^{*}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

今可將⑽式改寫成

$$Q(x,y)=\vec{v}A\vec{v}^{*}=\vec{v}P^{-1}(PAP^{-1})P\vec{v}^{*}=\vec{\omega}PAP^{-1}\vec{\omega}^{*}$$

$$=(x',y')\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2=Q(x',y') \qquad (6')$$

同樣達到標準化的目的。請參考下圖一。



（圖一）

以上二種方法，爲目前高中數學教科書所介紹的二次式標準化方法。本質上，古典的轉軸方法是幾何性的，而固有值方法是代數性的，至少表面上看來就是如此。

這些年來，本人透過直接接觸或經由間接聽聞，得知很多高中，大學數學系同學（用眼前教科書的畢業生）以及實際從事日常數學的中學教師，都對這二種方法的優劣、教學法、學習難易程度，彼此關聯及用途等等，提出很多正反的意見。而這些“爭論”延續到今，據本人瞭解似乎也沒什麼定論。所以如此，可能是還沒有抓住問題的核心所在的緣故，然探討引起這種“爭論”的癥結原委，似乎應歸納成下列二個（彼此有關的）基本問題：

㈣ 爲什麼一開始就知道固有值方法可達到轉軸的目的？亦即，爲什麼會預先想到用(7)去解行列式 $\det(A-\lambda I_2)=0$ 中的 λ，就可得到(6)′式？ 有什麼幾何直覺東西來支持這個理由嗎？

㈡ 古典轉軸及固有值的方法既然同時解決了二次標準化問題，那麼它們彼此之間的關聯又如何？固有值方法的出現是那麼偶然不可思議嗎？

約九個月前，在某個場合中答應一群中學老師，要寫一篇短文來回答並闡釋上列二個問題。本學期，有幸教大一綫性代數課程。跟班上同學討論中學教學時，又回想起當時的承諾，故動筆寫下本文。底下，本人想根據個人能力所及，來回答這些問題，這才是本文的主旨。

㈢

在這裡，我們根本可以不去理會第㈡段中所提到的內容，特別不必要先入爲主的有固有值的觀念及方法。

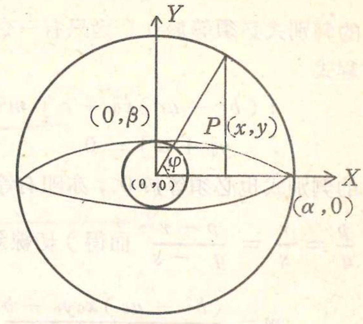
爲了便於說明，我們以橢圓爲例，至於雙曲線或抛物線情形，留給讀者模仿本文自己試試看。爲了强調幾何直覺，從純數學理論來看，有些地方難免失去嚴密性，尚請讀者多多包涵。

橢圓是圓的一種變形，可以這樣看，在 x,y 一平面上，給一個標準型橢圓方程式爲 $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$，$0<\beta<\alpha$，則圓 $x^2+y^2=\beta^2$ 內切橢圓於（$0,\beta$）及（$0,-\beta$），而圓 $x^2+y^2=\alpha^2$ 外切橢圓於（$\alpha,0$）及（$-\alpha,0$），如圖二。至於圓 $x^2+y^2=r^2$，$\beta<r<\alpha$，跟橢圓就不會相切，反而產生四個交點。從圖二，不難看出橢圓參數表示式爲

$$\begin{aligned} x&=\alpha\cos\varphi \\ y&=\beta\sin\varphi \end{aligned}\quad,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi$$

反之，給二個同心圓 $x^2+y^2=\beta^2$，$x^2+y^2=\alpha^2$，$0<\beta<\alpha$，可按圖二或上式造一個唯一的橢圓，分別跟這二個圓內切及外切。而這些公切點到心（$0,0$）的

距離，就是橢圓的短軸及長軸的半長，亦即 β 及 α 。同時，在這些公切點，圓及橢圓有公切線。但是圓的切線會垂直於過切點的半徑，所以，從橢圓短軸的頂點（$0,\beta$）及長軸的頂點（$\alpha,0$）到心（$0,0$）的線段，會垂直於橢圓在這些頂點的切線。除了長短軸頂點之外，橢圓上其他的點就再也沒有這個性質了。換用向量觀念來解釋這些事實，就是說：橢圓長短軸頂點的位置向量會垂直於過該頂點的切線向量。

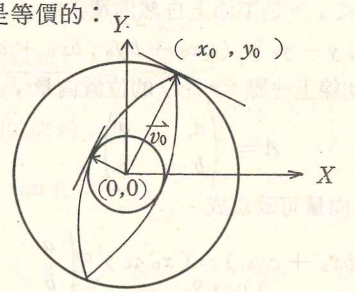


（圖二）

在圖二中，讓原點（$0,0$）固定不動，將整個圖形轉動一下，使得橢圓的新位置相對於本來的 xy －坐標是傾斜的，如圖三。此時，橢圓的新方程式形如

$$ax^2+2bxy+cy^2=1 \tag{11}$$

（何故？）。甚至，前段中有關圓及橢圓的事實照樣會成立；特別，此二個同心圓分別跟橢圓公切於長短軸的頂點。設長軸或短軸的頂點的坐標為（x_0,y_0），其中 x_0,y_0 不同時為 0 。則下列是等價的：



（圖三）

$$\overrightarrow{v_0}=(x_0,y_0)\text{ 是橢圓長短軸頂點}(x_0,y_0)\text{ 的位置向量} \tag{12}$$

$$\Leftrightarrow \text{圓 } x^2+y^2=r^2\ (r=\alpha \text{ 或 } \beta)\text{ 跟橢圓(11)在}(x_0,y_0)\text{ 有公切線} \tag{13}$$

$$\Leftrightarrow \text{向量 } \overrightarrow{v_0}\text{ 跟橢圓(11)在點}(x_0,y_0)\text{ 的切線至相垂直} \tag{14}$$

我們的目的在於將上列幾何條件數學化。

為此，比較困難的一個問題是如何求橢圓(11)在其上一點的切線方程式；但很容易克服，只須運用二次一元二次方程式有等根的條件即可。說（x_0,y_0）為橢圓上的定點（不一定是頂點），注意 x_0,y_0 不同時等於 0 。要使通過（x_0,y_0）的一條直線 $y=y_0+m(x-x_0)$ 變成為(11)式在（x_0,y_0）的切線，則以這個 y 代入(11)所得的方程式

$$(a+2bm+cm^2)x^2+(2by_0-2bmx_0+2cmy_0-2c_0x_0m^2)x+cy_0$$
$$-2cmx_0y_0+cm^2x_0{}^2-1=0$$

的判別式必須等於0（因只有一交點（x_0，y_0））。這個判別式經過化簡後所得的方程式

$$[(b^2-ac)x_0^2+c]\,m^2-2[(b^2-ac)x_0y_0-b]\,m+[(b^2-ac)y_0^2+a]=0$$

的判別式也必須等於0，亦即有等根（因只有一個m）。所以（第三個等式利用 $\frac{p}{q}=\frac{r}{s}=\frac{p-r}{q-s}$ 而得）切線斜率m爲

$$m=\frac{(b^2-ac)x_0y_0-b}{(b^2-ac)x_0^2+c}=\frac{(b^2-ac)y_0^2+a}{(b^2-ac)x_0y_0-b}=-\frac{ax_0+by_0}{bx_0+cy_0} \tag{15}$$

得到切線方程式（另外方法，請看第四段）

$$y-y_0=-\frac{ax_0+by_0}{bx_0+cy_0}(x-x_0) \tag{16}$$

利用$ax_0{}^2+2bx_0y_0+cy_0{}^2=1$，可將(16)化成

$$ax_0x+b(x_0y+xy_0)+cy_0y=1 \tag{16$'$}$$

或是有用的方程式（<，>是平面上自然內積）

$$<(x-x_0,y-y_0),(ax_0+by_0,bx_0+cy_0)>=0 \tag{16$''$}$$

用$\overrightarrow{v}=(x,y)$表示切線上一點（x，y）的位置向量，用A表示二階方陣

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

則(16)″ 中第二個坐標向量可改寫成

$$(ax_0+by_0,bx_0+cy_0)=(x_0\ y_0)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}=\overrightarrow{v_0}A$$

於是(16)″ 告訴我們一個重要又有趣的事實：向量$\overrightarrow{v_0}A$垂直於過$\overrightarrow{v_0}$的切線，亦即

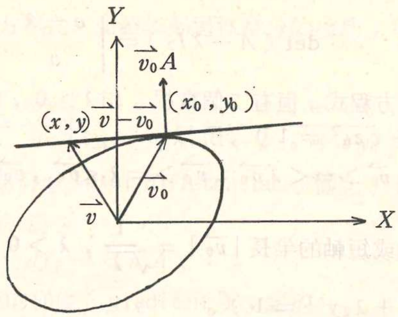
$$\overrightarrow{v}-\overrightarrow{v_0}\perp\overrightarrow{v_0}A \tag{17}$$

這是說，如視A代表一個從$\boldsymbol{R}^2$到$\boldsymbol{R}^2$的線性變數，則A將橢圓上一點的位置向量$\overrightarrow{v_0}=(x_0,y_0)$，變成另一個向量$\overrightarrow{v_0}A$，但這個向量必須垂直於通過$\overrightarrow{v_0}$的橢圓切線，如圖四。（參見次頁）不妨稱$\overrightarrow{v_0}A$爲橢圓在點$\overrightarrow{v_0}=(x_0,y_0)$的<u>法線向量</u>。

好了，回頭看(12)、(13)及(14)。在(11)式中，令$b=0$，而$a=c$，從(15)就得到圓$x^2+y^2=r^2$在其上一點的切線斜率

$$-\frac{x_0}{y_0} \tag{18}$$

另一方面，當$\overrightarrow{v_0}=(x_0,y_0)$跟橢圓在點（$x_0$，$y_0$）的切線會垂直時，由(17)式所代表的幾何意義（如圖四）知，$\overrightarrow{v_0}$及$\overrightarrow{v_0}A$必須共線，亦即此二向量必是線性相依，



（圖四）

因此，我們數學化了⒀及⒁如下：

$\overrightarrow{v_0}=(x_0, y_0)$ 是橢圓長短軸頂點（$x_0 y_0$）的位置向量 ⑿

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a x_0+b y_0}{b x_0+c y_0}=\frac{x_0}{y_0} \qquad \text{（由⒂及⒅）} \tag{13'}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{v_0}A=\lambda\overrightarrow{v_0} \qquad \text{（由圖四或⒆），} \lambda \text{ 是實數} \tag{14'}$$

我們可以進一步化簡⒀′。將⒀′展開改寫成

$$\frac{x_0 y_0}{x_0^2-y_0^2}=\frac{b}{a-c}$$

如用 θ 表示向量 $\overrightarrow{v_0}$ 跟正 x－軸的夾角，則

$$\tan\theta=\frac{y_0}{x_0}$$

此時

$$\frac{2b}{a-c}=\frac{2x_0 y_0}{x_0^2-y_0^2}=\frac{2\,\dfrac{y_0}{x_0}}{1-\dfrac{y_0^2}{x_0^2}}=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\tan 2\theta \tag{19}$$

恰爲古典的轉軸公式⑸。其實，由⒀′，令

$$\frac{a x_0+b y_0}{x_0}=\frac{b x_0+c y_0}{y_0}=\lambda$$

得到

$$a x_0+b y_0=\lambda x_0$$
$$b x_{+}+c y_0=\lambda y_0$$

此恰是⒁′。反之，由⒁′立刻可得到⒀′，於是有⒆式。而且，⒁′可改寫成 $\overrightarrow{v_0}(A-\lambda I_2)=0$，$I_2$ 表示二階單位方陣 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$。因 $\overrightarrow{v_0}\neq\overrightarrow{0}$，故必須（何故？）

$$\det(A-\lambda I_2)=\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{20}$$

這是 λ 的一元二次方程式，恒有二個實根。如 $\lambda>0$，由於 $<\overrightarrow{v_0}A,\overrightarrow{v_0}>=1$（即 $ax_0{}^2+2bx_0y_0+cz_0{}^2=1$），所以

$$<\overrightarrow{v_0}A,\overrightarrow{v_0}>=<\lambda\overrightarrow{v_0},\overrightarrow{v_0}>=\lambda<\overrightarrow{v_0},\overrightarrow{v_0}>=\lambda|\overrightarrow{v_0}|^2=1$$

則得

$$\text{長軸或短軸的半長 } |\overrightarrow{v_0}|=\frac{1}{\sqrt{\lambda}},\ \lambda>0 \tag{21}$$

（比較(6)′的 $\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2=1$）。

我們最終的結論應該是

$\overrightarrow{v_0}=(x_0\ y_0)$ 是橢圓(11)長短軸頂點 (x_0,y_0) 的位置向量 (12)

$$\Longleftrightarrow \qquad \tan 2\theta=\frac{2b}{a-c} \tag{13''}$$

其中 $\tan\theta=\dfrac{y_0}{x_0}$，而 θ 就是將正 x－軸旋轉到向量 $\overrightarrow{v_0}$ 所需的角度。

$$\Longleftrightarrow \qquad \text{從} \det(A-\lambda I_2)=\begin{vmatrix} a-\lambda, & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}=0,\quad \lambda \text{ 實數} \tag{14''}$$

中解出 λ（有二個值 λ_1 及 λ_2），則有

$$\overrightarrow{v_0}A=\lambda\overrightarrow{v_0}$$

如 $\lambda_2\geq\lambda_2>0$，則 $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ 是長軸之半長

$\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$ 是短軸之半長

(13)″ 就是古典轉軸的方法，而(14)″ 就是比較摩登的所謂固有值方法；前者比較幾何化，而後者比較代數化，同時可用來刻劃(12)。(14)″ 的出現不是頂自然的嗎？

可見，這二種方法根本是同一回事情，有關的詳註請看第四段。

不管用(13)″或(14)″做實際運算以達到二次曲線標準化，都應該參考第(二)段的步驟。其實，只要讀者能夠抓住本(三)段的精神所在，應可自行推導出第(二)段的處理方法，根本不必去理會什麼是固有值這個（看來是人工化的）名詞，以免爲其困惑不解了。

我想這樣就可同時回答第(二)段的(甲)、(乙)二個問題，只不知各位讀者有何指正，意見又如何？

如本段的題材，對在學同學瞭解有關的問題，能有所帮助的話，那就達到本文的目的！

(四)

這裡，給第(三)段幾個補充性說明。

第一：關於求橢圓切綫方程式。如讀者學過微積分的技巧，可直接微分⑾式，立即得到斜率

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_0,\,y_0)}=-\frac{a x_0+b y_0}{b x_0+c y_0}$$

如讀者熟悉多變數函數的全微分（ total differential ）觀念，令 $f(\vec{v})=<\vec{v}A,\vec{v}>$，則 f 在 $\vec{v}$ 的全微分 $df_{\vec{v}}$ 爲

$$df_{\vec{v}}=<\vec{v}A,\cdot>$$

可稱 $df_{\vec{v}}$ 或 $\vec{v}A$ 爲 f 在 $\vec{v}$ 點的梯度（ gradient ），記成

$$\text{grad}\, f_{\vec{v}}=\vec{v}A$$

那麼由⑾式，很容易證得梯度 $\text{grad} f_{\vec{v}}$ 在 $\vec{v}$ 點垂直於橢圓 $<\vec{v}A,\vec{v}>=1$。這就是⒄式。

如視橢圓 $<\vec{v}A,\vec{v}>=1$ 爲一種等溫綫或等高綫之類的東西，那麼用物理或自然現象來解釋梯度或⒄式，整個事情就會更生動有趣得多了。讀者不妨試試看。

第二：雖然古典的轉軸方法（如⒀″）保留較多的幾何直覺的色彩，但是，同類問題在較高維度空間 R^n（$n\geq 3$）中並沒有適當的翻版。所以，這只是個數學上的技巧，尚不足於構成爲一個數學方法。

但是，⑿跟⒁″等價的精神且可延拓到 R^n 來。給 n 個變數 $x_1,\cdots,x_n$ 的二次式

$$Q(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,\quad a_{ij}=a_{ji},\ i,j=1,2,\cdots,n$$

如用 A 表示 n 階對稱方陣 (a_{ij})，那麼上式可改寫成

$$Q(\vec{v})=<\vec{v}A,\vec{v}>,\quad \vec{v}=(x_1,\cdots,x_n)$$

則有

$$\vec{v_0}\neq\vec{0}\ \text{是二次曲綫}\ Q(\vec{v})=1\ \text{“軸”頂點的位置向量} \tag{12$'$}$$

$\Longleftrightarrow$ 存在實數 λ，使得

$$\vec{v_0}A=\lambda\vec{v_0} \tag{14$'''$}$$

所以 $<\vec{v_0}A,\vec{v_0}>=\lambda<\vec{v_0},\vec{v_0}>=\lambda|\vec{v_0}|^2$，據此得到

$$\lambda=\frac{<\vec{v_0}A,\vec{v_0}>}{|\vec{v_0}|^2}=<\frac{\vec{v_0}}{|\vec{v_0}|}A,\frac{\vec{v_0}}{|\vec{v_0}|}>=<\vec{v_0}A,\vec{v_0}>,\ |\vec{v_0}|=1$$

但對一般的向量 $\vec{v}\neq\vec{0}$，利用 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\frac{<\vec{v}A,\vec{v}>}{|\vec{v}|^2}\leq\frac{|\vec{v}A||\vec{v}|}{|\vec{v}|^2}=\frac{|\vec{v}A|}{|\vec{v}|}$$

等號僅當 $\vec{v}A$ 及 $\vec{v}$ 綫性相關時才會成立。因此，如從⒁‴解行列式 $\det(A-\lambda I_n)$

$=0$，得 n 個實數 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$，則有

$$\lambda_1 = \max_{R^n} \frac{<\vec{v} A, \vec{v}>}{<\vec{v}, \vec{v}>} = \max_{S^{n-1}} <\vec{v} A, \vec{v}>$$

$$\lambda_2 = \max_{R_{n-1}} \frac{<\vec{v} A, \vec{v}>}{<\vec{v}, \vec{v}>} = \max_{S^{n-1} \cap R_{n-1}} <\vec{v} A, \vec{v}> = \max_{V_{n-1}} \min_{S^{n-1} \cap V_{n-1}} <\vec{v} A, \vec{v}>$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_n = \inf_{S^{n-1}} <\vec{v} A, \vec{v}>$$

其中 $S^{n-1} = \{ \vec{v} \in R^n \mid <\vec{v}, \vec{v}> = 1 \}$，$R_{n-1} = \{ \vec{v} \in R^n \mid <\vec{v}, \vec{v_1}> = 0 \}$ 而 $\vec{v_1} A = \lambda_1 \vec{v_1}$，$V_{n-1}$ 表示 R^n 的任意（$n-1$）維子空間。這樣就慢慢地引入有用的Rayleigh-Fischer 的min-max 問題。這裡不去詳論它，留給讀者參考有關的書籍，比如Bellman 著 Introduction to Matrix Analysis, McGraw-Hill Co.,1960.

固有值方法的來源、理論的發展及應用，當然決不只局限於本文到目前所談到這麼一點點微不足道的小東西。在純數學或應用上，很多重大問題的解決，往往可歸納成為固有值的問題。固有值方法可說是一種有用的數學方法。

二次式的標準化與方陣的對角線化

韋泉輝
指導老師　趙文敏

若V爲一佈於體F的向量空間，今考慮一線性映射T（ Linear transformation ）$T : V \to V$ 。若存在一$\lambda \in F$及一向量$v \in V$，$v \neq 0$使得$Tv = \lambda v$，則我們稱λ爲T之一固有值（ eigenvalue ），v爲對應於λ的一個固有向量（ eigenvector ）。

註：亦有人稱固有值爲特性根（ characteristic root ），本文中將用固有值之名稱。

在此，我們首先要注意的就是對一固有值λ，我們所找的固定向量v是需不爲零向量，且固有向量不止有一解。本文便是藉固有值來討論一般二次式標準化及其對應方陣的對角線化之問題。

壹、二次曲線之標準化

這是在高中時大家就遇到過的，也是與坐標軸旋轉時有關的問題。

當給定一個二元二次方程式$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$，其在平面上的圖形是一二次曲線。若當$B \neq 0$，要去判斷並描繪其圖形時，就需涉及到標準化了！各位同學都還記得在實驗教材中，關於標準化的作法。

首先，取一對應於二次項$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$的方陣

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

於特性方程式（ charateristic eguation ）det（$T - \lambda I$）$= 0$解出λ，若特性方程式有二相異實根x_1，x_2。然後再從（$T - \lambda$）$x = 0$中去解出對應於λ_1，λ_2的固有向量x^1，x^2。

通常我們解得的x^1，x^2有無窮多解，取其長度爲1者記爲e_1，e_2（可有±兩種選擇）於是e_1，e_2可分別表爲

$$e_1 = (\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta\, i_1 + \sin\theta\, i_2$$

$$e_2 = (-\sin\theta, \cos\theta) = -\sin\theta\, i_1 + \cos\theta\, i_2$$

其中θ的幾何意義爲舊坐標系$(0; i_1, i_2)$到新坐標系$(0; e_1, e_2)$的轉角角度。且e_1, e_2爲固有向量，故滿足$Te_1 = \lambda_1 e_1$，$Te_2 = \lambda_2 e_2$。因此，我們可將其二次項化爲$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$而新舊坐標間的關係爲

$$\begin{cases} x = \cos\theta\, x' - \sin\theta\, y' \\ y = \sin\theta\, x' + \cos\theta\, y' \end{cases}$$

這便是二次式的標準化。但我想各位也從東華本學過另一做法：將坐標軸旋轉θ角，$-\pi < \theta < \pi$，而且滿足$\cot 2\theta = \dfrac{A-C}{2B}$而新舊坐標之關係爲

$$\begin{cases} x = \cos\theta\, x' - \sin\theta\, y' \\ y = \sin\theta\, x' + \cos\theta\, y' \end{cases}$$

我們不難推得上述之結果，且可進一步地證明此二方法關係之一致。

在二元二次方程式$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$中，若要將其化爲標準式，所牽涉到最主要的便是裏面的二次項。故在不失一般情形下，祇考慮其二次項，設之爲$Q(x, y)$並以(x_1, x_2)代替(x, y)得$Q(x_1, x_2) = Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2$。$Q(x_1, x_2)$稱爲$x_1, x_2$之一個二次式。

因此，我們可將Q視爲從$\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$的一映射。

若考慮一線性映射$T: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$而其對應之自然矩陣爲

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

由內積之計算我們馬上可得

$$Q(x) = \langle Tx, x \rangle \qquad x = (x_1, x_2)$$

於是，我們現在所面臨的問題，便是如何去找一新的坐標系$(0; e_1, e_2)$使得x表爲$x_1'e_1 + x_2'e_2$時，$Q(x)$中不再含有$x_1'x_2'$項，亦即$Q(x) = \bar{A}x_1'^2 + \bar{B}x_2'^2$。

今若能取得一組正交基底e_1, e_2使得$Te_1 = \lambda_1 e_1$，$Te_2 = \lambda_2 e_2$成立，且e_1, e_2之長爲1；則

$$\begin{aligned} Q(x) = \langle Tx, x \rangle &= \langle T(x_1'e_1 + x_2'e_2), x_1'e_1 + x_2'e_2 \rangle \\ &= \langle \lambda_1 x_1'e_1 + \lambda_2 x_2'e_2, x_1'e_1 + x_2'e_2 \rangle \\ &= \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 \end{aligned}$$

如此，二次式標準化已完成，故所剩的祇是如何去求λ_1, λ_2及e_1, e_2的問題而已。這在大家的線性代數課程中業已詳細討論過，於此便不再贅述。

然後，我們再看，因爲正交坐標變換（亦是坐標軸的旋轉）爲一剛性運動，故計舊坐標間有下列之關係：

$$\begin{cases} x_1 = \cos\theta\, x_1' - \sin\theta\, x_2' \\ x_2 = \sin\theta\, x_1' + \cos\theta\, x_2' \end{cases}$$

註：所謂剛性運動便是平面上之一映射 $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ 而不改變其上任意二點之長度。關於其新舊坐標間之關係可參考高中數學實驗教材第四册§1－6。

而今，我們所求的二固有向量便是分別位於新坐標系（$0; e_1, e_2$）兩軸上長度爲1之單位向量，故可分別表爲 $e_1 = (\cos\theta, \sin\theta)$，$e_2 = (-\sin\theta, \cos\theta)$。

若我們將 $x_1 = \cos\theta\, x_1' - \sin\theta\, x_2'$，$x_2 = \sin\theta\, x_1' + \cos\theta\, x_2'$ 之關係代入 $Q(x_1, x_2)$ 中，使得

$$\begin{aligned}
Q(x_1, x_2) &= A(\cos\theta\, x_1' - \sin\theta\, x_2')^2 \\
&\quad + 2B(\cos\theta\, x_1' - \sin\theta\, x_2')(\sin\theta\, x_1' + \cos\theta\, x_2') \\
&\quad + C(\sin\theta\, x_1' + \cos\theta\, x_2')^2 \\
&= (A\cos^2\theta + 2B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta)\, x_1'^2 \\
&\quad + (-2A\cos\theta\sin\theta + 2B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\
&\quad + 2C\sin\theta\cos\theta)\, x_1' x_2' \\
&\quad + (A\sin^2\theta - 2B\cos\theta\sin\theta + C\cos^2\theta)\, x_2'^2
\end{aligned}$$

若欲不含 $x_1' x_2'$ 項，需

$$-2A\cos\theta\sin\theta + 2B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2C\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{A-C}{2B}$$

即 $$\cot 2\theta = \frac{A-C}{2B}$$

這便是在東華本中所述的。

至此，我們會發生一些問題；到底上述的 T 有沒有固有值？有沒有固有向量？若有固有向量，此二向量是否可構成一組正交基底？（亦即二固有向量是否會互相垂直？）

對於這些問題，我們在下列二段敍述中討論。

第一就是，佈於 $\boldsymbol{R}$ 的對稱線性映射的固有值均爲實數。

因一對稱之線性映射 T，必對應一對稱之實方陣 $A = (a_{ij})$ 所以我們只需證明特性方程式 $\det(A - \lambda I) = 0$ 的解都是實數。

若 λ 爲 $\det(A - \lambda I) = 0$ 中之一根，則必存在一個行向量 $x \neq 0$，使得 $Ax = \lambda x$。

取其共軛便得 $A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$ （因 A 爲實方陣，故 $\bar{A} = A$）

所以 $$\langle \bar{x}, Ax \rangle = \langle \bar{x}, \lambda x \rangle = \lambda \langle \bar{x}, x \rangle$$

$$\langle A\bar{x}, x \rangle = \langle \bar{\lambda}\bar{x}, x \rangle = \bar{\lambda} \langle \bar{x}, x \rangle$$

但因A為對稱實方陣，故

$$<\bar{x}\ ,\ Ax>=<A^*\bar{x}\ ,\ x>=<A\bar{x}\ ,\ x>\ (\ A^* \text{為} A \text{之轉置矩陣}\ )$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda<\bar{x}\ ,x>=\bar{\lambda}<\bar{x}\ ,x>$$

$$\Rightarrow \qquad (\lambda-\bar{\lambda})<\bar{x},x>=0 \qquad \text{因}<\bar{x},x>\neq 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda=\bar{\lambda} \qquad \text{故}\lambda\text{為一實數}$$

其次，我們要說明的便是，於對稱線性映射中，對應於相異固有值的固有向量互相垂直。

今設$\lambda \neq \mu$為線性映射T之二固有值，而x，y分別為對應於λ，μ之固有向量。若A是對應於T之矩陣，則A為一對稱方陣，且滿足$Ax=\lambda x$，　　$Ay=\mu y$

考慮

$$<x,Ay>=<x,\mu y>=\mu<x,y>$$

$$<Ax,y>=<\lambda x,y>=\lambda<x,y>$$

因

$$<x,Ay>=<A^*x,y>=<Ax,y>$$

故

$$\mu<x,y>=\lambda<y,x>$$

$$\Rightarrow \qquad (\mu-\lambda)<x,y>=0$$

因　$\lambda\neq\mu$　故　$<x,y>=0$　　　亦卽x，y二向量互相垂直

因上述的$T=\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$為一對稱之實方陣，且$B\neq 0$，故由特性方程式

$\det(T-\lambda I)=0$之判別式$\varDelta=(A-C)^2+4B^2>0$，故T之二固有值相異，其二固有向量可構成一組正交基底。

貳、二次式的標準化與方陣之對角線化

在前面的討論中，對以固有值處理二次式標準化的問題，已有認識。不過我們所討論的祇是兩個變數而已。在此，我們將推至一般n個變數中討論，並且探討其與方陣對角線化之關係。

對於一般n個變數的二次式，我們可設之為$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}$

$x_i x_j$，$a_{ij}=a_{ji}$　　則

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\ A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$A=(a_{ij})$為一n階對稱方陣

若$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$為

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ 之 } n \text{ 個根}$$

亦卽 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 爲 A 的 n 個固有值。設 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 全相異。

對每一個 λ_i，設 $u_i = \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ \vdots \\ u_{ni} \end{bmatrix}$ 爲對應於 λ_i 之一固有向量 $u_{1i}^2 + u_{2i}^2 + \cdots\cdots + u_{ni}^2 = 1$

若令

$$S = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots\cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots\cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots\cdots & u_{nn} \end{bmatrix} = [\, u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n \,]$$

考慮

$$S^*S = \begin{bmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_2, u_1 \rangle & \cdots\cdots\cdots & \langle u_n, u_1 \rangle \\ \langle u_1, u_2 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle & \cdots\cdots\cdots & \langle u_n, u_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots & \vdots \\ \langle u_1, u_n \rangle & \langle u_2, u_n \rangle & \cdots\cdots\cdots & \langle u_n, u_n \rangle \end{bmatrix} = I_n$$

所以 $\det(S^*)\det(S) = \det(S^*S) = \det(I_n) = 1$

因 $\det(S) \neq 0$ 故 S^{-1} 存在 而且 $S^{-1} = (S^*S)S^{-1} = S^*$

我們可得 S 是一個正交矩陣。

至此，我們再看

$$\begin{aligned} S^{-1}AS &= S^*AS = S^*A[\, u_1, u_2, \cdots, u_n \,] \\ &= S^*[\, Au_1, Au_2, \cdots, Au_n \,] \\ &= S^*[\, \lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \cdots, \lambda_n u_n \,] \\ &= \begin{bmatrix} \langle \lambda_1 u_1, u_1 \rangle & \langle \lambda_2 u_2, u_1 \rangle & \cdots\cdots & \langle \lambda_n u_n, u_1 \rangle \\ \langle \lambda_1 u_1, u_2 \rangle & \langle \lambda_2 u_2, u_2 \rangle & \cdots\cdots & \langle \lambda_n u_n, u_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ \langle \lambda_1 u_1, u_n \rangle & \langle \lambda_2 u_2, u_n \rangle & \cdots\cdots & \langle \lambda_n u_n, u_n \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此，我們可得一結論：當 A 是一 n 階對稱實方陣時，若 A 有 n 個相異固有值

，則必存在一正交方陣 S ，使得 $S^{-1}AS$ 變爲對角線方陣。而主對角線之值恰爲 A 的 n 個固有值，正交方陣 S 爲各固有向量所構成的。

我們若仔細的比較，當一二次式 $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$，$a_{ij} = a_{ji}$ 而欲將 $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 化爲標準式時，無非卽是如何去找上述的正交方陣 S ，而使 $S^{-1}AS$ 化爲對角線方陣的推廣。因 $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$

$$= [x_1, x_2, \cdots, x_n]\, A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad A = (a_{ij})$$

A 在此爲 n 階對稱實方陣，若 A 有 n 個相異之固有值，則由前述知存在一正交方陣 S ，使得 $S^{-1}AS$ 爲對角線方陣

$$\Rightarrow \quad Q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$= [x_1, x_2, \cdots, x_n]\, S\,(S^{-1}AS)\,S^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= [x_1, x_2, \cdots, x_n]\, S \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} S^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n} x_i u_{i1}, \sum_{i=1}^{n} x_i u_{i2}, \cdots, \sum_{i=1}^{n} x_i u_{in}\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} x_j u_{j1} \\ \sum_{j=1}^{n} x_j u_{j2} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} x_j u_{j2} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} u_{ji} x_j\right)^2$$

$Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} u_{ji} x_j \right)^2$ 這個表示法便是Q的標準式。

註：若以 $\sum_{j=1}^{n} u_{ji} x_j = x_i'$，則$Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \cdots\cdots +$

$\lambda_n x_n'^2$，當$n=2$時亦正是我們最初所討論的二元二次式。

在這兒，我們一起來看兩個例子：

例1：試將$Q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 7x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_2x_3 - 4x_1x_3$ 化爲標準式，我們首先找出

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \quad 故 \quad \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 7-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

所求得A之固有值是3，6，9

3所對應之一固有向量是 $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$

6所對應之一固有向量是 $\left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3} \right)$

9所對應之一固有向量是 $\left(\frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3} \right)$

故令

$$S = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad 則 \quad S^* S = I_3$$

且
$$S^{-1} AS = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

故 $Q(x_1, x_2, x_3) = 3\left(\frac{2}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_2 + \frac{2}{3} x_3 \right)^2$

$+ 6\left(\frac{2}{3} x_1 - \frac{2}{3} x_2 - \frac{1}{3} x_3 \right)^2 + 9\left(\frac{-1}{3} x_1 - \frac{2}{3} x_2 + \frac{2}{3} x_3 \right)$

（亦即$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1'^2 + 6x_2'^2 + 9x_3'^2$）

例2：當$n=2$　$Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$　$b \neq 0$　對稱之實方陣A一定是此種形式

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

由〔壹〕中的討論，於$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$可解得固有值$\lambda_1, \lambda_2$及其對應的固有向量$e_1, e_2$。$e_1, e_2$可分別表為（$\cos\theta, \sin\theta$），（$-\sin\theta, \cos\theta$）

故令

$$S = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad \text{則} \quad S^*S = I_2$$

$$\text{且} S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = S \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} S^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

叁、Gram-Schmidt 正交化定理

前面的討論中，關於固有值，我們均設其n個相異，可是對一般的對稱實方陣，情形並非均是如此；於是二次式的標準化或方陣的對角線化就需利用所謂的Gram-Schmidt 正交化定理了！定理的敍述如下：

設$x^1, x^2, \cdots, x^n$是$\boldsymbol{R}^n$中的一組基底，則$\boldsymbol{R}^n$中有一組基底$y^1, y^2, \cdots, y^n$使得

$$\begin{cases} y^1 = x^1 / \|x^1\| & \\ y^2 = b_{21}x^1 + b_{22}x^2 & b_{22} \neq 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ y^n = b_{n1}x^1 + b_{n2}x^2 + \cdots\cdots + b_{nn}x^n & b_{nn} \neq 0 \end{cases}$$

同時　$\langle y^i, y^j \rangle = \delta_{ij}$

關於定理的證明，在此不再討論，各位可參考一般線性代數的書籍。

由Gram-Schmidt 定理，我們馬上可得一推論：若x^1是一n維向量，且

$< x^1, x^1 > = 1$，則必存在一正交矩陣 $T = (t_{ij})$ 使得 $x^1 = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \vdots \\ t_{n1} \end{pmatrix}$。這是因為 x^1 不為零向量，所以我們可取 $x^2, x^3, \cdots, x^n$ 使得 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ 構成 $\boldsymbol{R}^n$ 之一組基底。因此，利用Gram-Schmidt 正交化定理得 $y^1, y^2, \cdots, y^n$，$< y^i, y^j > = \delta_{ij}$ 而 $y^1 = x^1 / \|x^1\| = x^1$。

若令 $T = [\, y^1, y^2, \cdots, y^n \,]$ 則 T 便為所求之一正交方陣。

於是，至此我們對矩陣之對角線化可得一更普遍之定理：

若 A 是一個 n 階對稱實方陣，則可找到一個正交矩陣 T，使得 $T^{-1}AT$ 是一個對角線方陣（在此 A 的 n 個固有值可能不全相異）。

我們以歸納法證明此定理。假設當 $n \leq k$ 時定理成立。

設 $A = (a_{ij}) \qquad i, j = 1, 2, \cdots, k+1.$

設 λ_1 是 $\det(A - \lambda I_{k+1}) = 0$ 之任一根 $\qquad \lambda_1 \in \boldsymbol{R}$

而且存在 $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{k+1} \end{pmatrix}$ 使得 $A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{k+1} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{k+1} \end{pmatrix}$ $\quad u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_{k+1}^2 = 1$

$u_1, u_2, \cdots, u_{k+1} \in \boldsymbol{R}$

於是由剛才的推論得到，存在一個 $k+1$ 階的正交方陣 $S = (s_{ij})$ 使得

$$\begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \vdots \\ s_{k+11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{k+1} \end{pmatrix}$$

故

$$S^{-1}AS = S^*AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ 0 & \\ 0 & M \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} \qquad M \text{為一}(k+1) \times k \text{矩陣}$$

且 $(S^*AS)^* = S^*A^*(S^*)^* = S^*AS$ 故 S^*AS 是一對稱矩陣

故

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \\ 0 & B \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} \qquad B \text{為一} k \times k \text{方陣，且} B \text{是對稱方陣}$$

因此依歸納假設，必存在 $k \times k$ 正交方陣 R_1 使得

$$R_1{}^*BR_1 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & & & \\ & \lambda_3 & & \text{\Large 0} \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

故令

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & R_1 \\ 0 & \end{bmatrix} \qquad R\text{ 是一}(k+1)\times(k+1)\text{ 正交方陣}$$

$$R^*(S^*AS)R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & R_1{}^* \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & R_1 \\ 0 & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & R_1{}^*B \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & R_1 \\ 0 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \text{\Large 0} \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \lambda_{k+1} \end{bmatrix}$$

所以，若取 $T = SR$　則 T 爲所求之正交方陣。

因此，對於一般的二次式 $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \quad a_{ij} = a_{ji}$

若取 $A = (a_{ij})$ 則 A 爲一個對稱實方陣。由前述之討論，存在一個正交矩陣 T，使得

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \text{\Large 0} \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

所以　$Q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$= [x_1, x_2, \cdots, x_n]\, A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$=[\,x_1\,,x_2\,,\cdots,x_n\,]\,T\,(\,T^{-1}AT\,)\,T^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

$$=[\;\sum_{i=1}^{n}t_{i1}x_i\;,\;\sum_{i=1}^{n}t_{i2}x_i\;,\cdots\cdots,\;\sum_{i=1}^{n}t_{in}x_i\;]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}t_{i1}x_i\\ \sum_{i=1}^{n}t_{i2}x_i\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{n}t_{in}x_i\end{bmatrix}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\,(\;\sum_{i=1}^{n}t_{ij}x_i\;)^2$$

到此，對於一般二次式的化簡，我們可獲致最後的結論了！

若Q是一n個未知數的二次式$Q(\,x_1\,,x_2\,,\cdots,x_n\,)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\quad a_{ij}=a_{ji}$

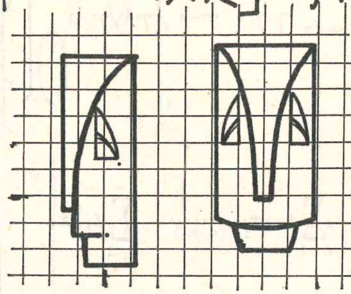
則必存在一正交實方陣$T=(\,t_{ij}\,)$及$\lambda_1\,,\lambda_2\,,\cdots,\lambda_n\in\boldsymbol{R}$（$\lambda_1\,,\lambda_2\,,\cdots,\lambda_n$不一定全相異）使得

$$Q(\,x_1\,,x_2\,,\cdots,x_n\,)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,(\,t_{1i}x_1+t_{2i}x_2+\cdots\cdots+t_{ni}x_n\,)^2$$

參考資料：

1. R. Bellman : Introduction to Matrix Analysis
2. 高中數學實驗教材第四冊。
3. 高中數學東華本第四冊。
4. 數學傳播季刊第一卷第二期。

一個關於「樣本大小之決定」的問題



作者：

李孟峯

在統計上經常利用抽樣得來的樣本參數（ sample parameter ）來估計母體參數（ population parameter ），由於樣本（ sample ）只是母體（ population ）的一部份，從樣本參數來估計母體參數，必然不能達到百分之百的正確。不過大部份的統計結果，並不一定需要得到一個和母體參數完全相同的數字。例如：國民的平均所得，太平洋中某種魚類的存在量，工廠產品中不良品所佔的比率……等，對這些問題而言，一個具有相當程度可靠性的近似值即可用來代替母體參數的眞值，而不失其代表性。換句話說，近似值只要能夠達到我們所要求的程度，就有其實用價值了。

由於抽樣受到機率因素的支配，所以必需考慮到估計值 $\hat{\theta}$ 會落在所要求的信賴區間（ coefidence interval ）$(\theta-B,\theta+B)$ 內的機率（即 $P\{|\hat{\theta}-\theta|<B\}$ 之值），這個 B 稱之爲估計誤差界限（ Bound on error of estimation ），B 的大小由我們的需要來決定。對於估計值 $\hat{\theta}$ 的取捨，通常要求 $\hat{\theta}$ 落在所允許的信賴區間 $(\theta-B,\theta+B)$ 的機率能達到一定的信賴係數（ coefficient of reliability ）$1-\alpha$，也就是在 $\hat{\theta}$ 能滿足 $P\{|\hat{\theta}-\theta|<B\}=1-\alpha$ 的條件下，我們願意接受以 $\hat{\theta}$ 做爲 θ 的估計值。

在一組隨機樣本中（可參閱師大數學第 11 期 P. 103），因爲樣本平均數（ sample mean ）的期望值等於母體平均數（ population mean ）（即 $E(\bar{y})=\mu$ 詳見下述定理），我們不妨直接利用樣本平均數來做爲母體平均數的估計值。現在就針對在利用這種估計方法之下來討論當母體個數爲 N 時，如何決定樣本大小。討論這個問題之前，首先敍述在抽樣理論中最基本且應用最廣的定理：

〔定理〕設從個數爲 N 的母體中，選取一個數目爲 n 的隨機樣本（取出不放回），則：

① 樣本平均數 $\bar{y}$ 的期望值 $E(\bar{y})=\mu$ （ $\bar{y}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$，$\mu$ 爲母體平均數）

② 樣本平均數 $\bar{y}$ 的變異數 $Var(\bar{y}) = \frac{\sigma^2}{n}(\frac{N-n}{N-1})$，（$\sigma^2$ 爲母體異數）

③ 樣本變異數 S^2 的期望值 $E(S^2) = \frac{N(n-1)}{n(N-1)}\sigma^2$

〔證明〕① $E(\bar{y}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}\right)$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} E(y_i)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\cdot n\cdot\mu$$

$$= \mu$$

② $Var(\bar{y}) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - E(\bar{y})\right]^2$

$$= E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - n\mu}{n}\right]^2$$

$$= E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)}{n}\right]^2$$

$$= \frac{1}{n^2}E\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)\right]^2$$

$$= \frac{1}{n^2}E\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2 + \sum_{i\neq j}^{n}(y_i-\mu)(y_j-\mu)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}E(y_i-\mu)^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j}^{n}E(y_i-\mu)(y_j-\mu)$$

$$= \frac{1}{n}E(y_i-\mu)^2 + \frac{n-1}{n}E(y_i-\mu)(y_j-\mu)$$

$\because$ $E(y_i-\mu)(y_j-\mu)$

$$= \sum_{i \neq j}^{N} (y_i - \mu)(y_j - \mu) \times \frac{1}{N(N-1)}$$

$$= \{ [\sum_{i=1}^{N} (y_i - \mu)]^2 - \sum_{i=1}^{N} (y_i - \mu)^2 \} \cdot \frac{1}{N(N-1)}$$

$$= (0 - N\sigma^2) \cdot \frac{1}{N(N-1)}$$

$$= - \frac{\sigma^2}{N-1}$$

$$\therefore \quad Var(\bar{y}) = \frac{1}{n}\sigma^2 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\sigma^2}{N-1}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

③ $\because \quad \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} [(y_i - \mu) - (\bar{y} - \mu)]^2$

$$= \sum_{i=1}^{n} [(y_i - \mu)^2 - 2(y_i - \mu)(\bar{y} - \mu) + (\bar{y} - \mu)^2]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu)^2 - 2(n\bar{y} - n\mu)(\bar{y} - \mu) + n(\bar{y} - \mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu)^2 - n(\bar{y} - \mu)^2$$

$$\therefore \quad E(S^2) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{n} E \left[\sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu)^2 - n(y - \mu)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} E(y_i - \mu)^2 - nE(\overline{y} - \mu)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[n\sigma^2 - n \cdot Var(\overline{y})\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[n\sigma^2 - \sigma^2\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\right]$$

$$= \frac{N(n-1)}{n(N-1)}\sigma^2$$

接下來分別就母體變異數σ^2已知或未知時來決定n之值。

(i) 當σ^2已知時，由柴比雪夫不等式(Tchebysheff's inequatlity)

$$P\{|\overline{y} - \mu| \leq k\sqrt{Var(\overline{y})}\} \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

今若所允許的誤差界限$B = k\sqrt{Var(\overline{y})}$

即 $B^2 = k^2\left(\frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}\right)$

$$n(N-1)B^2 = k^2\sigma^2 N - k^2\sigma^2 n$$

$$n\left[(N-1)B^2 + k^2\sigma^2\right] = k^2\sigma^2 N$$

$$n = \frac{k^2\sigma^2 N}{(N-1)B^2 + k^2\sigma^2}$$

$$= N - \frac{N(N-1)B^2}{(N-1)B^2 + k^2\sigma^2}$$

由這個結果顯然可以看出：n之大小受到k和B的影響。簡單的說，在特定的誤差界限(即B固定)的情況下，欲使$\overline{y} \in (\mu - B, \mu + B)$的機率達到更高的信賴 係數(即$1 - \frac{1}{k^2}$增大)，則必須增大樣本個數$n$。同樣的，在特定的信賴係數之下(即$k$固定)，欲使$\overline{y}$落在一個更小的信賴區間(即$B$變小)，也必須增加樣本個數$n$。

更進一步的，當樣本平均數$\overline{y}$呈常態分配(normal distribution)時，由「標準常態累積分配函數表」中，可查出信賴係數為$1 - \alpha$的標準化常態變值(standardized normal variate)$\tau_{\frac{\alpha}{2}}$，使得

$$P\{|\overline{y} - \mu| \leq \tau_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var(\overline{y})}\} = 1 - \alpha$$

例如：在信賴係數爲0.95時，$\tau_{\frac{0.05}{2}} = 1.96$

即取 $$n = \frac{(1.96)^2 \sigma^2 N}{(N-1)B^2 + (1.96)^2 \sigma^2}$$

則 $$Var(\bar{y}) = \left(\frac{B}{1.96}\right)^2$$

故 $$P\{\,|\bar{y} - \mu| \le B\} = 0.95$$

依據中央極值定理（central limit theorem），不論母體爲何種分配，只要樣本個數 $n \to \infty$，則 $\bar{y}_n$ 的機率分配以常態分配爲極限。在統計上一般當樣本個數 $n \ge 30$ 時，即視 $\bar{y}$ 呈常態分配，而不致影響估計的精確性。

〔例一〕某公司的會計小姐想估計該公司1000張帳單的平均帳款。由經驗知母體變異數 $\sigma^2 = 625$，且 $\bar{y}$ 呈常態分配，她希望在估計誤差界限 $B = 3$ 之下的信賴係數爲0.9544，則至少需抽出多少個隨機樣本？

〔解〕 $\bar{y}$ 爲常態分配，從標準常態累積分配函數表中查得 $1 - \alpha = 0.9544$ 時，$\tau_{\frac{\alpha}{2}} = 2.00$

故 $$n = \frac{4\sigma^2 N}{(N-1)B^2 + 4\sigma^2}$$

$$= \frac{4 \times 625 \times 1000}{999 \times 9 + 4 \times 625}$$

$$= 217.56$$

因此至少需抽出 218 個樣本。

(2) 當 σ^2 未知時，有時可用以前相同或類似母體的變異數來代替，或者先舉行試探性調查（pilot survey），先從母體中抽出 n_1 個樣本，並計算出樣本變異數 S_1^2，由於 $E(S_1^2) = \frac{N(n_1 - 1)}{n_1(N-1)}\sigma^2$，所以我們不以 S_1^2 做爲 σ^2 的估計值，而修正以 $S'^2 = \frac{n_1(N-1)}{N(n_1-1)} S_1^2$ 來做爲 σ^2 的估計值，由於受到 S'^2 也只是 σ^2 的估計量所影響，Cox. D. R（1952）導出能夠使抽樣結果達到預期精密度及信賴係數的樣本大小需增加 $\frac{2}{n_1}$ 倍，即

$$n = \frac{\alpha^2 S'^2 N}{(N-1)B^2 + \alpha^2 S'^2}\left(1 + \frac{2}{n_1}\right)$$

最後附帶說明的：「利用隨機樣本平均數 $\bar{y}$ 做爲 μ 的估計值，僅是對 μ 的估計

方法之一。也許利用其他抽樣原則與估計方法，來估計 μ 之值，僅需較少的樣本，即可在更小的信賴區間內，達到更高的信賴係數，那麼這樣的估計方法，顯然比利用 $\bar{y}$ 來估計要好。設計一個較好的估計方法，是統計學上的另一個課題，有興趣的同學不妨深入的去探討！

參考資料：

1. Elementary Survery Sampling. By Mendenhall Ott Scheaffor
2. 抽樣理論及其應用 魏應澤著
3. 統計學原理 陳超塵著

——本文作者爲 67 級系友，現任教於台北縣海山國中——

數學上沒有一項發現以及相關的問題得到演繹邏輯的助力。發現得自創造性想像，從想像先建立似乎像眞的眞理，有時再經過類比或是完美理想化的指引，但是完全沒有受到演繹邏輯依據的支持。等到發現完成，邏輯就參加進來加以管制，邏輯最後決定這一發現是眞正的眞理或者是幻覺。雖然任務也很重大，不過祇是次要的——亨利・萊白格（Honri Lebesgne）；摘自「新數學爲何失敗」

保險與貸款

指導老師　林福來

陳天士

如果保險公司以純服務為目的時，投保者所需繳之費用和現在一般保險公司所訂立保費的關係如何？若每月不斷的借錢而後逐月的還貸要如何還呢？我現在就以此問題來做個探討。

一、人壽保險

1. 定期保險：即保險契約中，訂立一定時期為保險之有效期間，如被保險人在期內死亡，保險公司即付被保險人定額之保險金。如過期不死，契約自然終止，保險公司無給付義務，亦不退還已收之保險費。

若某君現年25歲，欲投10萬元之保險，以五年為期，期滿契約即行終止。每年年初繳保費，若發生意外死亡則其受益人於年底領回保險金10萬元。保險期間每年所繳之保費相同。

如果我們要考慮每年所繳之保費，必須要考慮死亡率、預定利率及附加率（一些額外費用）。

（i）　利率：以現行銀行年利率9.5％為準。

（ii）　死亡率：死亡率的統計法有很多種，處理壽險問題所用之死亡率等於每個年齡一年中死亡人數和年初人數之比。（通常是固定某些人，而需幾年所做成的）如表A

年　　齡	生存者之人數	死 亡 人 數	死 亡 率
25	9,575,636	18,481	0.00193
26	9,557,155	18,732	0.00196
27	9,538,423	18,981	0.00199
28	9,519,442	19,324	0.00203
29	9,500,118	19,760	0.00208
30	9,480,358	20,193	0.00213

表　A

定義六個事件　$i=0,1,2,3,4$

E_{Hi}：在 $25+i$ 歲死亡的事件

E_6：活到 30 歲者

由表 A 知：$P_r(E_1)=0.00193,\quad P_r(E_2)=0.00196,\quad P_r(E_3)=0.00199$

$P_r(E_4)=0.00203,\quad P_r(E_5)=0.00208,$

$$P_r(E_6)=1-\sum_{i=1}^{5}P_r(E_i)=0.99001$$

令保費爲 r，如果此投保人在 25 歲死亡，保險公司就只收了一期保險費，所以到年底給付保險時，對此人而言公司只收入 $r(1+0.095)^5=1.5742386r$ 但需付給 10^5 元。

同理可得下表：

受險者死亡年齡	保　險　公　司　所　得	保險公司支給
26 歲	$\sum_{i=1}^{2} r(1+0.095)^{6-i}=3.0118995r$	10^5
27 歲	$\sum_{i=1}^{3} r(1+0.095)^{6-i}=4.3248927r$	10^5
28 歲	$\sum_{i=1}^{4} r(1+0.095)^{6-i}=5.5239177r$	10^5
29 歲	$\sum_{i=1}^{5} r(1+0.095)^{6-i}=6.6189177r$	10^5
30 歲後	$\sum_{i=1}^{6} r(1+0.095)^{6-i}=6.6189177r$	0

表　B

我們記 x_j 爲受險者在受險期之第 j 年死，保險公司所損失的數額，由前面我們得知：

$$x_j=10^5-\sum_{i=1}^{j} r(1+0.095)^{6-i}\qquad j=1,2,3,4,5$$

而 $x_6 = -\sum_{i=1}^{5} r(1+0.095)^{6-i} = -6.6189177r$

x 爲隨機變數，而 x_j（$j=1,2,\cdots 5$）表受險者於受險期之第 j 年死亡者，保險公司所虧之額。x_6 表於此期中平安者保險公司所虧之額。

$$E(X) = \sum_{j=1}^{6} x_j P_r(X = x_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{6} x_j P_r(E_j)$$

$$= 999 - 6.5704746r$$

當 $E(X)=0$ $\qquad r = 152.04381$

由上我們得知此保費 r 是忽略了保險公司之員工薪金、廣告宣傳、辦公場所的費用、公司的一些業務經費及公司的利益……等等。

現在跟第一人壽保險公司 5 年一期保額十萬的定期保險比較。第一人壽此種保險每年需繳 1880 元。此值與我們所算得 r 所差之數額卽爲公司經營所需之額及公司利益。

或許有人會想，我們繳之保額若存於銀行所得之利益必比保險公司多，爲何有那麼多人願意投保呢？大概是人的通性吧！怕那一天發生了萬一時不知怎麼辦？或者要滿足“自己的生命比別人可貴”心理。(因爲保險公司不希望你發生意外，且又會要投保者去健康檢查)

2. 再看另一種型式的保險：

五年還本：卽被保險人所投保之期限往往是終身的而在投保期間發生意外，可領回保險額，保險效力自行終止，若沒有意外每五年保險公司將所保額之百分之十或者百分之十五付給被保險人。

於此我們所需要之條件是死亡率、利率及平均壽命

(i) 利率和前面同。

(ii) 死亡率如表D。

年　齡	年中人口		死亡人數	粗死亡率
	人　數	百分比		
總　計	16,660,658	100 %	78,638	4.7199×10^{-3}
0 ～ 4	1,838,706	11.04	1,637	8.9030×10^{-4}
5 ～ 9	1,888,516	11.34	968	5.1257×10^{-4}
10 ～ 14	1,986,722	11.92	882	4.4394×10^{-4}
15 ～ 19	1,960,005	11.76	1,841	9.3928×10^{-4}
20 ～ 24	1,802,538	10.82	2,274	1.2615×10^{-3}
25 ～ 29	1,415,846	8.5	1,893	1.3370×10^{-3}
30 ～ 34	903,512	5.42	1,433	1.5860×10^{-3}
35	920,744	5.53	2,073	2.2514×10^{-3}
40	826,918	4.96	2,905	3.5130×10^{-3}
45	839,086	5.04	4,241	5.0543×10^{-3}
50	714,159	4.29	5,555	7.7783×10^{-3}
55 ～ 59	537,217	3.22	6,457	1.2023×10^{-2}
60 ～ 64	405,328	2.43	7,733	1.9078×10^{-2}
65 ～ 69	289,329	1.74	8,772	3.0318×10^{-2}
70 ～ 74	176,912	1.06	8,720	4.9345×10^{-2}
75 ～ 79	96,408	0.58	7,593	7.8759×10^{-2}
80 ～ 84	40,377	0.24	4,827	1.1954×10^{-1}
85 ～ 89	14,148	0.08	2,587	1.8285×10^{-1}
90*	4,387	0.03	1,238	2.8219×10^{-1}

表　C

年　齡	粗死亡率	（實用）死亡率
總　計	8.49966×10^{-2}	99.417％
25～29	1.3370×10^{-3}	1.5735×10^{-2}
30～34	1.5860×10^{-3}	1.8662×10^{-2}
35～39	2.2514×10^{-3}	2.6497×10^{-2}
40～44	3.5130×10^{-3}	4.1745×10^{-2}
45～49	5.0543×10^{-3}	5.9789×10^{-2}
50～54	7.77783×10^{-3}	9.1545×10^{-2}
55～59	1.2023×10^{-2}	1.455×10^{-1}
60～64	1.9078×10^{-2}	2.295×10^{-1}
65～69	3.0318×10^{-2}	3.652×10^{-1}

表　D

表C和表A比較，死亡率之計算方法不同。表A乃是固定一些人而逐年做統計。此種死亡率象徵著：一個人一生中在各年齡中死亡的可能性，表C乃是固定某一年而依照人口組成及各年齡中死亡人數來計算的。此種死亡率是表示在同一年齡中人數可能死亡的機率。在保險中以表A爲準計算較爲妥當，不過我們手邊沒這種資料。不過表A與表C相差極微，所以我們用表D來代替表A類型之死亡率。

我們之所以要將表C中之粗死亡率改爲實用死亡率，乃是爲了配合我們要從25歲開始投保之故。既然要從25才開始，對投保者個人而言25歲之前死亡率自然爲0，而人之平均壽命爲70歲（根據統計男67.9歲，女72.9歲）當然也有70多歲的人。但爲了簡化問題，暫時假設終身爲70大限，令x_j表保險者在第j期（每期五年）死去的事件，保險公司所賺得的錢，由前面我們可得知：對每個j而言，s表開始投到平均壽命之年限

$$x_j = \{ r(1.095)^{s-5j} [\sum_{i=1}^{5(j-1)+1} (1.095)^{(5j+1)-i} + \sum_{i=1}^{(j-1)5+2} (1.095)^{(5j+1)-i} + \sum_{i=1}^{(j-1)5+3} (1.095)^{(5j+1)-i} + \sum_{i=1}^{(j-1)5+4} (1.095)^{(5j+1)-i} + \sum_{i=1}^{(j-1)5+5} (1.095)^{(5j+1)-i}] - 10^5 -$$

$(j-1)10^4\}\quad j=1,2,\cdots\cdots,9$

X爲隨機變數，而 x_j 表保險人於投保後第 j 期死亡的事件。因此保險公司的收益期望值爲

$$E(X)=\sum_{j=1}^{9}x_jP_r\ (X=x_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{9}x_jP_r\,(E_j)$$

$$=3429.8174r-560035.22$$

當 $E(X)=0$ $\quad r=163.28426$

再跟第一保險公司養老終身還本比較，這也是以五年爲一期保額 10 萬元，還本率爲 10％每年需繳 3320 元。由上我們得知若保險公司以純服務的態度來經營和以營利所須繳的費用相差十倍以上甚至於二十倍。其相差之額會如此大，是因爲公司除了考慮公司經營的業務費用及紅利外，還要考慮在台灣投保者並非一般人而是一些較有問題者，對於這類人而言其死亡率必較高。

二、貸款：

若現在我們要經營一家工廠，每接到一百萬元的訂單，必須向銀行貸 70 萬元來當做生產的資金，如原料、機器、員工薪金、廣告推銷、水電……等等。這 70 萬元的貸款方式是剛剛開始時需 30 萬元，下個月需 20 萬元以後四個月每月皆要 5 萬元。

而每貸 1 萬元，需在 11 個月內還清，每個月還 1 千。

如果我們的工廠在最初十個月，每個月皆收到 200 萬元之訂單，以後產品好有信用，每月均穩定地收到 300 萬元的訂單，那麼開始經營後，第 i 個月需繳多少貸款呢？

設 $a=(a_0,a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots)$，$b=(b_0,b_1,b_2,b_3,\cdots\cdots)$爲兩個數列

定義： $a\ast b$ 爲另一數列 $c=(c_0,c_1,c_2,\cdots\cdots)$使得

$$c_r=a_0b_r+a_1b_{r-1}+a_2b_{r-2}+\cdots\cdots+a_ib_{r-i}+\cdots\cdots+a_{r-1}b_1+a_rb_0$$

$$=\sum_{i=0}^{r}a_ib_{r-i}$$

工廠還貸款的問題可以用此運算來解決。

將貸款額列成數列 a。（以萬元爲一單位）

$$a_r = \begin{cases} 30 & r = 0 \\ 20 & r = 1 \\ 5 & 2 \leq r \leq 5 \\ 0 & r \geq 6 \end{cases}$$

設數列 $b = (b_0, b_1, b_2, \cdots\cdots b_r \cdots\cdots)$ 中的 b_r 代表每貸 1 萬元，在第 r 個月需繳的貸款。（以萬元爲單位）

$$b_r = \begin{cases} 0 & r = 0 \\ 0.1 & r = 1, 2, \cdots\cdots, 11 \\ 0 & r \geq 12 \end{cases}$$

所接到之訂單額亦列一數列：（以百萬元爲單位）

$$d_r = \begin{cases} 2 & 0 \leq r \leq 9 \\ 3 & r \geq 10 \end{cases}$$

考慮 $a * b = c$ 先看看 c_r 的意義：以 c_3 爲例

因爲 $c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0$

$a_0 \cdot b_3$ 表第零個月所借的 30 萬在借款後三個月還之額 30×0.1

$a_1 \cdot b_2$ 表第 1 個月所借的 20 萬在借款後二個月還之額 20×0.1

$a_2 \cdot b_1$ 表第二個月所借的 5 萬在借款後一個月還之額 5×0.1

$a_3 \cdot b_0$ 表第三個月所借的 5 萬在借款那一個月還之額 5×0

所以 c_3 是 5.5 萬

因此 $a * b = c = (0, 3, 5, 5.5, 6, 6.5, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 4, 2, 1.5, 1, 0.5, 0, 0, \cdots\cdots)$

其中 c_r 表示第 1 個月若收到一百萬訂單時以後第 r 月要還的金額。

再考慮：$d * (a * b) = e$ 同樣先看 e_r 的意義，以 e_3 爲例

因爲 $e_3 = d_0 c_3 + d_1 c_2 + d_2 c_1 + d_3 c_0$

$d_0 \cdot c_3$ 表第零個月所接訂單之三個月後要還 $2 \times 5.5 = 11$

$d_1 \cdot c_2$ 表第一個月所接訂單之二個月後要還 $2 \times 5 = 10$

$d_2 c_1$ 表第二個月所接訂單之一個月後要還 $2 \times 3 = 6$

$d_3 c_0$ 表第三個月所接訂單的那個月所要還 $2 \times 0 = 0$

所以 e_3 是 27 萬

因此 $d * (a * b) = e = (0, 6, 16, 27, 39, 52, 66, 80, 94, 108, 122, 139, 152, 161.5 \cdots\cdots)$

其中 e_r 表示工廠配合訂單，開始經營後第 r 個月需繳的貸款。

參考資料：1. Finite Mathematics Allyn and Bacon, Thomas & Thomas.

2. Introduction to discrete Mathemtics C.L.Liu.

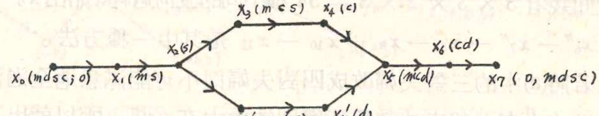
渡河風波

指導老師：林福來
張淑珠

某人帶著一隻狗、一隻羊以及一袋白菜欲擺渡過河。因爲船很小，他每次只能送一樣過河，同時，他不能讓狗和羊單獨在一起，也不能讓羊和白菜單獨留下；爲了決定他應該怎樣做，我們可以用一圖形來描述他可能的安排法。令一圖形的頂點代表所有這四樣——人、狗、羊、菜間在擺渡過程中在一起的狀況。例如：人、狗、羊和白菜開始時全部在河的一邊，這是開始狀況；人、狗、羊和白菜最後全在河的另一邊，這是最終狀況；人、狗、羊在河的一邊而白菜在另一邊，這是中間的可能狀況。兩頂點之間，如果此人將一頂點的狀況擺渡一次，變成另一頂點的狀況，那這兩個頂點之間就有一邊相連；反之亦然。這樣造出的圖形，同時帮此人求出，所有可能的渡河方法。

令 x_0 表起始狀態，以有序對（ mdsc , O）表 x_0 ， x_i 表對岸的狀態， $i=1,2,\cdots$ 以 m 表人， s 表羊， d 表狗， c 表白菜。

因爲羊既不能與狗獨處又不能與白菜在一起，所以此人須先送羊到對岸，以 x_1（ m、s ）表人與羊到了對岸而狗與菜仍在原處，由 x_1（ m、s ）到 x_2 (s) 表人獨自渡河回原處，等等。現在以圖形來表示可能的渡河方法：



其中由 x_2 到 x_3 或 x_3' 表有二種運送法； x_2 到 x_3 表先運白菜再運狗，而 x_2 到 x_3 則表先送狗過去再運白菜。

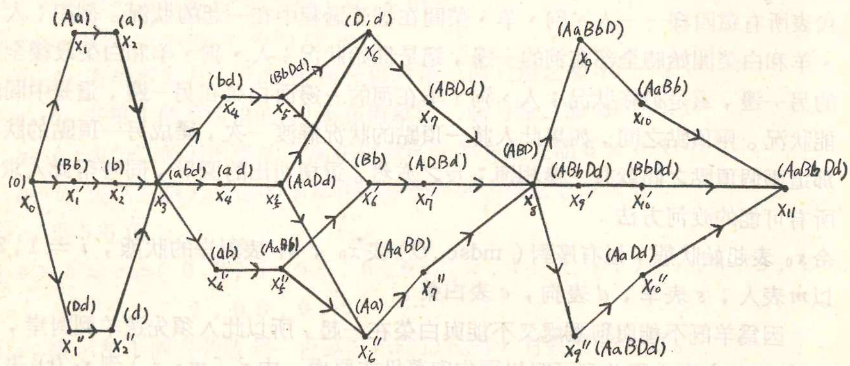
由上題可推廣到一些較繁複的現實問題上，讓我們來看看由於一群愛吃酷的丈夫所造成的渡河麻煩。

有三對夫婦一起旅行，有一天來到一河邊，河邊有一條小船，每次只能帶兩人過河。這時過河如何過法變成很複雜，因爲三位做丈夫的酷勁很大，絕不能忍受自己不在場時，太太與別的男人在一起（即使此男人的太太也在場）。(a)你能帮這三對夫婦設計一種渡河過程嗎?總共的渡河方式有多少種呢？(b)如果(a)中有四對夫婦，則此四對夫婦能滿意的過河嗎？(c)如果(a)中有四對夫婦，且船每次可帶三人過，則在此條件下，你能帮忙設計一種渡河過程嗎？

同樣以圖形來處理(a)，(b)，(c)，分別討論於后：

(a) 令這三對夫婦爲 Aa，Bb，Dd；其中的 $A\ B\ D$ 表先生而 $a\ b\ d$ 則分別表 $A\ B\ D$ 的太太。

令 x_0 表起始狀態，x_i 表在河的對岸的情形。例如，$x_i(a,b)$ 表 $a\ b$ 在對岸而其餘的仍在原處。而 $x_i(a,b) \to x_{i+1}(AaBb)$ 表由 x_i 經一次運送（將 $A\ B$ 送到對岸）而成 x_{i+1} 的情形。現在以圖形表示所有渡河方法：



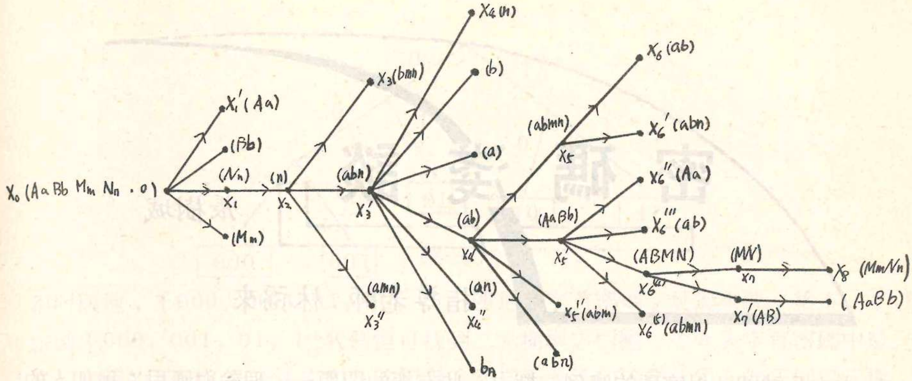
由圖形可知共有 $3\times3\times2\times3=54$ 種不同的渡河過程。如由 $x_0 \to x_1 \to x_3 \to x_4{}' \to x_5{}' \to x_6{}'' \to x_7{}'' \to x_8 \to x_9 \to x_{10} \to x_{11}$ 是其中一種方法。

(b) 若將(a)中的三對夫婦改成四對夫婦則不可能滿意地全過河。原因是每位太太除了與其丈夫在一起之外就只能與別的太太在一起，所以就出了一些永遠解不開的麻煩。我們由下圖就可看出麻煩所在了。

令 Aa、Bb、Mm、Nn 表四對夫婦，大寫的表先生。

由 $x_3{}'(abn) \to x_4(n)$ 又回復到 x_2 情形，故不需再重複討論，$x_3{}' \to x_4{}''(an)$ 類似於 $x_3{}' \to x_4{}'(ab)$；由 $x_4{}'$ 到下一步只有三種相異情形兹將分別討論：

(1) $x_4{}' \to x_5(ab\ mn) \to x_6$ 則回復到 $x_4{}'$ 的情形。



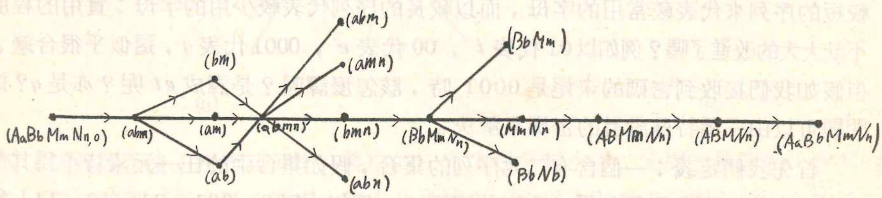
(2) $x_4' \to x_5\,(abmn) \to x_6'$ 則回復到 x_3' 的情形。

(3) $x_4' \to x_5'\,(AaBb) \to x_6''\,(Aa)$ 則回返到 x_1 的情形。

(4) $x_4' \to x_5' \to x_6^{(4)}\,(ABMN)$ 表四位男士到了對岸，若要女生渡河到對岸則必須回去二位男士再讓其餘二位男士的太太渡河，因此又回復到 x_5' 的情形。

由上圖可看出四對夫婦要渡河又須考慮到四位丈夫的愛吃醋個性，因此這些人永遠都無法滿意的過河，除非這四位先生不再吃醋了，但畢竟「江山易改，本性難移」若要他們通通過河只好勉强船多負載一些，假設現在船每次可多運送一人，那麼情形是否改觀了呢？

答案是若一次可運送三人，就可完成任務，試舉一種方法如下圖：



由圖形可知，若一次可運送三人渡河，將有許多種不同的方式。

雖然許多問題都可用證明或靠一些定理、公式解答，但本文强調的是以圖形解題。

從上面的例子可知，利用圖形解題不但能化繁爲簡使人易於了解，並且不需藉助許多定理就可解答問題。諸位若有興趣不妨畫畫看五對、六對……夫婦的渡河情形。

〔參考資料〕 C. L. Liu：Elements of Discrete Mathematics.

密碼淺談

張樹城

指導老師 林福來

本文「試圖」以密碼的實例，探討一些有趣的問題── 理論與應用；猶如人的双足，一前一後，交互前進；偶而有內八字或外八字的傾向，亦屬常理。

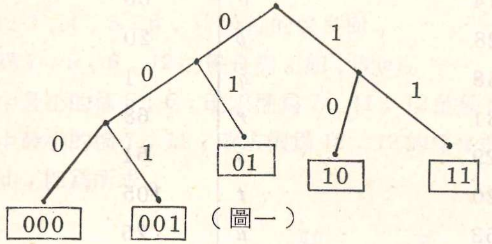
一、二元樹與字首密碼：

一談到密碼，就會連想到摩爾。在摩爾密碼當中，每一個英文字母皆對應一特定的二元序列：以"一"及"。"所成的序列。爲方便起見，我們以0，1分別代表"一"及"。"。

很明顯地；$2^4 < 26 < 2^5$，所以我們只須以二元5一序列，即可以把26個字母一一對應：在傳送消息時，只要把某些字母所對應的二元5一序列傳遞出去，對方即可依此譯碼：而不會有任何困難。但在英文字母中，每一個字母使用的次數並不是很平均：例如t，e較爲常用，q，z就不常碰到了。於是我們就想到假如能用較短的序列來代表較常用的字母，而以較長的序列代表較少用的字母：實用的程度不就大大的改進了嗎？例如以01代表t，00代表e，0001代表q，這似乎很合適。但假如我們接收到密碼的末尾是0001時，該怎麼譯呢？是譯成et呢？亦是q？這問題可以由一種特殊設計的密碼來解決。

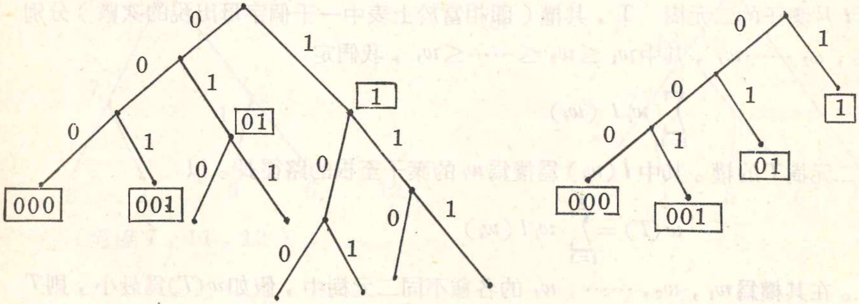
首先我們定義：一個含有二元序列的集合，假如集合中的任一元素皆不爲其他元素的字首，則我們稱其爲一「字首密碼」。例如{000，001，01，10，11}爲一字首密碼：但{1，00，01，0001，000}則否，有了字首密碼以後；我們將證明當收到一串以字首密碼爲範圍的二元序列時，恒可把這一串的二元序列分割而完成譯碼工作。

在此我們試從二元樹和二元序列的相通處，找出某種規則，從而探討其與字首密碼的關係。首先，我們可以從一「二元樹」中，直接得到一字首密碼，給定一二元樹，從每一枝節分出來的二邊分別標上0和1，則每片葉子（即出去次數爲0）可用二元序列表示：其順序從根依序至葉子。如圖(一)：



（圖一）

很明顯地，{ 000，001，01，10，11 } 即是一字首密碼。反過來說，給定一字首密碼 { 000，001，01，1 }我們恒可找到二元樹與之對應。今 h 表字首密碼中最長二元序列的長度，依上法畫出其路徑長（從根至葉子的邊數）為 h 的正則二元樹，（即每一片葉子的路徑長皆為 h ），然後在每一葉子及枝節標上所屬的二元序列：把字首密碼中所對應的二元序列用框框圍起來，如圖二(a)，而後把框起來的枝節的後代去掉，即是我們所需要的：如圖二(b)。



(a)　　　　　（圖二）　　　　　(b)

有了這些概念後，我們就可把一長串的二元序列分割：從二元樹的根開始，收到的二元序列如遇到 0 就沿二元樹中標上 0 的邊走，如為 1 則沿二元樹中標上 1 的邊走，如此，直到葉子：我們即知到此該做一分割，而後再從頭開始，直到把這一串的二元序列分割完成。

(二)優良樹與密碼的制定：

我們不妨回憶一下，英文字母中既然使用的次數不平均；那麼我們如何利用二元樹（如此才能符合字首密碼的條件）來制定長、短不一的二元序列呢？於是我們將介紹下列方法：

我們從統計資料對字母使用的情形得到如表所示：

	W（一千個字母中出現次數）		W（一千個字母中出現次數）
a	82	n	71
b	14	o	80
c	28	p	20
d	38	q	1
e	131	r	68
f	29	s	61
g	20	t	105
h	53	u	25
i	63	v	9
j	1	w	15
k	4	x	2
l	34	y	20
m	25	z	1

設有 t 片葉子的二元樹 T，其權（即相當於上表中一千個字母出現的次數）分別爲 w_1，ω_2 ……w_t，其中 $w_1 \leq w_2 \leq \cdots\cdots \leq w_t$，我們定

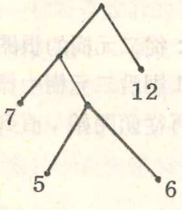
$$\sum_{i=1}^{t} w_i \, l\,(w_i)$$

爲此二元樹 T 的權。其中 $l\,(w_i)$ 爲權爲 w_i 的葉子至根的路徑長。以

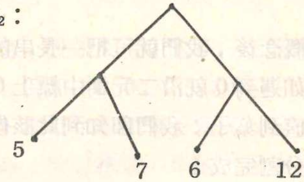
$$w\,(T) = \sum_{i=1}^{t} w_i \, l\,(w_i)$$

表之。在其權爲 w_1，w_2，……，w_t 的各種不同二元樹中，假如 $w(T)$ 爲最小，則 T 被稱爲一優良樹。如：

T_1：



T_2：



考慮 T_1，T_2。不難看出 T_1 即是我們要找的以 5，6，7，12 爲權的優良樹。那麼我們如何去找一優良樹呢？

設 T' 爲以權 $w_1 + w_2$，w_3，……w_t 的優良樹，我們恒可找到以 w_1，w_2，……w_t 爲權的優良樹 T。

其中$w_1 \le w_2 \le \cdots\cdots \le w_t$ 且w_1，w_2爲兄弟（即由同一枝節分出來）因此，我們只要把造 t 個權的優良樹，轉換成造 $t-1$ 個權的優良樹；如此一直求下去，即可找出此 t 個權的優良樹。現以下列說明之：

欲求以3，4，5，6，12爲權的優良樹。

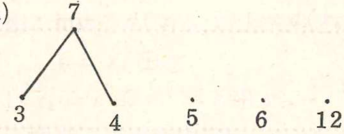
(a)改求權爲7，5，6，12的優良樹。如下圖(a)。

(b)考慮(a)中最小的權5，6，改求權爲7，11，12的優良樹如下圖(b)。

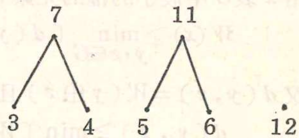
(c)考慮(b)中最小的權7，11，改求權爲18，12的優良樹如下圖(c)。

(d)如下圖(d)，即爲所求。

(a)

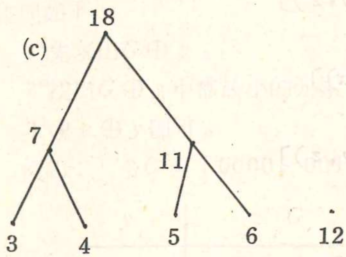


(b)



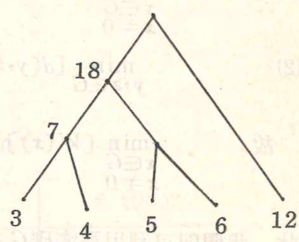
（考慮7，5，6，12）

(c)



（考慮7，11，12）

(d)



㈢譯碼估計：

萬一傳送過程中，受到外界干擾：原來的0可能收到時爲1，或原來爲1的收到時可能爲0：那麼我們如何去做有效的估計呢？

令A表所有二元n一序列的集合，我們定義在A上的二元運算$\oplus$爲：

$x \oplus y$表一二元n一序列——在x和y相同位置上不同的數時標上1，相同時則標上0，如

$$x = 00101, \quad y = 10110, \quad 則 x \oplus y = 10011.$$

很顯然地，「$\mathbf{0}$」（該序列皆爲0）表A的單位元素，每一序列皆爲其自身的反元素，所以$(A, \oplus)$可表一群，假如X是A中的一密碼字（或序列），我們規定X的權爲X中1的個數，並以$W(x)$表之。

如$x = 11100$，　$y = 10101$，　$z = 11000$　則

$$W(x)=W(y)=3\ ,\quad W(z)=2\ .$$

因此我們就可定義A中的任二元素的距離爲

$$W(\,x\oplus y\,)\ ,\qquad x\ ,\ y\in A$$

以$d(\,x\,,y\,)$表之：卽$d(\,x\,,y\,)=W(\,x\oplus y\,)$

我們再來看一個和譯碼估計有密切關係的塊密碼G（由等長的密碼字組成）。令G表A的一子群，我們定其距離爲G中任二元素距離最小的；如此我們必須計算G上的任二元素的距離，才能找出其距離。所以我們將證明G的距離等於G中最小的權（除單位元素外）。

令x表G中最小的權的元素。

$$W(x)\geq\min_{y,z\in G}\left[\,d(\,y\,,\,z\,)\,\right]\cdots\cdots\cdots(1)$$

又$d(\,y,z\,)=W(\,y\oplus z\,)$且$y\oplus z\in G$

因此 $$d(\,y\,,\,z\,)\geqq\min_{\substack{x\in G\\ x\neq 0}}\left[\,W(x)\,\right]\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1) $$\min_{\substack{x\in G\\ x\neq 0}}\left[\,W(x)\,\right]\geqq\min_{y,z\in G}\left[\,d(\,y\,,z\,)\,\right]$$

由(2) $$\min_{y,z\in G}\left[\,d(y,z)\,\right]\geqq\min_{\substack{x\in G\\ x\neq 0}}\left[\,W(x)\,\right]$$

故 $$\min_{\substack{x\in G\\ x\neq 0}}\left[\,W(x)\,\right]=\min_{y,z\in G}\left[\,d(\,y\,,z\,)\,\right]$$

在此，我們卽可利用群密碼G來進行譯碼估計。

令$x_1\,,\,x_2\cdots x_N$表G中的密碼字，y表接收到的密碼字，考慮條件機率。

$$P(\,x_i\,/\,y)\ ,\quad i=1\,,2\,,\cdots,\,N\ .$$

其中x_i爲原先所傳送的密碼字。

假如$P(x_k/y)$是所有$P(x_i/y)$中最大的，則x_k卽是原先所傳送的密碼字，這就是所謂——最大近似譯碼估計法，但$P(\,x_i\,/\,y\,)$我們不易找出，因此可轉換成另一看法；設在密碼字中每一位置所發生的錯誤是獨立的；令發生錯誤的機率爲P，則我們有下列關係：

$$P(\,x_i\,/y)=(\,1-P\,)^{n-t}\,P^t.$$

其中$t=d(\,x_i\,,\,y)$

1° 若$P<\dfrac{1}{2}$， $t_1<t_2$ 則

$$(1-P)^{n-t_1}\ P^{t_1}>(1-P)^{n-t_2}\ P^{t_2}$$

當t愈小，則$P(\,x_i\,/\,y)$愈大。

根據最大近似譯碼估計，假如$\min[d(x_i, y)] = d(x_k, y)$，則 x_k 即是原先所傳送的密碼字。這就是——最小距離譯碼估計。

2° 考慮$P > \frac{1}{2}$時，即錯誤的機率大於$\frac{1}{2}$，如此，也就沒有估計的價值了。

好了，利用上法，令 y 爲接收到的密碼字，

$$\because d(x_i, y) = W(x_i \oplus y), \quad x_i \in G$$

$$x_i \oplus y \in G \oplus y$$

令 e 表$G \oplus y$中最小的權的元素，依最小距離譯碼估計。

假如：$\min[d(x_i, y)] = d(x_k, y)$.

則 $\quad e = x_k \oplus y$

所以 $x_k = e \oplus y^{-1} = e \oplus y$.

故$e \oplus y$即是 y 原來的密碼字。

假如 y 是G 中的一元素，則 y 即可看成原來所傳送的密碼字了。現我們把此方法作一整理如下：

1°先求出$G \oplus y$。

2°找出$G \oplus y$中權最小的元素，令其爲 e。

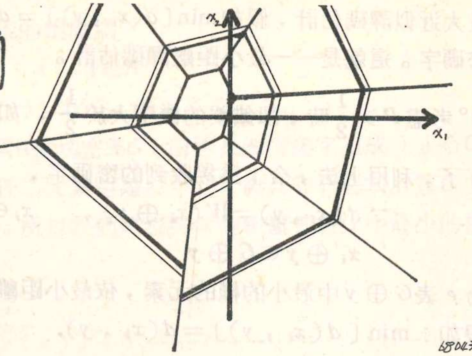
3°求 $e \oplus y$ 即可。

例如：　令$G = \{0000, 0011, 1101, 1110\}$

y	$G \oplus y$	$e \oplus y$
1011	1000, 1011, 0101, 0110	0011
1010	0100, 0111, 1001, 1010	1110
1111	0010, 0001, 1111, 1100	1101(1110)

參考資料：C. L. Liu：Elements of Discrete Mathematics.

網路流程與計畫評核術



指導老師：吳森原

作者：呂玉琴

在上一期師大數學的“網路上的極大流程和極小切問題”一文中，我們曾經討論到如何用“ Ford-Fulkerson 標示技術”來求一個網路的極大流程，但當時所討論的網路，它的每一線只有一個數字表示該線的容量，也就是每一線只有最大容量（亦稱爲上界）的限制，如果我們把網路上的每一線同時加以最小容量（亦稱爲下界）的限制時，我們又該如何處理呢？在本文中，我們除了要討論如何解決這種上、下界的網流問題外，還要討論如何求臨界路線（ critical paths ）及其應用。

首先討論在有上、下界的網路中，如何求其極大流程：

在一個網路中，如果網路上的每一線 A_{ij} 有最大容量 a_{ij} 及最小容量 b_{ij} 的限制時，令 $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$，則我們可以將原網路變化成每一線 A_{ij} 只有最大容量 c_{ij} 的新網路，此新網路我們可以用“ Ford-Fulkerson 標示技術”求出其極大流程及每一線 A_{ij} 的流程 x'_{ij}（$x'_{ij}=c_{ij}-c'_{ij}$，此 c_{ij}' 爲在無法用標示技術求得新路線的網路中的線 A_{ij} 的容量），令 $t_{ij}=x'_{ij}+b_{ij}$ 則原網路的每一線 A_{ij} 有實際流程 x_{ij}（$b_{ij}\leq x_{ij}\leq c_{ij}$），且 Σx_{it} 爲原網路的極大流程。

〔例題一〕：求圖㈠的極大流程爲何？

解　法：

1° 在圖㈠中，線 A_{s1} 有最大容量 $a_{s1}=4$ 及最小容量 $b_{s1}=1$，則在變化爲能用“ Ford-Fulkerson 標示技術”處理的新網路時，根據 $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$ ，我們可以得到線 A_{s1} 只有最大容量 $c_{s1}=4-1=3$ 的限制。同理，根據 $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$，我們可以求得新網路中各線的最大容量，而得圖㈡。

2° 在圖㈡中，用“ Ford-Fulkerson 標示技術”得到路線 1：$N_s-A_{s1}-N_1-A_{12}-N_2-A_{23}-N_3-A_{3t}-N_t$，取 $\varepsilon_1=\min(3,5,7,9)=3$ ，且得到新網路，如圖㈢。

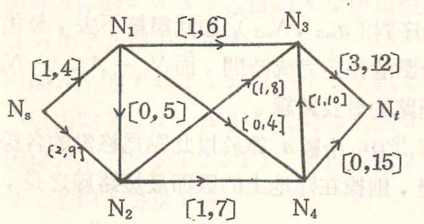
3° 反覆使用“標示技術”而在圖㈢中得路線 2 ：$N_s-A_{s2}-N_2-A_{23}-N_3-A_{3t}-N_t$，取 $\varepsilon_2=\min(7,4,6)=4$ ，得新網路如圖㈣。在圖㈣中得路線 3 ：N_s-

$A_{s2} - N_2 - A_{24} - N_4 - A_{43} - N_3 - A_{3t} - N_t$，取 $\varepsilon_3 = \min(3, 6, 9, 2) = 2$，得新網路如圖㈤。在圖㈤中得路線 4：$N_s - A_{s2} - N_2 - A_{24} - N_4 - A_{4t} - N_t$，取 $\varepsilon_4 = \min(1, 4, 15) = 1$，得新網路如圖㈥。

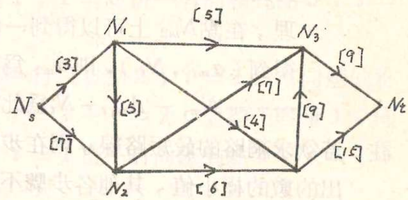
4° 在圖㈥中，用標示技術已無法求得新路線，則根據 $x'_{ij} = c_{ij} - c'_{ij}$ 及 $x_{ij} = x'_{ij} + b_{ij}$，我們可以得到：$x_{s1} = x'_{s1} + b_{s1} = (c_{s1} - c'_{s1}) + b_{s1} = (3-0) + 1 = 4$，同理可得

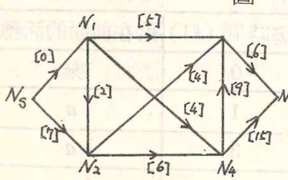
$x_{s2} = (7-0) + 2 = 9$	$x_{12} = (5-2) + 0 = 3$
$x_{13} = (5-5) + 1 = 1$	$x_{14} = (4-4) + 0 = 0$
$x_{23} = (7-0) + 1 = 8$	$x_{24} = (6-3) + 1 = 4$
$x_{3t} = (9-0) + 3 = 12$	$x_{43} = (9-7) + 1 = 3$

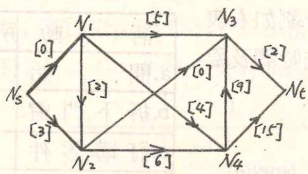
$x_{4t} = (15-14) + 0 = 1$ 以上各 x_{ij} 爲原網路中各線 A_{ij} 的實際流程，如圖㈦所示，且原網路的極大流程爲 $x_{3t} + x_{4t} = 12 + 1 = 13$。

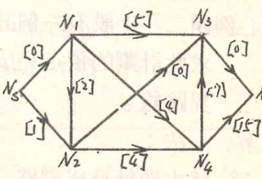


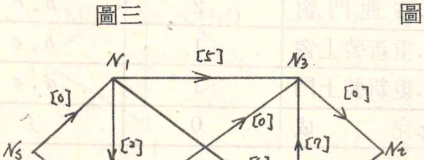
圖一

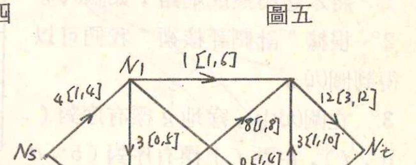

圖二


圖三


圖四


圖五


圖六



圖七

其次討論如何求一個網路的臨界路線：

所謂求一個網路的臨界路線就是在求一個每一線只有上界的網路中，從水源地（起點）到窪地（終點）的最長路線，在我們日常生活中，它所代表的意義是在尋求某一個"計劃"完成所需的最短時間，而此處的"計劃"是表示一連串的"活動"

。那麼，如何把一個計劃轉換成一個網路呢？首先，將計劃上的各活動以點表示出來，然後以有向線 A_{ij} 表活動 j 必須在活動 i 完成後才可以開始，若活動 j 須要時間 C_j 單位才可以完成時，則限制以 j 點爲始點的各有向線之容量爲 C_j，將計劃轉換成網路後，再根據下列方法求網路的最長路線，此最長路線上各點所代表的活動稱爲主要活動，而最長路線之長即計劃的預定完成時間，也就是計劃完成所需的最短時間。所以尋求臨界路線的方法又稱爲"計劃評核術"，其尋求的方法如下：

步驟 1°：在水源地標上序對（0，0）。

步驟 2°：由水源地開始，在每一線上標上一個數，使該數等於此線的容量加上此線起點的數。

步驟 3°：在各點標上一個序對（a_i，N_i），使數 a_i 等於以此點爲終點的各線所標出的數的極大值，而 N_i 爲擁有此極大值的線的起點。

步驟 4°：反覆使用步驟 2°，步驟 3°，最後我們可以在窪地標出一個序對，設此序對爲（a_{m_1}，N_{m_1}），則在點 N_{m1} 上，我們可以得到一個序對（a_{m2}，N_{m2}），同理，在點 N_{m2} 上可以得到一個序對（a_{m3}，N_{m3}），如此繼續下去，最後可以得到（a_{mi}，N_s），則 a_{m1} 爲計劃的預定完成時間，而 $N_s - A_{smi} - N_{mi} - \cdots\cdots - N_{m_1} - A_{m_1 t} - N_t$ 爲此網路的最長路線。

註：若欲求網路的最短路線，則在步驟 3°中，令數 a_i 等於以此點爲終點的各線所標出的數的極小值，其他各步驟不變，則標在窪地上的數卽最短路線之長，而步驟 4°所得的路線卽最短路線。

〔例題二〕：設有一個計劃如右表求此計劃的預定完成時間及臨界路線。

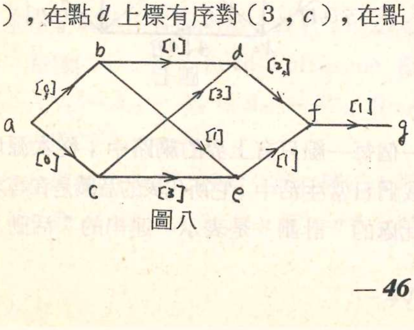
活　　動	所需時間（日）	恰在前面的活動
a.開　　始	0	無
b.拆下門窗	1	a
c.訂購零件	3	a
d.修理門窗	2	b．c
e.重新裝上窗	1	b．c
f.重新裝上門	1	d．e
g.完　　成	0	f

解　法：

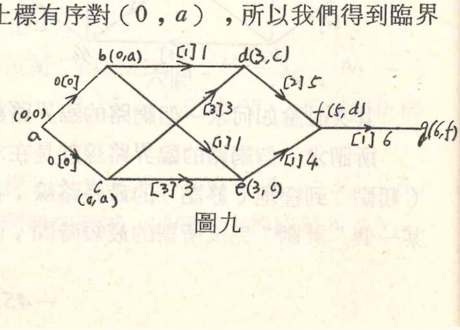
1°　將本題轉換成網路，如圖(八)。

2°　根據"計劃評核術"我們可以得到圖(九)。

3°　在圖(九)中，窪地 g 標有序對（6，f），在點 f 上標有序對（5，d），在點 d 上標有序對（3，c），在點 c 上標有序對（0，a），所以我們得到臨界



圖八



圖九

路線爲 $a-A_{ac}-c-A_{cd}-d-A_{df}-f-A_{fg}-g$ ，且求得預定完成時間爲6日，主要活動爲 a ，c ，d ，f ，g 。

最後以一個與臨界路線有關的例題作爲本文的結束。

〔例題三〕：在圖(十)中，(1)若序對（a ，b）中的 a 表 i 點到 j 點的容量，b 表 i 點到 j 點所需的時間，則在時間 $t \leq 4$ 的條件下，求由點1到點4的極大流程。(2)若序對（a ，b）中的 a 表 i 點到 j 點的運費，b 表 i 點到 j 點所需的時間，則在時間 $t \leq 4$ 的條件下，求由點1到點4的極小成本流程。

解　法：

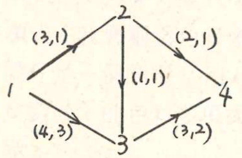
在圖(十)中共有4點，而時間限制爲 $t \leq 4$ ，所以我們畫一個每列有4點，每行有5點的點集合。

1° 由左上角之點1，$t=0$ 開始，因線 A_{12} 的 $t=1$ ，容量爲3，所以由點1，$t=0$ 畫一有向線到點2，$t=0+1=1$ ，並標上容量3。

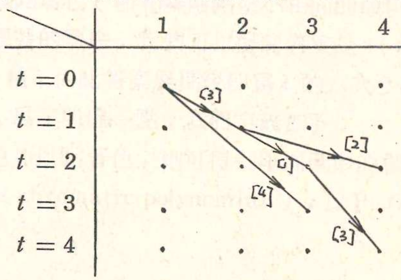
2° 因線 A_{13} 的 $t=3$ ，容量爲4，所以由點1，$t=0$ 畫一有向線到點3，$t=0+3=3$ ，並標上容量4。

3° 因線 A_{23} 的 $t=1$ ，容量爲1，又點2那一行只有點2，$t=1$ 是有向線的終點，所以由點2，$t=1$ 畫一有向線到點3，$t=1+1=2$ ，並標上容量1。同理，因線 A_{24} 有序對（2，1），所以由點2，$t=1$ 畫一有向線到點4，$t=1+1=2$ ，並標上容量2。

4° 因線 A_{34} 的 $t=2$ ，容量爲3，而點3那一行，有 $t=2$ 及 $t=3$ 兩點爲有向線的終點，又題目限制 $t \leq 4$ ，所以只由點3，$t=2$ 畫一有向線到點4，$t=2+2=4$ ，並標上容量3，而點3，$t=3$ 無法畫有向線到點4那一行。



圖十

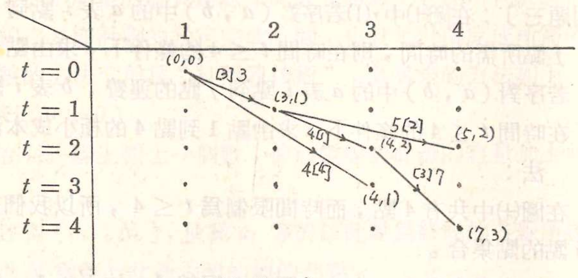


圖十一

由1°，2°，3°，4°，我們可以將圖(十)轉換成圖(十一)。(1)在 $t \leq 4$ 的條件下，欲求點1到點4的極大流程，即求圖(十一)中以點1，$t=0$ 爲起點，而點4那一行爲終點的最長路線之長，根據計劃評核術，我們可以得到圖(十二)，因圖(十二)中，點4，$t=2$ 的序對爲（5，2），點4，$t=4$ 的序對爲（7，3），所以在 $t \leq 4$ 的條件下，點1到點4的極大流程爲max（5，7）＝ 7 。

(2) 在 $t \leq 4$ 的條件下，欲求點1到點4的極小成本流程，即求圖(十一)中以點1，t

＝0爲起點，而點4那一行爲終點的最短路線之長，依最短路線求法，我們得到的圖形恰與圖(⼗⼀)相同，所以在 $t \leq 4$ 的條件下，點1到點4的極小成本流程爲min（5，7）＝5 。



圖（十二）

參考資料：

1. D. R. Fulkerson：Flow Networks and combinational operations research, A. M. S. Monthly, Vol 73 (1966) 115 — 138。
2. T. C. Hu：Integer programming and Network flows, Addison-Wesley Co. 1969 (Chapter 8)。

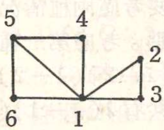
（上期「網路上的極大流程和極小切問題」一文，指導老師應爲「吳森源」老師，在此向吳老師深表歉意——編輯小組）

論色彩多項式

陳添財

設X是一個有限集合，若$x_1, x_2 \in X$，則令$\{x_1, x_2\} = \{x_2, x_1\}$，且令$X^{(2)} = \{\{x_1, x_2\} \mid x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2\}$。若$\xi \subseteq X^{(2)}$，則序對$G = (X, \xi)$稱爲圖形（graph）。$X$中的元素稱爲點（vertices），$\xi$中的元素稱爲線（edges）。設$G = (X, \xi)$是一個圖形，$e = \{x_1, x_2\} \in \xi$，則稱$x_1$與$x_2$二點是相鄰的（adjacent），此時又稱線$e$與點$x_1$，$x_2$是入射的（incident）。現在假設有一圖形如下：（此圖形爲具有六個點八條線的圖形）。

G：



如果我們用λ種不同的顏色加以點著色（即相鄰兩點塗不相同的顏色），則可得到多少種不相同的圖形呢？由點標號的順序，我們可以得到答案是$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-2)$種，而此答案展開後即爲$\lambda$的六次多項式，依此類多項式，我們稱爲色彩多項式。爲了明確一點，我們定義如下：

定義：設G是一個圖形，用λ種顏色加以點著色，則可得到不同圖形的個數，稱爲G對於λ的色彩多項式（The chromatic polynomial），以$P(G;\lambda)$表示。

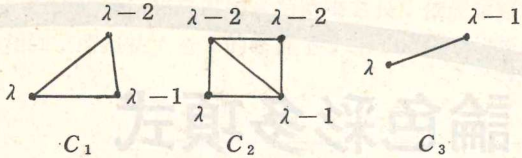
如上圖，我們可以表示答案如下：

$$P(G;\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)^3$$

假若圖形G爲不連接圖形，有q個分支$C_1, C_2, \cdots, C_q$則很明顯的可以得到

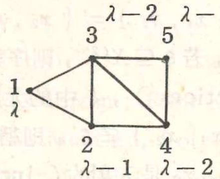
$$P(G;\lambda) = P(C_1;\lambda) \times P(C_2;\lambda) \times \cdots \times P(C_q;\lambda) = \prod_{i=1}^{q}(C_i;\lambda)$$

例如：G：

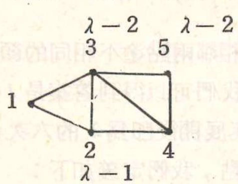


故 $P(C_1;\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$，$P(C_2;\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2$，$P(C_3;\lambda)=\lambda(\lambda-1)$，$P(G;\lambda)=P(C_1;\lambda)\times P(C_2;\lambda)\times P(C_3;\lambda)=\lambda^3(\lambda-1)^3(\lambda-2)^3$

在我們對色彩多項式的計算有了初步認識後，我們來計算下面圖形的色彩多項式。G：

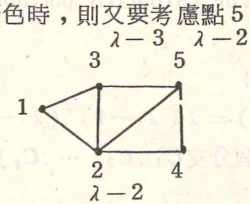


如果按照點標號的順序，則我們可得到$P(G;\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-2)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^3$。但是，如果我們依 $1\to3\to5\to4\to2$ 去點著色的話，則我們會發覺在著點 2 時有同題，即我們要考慮兩種情況。第一種情況是點 1 和點 4 著同色，第二種情況是點 1 和點 4 著異點。考慮第一種情況時，我們可以由下圖依 $2\to3\to5$ 去點著色，可得到 $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-2)$ 種不同的圖形，而第一種情況又有 λ 種，故當點 1 和點 4 著同色時共有 $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ 種不同的圖形。



考慮第二種情況時，我們也可以由下圖，依 $2\to3\to5$ 去點著色，可得到 $(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-2)$ 種不同的圖形，而第二種情況又有 $\lambda(\lambda-1)$ 種，故當點 1 和點 4 著異色時，共有 $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-3)$ 種不同的圖形。

（若依 $5\to3\to2$ 去點著色時，則又要考慮點 5 與點 1 是否同色）



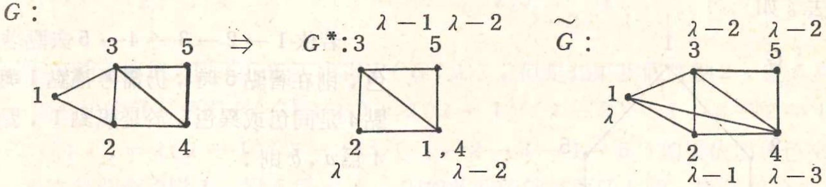
將兩種情況所得到不同圖形的個數加起來得

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2+\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-3)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^3=P(G;\lambda)$$

故由此我們可以引出一個命題：

<u>命題</u>：設 G 是一個圖形，且 a，b 是 G 中不相鄰的二點，令 G^* 是在 G 中將 a，b 兩點重疊後的圖形，令 $\widetilde{G}$ 是在 G 中將 a，b 用一條線連接後的圖形，則 $P(G;\lambda) = P(G^*;\lambda) + P(\widetilde{G};\lambda)$

由點著色的觀念，我們知 $P(G^*;\lambda)$ 表 a，b 同色時可得不同圖形的個數，$P(\widetilde{G};\lambda)$ 表 a，b 異色時可得不同圖形的個數。注意命題所說的 a，b 是 G 中不相鄰的二點。由此，計算上面例圖之色彩多項式，我們可視點 1，點 4 爲 a，b 來重新計算。

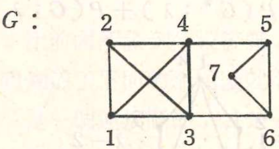


則　$P(G^*;\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2$　$(2\rightarrow3\rightarrow1\rightarrow5)$　即爲前面所說的第一種情況。

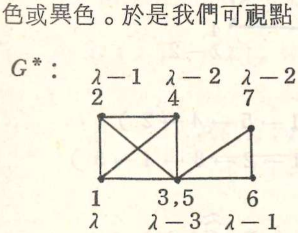
$P(\widetilde{G};\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-3)$　$(1\rightarrow2\rightarrow3\rightarrow4\rightarrow5)$ 即爲前面所說的第二種情況。

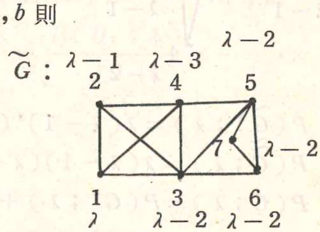
故　$P(G;\lambda) = P(G^*;\lambda) + P(\widetilde{G};\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^3$

當然，像上面那個圖形可以直接加以點著色而求得 $P(G;\lambda)$，並不需要利用命題來求，可是往往有些圖形不經過命題之法來處理的話就找不出 $P(G;\lambda)$，例如下圖：



我們沒有辦法一下子就算出 $P(G;\lambda)$，如果由 $1\rightarrow2\rightarrow3\rightarrow4\rightarrow5\rightarrow6\rightarrow7$ 去點著色，則在著點 6 時會有問題，即要考慮點 5 與點 3 是同色或異色。於是我們可視點 3，點 5 爲 a，b 則





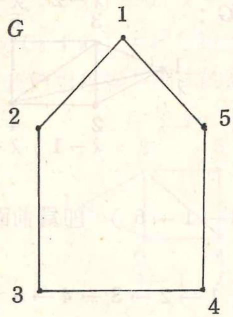
可得　$P(G^*;\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2(\lambda-3)$　$(1\to 2\to 4\to 5\to 6\to 7)$

$P(\widetilde{G};\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^4(\lambda-3)$　$(1\to 2\to 3\to 4\to 5\to 6\to 7)$

故得　$P(G;\lambda)=P(G^*;\lambda)+P(\widetilde{G};\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-3)(\lambda^2-3\lambda+3)$

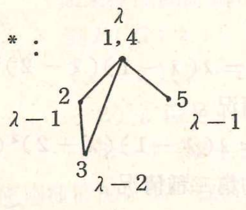
也許有的圖形在求$P(G^*;\lambda)$或$P(\widetilde{G};\lambda)$時仍計算不出，需再依命題之法做下去。如

: G

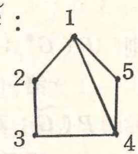


若依$1\to 2\to 3\to 4\to 5$去點著色，則在著點5時，仍需考慮點1與點4是同色或異色，於是視點1，點4爲a，b則：

G^*:



$\widetilde{G}$:

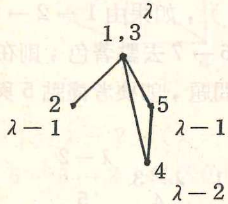


我們可以很容易得到$P(G^*;\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)$　$(1\to 2\to 3\to 5)$

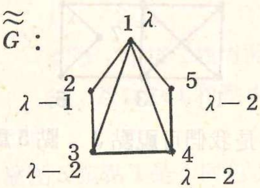
但是在求$P(\widetilde{G};\lambda)$時，就不這麼簡單，一下子是無法求出的，如依$1\to 5\to 4\to 3\to 2$去點著色時，在著點2時有問題，仍要考慮點1與點3是同色或異色，於是我們又視點1，點3爲a'，b'則$P(\widetilde{G};\lambda)=P(\widetilde{G}^*;\lambda)+P(\approx{G};\lambda)$

由

$\widetilde{G}^*$:



$\overset{\approx}{G}$:



可以得到　$P(\widetilde{G}^*;\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)$　$(1\to 5\to 4\to 2)$

$P(\overset{\approx}{G};\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^3$　$(1\to 2\to 3\to 4\to 5)$

所以　$P(G;\lambda)=P(G^*;\lambda)+P(\widetilde{G};\lambda)$

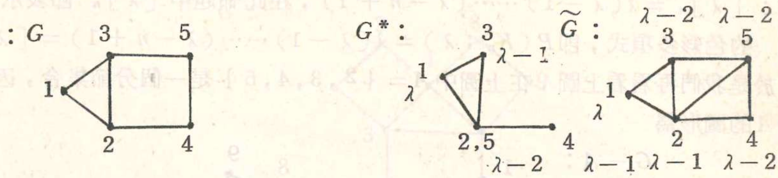
$=P(G^*;\lambda)+P(\widetilde{G}^*;\lambda)+P(\overset{\approx}{G};\lambda)$

$=\lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)+\lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)+$

$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^3$

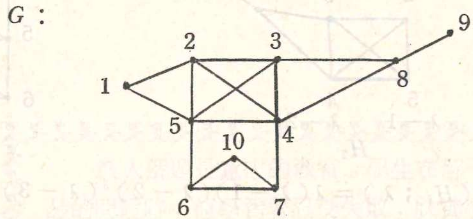
$$= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+2)$$

我們說過，命題所說的 a，b 是不相鄰的二點，所以有時候我們直接在圖上找二個不不相鄰的點也許就會馬上求得 $P(G^*;\lambda)$ 和 $P(\widetilde{G};\lambda)$，如



我們不可能直接加入點著色就可求得 $P(G;\lambda)$，但是如果我們將點 2，點 5 視為 a，b 則很快的就可求得 $P(G^*;\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)$ $(1\to3\to2\to4)$ 及 $P(\widetilde{G};\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^3$ $(1\to2\to3\to4\to5)$ 如果依點著色來討論，也許我們會視點 1，點 5 為 a，b，則如此我們就又要像上圖一樣利用命題兩次，於是適當的選出 a，b 有時是可以節省很多時間的，當然，a，b 一經選定多次利用命題也是可以求出最後結果的。

我們在這裏所談到的圖形都不是很複雜的圖形，如果像下面這個圖形。



雖然，比前面所談到的較複雜，且直接或利用命題求 $P(G;\lambda)$ 都很麻煩，可是如果我們知道了下面的命題後就不難求出其 $P(G;\lambda)$。

命題：設 G 是一個連接圖形，A 是一個分節集合，且設由 A 所形成的最大部分圖形是一個完全圖形 K_n。若 G 對於 A 有 q 個片 H_1，H_2，…… H_q，則

$$P(G;\lambda)=[\lambda]_n\times\frac{P(H_1;\lambda)}{[\lambda]_n}\times\frac{P(H_2;\lambda)}{[\lambda]_n}\times\cdots\cdots\times\frac{P(H_q;\lambda)}{[\lambda]_n}$$

$$=[\lambda]_n^{1-q}\prod_{i=1}^{q}P(H_i;\lambda)$$

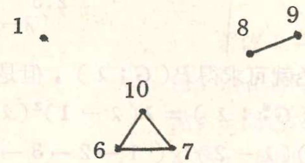
在上面命題中，我們尚得說明一下分節集合和片及符號 $[\lambda]_n$ 的定義。

定義：設$G=(X,\xi)$是一個連接圖形，且$A\subseteq X$，若$G-A$是一個不連接圖形時，則稱A是G的一個分節集合。又設C是$G-A$的一個分支，則由C中的點與A聯集所成的最大部分圖形，稱爲G對於A的一片（a piece）。

定義：$[\lambda]_n=\lambda(\lambda-1)\cdots\cdots(\lambda-n+1)$，在此命題中$[\lambda]_n$即表示$K_n$的色彩多項式，即$P(K_n;\lambda)=\lambda(\lambda-1)\cdots\cdots(\lambda-n+1)=[\lambda]_n$

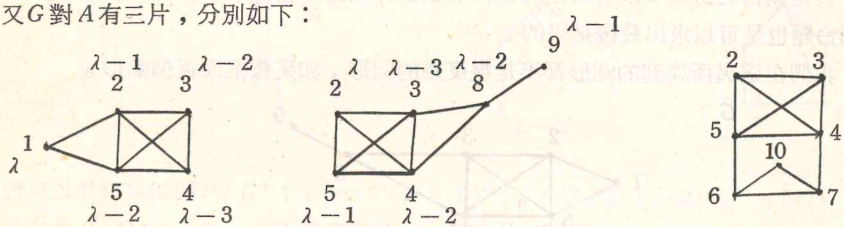
於是我們再看看上圖，在上圖中$A=\{2,3,4,5\}$是一個分節集合，因爲$G-A$的圖形爲

$G-A$：



（在圖形學上去掉點時，則所有與此點入射的線亦要去掉）

又G對A有三片，分別如下：



H_1 H_2 H_3

我們可以很快的得到 $P(H_1;\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-3)$

$(1\to2\to5\to3\to4)$

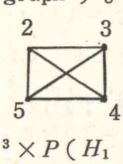
$P(H_2;\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2(\lambda-3)$

$(2\to5\to4\to3\to8\to9)$

又由前面已求得的知 $P(H_3;\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-3)(\lambda^2-3\lambda-3)$

然後再由

定義：設$G=(X,\xi)$是一個圖形，若X中任意兩點都是相鄰時，則稱G是一個完全圖形（complete graph）。含有n個點的完全圖形以K_n表示。

知A所形成的最大部分圖形 

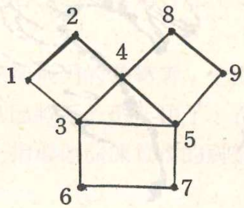
是一個完全圖形K_4，於是依命題我們可可以計算出

$$P(G;\lambda)=[\lambda]_4^{1-3}\times P(H_1;\lambda)\times P(H_2;\lambda)\times P(H_3;\lambda)$$
$$=[\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)]^{-2}\lambda^3(\lambda-1)^4(\lambda-2)^6$$

$$(\lambda-3)^3(\lambda^2-3\lambda+3)^2$$
$$=\lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)^4(\lambda-3)(\lambda^2-3\lambda+3)$$

同學們如果有興趣，不妨依上述之法計算下面圖形的$P(G;\lambda)$。

G：

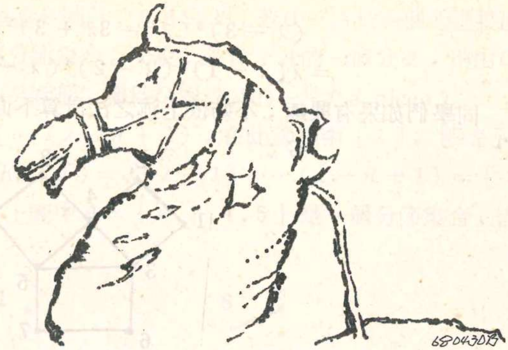


教人解題是意志的教育。學生在解一個對他不太容易的問題時，他學習著忍受失敗，欣賞小的進步，等待重要的想法，在恰當的時候把握機會奮力工作。假使學生沒有機會體會到解題努力中的各種情感，他所受的數學教育在最重要的一點是失敗的。

——摘自「怎樣解題」

走馬看花談同餘

作者：丁村成



(一)

黃昏落日，夕陽無邊，已接近傍晚了。此時，到處可見炊煙裊裊，念恩蹲在昏暗的屋簷下演練着算術作業，屋後傳來了陣陣餵雞的喲喝聲。在十張犁這個小村子裏，農夫們經過一天辛勞的工作，個個拖着疲憊的步伐踏向歸途。念恩將功課收拾好，照例站在家門口的榕樹下，等候父親的歸來。

「阿爸，阿爸！」念恩面對着遠處背滿一身稻草的中年人興奮的喊着。同時快步上前，嚷着要帮忙背負。

「小孩子背不動啦！你快去借一輛推車，後園橋邊還有一大堆哩！」中年人邊走邊催促念恩。

推車借來以後，一捆捆的稻草在念恩父子兩人的協力下，不一會兒光景，終於搬運結束。兩人便坐在田埂上休息。

「念恩！剛才搬運稻草的時候，你爲何每次要多加一捆在推車上呢？」中年人首先打破了沈靜。

「我想這樣我們就可以少搬一兩趟嘛！」念恩沒頭沒腦的答道。

「是嗎？你以爲每次多加一捆就可以少搬一兩趟嗎？你平常在校學習算術，現在阿爸就考你一道問題：方才橋邊那堆稻草，若五捆五捆一堆；七捆七捆一堆；九捆九捆一堆；則各剩下 2 捆、1 捆及 3 捆。那麼剛才我們總共搬了多少捆稻草呢？」中年人很嚴肅的問念恩。

「…………」經過了一段時間的演算，雖然在念恩的腦子裏已呈現出「五十七捆」的答案，但他始終沒有回答。因爲他確定：剛才那堆四趟才搬完的稻草，不可能只有五十七捆。

「算不出來嗎？其實剛才那堆稻草是三百七十二捆，所以才想利用四趟搬完。關於這類問題的求解，我們的老祖宗在一千多年前就已經討論過了，它的最大特色是存在有很多的整數解。故有人稱之爲神奇妙算。天色已晚，我們也該回去

了。你還小，以後有時間再慢慢考慮吧！」中年人邊說邊拉着念恩站起。父子兩人沿着古樹參天，雜草叢生的小道，靜靜的走。此刻，大地一片黑暗，沒有風，風停在樹梢；沒有月，月躲在雲裏；鳥也倦了，棲在高高的樹枝上。然而在念恩幼小的心靈上却始終無法平靜，冥冥中他心裏感覺：這實在不是一道平凡的題目。

(二)

秋意漸去，殘酷的命運隨着無情歲月的流轉着，它隨時都可能威脅到每個人的身上。數數日子，念恩的父親逝世已將近七個年頭了。在這段不算短的日子裏，念恩永遠忘不了他父親時常在燈光下指導他演練算術的神情。想着，想着，眼皮漸重，竟不自覺的踏入夢境之中。………

“話說念恩的父親踏入陰間之後，由於勤奮努力，忠厚老實，所以頗受閻王賞識，不到一年的時間就被閻王指派為鎮守陰陽河界的總指揮。陰陽河界，乃介於陽界與陰界間的邊防重地。自從接掌職務後，他一心一意的帮助閻王剷平判逆，抵禦外侵。自首次鬼門關一戰，大敗洋鬼，迄寒冰地獄谷圍剿判逆，凡百戰，皆所向無敵。閻王為了報答其豐功偉績，特別賜予智勇將軍之封號。經過數年的整頓，地府大抵已經太平，然而閻王却開始猜忌功臣。

「百戰功高，功高震主，唉，身危！」智勇將軍獨自望着陰陽河滾滾紅水雜亂的想着。畢竟，自私猜疑是人生，縱題金榜亦浮名。

「智勇將軍！閻王有事相請，望您能速速回殿」大約在一百公尺處傳來了參謀大臣的聲音。大臣鬼計多端，是閻王最親近的心腹。這一喊使得智勇將軍從沈思中醒來。他連忙起身，登上轉輪飛車，在參謀大臣的陪同下，趕回了森羅殿。回到殿前，他縱眼四觀，殿外亡魂林立，盛況空前，殿內設滿酒席，熱鬧非凡。智勇將軍正在搞不清有啥慶典喜事之時，忽見閻王站在殿上笑臉相迎道：「將軍辛苦了！本府為了答謝將軍平時日以繼夜鎮守河界之辛勞，特地準備了宴席，藉以酬勞將軍」。

「鎮守河界，保護地府安危本是臣的職責。受閻王如此厚愛，臣實在承當不起」智勇將軍答道。

站在一旁的參謀大臣春風滿面的說：「這是閻王的誠意，將軍就別再客氣了。」

酒過七巡，智勇將軍已經有點醉了。參謀大臣趁着酒酣耳熱之際，單刀直入的問：「將軍手下目前不知擁有多少兵卒？」

「回稟大臣，兵數不知其數，吾人僅瞭解：三三數之剩二，五五數之剩三，七七數之剩二。」智勇將軍茫茫然的答道。這一答，使得在坐的閻王酒醒了幾分，呆呆的瞪着參謀大臣。然而儘管參謀大臣使盡腦力，却仍然無法向閻王報告兵數。

本來按照參謀大臣的計劃，是想利用這次宴會，確實瞭解智勇將軍的兵力，趁機捉拿他。結果得到的答案却只是什麼“三三數之剩二，五五數之剩三，七七數之

剩二”？多少兵？到底有多少兵？如果動手會不會引起地府大亂呢？閻王不肯放鬆，再度帶着詢問的臉色望着參謀大臣。只見參謀大臣滿臉疑惑，低聲而惶恐的在閻王耳邊答道：「兵數不可數！」是時，閻王大吃一驚，一肚子酒化爲冷汗，酒氣全消”。……………

「三三數之剩二，五五數之剩三，七七數之剩二，好熟悉的聲音啊！」念恩口中喃喃自語着。他把眼睛睜開向四處張望，但窗裏窗外仍然一片漆黑，一片寂靜。使他想起了那天晚上與他父親在田裏聊天的情景。不同的只是夜深了，空氣中略帶寒意。寒意使得念恩憂愁，使得念恩懷念。愁的是：一份不能復得的親情，念的是：一份未曾報答的親恩。

(三)

孫子算經（西元約 330 年）中載有「今有物不知其數，三三數之賸二，五五數之賸三，七七數之賸二，問物幾何。答曰二十三。術曰：三三數之賸二，置一百四十；五五數之賸三，置六十三；七七數之賸二，置七十。并之，得二百三十三，以二百一十減之卽得。凡三三數之賸一，則置七十，五五數之賸一，則置二十一，七七數之賸一，則置十五。一百六以上，以一百五減之，卽得。」在隨後之數百年間，我國對於此一問題的研究文獻雖未曾間斷，但名稱尚紛歧不一。到了十二世紀左右，秦九韶對於這個主題，在其數書九章中，始做了一個完整的說明，這便是所謂的大衍求一術。當歐洲人開始研究類似大衍求一的問題時，他們才瞭解到中國人在十幾世紀以前的卓越貢獻，莫不一致贊嘆！並把關於這類問題的解法名爲中國剩餘定理。近代對於此類問題的推廣與研究，同餘的觀念，提供了有利且方便的工具。同餘的定義是：若兩整數 a，b 之差能被第三個整數 m 所整除，則稱對於模 m，a 和 b 同餘。記之爲 $a \equiv b \pmod{m}$。換言之，假如 a，b 兩數被 m 除以後，所得的餘數相等，我們就稱 a，b 是以 m 爲模的同餘數。據此，物不知其數一問，其實就是要解一組同餘式

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

之公解 x

此問題之解法容後將作討論。

假如模以正整數 m 表示，則可推知每一整數都可能與 $0,1,2,\cdots\cdots,m-1$，中之一個數同餘。亦卽每一整數卽可歸入 m 類中的任一類，我們稱之爲剩餘類，分別以〔0〕〔1〕……〔$m-1$〕表示之。用同餘來表示整數的優點是只要以有限的數就能取代無限的數。譬如圖一上之三點就是一個以 3 爲模的同餘類所形成的以 3 爲週期爲循環分割。每一分割在幾何上可以視爲一點。

A 代表〔 0 〕＝｛……，-9，-6，-3，0，3，6，9 ……｝

B 代表〔 1 〕＝｛……，-8，-5，-2，1，4，7，10 ……｝

C 代表〔 2 〕＝｛……，-7，-4，-1，2，5，8，11 ……｝

有了這種循環的性質，我們便能輕易的推算出一些未來假日的正確日期，及某年某月某日是星期幾。（我國古代所創的干支紀年，即以60爲模）。筆者好奇，曾經試着動手設計簡易萬年曆，只需要一張紙卡作爲材料，便可隨身查看，屢試不爽。比起市面上所賣之萬年曆，不但經濟方便，而且富有挑戰性。

㈣

現在我們來看一些同餘的性質，吾人希望藉以導出日常生活中的一些計算法則，及作爲推演中國剩餘定理的預備。

〔基本性質〕設 m 爲一正整數，則下列性質成立。

⑴ $a \equiv a \pmod{m}$

⑵ 若 $a \equiv b \pmod{m}$ 則 $b \equiv a \pmod{m}$

⑶ 若 $a \equiv b \pmod{m}$ 且 $b \equiv c \pmod{m}$ 則 $a \equiv c \pmod{m}$

〔定理一〕 若 $a_i \equiv b_i \pmod{m}$ 對 $1 \le i \le n$ 皆成立，則

⑴ $$\sum_{i=1}^{n} a_i \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i \pmod{m}$$

⑵ $$\prod_{i=1}^{n} a_i \equiv \prod_{i=1}^{n} b_i \pmod{m}$$

證　明：⑴ 因爲 $a_i \equiv b_i \pmod{m}$，故存在有整數 q_i，使得 $a_i - b_i = mq_i$

所以 $m\sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$ 成立。

i.e. $$\sum_{i=1}^{n} a_i \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i \pmod{m}$$

⑵ 利用數學歸納法

當 $n=1$ 時，原式顯然成立。

設 $n=k$ 時亦會成立。則 $\prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} b_i = mq \qquad q \in \boldsymbol{Z}$

吾人想證明當 $n=k+1$ 時成立。

$$\prod_{i=1}^{k+1} a_i - \prod_{i=1}^{k+1} b_i = \prod_{i=1}^{k+1} a_i - b_{k+1}\prod_{i=1}^{k} a_i + b_{k+1}\prod_{i=1}^{k} a_i - \prod_{i=1}^{k+1} b_i$$

$$= (a_{k+1} - b_{k+1})\prod_{i=1}^{k} a_i + b_{k+1}\left(\prod_{i=1}^{k} a_i - \prod_{i=1}^{k} b_i\right)$$

$$= mq_{k+1}\cdot\prod_{i=1}^{k} a_i + b_{k+1}\cdot mq \text{ , } q_{k+1} \in \boldsymbol{Z}$$

$$= m\left(q_{k+1}\cdot\prod_{i=1}^{k} a_i + q\, b_{k+1}\right)$$

$$\therefore \prod_{i=1}^{n} a_i \equiv \prod_{i=1}^{n} b_i \pmod{m}$$

〔推論 1-1〕若 $a \equiv b \pmod{m}$ 且 $c \equiv d \pmod{m}$ 則

(1) $a+c \equiv b+d \pmod{m}$ (2) $ac \equiv bd \pmod{m}$

(3) $ca \equiv cb \pmod{m}$ (4) $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, $n \geq 0$

由推論 1-1(4)我們很快就能知道 $8^{100}-1$ 能被 7 整除。因爲 $8^{100} \equiv 1^{100} \equiv 1 \pmod{7}$

〔定理二〕 設 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ ， $c_i \in \boldsymbol{Z}$

若 $a \equiv b \pmod{m}$ 則 $f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$

證　明：由推論 1-1(4)知 $a^i \equiv b^i \pmod{m}$ 成立。

又由推論 1-1(3)知 $c_i a^i \equiv c_i b^i$ (mod) 亦會成立

故得 $\sum_{i=0}^{n} c_i a^i \equiv \sum_{i=0}^{n} c_i b^i \pmod m$。i.e. $f(a) \equiv f(b) \pmod m$

由定理二，可以推得下列之速算規則。

〔推論 2-1〕令 整數 $Z = c_0 + c_1 10 + c_2 10^2 + \cdots\cdots + c_n \cdot 10^n$

(1) 整數 Z 能被 3 整除 $\Longleftrightarrow S_1 = c_0 + c_1 + \cdots\cdots + c_n$ 能被 3 整除。另外，若 $S_1 = 3q_1 + r_1$ 且 $0 < r_1 < 3$，則 r_1 爲 Z 除 3 所得之餘數。

(2) 整數 Z 能被 7 整除 $\Longleftrightarrow S_2 = c_0 + 3c_1 + 2c_2 - c_3 - 3c_4 - 2c_5 + \cdots\cdots$。能被 7 整除。另外，若 $S_2 = 7q_2 + r_2$ 且 $0 < r_2 < 7$，則 r_2 爲 Z 除 7 以後，所得之餘式。

(3) 整數 Z 能被 11 整除 $\Longleftrightarrow c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \cdots\cdots + (-1)^n c_n$ 能被 11 整除。另外，若 $S_3 = 11q_3 + r_3$，且 $0 < r_3 < 11$ 則 r_3 爲 Z 被 11 除後所得之餘式。

利用這些規則（當然還可待推出其他規則，只因篇幅有限。）我們不但可以判別一個大整數的因數，而且亦可用來檢驗兩個大整數相乘積是否正確。

〔定理三〕 若 $ac \equiv bc \pmod m$ 且 $d = (c, m)$ 則 $a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$

證　明：已知 $ac \equiv bc \pmod m$ 所以存在有整數 q，使得 $mq = (a-b)c$

令 $m' = \frac{m}{d}$，$c' = \frac{c}{d}$ 則 $m'q = (a-b)c$，但因 $(m', c') = 1$

所以 $m' \mid a-b$　　i.e. $a \equiv b \pmod{m'}$

〔定理四〕 同餘式 $ax \equiv b \pmod m$ 有解當且僅當 $d \mid b$。而且恰有 d 組不同餘之解。其中 $d = (c, m)$

證　明：(1)（$\Rightarrow$）設 $ax \equiv b \pmod m$ 有解 x_0，　$x_0 \in \boldsymbol{Z}$

則 $ax_0 \equiv b \pmod m$。因爲 $d \mid m$，所以 $ax_0 \equiv b \pmod m$

又 $d \mid a$，　　$\therefore\ d \mid b$

（$\Rightarrow$）設 $d \mid b$，吾人可令 $b = kd$，　$k \in \boldsymbol{Z}$

因爲 $d = (c, m)$ 所以必定可以找到整數 r, s

使得 $ra + sm = d$

而 $b = k(ra + sm) = kra + ksm \equiv kra \pmod m$

$\therefore\ ax \equiv b \pmod m$ 有解 kr

(2)設 x_0 爲滿足 $ax - mk = b$ 之解　　（$k \in \boldsymbol{Z}$）

則存在有 $k_0 \in \boldsymbol{Z}$ ，使得 $ax_0 - mk_0 = b$

所以 $\frac{a}{d}x_0 - \frac{m}{d}k_0 = \frac{b}{d}$ ——①及 $\frac{a}{d}x - \frac{m}{d}k = \frac{b}{d}$ ——② 亦成立

由①②可得 $\frac{a}{d}(x - x_0) = \frac{m}{d}(k_0 - k)$ 其中 $(\frac{a}{d}, \frac{m}{d}) = 1$

所以 $\frac{m}{d} \mid x - x_0$ 故 $x = x_0 + \frac{m}{d}t$ ， $t \in \boldsymbol{Z}$

對模而言，x_0，$x_0 + \frac{m}{d}$，……，$x_0 + (d-1)\frac{m}{d}$ 為 $ax \equiv b$ 之 d 個解。

另外，若 x_1 亦為 $ax \equiv b \pmod{m}$ 之解。

則 $ax_1 \equiv b \equiv ax_0 \pmod{m}$

由定理三得知 $x_1 \equiv x_0 \pmod{\frac{m}{d}}$

所以 $x_1 = x_0 + k\frac{m}{d}$ $k \in \boldsymbol{Z}$

$\equiv x_0 + t\frac{m}{d} \pmod{m}$ 其中 $0 \leq t < d$. $k \equiv t \pmod{d}$

〔中國剩餘定理〕設 m_1，m_2，……，m_t 為 t 個整數且兩兩互質。若存在 $a_i \in \boldsymbol{Z}$ $(1 \leq i \leq t)$ 使得 $(a_i\ m_i) = 1$ ， $1 \leq i \leq t$

令 $M = m_1 \cdots\cdots m_t$ 則同餘式

$$\begin{cases} a_1 x \equiv b_1 \pmod{m_1} \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ a_t x \equiv b_t \pmod{m_t} \end{cases}$$

對模 M 而言，恰有一解。

證　明：令 $M_i = \frac{M}{m_i}$

根據定理四知當 $(a, m) = 1$ 時

$M_i x_i \equiv b_i \pmod{m_i}$ 恰有一組解，設為 n_i。

令 $x_0 = \sum_{i=1}^{t} M_i n_i$

則 $x_0 \equiv b_i \pmod{m_i}$

$(\because b_i M_i n_i \equiv b_i \pmod{m_i}$ 且 $M_j \equiv 0 \pmod{m_j})$，

其中 $1 \le i \ne j \le t$

所以 x_0 爲同餘組之一解。

今假設 x_1 亦爲同餘組之解，則

$x_1 \equiv b_i \equiv x_0 \pmod{m_i}$ 因 $m_i \mid x_1 - x_0$ ， $1 \le i \le t$

且 $(m_i\ m_j) = 1$ $1 \le i \ne j \le t$

故得知 $M \mid x_1 - x_0$ $\therefore x_1 \equiv x_0 \pmod{M}$

因此對模 M 而言，x_0 即爲唯一之解。

最後，吾人利用同餘式解"物不知其數"如下：

$M_1 = 35,\quad M_2 = 21,\quad M_3 = 15,\quad b_1 = 2,\ b_2 = 3,\ b_3 = 2$

今要解 c_1, c_2, c_3，

由 $35c_1 \equiv 2 \pmod{3}$ 取 $c_1 = 1$

$21c_2 \equiv 2 \pmod{5}$ 取 $c_2 = 3$

$15c_3 \equiv 2 \pmod{7}$ 取 $c_3 = 2$ 則

$$x_0 = \sum_{i=1}^{3} M_i c_i = 35 \times 1 + 21 \times 3 + 15 \times 2 = 128$$

孫子算經中取 23 爲最小之正整數解。

後 記

本文所談的，僅限於一次同餘之部分。讀者對於同餘式若有興趣，可進一次參考有關整數論的書籍。畢竟本文並非同餘的專題研究，其內容或許含有"借題發揮"的意味，望讀者諒解爲是。

68. 3. 15 爲悼念先父而作

參考資料：

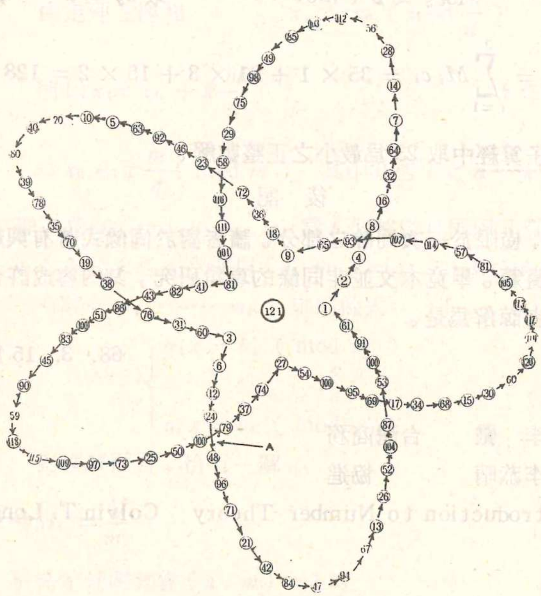
中算史論叢　李　儼　台灣商務

整 數 論　李恭晴　協進

Elementary Introduction to Number Theory　Colvin.T. Long

王家梅花

請看附圖，從 1 到121 的自然數排成的梅花。這朵梅花用11的平方，121 做梅心數。與它最近的第 1，9，81，3，27 號圈叫做蕊數，等於 3^0，3^1，3^2，3^3和3^4。這五個蕊數若用直線連接，就成正五角形。現在用第1號圈做起點，沿箭頭方向經過第2，4，8，16，32號圈而到達第 64 號圈。先看這七個圈，它們的號數成爲公比是 2 的幾何級數而遞增，依此類推。到了第八個圈，本應是 128 號才對，可是因爲 128 比梅心數 121 更大，不適用，所以從 128 減去 121，用 7 號圈來代替 128 號圈。每經過一個箭頭，圈上的編號就變成前一數的兩倍，或兩倍再減去 121 。梅心數的作用就好像剪草機一樣，不許草長得太高，所以梅花瓣上的諸圓圈，它們的編號順着箭頭的方向。雖然不斷的乘 2 ，但它們的編號都小於 121 。再從 7 號圈順着箭頭的方向經過第 14，28，56 而到第 112 號圈。112 號圈叫做瓣端，是距離梅心最遠的一個圈。它與 9 號蕊數與梅心同在一直線上，因爲 112 ＋ 9 ＝ 121 。瓣端到梅心的直線向下延伸就通過 A 點，A 點是花瓣重疊處，此處切勿畫上任何圈，只能畫交叉的箭頭。現在又從 112 號圈前進，箭頭的方向從離心變爲向心，到 101 號圈是梅花第一瓣的終點每片花瓣上均勻地排列着廿二個大小相同的圓圈和廿二個長短相同的箭頭。101 號圈的箭頭應該指着第 202 號圈，因爲 202－121＝81，故用81號圈來代替 202 號圈。81號蕊數是第三梅瓣的起點。第一梅瓣與第二梅瓣不能用箭頭來連接，而是第一與第三梅瓣脈絡相通；第三與第五梅瓣相通等等。箭頭自第 1 號圈出發，穿過 109 個圈之後，週而復始，最後又回到第 1 號圈來。



完全數與梅仙涅質數

陶淑玲

自古以來人類的生活卽與數字脫離不了關係，早期人類以結繩記事，其目的乃將抽象的觀念或事物加以理想化使對於數量有個明晰的概念。人們起先會考慮二個人或三隻羊等具體的東西，漸漸的祗想２，３等抽象的數，雖然此抽象數字２和３並不存在於自然界中，但它們所代表的抽象性質卽是一種概念。卽使最具文學氣質的詩詞歌賦中也少不了數字來點綴一番，如李商隱詩中的兩句「身無綵鳳双飛翼，心有靈犀一點通」沒有數字做爲橋樑，恐怕卽使「心有靈犀」也無法「一點通」呢!

數字的應用是多元性的，一個數字可能表示著許許多多的概念，而數字與數字間亦可藉某種關係連接起來，如２與３是互質，３與５爲孿生質數，100000009649與100000009651亦爲孿生質數，當然，尙有其他不同關係所連接不同性質的數，這些數的發展與探求，眞可說是人類智慧發展的結晶，從自然數擴展到整數、有理數、實數至於複數，這其間不知經過了多少的考驗，時至今日電子計算機的發明，許多以往筆算無法得知的答案也能在短短的幾秒內求出正確的結果，這實在是一個突破的新紀元，它累積了無數科學家的耕耘，當然目前仍有許多未知答案的問題，但我們並不灰心，也從未放棄，我們相信憑著人類的智慧、信心與努力，總有一天我們必能光榮的寫下這些答案。

完全數是一個頗有趣的數，很早以前卽有人著手硏究，它是個挺“性格”的數，正如它的命名“完全”一般我們不難想像發現者在發現這特性時愉悅的心情，且我們實不得不佩服他的智慧與靈感呢！

什麼是完全數呢？顧名思義，它是一個具有某一完美性的自然數，此一完美性是什麼？卽小於它的一切因數和等於這個數的本身，例如６是一個完全數：$1+2+3=6$ 。

其次是28：$1+2+4+7+14=28$

再下去是496：$1+2+4+8+16+31+62+124+248=496$

如果再找下一位完全數就較費事了，事實上下一位完全數是8128，而再下二位是

130816，2096128，愈下去數字就愈大，因此它的找尋單憑實驗法就相當困難了，試著用觀察法來找尋它的規律性，也許能有些心得呢！

由上面的幾個例子中，我們不難發現：

$$6 = 2 \times 3 = 2^1(2^2 - 1)$$

$$28 = 4 \times 7 = 2^2(2^3 - 1)$$

$$496 = 16 \times 31 = 2^4(2^5 - 1)$$

是否具有 $2^n(2^{n+1} - 1)$ 型式的自然數是完全數呢？不一定吧！如 $n = 3$ 時 $2^3(2^4 - 1) = 8 \times 15 = 120$ 並非是完全數，而 $n = 5$，

$2^5(2^6 - 1) = 32 \times 63 = 2016$ 也不是完全數，這到底怎麼一回事呢？讓我們來觀察 $2^n(2^{n+1} - 1)$ 中的 $2^{n+1} - 1$，當 $n = 1, 2, 4$ 時，$2^{n+1} - 1$ 是質數，$n = 3, 5$，$2^{n+1} - 1$ 是合成數，因此我們可假設若 $2^{n+1} - 1$ 是質數，則 $2^n(2^{n+1} - 1)$ 是完全數，這個性質歐幾里得在他的原本中，做了很詳盡的證明：

<Pf>令 P 表質數 $2^{n+1} - 1$

則 2^nP 的因數（小於本身者）有

$1, 2, 2^2, \cdots 2^n, P, 2P, 2^2P, \cdots 2^{n-1}P$

它們的和：

$$S = (1 + 2 + \cdots + 2^n) + P(1 + 2 + \cdots + 2^{n-1})$$
$$= (2^{n+1} - 1) + P(2^n - 1)$$
$$= P + P(2^n - 1)$$

此數爲完全數得證。

由上面性質所得到的完全數都是偶數，那麼是否有奇完全數呢？到目前爲止，數學家還未能找到一個奇完全數，且由計算機所得的消息，奇完全數的位數必定大於36，無怪乎有人形容奇完全數的尋覓，比挖一顆鑽石還難呢！

除了上面 $2^n(2^{n+1} - 1)$ 的完全數的型式外，是否還有其他型式的偶完全數呢？尤拉給我們一個完美的答案：完全偶數必呈 $2^n(2^{n+1} - 1)$ 的型式，其中 $2^{n+1} - 1$ 爲質數。

<Pf>令完全偶數 $\alpha = 2^nP$，其中 n 爲自然數，P 爲奇數。

α 的一切因數和（包括 α 本身）

$S =$（2^n 的一切因數和）×（P 的一切因數和）

$= (2^{n+1} - 1)(d + p)$ 其中 d 表示 P 的一切眞因數和（不包括 P 本身）

因 α 爲完全數，故

$\alpha = S - \alpha$ 即 $S = 2\alpha$

$(2^{n-1} - 1)(d + p) = 2\alpha = 2^{n+1}P$

因此得到 $P = (2^{n+1} - 1)d$

其中 $2^{n+1}-1>1$，且 d 是 p 的因數，亦為眞因數。

d 又是 p 的一切眞因數的和，$\therefore p$ 為質數，$d=1$

$p=(2^{n+1}-1)d=2^{n+1}-1$ 為質數

故本定理得證。

完全偶數的尋找可以由 $2^{n+1}-1$ 是否為質數來著手，尋找此種特別型式的質數，最早以法國的數學家Marin Mersenne 算出最多，因此以他的名字來稱此型式的質數，稱梅仙涅質數，以 $M_p=2^p-1$ 表示，例如

當 $p=2$ 時　$2^p-1=3$ 為質數

$p=3$　$2^p-1=7$ 為質數

$p=5$　$2^p-1=31$ 為質數

$p=7$　$2^p-1=127$ 為質數

$p=11$　$2^p-1=2047=23\times 89$ 為一合成數

$\vdots$　　$\vdots$

因此 2^p-1 不一定是質數，但我們可以證明：

若 a^n-1 為質數，$n\geqslant 2$，$a\geqslant 1$，則 $a=2$ 且 n 為一質數。

<Pf> $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+1)$

而 $a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+1>1$　$\therefore a-1=1$

即得 $a=2$，否則 a^n-1 為合成數

若 n 不為質數，則可設 $n=rs$，其中 $1<r$，$s<n$

則 $2^{n-1}=2^{rs}-1=(2^r-1)(2^{r(s-1)}+2^{r(s-2)}+\cdots+2^r+1)$

等式的右邊每一因數都大於 1，故 2^n-1 為一合成數，此與假設相矛盾，故知 n 為質數。

由上定理我們可不必考慮 M_p 中 p 為合成數的情形，但即使 p 為質數，M_p 也未必為質數，如 $p=11$，$M_p=23\times 89$ 因此我們尋找梅仙涅質數的工作，又須藉助下一個定理：若 p 為質數，則 M_p 的質因數必呈 $ap+1$ 的型式，其中 a 為正整數，如 $p=11$　$M_p=(2\times 11+1)(8\times 11+1)$

<Pf>設 2^p-1 有一質因數 $x=ap+b$ 其中 $0<b<p$

因 $2^p\equiv 1\ (mod x)$

$\therefore 2^{x-1}\equiv 2^{ap+b-1}\equiv(2^p)^a\cdot 2^{b-1}$

$\equiv 2^{b-1}\ (mod x)$

根據費烏定理 $2^{x-1}\equiv 1\ (mod x)$

$\therefore 2^{b-1}\equiv 1\ (mod x)$

假設 $b-1>0$，因質數 $p>b>b-1>0$

所以 p 和 $b-1$ 互質

存在兩個正整數α和β使得

$\alpha p = \beta(b-1)+1$或$\alpha(b-1)=\beta p+1$

當$\alpha p=\beta(b-1)+1$時

$2^{\alpha p} \equiv 2^{\beta(b-1)+1} \equiv (2^{b-1})^{\beta} \cdot 2 \equiv 2 \pmod{x}$

但$2^{\alpha p} \equiv (2^{p})^{\alpha} \equiv 1 \pmod{x} \rightarrow\leftarrow$

同様地，當$\alpha(b-1)=\beta p+1$時也矛盾

因此$b-1=0$卽$b=1$本定理得證。

梅仙涅在1644年列擧出對應於從2到257之質數的梅仙涅質數$M_p = 2^p-1$，在他的表上共列十七個，後來人們雖發現了五個錯誤。（分別對應於$p=41,67$ 79，107，257），但實際上他的成就已屬不易了，對應於2至257之質數的梅仙涅質數分別是$M_2=3$，$M_3=7$，$M_5=31$，$M_7=127$，$M_{13}=8191$，$M_{17}=131071$，$M_{19}=524287$，$M_{31}=2147483647$，M_{61}，M_{89}，M_{107}，M_{127}。M_{31} 是尤拉在1750年算出的，而1876年法國數學家洛克斯（Lucas）用筆算出一個最大紀錄M_{127}，這個數字高達39 位數，是人類用紙筆所能算出最大者，其後累瑪（Lehmer）與羅賓遜（Robinson）在1952年應用電子計算機又找出5個梅仙涅質數，它們是M_{521}，M_{607}，M_{1279}，M_{2203}，M_{2281}，最近又找到數個，其中M_{11213}， 其位數爲3375位，而目前所找到最大的一個是M_{19937}由B. Tuckerman 所找出的，居然高達6002 位數字呢！是不是能找到另一個更大的梅仙涅質數呢？是不是有無限多個梅仙涅質數呢？如果我們能找到肯定的答案，當然完全偶數也有無限多個了。雖然目前爲止我們還不知道答案，但我們相信以人類的智慧以及日新月異的科學技術，我們必能在完全數與梅仙涅質數的尋找園地裏再播種，再耕耘。

參考書籍：

1. An Introduction to the theory of number,
   I. Niven and H.S. Zuckerman.
2. Number Theory, Andrews.

Infinite Galois Extensions

指導老師　趙文敏

張永寬

We have known that if K/F is a finite Galois extension, then there is a one-one correspondence between the subfields of K containing F and the subgroups of the Galois group G(K/F). But it is not always true for infinite Galois extensions. In this text, we shall construct a suitable topology on the Galois group G(K/F), such that there is a one-one correspondence between the subfields of K containing F and the closed subgroups of G(K/F).

〔Definition 1〕 K/F is a field extension, If σ is an isomorphism of K onto K such that $\sigma(\lambda)=\lambda$ for all λ in F, then σ is called an F-automorphism of K.

〔Definition 2〕 A field K is said to be a normal extension of F if K is algebraic over F and if every irreducible polynomial in F〔x〕 which has one root in K splits in K.

〔Definition 3〕 K/F is a field extension, a is an algebraic element in K over F, then a is said to be separable over F if its minimal polynomial has no multiple root. K is said to be separable over F if it is algebraic over F and each of its elements is separable over F.

[Definition 4] An algebraic extension K of F is called a Galois extension of F if the fixed field of the Galois group G(K/F) is F.

[Theorem 1] K/F is a finite field extension, then K/F is a Galois extension if and only if K/F is a normal and separable extension.

Theorem 1 is an important theorem of finite Galois theory, in fact, it is still true when K/F is an infinite extension. The following theorem gives the fact.

[Lemma 2] Suppose that K/F is a normal separable extension. (Note 1) If σ is an F-isomorphism of K into K, then σ is onto That is, σ is an F-automorphism.

proof: Let $a \in K$, $f(x)$ be the minimal polynomial of a over F. Since $f(a)=0$ and K/F is a normal extension, $f(x)$ splits in K. Let L be the splitting field of $f(x)$ over F, then $F \subseteq L \subseteq K$ and $a \in L$. If $a=b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n$ are all roots of $f(x)$ in K. Since L is separable over F, $b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n$ are all distnict and $L=F(b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n)$. Since σ is an F-isomorphism and $f(x) \in F[x]$, $\sigma(f(x))=f(x)$, then $(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)=f(x)=\sigma(f(x)) =(x-\sigma(b_1))(x-\sigma(b_2))\ldots\ldots(x-\sigma(b_n))$ hence $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} = \{\sigma(b_1), (b_2), \ldots\ldots, (b_n)\}$ and $L=F(b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n)=F(\sigma(b_1), \ldots\ldots, \sigma(b_n))=\sigma(L)$ There is $b \in L \subset K$ such that $\sigma(b)=a$, hence σ is onto.

[Lemma 3] Suppose that K/F is a normal separable extension, L is a subfield of K such that $F \subseteq L \subseteq K$. If σ is an F-isomorphism of L into K, then there is an F-automorphism τ of K such that $\tau(a)=\sigma(a)$ $\forall a \in L$.

proof: Let $A=\{(M,\rho) \mid L \subseteq M \subseteq K$, M is subfield of K, ρ is an F-isomorphism of M into K such that $\rho(a)=\sigma(a)$, $\forall a \in L\}$ We define an order relation on A by $(M_1, \rho_1) \leq (M_2, \rho_2)$ if and only if $M_1 \subseteq M_2$ and $\rho_2(a)=\rho_1(a)$, $\forall a \in M_1$ Since $(L, \sigma) \in A$, A is not empty. If $B=\{(M_\lambda, \rho_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda$ is a totally ordered subset of A. Let $M=\bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$, then M is a subfield of K. Define $\rho: M \rightarrow K$ as follows: $\rho(a)=\rho_\lambda(a)$, if $a \in M_\lambda$, then ρ is a well-defined F-isomorphism of M into K. Hence every totally ordered subset of A has an upper bound. By zorn's Lemma, A has a maximal element (M, τ), we claim that M=K. Assume that there is $a \in K$, $a \notin M$, then the minimal polynomial h(x) of a over F splits in K. Since $F \subseteq M$ the minimal polynomial f(x) of a over M divides h(x), hence there is some g(x) in M[x] such that h(x)= f(x)g(x). Because τ is an F-isomorphism, τ leaves each element of F fixed, therefore $h(x)=\tau(h(x)=\tau(f(x)g(x))=\tau(f(x))$ $\tau(g(x))$ and $\tau(f(x))$ splits in K, for h(x) splits in K. Let b be a root of $\tau(f(x))$ in K, there is an isomorphism τ' of M(a) onto $\tau(M)(b)$ such that $\tau'(a)=b$ and $\tau'(m)=\tau(m)$, $\forall m \in M$. This shows that $(M(a), \tau') \in A$ and $(M, \tau) \leq (M(a), \tau')$. But this contradicts to the fact that (M, τ) is a maximal element of A. Hence me must have M=K, by lemma 2, is an F-automorphism of K and $\tau(a)=\sigma(a)$, $\forall a \in L$.

[Theorem 4] K/F is a field extension, then K/F is normal and separable extension if and only if K/F is a Galois extension.

proof: Suppose that K/F is normal and separable extension. Let a be an element of the fixed field of G(K/F). As in the proof of lemma 2, there is a finite mormal extension L of F in K containing a. Let $\sigma \in G(L/F)$, by lemma 3, there is an F-automorphism τ of K such that $\sigma(b)=\tau(b)$, $\forall b \in L$. In particular,

$\sigma(a)=\tau(a)=a$. That is, a is in the fixed field of $G(L/F)$. Since K/F is a normal separable extension, L/F is a finite normal separable extension, by theorem 1, L/F is a Galois extension, hence F is the fixed field of $G(L/F)$. Therefore, $a\in F$. This fact tells us that F is the fixed field of $G(K/F)$, that is, K/F is a Galois extension.

Conversely, Suppose that K/F is a Galois extension, then K is algebraic over F. Let $f(x)\in F[x]$ be irreducible over F and a is a root of $f(x)$ in K. Let $A=\{\sigma(a)\mid \sigma\in G(K/F)\}$ Since $f(\sigma(a))=\sigma(f(a))=0$, $\forall\sigma\in G(K/F)$ and $f(x)$ has at most finite roots, A is finite. Suppose that $A=\{a=a_1, a_2, .., a_n\}$. Let $g(x)=(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$ then $g(x)$ divides $f(x)$. If $\sigma\in G(K/F)$ then $\{a_1, a_2, ..., a_3\}=\{\sigma(a_1), (a_2), ..., (a_n)\}$ hence $\sigma(g(x))=(x-\sigma(a_1))(x-\sigma(a_2))...(x-\sigma(a_n))=(x-a_1)(x-a_2)..$ $...(x-a_n)=g(x)$.

This shows that each coefficients of $g(x)$ are left fixed by σ, but F is the fixed field of $G(K/F)$, hence $g(x)\in F[x]$ and we must have $f(x)=cg(x)$, where c is the leading coefficient of $f(x)$, for $f(x)$ is irreducible over F. Thus, $f(x)$ splits in $K[x]$ which implies that K/F is a normal extension. In particular, for all a in K, let $f(x)$ be the minimal polynomial of a over F, then $c=1$ and $f(x)=g(x)=(x-a_1)...(x-a_n)$. Since a_1, a_2,...., a_n are district, a is separable over F, hence K/F is a separable extension.

In next theorem, let N be the collection of all subgroups $G(K/L)$ of the Galois group $G(K/F)$, where L is a finite extension of F contained in K. We will construct a topology on $G(K/F)$, which is called the Krull topology on $G(K/F)$.

〔Theorem 5〕 Let $N_\sigma=\{\sigma H | H\in N\}$ for all $\sigma\in G(K/F)$. Then there is a topology on $G(K/F)$ with N_σ as an open neighborhood system of σ.

proof: (1) N_σ is not empty, for $G(K/F)$ is in N_σ.

(2) Since the identity mapping e is the identiy element of $G(K/F)$, hence $e\in H$ for all H in N. If $\sigma H\in N$, then $\sigma=\sigma e\in\sigma H$.

(3) If σH_1, $\sigma H_2\in N\sigma$, there are finite fields extension L_1, L_2 of F contained in K such that $H_1=G(K/L_1)$, $H_2=G(K/L_2)$. Since L_1, L_2 are finite separable extension of F, there are $a\in L_1$, $b\in L_2$ such that $L_1=F(a)$, $L_2=F(b)$. Let $L=F(a,b)$, then L is a finite extension of F, $L_1\subseteq L$, $L_2\subseteq L$ and we claim that $H_1\cap H_2=G(K/L_1)\cap G(K/L_2)=G(K/L)\in N$, then $\sigma(H_1\cap H_2)\subset\sigma H_1\cap\sigma H_2$. If $\sigma\in G(K/L_1)\cap G(K/L_2)$ then for all $c\in L$, c is a polynomial of a and b, hence $\sigma(c)=c$, and σ leaves L_1, L_2 fixed. Therefore, σ is in $G(K/L)$. Conversely, if $\tau\in G(K/L)$, then τ leaves L fixed, thus τ leaves L_1 and L_2 fixed, hence τ is in $G(K/L_1)$ and $G(K/L_2)$.

(4) If $\sigma H\in N_\sigma$, for each τ in σH, there is τ' in H such that $\tau=\sigma\tau'$. Consider $\tau H\in N_\tau$, we have $\tau H=(\sigma\tau')H=\sigma(\tau' H)=\sigma H$.

Hence by (1)$\sim$(4), we have a topology on $G(K/F)$ with N_σ as its open neighborhood system of σ.

〔Corollary 6〕 Suppose that K/F is a finite Galois extension, then the Krull topology on $G(K/F)$ is discrete.

proof: Since K/F is a finite extension, $G(K/K)=\{e\}\in N$, hence $\{\sigma\}=\sigma\{e\}\in N_\sigma$ for all $\sigma\in G(K/F)$. That is, every one-element subset of $G(K/F)$ is open in $G(K/F)$, thus $G(K/F)$ has a discrete topology.

〔Lemma 7〕 Suppose that K/F is a Galois extension, H is a subgroup of $G(K/F)$. If L is the fixed field of H, then $G(K/L)$ $=\overline{H}$, where $\overline{H}$ is the closure of H relative to the Krull topology on $G(K/F)$.

proof: Let $\sigma\in\overline{H}$ and $a\in L$, $F(a)$ is a finite extension of F, for a is algebraic over F. Let $H'=G(K/F(a))\in N$, then $\sigma H'$ is an open neighborhood of σ, hence $H\cap\sigma H'\neq\phi$. Let $\tau\in H\cap\sigma H'$. Since $\tau\in\sigma H'$, $\sigma^{-1}\tau\in H'$, $\sigma^{-1}\tau(a)=a$, $\tau(a)=\sigma(a)$. But $\tau(a)=a$, for L is the fixed field of H, hence $\sigma(a)=a$. That is, σ leaves L fixed, $\sigma\in G(K/L)$.

Conversely, Let $\sigma\in G(K/L)$. For each H' in N, there is a finite extension M of F in K such that $H'=G(K/M)$. Since K/F is a Galois extension, K/M is also a Galois extension, hence M is the fixed field of $G(K/M)$. But M is a finite separable extension of F, there is an element a in M such that $M=F(a)$. Let S be a finite normal extension of L in K with $a\in S$. If $\rho\in H$, since S is normal over L and L is fixed by ρ, we have $\rho(S)=S$, that is the restriction of ρ to S is an L- automorphism of S. $H_0=\{\rho|_S \mid \rho\in H\}$ is a subgroup of $G(S/L)$, since the fixed field of H_0 is L, by fundamental thererem of finite Galois theory $\Rightarrow H_0=G(S/L)$ Hence there is $\tau\in H$ such that $\sigma|_S=\tau|_S$, that is, $\sigma(b)=\tau(b)$ for all b in S. In partiaclar, $\sigma(a)$ $=\tau(a)$, $\sigma^{-1}\tau(a)=a$, hence $\sigma^{-1}\tau\in G(K/F(a))=H'$, $\tau\in\sigma H'$, Therefore, $\tau\in H\cap\sigma H'$, $H\cap\sigma H'\neq\phi$, and $\sigma\in\overline{H}$.

〔Theorem 8〕 Let K/F be a Galois extension with the Krull topology on $G(K/F)$. Then there is a one-one correspondence between the closed subgroups of $G(K/F)$ and the subfields of K containing F.

proof: Let $A=\{H \mid H$ is a closed subgroup of $G(K/F)\}$

$B=\{M \mid M$ is a subfield of K containing $F\}$

We define $\Phi: A \to B$ by $\Phi(H)=L(H)$, where $L(H)$ is the fixed field of H. If $\Phi(H_1)=\Phi(H_2)$, $L(H_1)=L(H_2)$, then $H_1=\overline{H}_1=G(K/L(H_1))=G(K/L(H_2))=\overline{H}_2=H_2$. Hence Φ is one-one.

Let $M \in B$, then $M \subseteq L(G(K/M))$. Assume that $M \neq L(G(K/M))$, then there is $a \in L(G(K/M))$, $a \notin M$, and there is a finite normal extension S of M in K with $a \in S$. Since $a \notin M$, there is an M-automorphism τ of S such that $\tau(a) \neq a$. But by lemma 3, there is an M-automorphism σ of K such that $\sigma(b)=\tau(b)$ for all b in S. In particular, $\sigma(a)=\tau(a) \neq a$, a contradiction. Hence $M=L(G(K/M))$ and Φ is onto.

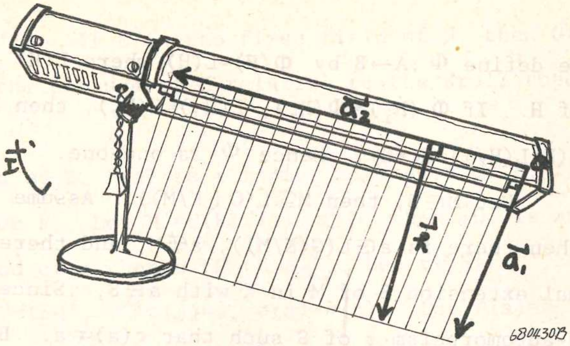
〔Remark〕 Note that, by corollary 6, if K/F is a finite Galois extension, then the Krull topology on G(K/F) is discrete, hence each subgroup of G(K/F) is closed. This shows that the one-one correspondence of finite Galois extension between the subgroup of G(K/F) and the subfields of K containing F is a special case of theorem 8.

〔Note 1〕 In this text, if there is not any special mention, K/F can be a finite or an infinite extension.

〔Bibliography〕

(1) PAUL J. Mc CARTHY Algebraic Extensions of Fields. P.58 ～P.63. 汎美圖書公司

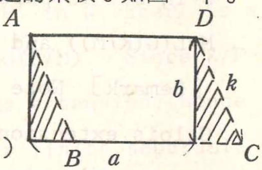
淺談 Hadamard 不等式



指導老師：林義雄

作者：胡家祥

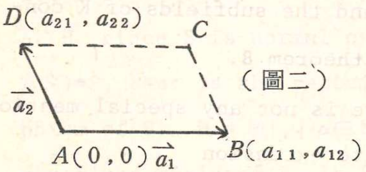
我們讀小學的時候就知道，長方形的面積等於長乘以寬，並可由此得到平行四邊形的面積爲底乘以高；並且知道其面積必不大於相鄰兩邊的乘積。如圖一中。



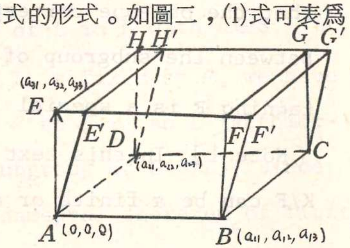
□$ABCD$的面積$= ab \le ak$ ……………(1)

（圖一）

到了高中學了向量以後，我們可選取一定點爲原點，選取兩適當位置向量爲相鄰兩邊，造成一個平行四邊形，則可將(1)式表爲行列式的形式。如圖二，(1)式可表爲



（圖二）



（圖三）

$$\text{▱}ABCD\text{的面積} = \left|\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right| \le \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2} \cdot \sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

若是以平行四邊形$ABCD$爲底，取$\vec{a_3}$爲一與▱$ABCD$不共面的位置向量，可做一平行六面體。若$\vec{a_3}$垂直於▱$ABCD$所在之平面（如圖三中之$\overrightarrow{AE}$）則六面體的體積爲底面積乘以此位置向量的長度卽可；否則，需以底面積乘以高才得六面體的面積。由向量的基本知識，我們可得到以圖三中的$\vec{a_1}$，$\vec{a_2}$，$\vec{a_3}$爲相鄰三邊所得之平行六面體的體積爲

$$\left|\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right|$$

並可得一與(2)式對應的不等式

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \leq \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2} \cdot \sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2} \cdot \sqrt{a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2} \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

此不等式之幾何意義卽爲，平行六面體的體積不大於相鄰三邊的乘積；當等號成立時，表示相鄰各邊互相垂直。

當我們發現在眼前所能見的R^2及R^3空間中有相同的現象，並且得到類似不等式，我們就發生一個問題，此不等式是否可推廣成n階的行列式不等式。以下我們就針對這個問題來討論。

首先我們先把垂直的觀念推展爲一般向量空間的直交觀念，我們下個定義：

〔定義1〕x , y是向量空間R^n上之二向量，則x與y直交$\Longleftrightarrow < x , y > = 0$，其中$< x , y >$爲$x , y$之內積。我們可發現在$R^2$及$R^3$空間上，向量的直交卽爲互相垂直。我們在下面引進並證明「直交化定理」(Orthogonalization Theorem) 在證明過程中我們將可發現就是上述將平行四邊形扶正之發揮。

〔定理1〕(直交化定理)

設$a_1 , a_2 , a_3 , \cdots\cdots , a_k , \cdots\cdots$爲向量空間$R^n$中一(有限或無限個)向量所成之序列。令$L_k = L(a_1 , a_2 , \cdots , a_k)$爲由$a_1 , a_2 , \cdots , a_k$所生成的子空間，則存在向量$b_1 , b_2 , \cdots , b_K$使得：

(1) $L_k' = L(b_1 , b_2 , \cdots , b_k)$和$L_k$爲同一向量空間。

(2) b_{k+1}與L_k直交，$1 \leq k \leq n$

(證明)對k用數學歸納法證明：

當$k = 1$時，令$b_1 = a_1$ 則$L_1' = L_1$

因L_1爲有限維，則可令$a_2 = x_1 + y_1$，其中$x_1 \in L_1$而y_1與L_1直交。取$b_2 = y_1$，則$L(a_1 , a_2) = L(b_1 , b_2)$，故$k = 2$時定理顯然成立。

假設$k = n$時定理成立，則$L(a_1 , a_2 , \cdots , a_n) = L(b_1 , b_2 , \cdots , b_n)$ i.e. $L_n = L_n'$，且b_{n+1}與L_n直交。

因爲L_n是有限維子空間，所以a_{n+1}可表成$a_{n+1} = x_n + y_n$，其中$x_n \in L_n$，y_n與L_n直交。

令$b_{n+1} = y_n$則$L(a_1 , a_2 , \cdots , a_{n+1}) \subseteq L(b_1 , b_2 , \cdots , b_{n+1})$

又$L_{n+1} \geq L'_{n+1}$，所以$L_{n+1} = L'_{n+1}$

同理，a_{n+2}可表爲$a_{n+2} = x_{n+1} + y_{n+1}$，其中$x_{n+1} \in L_{n+1}$，$y_{n+1}$與$L_{n+1}$直交。

令 $b_{n+2}=y_{n+1}$ 則 b_{n+2} 與 L_{n+1} 直交，

則 $k=n+1$ 時定理成立，故本定理得證。

上述定理證明中的 b_k 是 a_k 扶正而得的，在 R^2 空間的情況，就同圖一中 的 b 是 k 扶正而得的。這已暗示我們以 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 爲邊之 k 維平行面體的體積爲

$$|b_1||b_2|\cdots\cdots|b_k|$$

由定理證明中也可發現下列關係式：

$$0\leq|b_n|\leq|a_n| \qquad \forall \quad n\in N \qquad\cdots\cdots(4)$$

我們現在來證明以 $a_1, a_2, \cdots, a_K$ 爲邊的 K －方體的體積爲 det A 且有類似 (3) 式的不等式（以下皆沿用定理 1 的符號）。我們先引進 gram 行列式：

〔定義 2〕Gram 行列式爲一有下列形式的行列式

$$\begin{vmatrix} <a_1, a_1> & <a_1, a_2> \cdots\cdots & <a_1, a_k> \\ <a_2, a_1> & <a_2, a_2> \cdots\cdots & <a_2, a_k> \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ <a_k, a_1> & <a_k, a_2> \cdots\cdots & <a_k, a_k> \end{vmatrix}$$

其中 $<a_i, a_j>$，$1\leq i$，$j\leq k$ 爲 a_i，a_j 之內積。

這時此行列式記爲 $G(a_1, a_2, \cdots, a_k)$

當我們令 $a_i=(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ 是 R^n 中一向量，$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 時，我們知道 $(\det A)^2=(\det A)(\det A^*)$ 其中 A^* 爲 A 之轉置矩陣，det A 爲 A 對應的行列式。因此

$$(\det A)^2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots\cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}a_{11}+a_{12}a_{12}+\cdots+a_{1n}a_{1n} & a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+\cdots+a_{1n}a_{2n} & \cdots & a_{11}a_{n1}+a_{12}a_{n2}+\cdots+a_{1n}a_{nn} \\ a_{21}a_{11}+a_{22}a_{12}+\cdots+a_{2n}a_{1n} & a_{21}a_{21}+a_{22}a_{22}+\cdots+a_{2n}a_{2n} & \cdots & a_{21}a_{n1}+a_{22}a_{n2}+\cdots+a_{2n}a_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}a_{11}+a_{n2}a_{12}+\cdots+a_{nn}a_{1n} & a_{n1}a_{21}+a_{n2}a_{22}+\cdots+a_{nn}a_{2n} & \cdots & a_{n1}a_{n1}+a_{n2}a_{n2}+\cdots+a_{nn}a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \langle a_1, a_2 \rangle & \cdots\cdots & \langle a_1, a_n \rangle \\ \langle a_2, a_1 \rangle & \langle a_2, a_2 \rangle & \cdots\cdots & \langle a_2, a_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ \langle a_n, a_1 \rangle & \langle a_n, a_2 \rangle & \cdots\cdots & \langle a_n, a_n \rangle \end{vmatrix}
$$

$$
= \quad G(a_1, a_1, \cdots\cdots, a_n)
$$

所以我們現在的工作轉化爲處理$G(a_1, a_2, \cdots, a_n)$。由直交化定理的證明，我們考慮$a_1, a_2, \cdots, a_n$的直交化過程，則$b_1 = a_1$且可將b_2表爲$b_2 = \alpha_1 b_1 + a_2$；在gram行列式$G(a_1, \cdots\cdots, a_n)$中先將所有的$a_1$換爲$b_1$，然後以$\alpha_1$乘以第一列加到第二列，然後再以$\alpha_1$乘以第一行加到第二行去則得到

$$
\begin{vmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & \langle b_1, b_2 \rangle & \langle b_1, a_3 \rangle & \cdots\cdots & \langle b_1, a_n \rangle \\ \langle b_2, b_1 \rangle & \langle b_2, b_2 \rangle & \langle b_2, a_3 \rangle & \cdots\cdots & \langle b_2, a_n \rangle \\ \langle a_3, b_1 \rangle & \langle a_3, b_2 \rangle & \langle a_3, a_3 \rangle & \cdots\cdots & \langle a_3, a_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ \langle a_n, b_1 \rangle & \langle a_n, b_2 \rangle & \langle a_n, a_3 \rangle & \cdots\cdots & \langle a_n, a_n \rangle \end{vmatrix}
$$

$$
= G(b_1, b_2, a_3, \cdots\cdots, a_n) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)
$$

由行列式之基本性質和(5)式的推導我們知

$$
G(a_1, a_2, \cdots, a_n) = G(b_1, b_2, a_3, \cdots, a_n)
$$

又由b_3可表成$b_3 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + a_3$，對(5)式以$\beta_1$乘以第一列，$\beta_2$乘以第二列加到第三列上。然後將$\beta_1$乘以第一行，$\beta_2$乘以第二行加到第三行則得到

$$
\begin{vmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & \langle b_1, b_2 \rangle & \langle b_1, b_3 \rangle & \langle b_1, a_4 \rangle & \cdots\cdots & \langle b_1, a_n \rangle \\ \langle b_2, b_1 \rangle & \langle b_2, b_2 \rangle & \langle b_2, b_3 \rangle & \langle b_2, a_4 \rangle & \cdots\cdots & \langle b_2, a_n \rangle \\ \langle b_3, b_1 \rangle & \langle b_3, b_2 \rangle & \langle b_3, b_3 \rangle & \langle b_3, a_4 \rangle & \cdots\cdots & \langle b_3, a_n \rangle \\ \langle a_4, b_1 \rangle & \langle a_4, b_2 \rangle & \langle a_4, b_3 \rangle & \langle a_4, a_4 \rangle & \cdots\cdots & \langle a_4, a_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ \langle a_n, b_1 \rangle & \langle a_n, b_2 \rangle & \langle a_n, b_3 \rangle & \langle a_n, a_4 \rangle & \cdots\cdots & \langle a_n, a_n \rangle \end{vmatrix}
$$

$$
= G(b_1, b_2, b_3, a_4, \cdots\cdots, a_n) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)
$$

由行列式的基本性質和(6)式的推導我們知

$$
G(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n) = G(b_1, b_2, a_3, \cdots\cdots, a_n)
$$

$$
= G(b_1, b_2, b_3, a_4, \cdots\cdots, a_n)
$$

繼續此步驟可得

$$G(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n) = G(b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n)$$

但由直交化定理之證明知　$\langle b_i, b_j \rangle = 0$，$\forall_i \neq j$

所以 $(\det A)^2 = G(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n) = G(b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n)$

$$= \begin{vmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & & & \mathbf{0} \\ & \langle b_2, b_2 \rangle & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \langle b_n, b_n \rangle \end{vmatrix}$$

$$= |b_1|^2 |b_2|^2 \cdots\cdots |b_n|^2$$

故知 $|\det A|$ 爲 n 維平行面體的體積，且由(4)式知

$$|\det A| \leq (|a_1|^2 |a_2|^2 \cdots\cdots |a_n|^2)^{1/2}$$

即 $$\left| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right| \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

(7)式卽稱爲Hadamard 不等式。

(7)式左方的行列式表示以 a_1，a_2，……，a_n 爲邊所圍之 n 維超平行面體（ hyperparallelepiped ）之體積；證明過程中指出，此 n 維超平行面體的體積，可由 a_1，a_2，……，a_{n-1} 所決定之 $n-1$ 維超平行面體的體積，與以 a_n 之終點爲端點，對上述 $n-1$ 維超平行面積所作之高（卽 $|b_n|$ ）的乘積。而整個(7)式的幾何意義卽爲此 n 維超平行面體的體積不大於相鄰各邊長的乘積；等號成立於 a_1，a_2，…，a_K 互相直交時。

Hadamard 不等式的證明極多，至今已有百種以上的證法，上面所陳述的是一種最自然而易於接受的證法，以下我們再以幾種不同的方法來證明之。

首先我們用正定型方陣來證明，在未定義正定型方陣以前，我們先規定一些符號，這些符號在此證明過程中都適用。若 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 爲一 n 階對稱方陣，A^* 爲 A 的轉置矩陣，

$$\det A_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \qquad 1 \leq k \leq n \quad \text{爲 } A \text{ 的 } k \text{ 階主子行列式}$$

另外，$x \in \boldsymbol{R}^n$ 我們可視爲 $1 \times n$ 階矩陣。下面定義正定型方陣及非負定型方陣。

〔定義3〕若 A 爲一 n 階對稱方陣，使得 $\forall$，$x \in \boldsymbol{R}^n \Rightarrow x A x^* > 0$ 則 A 稱爲正定型方陣。若 A 爲一 n 階對稱方陣，使得 $\forall x \in \boldsymbol{R}^n \Rightarrow xAx^* \geq 0$ 則 A 稱爲非負定型方陣。

在證明過程中我們將用到正定型方陣的一些性質，我們列舉於下而不加以證明。

〔性質1〕令

$$A_k{}^1 = \begin{bmatrix} a_{kk} & a_{k\,k+1} & \cdots\cdots & a_{kn} \\ a_{k+1\,k} & a_{k+1\,k+1} & \cdots\cdots & a_{k+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ a_{nk} & a_{nk+1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

則有(i)若 $\det A = 0$ 而 $\det A_k' > 0$，$2 \leq k \leq n$ 則 A 是非負定型方陣。

(ii) A 是非負定型方陣，則 $a_{kk} \geq 0$，$1 \leq k \leq n$。

(iii) A 是正定型方陣

則 $\begin{bmatrix} a_{11} - \dfrac{\det A}{\det A_2'} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}$ 是非負定型方陣。

現在證明下列定理：

〔定理1〕若 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 爲一 n 階正定型方陣，則

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \leq a_{11} a_{22} \cdots\cdots a_{nn}$$

(證明)利用數學歸納法證明

當 $n = 1$ 時　$a_{11} = a_{11}$　此定理顯然成立

設 $n = k$ 時　定理成立

因爲 A 是正定型方陣故知

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\dfrac{\det A}{\det A_2'}, & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ 爲非負定型方陣。

由性質 1（ii）知 $a_{11}-\dfrac{\det A}{\det A_2'} \geq 0$

$$\therefore \det A \leq a_{11} \det A_2' = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots\cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \leq a_{11}a_{22}\cdots\cdots a_{nn}$$

所以當 $n=k$ 時本定理亦成立。

因爲 $xAx^* \geq 0$ 時可得 $\det A_k \geq 0$ 且 $\det A = 0$，並由性質 1（ii）知定理 2 在 A 爲非負定型方陣時亦成立。我們非常容易可證得Hadamard 不等式。

若 $x \in \boldsymbol{R}^n$，則 $xAA^*x^* = (xA)(xA)^* = |xA|^2 \geq 0$，所以 AA^* 是非負定型方陣。故

$$\det(AA^*) \leq (a_{11}a_{11}+a_{12}a_{12}+\cdots\cdots+a_{1n}a_{1n})(a_{21}a_{21}+a_{22}a_{22}+\cdots$$
$$\cdots+a_{2n}a_{2n})\cdots\cdots(a_{n1}a_{n1}+a_{n2}a_{n2}+\cdots\cdots+a_{nn}a_{nn})$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)$$

又 $$\det(AA^*) = (\det A)^2$$

故 $$\left|\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\right| \leq \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}$$

接下來我們希望用Lagrange 乘數法則來證明。我們先說明一件事實。令 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 爲一 n 階方陣，B_{ij} 表示 $\det A$ 除去第 i 列及第 j 行所成之子行列式，而 $A_{ij}=(-1)^{i+j}B_{ij}$。若 $A'=(A_{ij})$ 表以爲元素所成的 n 階方陣，則 $\det A' = (\det A)^{n-1}$。

現在用 Lagrange 乘數法則證Hadamard 不等式，若是存在 $a_i=(a_{i1}, a_{i2}, \cdots\cdots, a_{in})=(0, 0, \cdots\cdots, 0)$ 則Hadamard 不等式顯然成立。否則Hadamard

不等式可改寫爲

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a_{11}}{|a_1|} & \dfrac{a_{12}}{|a_1|} & \cdots\cdots & \dfrac{a_{1n}}{|a_1|} \\ \dfrac{a_{21}}{|a_2|} & \dfrac{a_{22}}{|a_2|} & \cdots\cdots & \dfrac{a_{2n}}{|a_2|} \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ \dfrac{a_{n1}}{|a_n|} & \dfrac{a_{n2}}{|a_n|} & \cdots\cdots & \dfrac{a_{nn}}{|a_n|} \end{vmatrix} \leq 1$$

故不妨令 $\quad (|a_i| = 1 , \quad 1 \leq i \leq n)$ ……………………………………(8)

現定義函數 $\quad g_i(A) = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots\cdots + a_{in}^2 - 1 , \quad 1 \leq i \leq n$

並令$f(A) = \det A$，則f爲一實值連續可微函數（$f \in C'$）；且g_i，$1 \leq i \leq n$，亦爲連續可微函數。由 Lagrange 乘數法則知存在乘數 $\frac{1}{2}\lambda_1$，$\frac{1}{2}\lambda_2$，……，$\frac{1}{2}\lambda_n$。現定義函數F爲$F(A) = f(A) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\lambda_i g_i$。由(8)式知$g_i$，$1 \leq i \leq n$，之定義域及$f$之定義域皆爲緊緻集；故$F$之極大極小値存在。若$F$在$B = (b_{ij})_{n \times n}$ 有極大値，如果$\det B = 0$則$(\det A)^2 \leq 1$顯然成立，故不妨設$\det B \neq 0$。因F在B有極大値，所以

$$\left.\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}\right|_B = 0 , \quad 1 \leq i , j \leq n$$

而 $$\left.\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}\right|_B = B_{ij} - \lambda_i b_{ij} , \quad 1 \leq i , j \leq n$$

則 $\quad B_{ij} = \lambda_i b_{ij} , \quad 1 \leq i , j \leq n$ ……………………………………(9)

則 $\quad b_{i1}B_{i1} + b_{i2}B_{i2} + \cdots\cdots + b_{in}B_{in} = \lambda_i (b_{i1}^2 + b_{i2}^2 + \cdots\cdots + b_{in}^2) = \lambda_i$

$\therefore \quad \det B = \lambda_i \qquad i = 1 , 2 , \cdots\cdots , n$

由(9)得 $\quad B_{ij} = b_{ij} (\det B) ,$

$\therefore \quad \det B' = (\det B)^n \det (b_{ij}) = (\det B)^{n+1}$

又 $\quad \det B' = (\det B)^{n-1}$

$\therefore \quad (\det B)^{n+1} = (\det B)^{n-1} \quad i.e. (\det B)^2 = 1$

故知 $\quad f(A)^2 \leq 1 \qquad$ 即 $(\det A)^2 \leq 1 \qquad$ 故 Hadamard 不等式成立。

接下來我們用重積分來證明 Hadamard 不等式，我們仍以定理 2 爲手段。在證明之先，需做一些準備工作。

若$A=(a_{ij})_{n\times n}$是一n階正定型方陣。$x=(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$。則$<x,$

$$Ax^*>=x_1\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)+x_2\left(\sum_{j=1}^{n}a_{2j}x_j\right)+\cdots\cdots+x_n\left(\sum_{j=1}^{n}a_{nj}x_j\right)$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

因爲A爲正定型，所以　　$\det A_K>0$，　　$1\leq k\leq n$

如令　$\det A_0=1$

$$y_k=x_k+\sum_{j=k+1}^{n}c_{kj}x_j,\qquad k=1,2,\cdots\cdots,n-1$$

$$y_n=x_n$$

其中c_{ij}爲a_{ij}之有理函數。

則可得　$<x,Ax^*>=\sum_{k=1}^{n}(\det A_k/\det A_{k-1})y_k{}^2$

經過積分線性變換可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-<x,Ax^*>}dx$$

$$=\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\frac{\det A_1}{\det A_0}y_1{}^2\right)}dy_1\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\frac{\det A_2}{\det A_1}y_2{}^2\right)}dy_2\right)\cdots\cdots$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\frac{\det A_n}{\det A_{n-1}}y_n{}^2\right)}dy_n\right)$$

$$=\frac{\pi^{n/2}}{(\det A_n)^{1/2}}=\frac{\pi^{n/2}}{(\det A)^{1/2}}$$

我們得到了一個重要的式子：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-<x,Ax^*>}=\frac{\pi^{n/2}}{(\det A)^{1/2}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

我們現在仍用數學歸納法來證明定理２。

（證明）當$n=1$時，顯然成立。

今設$n=k-1$時本定理亦成立。

當$n=k$時，不妨設$a_n>0$

$$\frac{\pi^{k/2}}{(\det A)^{1/2}}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\langle x,Ax^*\rangle}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}x_ix_j)\,dx_1\,dx_2\cdots\cdots dx_k \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

令$x'=(x_1',x_2',\cdots\cdots,x_k')$其中$x_1'=-x$，$x_i'=x_i$，　$2\leq i\leq k$

則

$$\frac{\pi^{k/2}}{(\det A)^{1/2}}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\langle x',Ax'^*\rangle}dx'$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}x_i'x_j')\,dx_1'\,dx_2'\cdots\cdots dx_k'\cdots\cdots\cdots(12)$$

$\dfrac{(11)+(12)}{2}$　得

$$\frac{\pi^{k/2}}{(\det A)^{1/2}}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\{\exp[-(a_{22}x_2^2-a_{33}x_3^2-\cdots\cdots-a_{kk}x_k^2-2a_{23}x_2x_3$$
$$-2a_{24}x_2x_4-\cdots\cdots-2a_{k-1,k}x_{k-1}x_k)]\}\,e^{-a_nx_1^2}(\frac{z+z^{-1}}{2})\,dx_1\,dx_2\cdots dx_k$$

其中$z=\exp(-2a_{12}x_1x_2-2a_{13}x_1x_3-\cdots\cdots-2a_{1k}x_1x_k)$

因為　　　$z>0$，　　　　$z+z^{-1}\geq 2$

所以

$$\frac{\pi^{k/2}}{(\det A)^{1/2}}\geq\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-(a_{22}x_2^2-a_{33}x_3^2\cdots\cdots-$$
$$a_{kk}x_k^2-2a_{23}x_2x_3\cdots-2a_{k-1,k}x_{k-1}x_k)]\,dx_2dx_3\cdots\cdots dx_k\}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a_{11} x_1^2 \, dx_1) \right)$$

$$\geq \frac{\pi^{k-1/2}}{(\det A_{k-1})^{1/2}} \cdot \frac{\pi^{1/2}}{(a_{11})^{1/2}} = \frac{\pi^{1/2}}{(\det A_{k-1} a_{11})^{1/2}}$$

因此　　　　　　　$\det A \leq \det A_{k-1} \, a_{11}$

但由所設知　　　　$\det A_{k-1} \leq a_{22} \, a_{33} \cdots\cdots a_{kk}$

故　　　　　　　　$\det A \leq a_{11} \, a_{22} \cdots\cdots a_{kk}$

接下來，利用正定型方陣證明的過程，與定理2相同，此處不再贅述。

最後我們再引用凸函數來證明，在用凸函數的證明中，我們需要引進一個定理，由於篇幅的關係，這一個定理我們僅敘述而不證明，同學如有興趣可參閱Roberts & Varberg 的Convex Function一書。

〔定理3〕若A是一n階實對稱方陣，且$\{ V_1, V_2, \cdots\cdots, V_n \}$是$R^n$中的就範直交基底(orthonormal set)，則

$$\prod_{j=1}^{k} \lambda_{n-j+1} \leq \prod_{j=1}^{k} < AV_j \, , V_j > \ \leq \left(\frac{1}{k} \prod_{j=1}^{k} \lambda_j \right)^k$$

其中$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots\cdots \geq \lambda_n$是$A$的固有值。

有了上面的定理，我們可開始證明Hadamard 不等式。

由線型代數的知識我們曉得，n階方陣A之行列式等於它的固有值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$的乘積。令$e_j$爲$R^n$中標準單位向量，由定理3我們可得

$$\det A = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j \leq \prod_{j=1}^{n} < Ae_j, e_j > = \prod_{j=1}^{n} a_{jj} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

若令$B = A^* A$，代入(13)式得

$$(\det A)^2 = \det(A^* A) = \det B$$

$$\leq \prod_{j=1}^{n} b_{jj}$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 \right)$$

則得Hadamard 不等式。

Hadamard 不等式主要的應用在積分方程式，在大學數學課程中用得較少。以下介紹關於Hadamard 不等式一個簡單的應用做爲結束。

在高微中積分變換公式是一個重要公式，其敍述如下：

對於一個開集$U \subseteq R^n$，若$\varphi: R^n \to R^n$ 在U中連續可微分。我們定義 Jacobian 行列式

$$J_\varphi = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

而$J_\varphi(x) \neq 0$，$\forall x \neq 0$ 若在U上的一緊緻集D，其容積$A(D) \neq 0$且對任一函數$f: R^n \to R$在$\varphi(D)$上連續。則我們可得

$$A(\varphi(D)) \neq 0$$

並且

$$\int_{\varphi(D)} f = \int_D (f \circ \varphi) \, |J_\varphi|$$

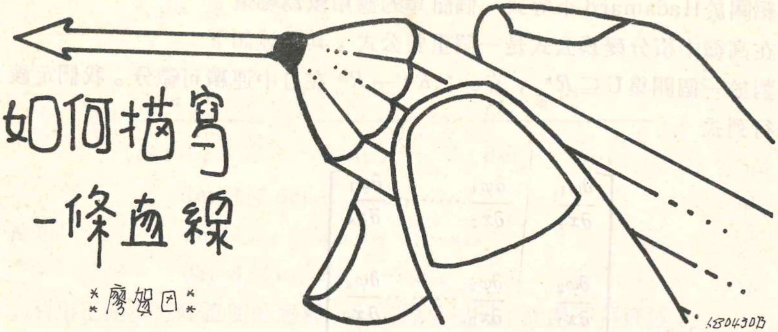
在積分變換公式中，當D很小的時候，我們可得

$$\frac{A(\varphi(D))}{A(D)} \approx |J_\varphi(x)| \qquad x \in D$$

因此我們可利用Hadamard 不等式估計其近似值。

如何描寫一條直線

廖賀因



當你在考慮空間中一直線的時候，如何適當地描寫，讓別人能清楚地了解這是怎樣的線呢？

一般地說，空間中直線的描寫法可分成三大類：

(1) 給定一點 $P_1=(x_1,\ y_1,\ z_1)$，及一個方向 $\overrightarrow{m}=(a,\ b,\ c)$

方程式可寫成
$$\begin{cases} x=x_1+at & \text{或 } \overrightarrow{x}=\overrightarrow{OP_1}+t\,\overrightarrow{m} \\ y=y_1+bt & \text{或 } \overrightarrow{m}\times(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{OP_1})=\overrightarrow{0} \\ z=z_1+ct & \end{cases}$$

在 a，b，c 全不為零時，這可以寫成 $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$，這一類的方程式，本文稱之為"點向式"

(2) 給定包含此線的兩個平面

方程式可寫成
$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$
若令 $\overrightarrow{n_1}=(a_1,\ b_1,\ c_1)$
$\overrightarrow{n_2}=(a_2,\ b_2,\ c_2)$
$\overrightarrow{x}=(x,\ y,\ z)$

方程式可寫成
$$\begin{cases} \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{x}+d_1=0 \\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{x}+d_2=0 \end{cases}$$

這一類的方程式，本文稱之為"兩面式"

(3) 給定此線的方向 $\overrightarrow{m}$，以及一個具有某些性質的向量 $\overrightarrow{\gamma}$ 方程式是 $\overrightarrow{m}\times\overrightarrow{x}=\gamma$（請參看 Spitzbart 的微積分第 516 頁）。

就描寫的明確程度而言，以點向式為最佳，兩面式次之，而第(3)種最差。對於點向式來說，儘管它是比較好的描寫法，但還是有兩個缺點：

(一)同一直線有無限多種描寫法，不能立刻判明兩線是否相同。例如以（3，−1，−2）為方向的直線，過（1，2，5）與過（$\frac{7}{2}$，$\frac{7}{6}$，$\frac{10}{3}$）是同一條，但過（9，−2，7

)是另一條。必須經過一番檢驗才能弄清楚。

㈡無法掌握這條線的位置。例如過(74，259，223)，以(2，7，6)爲方向的直線距離原點只有$\sqrt{\dfrac{53}{89}}$，可是看起來卻好像很遠。爲了補救這些缺點，我們可以規定，"點向式"的"點"，必須是直線上最接近原點的那一點。本文稱此點爲"法點"，並將用法點表示的"點向式"稱爲"正規點向式"。如此一來，除了$\overrightarrow{m}$的係數倍以外，直線方程式可說已具有唯一性了，我們可以從正規點向式對一條直線得到最清楚的認識。

接著要討論如何從上述三種方程式來找出法點，以便將方程式改爲"正規點向式"，以下分爲三個定理來介紹：

〔定理 1〕 令$\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{x_1}-\dfrac{\overrightarrow{x_1}\cdot\overrightarrow{m}}{|\overrightarrow{m}|^2}\overrightarrow{m}$　則$\overrightarrow{x}=\overrightarrow{OK}+k\overrightarrow{m}$　與$\overrightarrow{x}=\overrightarrow{x_1}+t\overrightarrow{m}$爲同一直線，且$K$爲其法點。

（證） 令$t=\dfrac{-\overrightarrow{x_1}\cdot\overrightarrow{m}}{|\overrightarrow{m}|^2}$

則可知K點在$\overrightarrow{x}=\overrightarrow{x_1}+t\overrightarrow{m}$上

由$\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{m}=\overrightarrow{x_1}\cdot\overrightarrow{m}-\dfrac{\overrightarrow{x_1}\cdot\overrightarrow{m}}{|\overrightarrow{m}|^2}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{m}=0$

可知K爲O到線之垂足，故爲法點。

〔定理 2〕 令$\overrightarrow{OK}=\dfrac{(d_2\overrightarrow{n_1}-d_1\overrightarrow{n_2})\times(\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2})}{|\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}|^2}$，則$\overrightarrow{x}=\overrightarrow{OK}+k\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$

與$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{x}+d_1=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{x}+d_2=0\end{cases}$ 爲同一直線，且K爲其法點

（證）
$$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{OK}=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot((d_2\overrightarrow{n_1}-d_1\overrightarrow{n_2})\times(\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}))}{|\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}|^2}$$
$$\because\ =\frac{(\overrightarrow{n_1}\times(d_2\overrightarrow{n_1}-d_1\overrightarrow{n_2}))\cdot(\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2})}{|\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}|^2}$$
$$=\frac{-d_1(\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2})\cdot(\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2})}{|\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}|^2}$$
$$=-d_1$$
$$\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{OK}=\frac{\overrightarrow{n_2}\cdot((d_2\overrightarrow{n_1}-d_1\overrightarrow{n_2})\times(\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}))}{|\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}|^2}$$
$$=\frac{(\overrightarrow{n_2}\times(d_2\overrightarrow{n_1}-d_1\overrightarrow{n_2}))\cdot(\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2})}{|\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}|^2}$$

$$= \frac{d_2(\vec{n}_2 \times \vec{n}_1) \cdot (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2)}{|n_1 \times n_2|^2}$$

$$= -d_2$$

$$OK \cdot (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) = \frac{((d_2\vec{n}_1 - d_1\vec{n}_2) \times (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2)) \cdot (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1 \times \vec{n}_2|^2} = 0$$

〔定理 3〕 令 $\overrightarrow{OK} = \dfrac{\vec{\gamma} \times \vec{m}}{|\vec{m}|^2}$ ，則 $\vec{x} = \overrightarrow{OK} + k\vec{m}$

與 $\vec{m} \times \vec{x} = \vec{\gamma}$ 爲同一直線，且 K 爲其法點。

（證） $\vec{m} \times \overrightarrow{OK} = \dfrac{\vec{m} \times (\vec{\gamma} \times \vec{m})}{|\vec{m}|^2} = \dfrac{(\vec{m} \cdot \vec{m})\vec{\gamma} - (\vec{m} \cdot \vec{\gamma})\vec{m}}{|\vec{m}|^2}$

$= \dfrac{(\vec{m} \cdot \vec{m})\vec{\gamma}}{|\vec{m}|^2}$ （$\because \vec{m} \cdot \vec{\gamma} = 0$ 爲 $\vec{m} \times \vec{x} = \vec{\gamma}$ 表一直線之先決決條件）

$= \vec{\gamma}$

$$\overrightarrow{OK} \times \vec{m} = \frac{\vec{\gamma} \times \vec{m} \cdot \vec{m}}{|\vec{m}|^2} = 0$$

利用這三個定理，可以把直線的方程式立刻化成正規點向式，而充分了解該直線的位置及方向。

對於平面上的直線，情形變得非常單純，只要知道法點 K 的位置，經過 K，作 OK 的垂線就可把這條線畫出來。也就是說，平面上"正常的"直線和平面上的點（原點除外）形成了一對一的對應關係。因此，如果把法點的坐標也看作直線方程式的一種，我們就得到可與平面直線的許多種方程式（如點斜式，兩點式，斜截式等等）分庭抗禮的另一種方程式了。（當然，這種方程式不能描寫過原點的直線，正如點斜式不能描寫鉛垂線，截距式不能描寫過原點的直線一樣，算是它的一種缺點）。

以下我們用一個定理來說明平面上直線方程式和法點的對應關係。由於證明太過簡單，故予省略。

〔定理 4〕 (1)對於正交坐標方程式 $ax + by + c = 0$， $a^2 + b^2 \neq 0$

法點坐標爲（$\dfrac{-ac}{a^2+b^2}$ ，$\dfrac{-bc}{a^2+b^2}$）

(2)對於極坐標方程式 $\gamma\cos(\theta - \theta_0) = \rho_0$，

法點的極坐標是〔ρ_0，θ_0〕

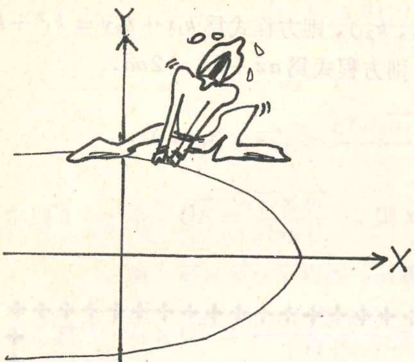
(3)對於複數方程式 $\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + k = 0$，$\alpha \neq 0$，$k \in R$

法點的複數表示爲 $-\dfrac{k}{2\bar{\alpha}}$

(4)給定法點的正交坐標（k_1，k_2），則方程式為 $k_1x+k_2y=k_1^2+k_2^2$。
(5)給定法點的複數表示 α ，則方程式為 $\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z=2\alpha\bar{\alpha}$.

教師和教科書的編者不該忘記，聰明的學生和聰明的讀者並不以推理的正確為滿足，他們還要知道每一步驟的動機和目的。導入一個輔助元素是一種特出的步驟。假使一條巧妙的輔助線突然地出現在圖中，而沒有一點預先的發動，就令人驚奇地把問題解決了，這樣會使聰明的學生和讀者失望，他們覺得像是被欺騙了。數學的趣味是在乎它使我們學到推理和發明的能力。若這最特出的步驟和目的沒有交待，那就學不到什麼推理和發明了。

——摘自「怎樣解題」



平面上幾何圖形的搬動

指導老師 林福來

劉曼麗

幾何學的定義在1872年由德國數學家克萊茵（F. Klein）提出來的，他認爲對應於每一種幾何學都有一變換群，該幾何學所研究的就是圖形在其對應的變換群作用後，仍不改變的性質的理論。本文的主題卽是要根據克萊茵幾何學的定義來探討歐氏平面上的圖形，不改變其性質的搬動。

一般而言，兩個幾何圖形F，F'全等的充分必要條件爲：F，F'間有一對應使F中的任意兩點的距離與其在F'中所對應的兩點之距離相等。從另一方面而言，兩個圖形全等的意思是說其中一個圖形在空間中移動後可以和另一個圖形處處重合。而此處的移動是指平面或空間的幾何變換。其實就是指剛體運動，亦卽所謂的保長運動。它將每一點A變換成另一點A'，使得任意兩點A、B間的距離等於變換所得之點A'、B'間的距離。

假設我們現在已知平面上的某兩個圖形全等，到底須經過什麼樣的搬動後才能將其中一個圖形和另一個圖形處處重合呢？這就得回到剛才所提到的保長運動了。在處理這個問題之前，我們先看看下面的四種變換。

設f爲一變換。Z是平面座標上的一點，Z'是變換後的新點。

1. 平移：

$Z'=f(Z)=Z+b$

設b爲平面上一向量，A爲平面上任一點，經平移後，A的新位置A'如圖1所示：

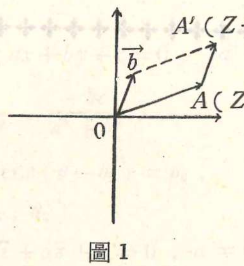


圖1

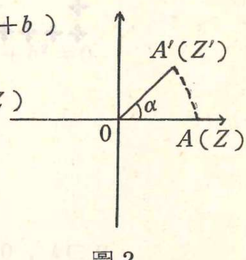


圖2

在此過程中，我們很容易的看出$\overrightarrow{AA'}$與$\overrightarrow{ob}$平行、同向且等長。

2. 旋轉：

$Z' = f(Z) = e^{i\alpha} Z$

設 o 爲平面上一點，α 爲已知角，則平面上任一點 A 繞 O 點旋轉角 O 所得的像 A'，如圖 2 所示：在此圖中，我們很容易的看出 $\overline{OA}$ 經旋轉後，它的長度仍不改變。即 $\overline{OA} = \overline{OA'}$ 。

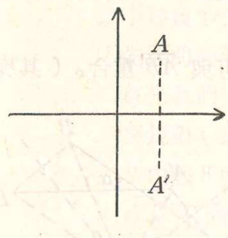


圖 3

3. 鏡射：

$Z' = f(Z) = \overline{Z}$

鏡射就是對稱於一直線的變換。通常我們稱此直線爲鏡射軸。A 爲平面上任一點，A' 爲其鏡射的像，實軸爲其鏡射軸。如圖 3 所示：

在此圖中，我們很容易的看出鏡射軸爲線段 $\overline{AA'}$ 的垂直平分線。它仍然屬於一種保長變換。

4. 平移鏡射：

$Z' = f(Z) = \overline{Z} + b$

顧名思義，我們卽可想到平移鏡射就是平移與鏡射的合成。它兼具了平移與鏡射的條件。而且它的移動方向一定要沿着鏡射的對稱軸。平面上任一點 A 對實軸移動 b 單位的平移鏡射的像爲 A'。A_1 爲 A 對實軸鏡射的像，A_2 爲 A 平移 b 單位的像。如圖 4 所示：

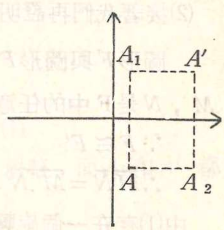


圖 4

由圖中可看出先平移後鏡射與先鏡射後平移所得的結果是一樣的。

以上所介紹的四種變換（平移、旋轉、鏡射、平移鏡射）都是保長運動。所以歐氏平面上的圖形經過這些變換後，其幾何性質仍不改變。但是我們反過來看是不是任意兩個全等圖形一定可以由這四種變換的一種，就可將其中一個圖形與另外一個圖形處處重合呢？這可由下面兩個重要的定理告訴我們。平面上的全等可分成兩類：第一類稱爲同向全等（ directly congruent）。第二類稱爲反向全等（ oppositely congruent ）如圖 5 所示：

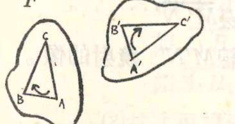


圖 5-a

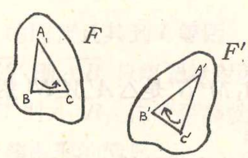


圖 5-b

在圖 a 中它們的方向相同，這是屬於同向全等。圖形 F 的移動不必搬離所在的平面，就能與 F' 處處重合。在圖 b 中它們的方向相反，這是屬於反向全等。圖形 F

的移動須搬離所在的平面才能與F'處處重合。

定理1：在平面上任何兩個同向全等圖形一定可經由平移或旋轉使其重合。

證明：

(1)首先我們證明兩個線段全等的情形：

(i)如$\overline{AB}$與$\overline{A'B'}$平行，則線段AB只要經過平移就能與$\overline{A'B'}$重合。(其平移的距離與方向由$\overline{AA'}$決定)

(ii)如$\overline{AB}$與$\overline{A'B'}$夾一角α，則$\overline{AB}$只要經過旋轉就可與$\overline{A'B'}$重合。(其旋轉軸心o是$\overline{AA'}$的垂直平分線與$\overline{BB'}$的垂直平分線的交點)。

這兩種過程很容易的可從圖6看出。

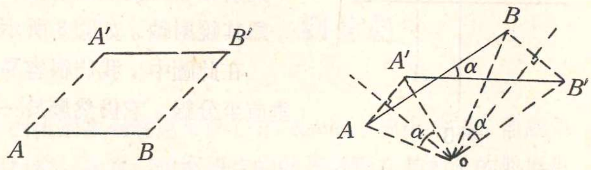


圖 6

(2)接著我們再證明兩個圖形全等的情形：

圖形F與圖形F'是屬於同向全等。

M，N是F中的任意兩點，$M'N'$為其在F'中對應的點

$\because F \cong F'$

$\therefore \overline{MN} = \overline{M'N'}$

由(1)存在一個旋轉(或平移)就能將線段$\overline{MN}$移動至$\overline{M'N'}$ 設A是F中的任意一點，A'是其在F'中對應的點。令A_1是A經移動後的新位置。只需證：A_1

A'

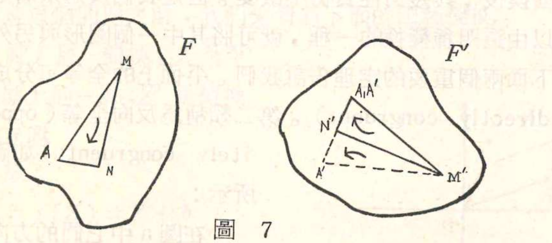


圖 7

$\because F \cong F'$

$\therefore \overline{AM} = \overline{A'M'}$，

$\overline{AN} = \overline{A'N'}$

由A_1的定義知$\overline{AM} = \overline{A_1M'}$，$\overline{AN} = \overline{A_1N'}$

$\therefore \triangle A'M'N' \cong \triangle A_1M'N'$

$\because \triangle A'M'N'$與$A_1M'N'$有公共邊$\overline{M'N'}$

$\therefore$它們必定重合或$\triangle A_1M'N'$是$\triangle A'M'N'$對於直線$M'N'$鏡射的像。

$\because F$與F'是同向全等。

$\therefore \triangle AMN$與$\triangle A'M'N'$有相同的定方向

又$\triangle AMN$與$\triangle A_1M'N'$有相同的定方向

$\therefore \triangle A'M'N'$ 與 $\triangle A_1M'N'$ 有相同的定方向

$\because \triangle A'M'N'$ 必定與 $\triangle A_1M'N'$ 重合

$\therefore A_1 = A'$

$\therefore F$ 經旋轉（或平移）以後能與 F' 重合。

定理 2：在平面上任何兩個反向全等圖形一定可由鏡射或平移鏡射使其重合。

(1)先證明兩個線段全等的情形：

首先我們先假設此情形如果成立，那麼其平移鏡射（或鏡射）的軸應該具備什麼條件呢？由圖 8 中我們不難發現到答案了。設線段 $\overline{A'B'}$ 經過平移鏡射（或鏡射）就能與線段 $\overline{AB}$ 重合。令 l 為此平移鏡射（或鏡射）的軸。將 $\overline{A'B'}$ 經平移至 $\overline{A''B''}$ 使 A'' 與 A 重合。而 A，B 即為 A''，B'' 鏡射的像。$\overline{A_1B_1}$ 是 $\overline{AB}$ 對 l 鏡射的像。再經平移到 $\overline{A'B'}$。

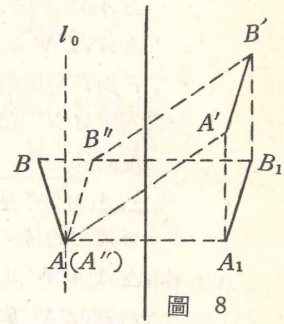


圖 8

$\therefore \overline{A_1B_1} \mathbin{/\!/} \overline{A'B'}$

又 $\overline{A''B''} \mathbin{/\!/} \overline{A'B'}$

$\therefore \overline{A_1B_1} \mathbin{/\!/} \overline{A''B''}$

$\therefore l$ 必平行線段 $\overline{BB''}$ 的垂直平分線 l_0。……(1)

$\because A$ 和 A_1 分別在 l 的異側且其分別到 l 的距離相等，而 A_1 和 A' 都在 l 的同側，其分別到 l 的距離也相等。

$\therefore A$ 和 A' 一定在 l 的兩側且各到 l 的距離相等。

$\therefore$ 直線 l 一定經過 $\overline{AA'}$ 的中點。……(2)

所以我們已知兩個線段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{A'B'}$ 全等，想使 $\overline{A'B'}$ 搬動至 $\overline{AB}$。首先就要找出其平移鏡射（或鏡射）的軸 l。由(1)、(2)我們即可確定 l 須平行 $\overline{BB''}$ 的垂直平分線 l_0 且過 $\overline{AA'}$ 的中點 M。接着我們再證明 $\overline{AB}$ 是否真的能移動至 $\overline{A'B'}$？令 $\overline{A_1B_1}$ 為 $\overline{AB}$ 對 l 鏡射的像

$\because l \mathbin{/\!/} l_0$

$\therefore \overline{A_1B_1} \mathbin{/\!/} \overline{A'B'}$

$\because l$ 過 M 點

$\therefore A_1$ 與 A' 在 l 的同側且其到 l 等距

如 $\overline{A_1B_1} = \overline{A'B'}$ 則 $\overline{A'B'}$ 只經過鏡射就能與 $\overline{A'B'}$ 重合了。

如 $\overline{A_1B_1} \neq \overline{A'B'}$ 則 $\overline{A_1B_1}$ 再經平移就能與 $\overline{A'B'}$ 重合。

(2)其次再證兩個全等圖形的情形：

設 F 與 F' 是反向全等

此證明過程與定理1類似。所不同的是存在一個平移鏡射（或鏡射）使得線段$\overline{MN}$移動至$\overline{M'N'}$ 。

$\because \triangle AMN \cong \triangle A'M'N'$ ，

$\triangle A_1M'N' \cong \triangle AMN$

$\therefore \triangle A'M'N' \cong \triangle A_1M'N'$

$\because F$ 與F'是反向全等

$\therefore \triangle A'M'N'$ 與$\triangle AMN$是反向的

$\because \triangle A_1M'N'$ 是$\triangle AMN$平移鏡射的像

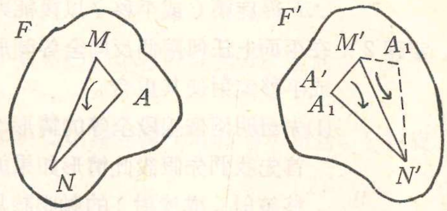


圖 9

$\therefore \triangle A_1M'N'$ 與$\triangle AMN$也是反向的

$\therefore \triangle A'M'N'$ 與$\triangle A_1M'N'$必重合

$\therefore A_1 = A'$

$\therefore F$ 經平移鏡射（或鏡射）以後能與F'重合。

由以上兩個重要的定理使我們知道了任意兩個全等圖形一定可以經過這四種變換就可將其中一個圖形搬動到另一個圖形上了。

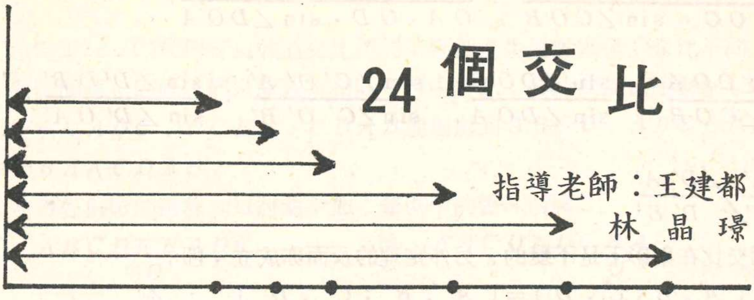
我們再回過頭來看克萊茵幾何學的定義就非常清楚了，而其所指的變換就是這四種變換：平移、旋轉、鏡射與平移鏡射。

綜合以上所述我們就可以說平面上的任意兩個全等圖形一定可以由平移或旋轉或鏡射或平移旋轉使其重合了。換言之幾何圖形的搬動總共只有四種即平移、旋轉、鏡射與平移鏡射。

參考資料：

〔1〕I. M. YAGLOM,（英譯本，譯者A, SHIELDS）: Geometric Transformations.

〔2〕D. Gans , Transformations and geometries .



24 個交比

指導老師：王建都

林 晶 璟

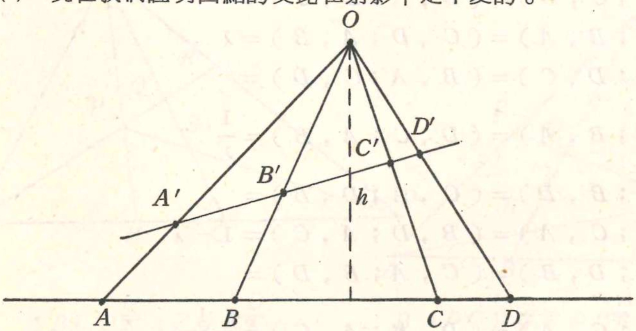
在直線上 A、B、C、D 相異四點，能有 24 種排列方法，我們發現能有 $ABCD \barwedge BADC \barwedge DCBA \barwedge CDAB$ 的射影關係，今欲進一步了解是否還能有其他的排列方法能射影到 $ABCD$？以及何以這幾種能產生射影？進而尋求此射影 的規律性，此卽本文的目的。

這個問題卽牽涉到射影幾何學上決定性的發現「交比」的不變性。卽若在一直線上有四點 A、B、C、D 投射到另一直線上的四點 A'，B'，C'，D'，則

$$\frac{CA}{CB}\Big/\frac{DA}{DB}=\frac{C'A'}{C'B'}\Big/\frac{D'A'}{D'B'}$$

此量保持不變，稱爲此四點的交比（cross ratio），寫作 $(A, B; C, D)=\dfrac{CA}{CB}\Big/\dfrac{DA}{DB}$ 就是 A、B、C、D 按此次序下的交比。

(一) 現在我們證明四點的交比在射影下是不變的。



（圖一）

如圖(一) $ABCD$　$A'B'C'D'$

$$\frac{CA}{CB}\Big/\frac{DA}{DB}=\frac{CA}{CB}\cdot\frac{DB}{DA}=\frac{a\triangle OCA}{a\triangle OCB}\cdot\frac{a\triangle ODB}{a\triangle ODA}$$

$$=\frac{OA\cdot OC\cdot\sin\angle COA}{OB\cdot OC\cdot\sin\angle COB}\cdot\frac{OB\cdot OD\cdot\sin\angle DOB}{OA\cdot OD\cdot\sin\angle DOA}$$

$$=\frac{\sin\angle COA}{\sin\angle COB}\cdot\frac{\sin\angle DOB}{\sin\angle DOA}=\frac{\sin\angle C'O'A'}{\sin\angle C'O'B'}\cdot\frac{\sin\angle D'OB'}{\sin\angle D'OA'}$$

$$=\frac{C'A'}{C'B'}\bigg/\frac{D'A'}{D'B'}$$

此即證明交比在射影下是不變的。另外定理的反面亦成立，即：

(二) $(A,B;C,D)=(A',B';C',D')$

$\Rightarrow\ ABCD\barwedge A'B'C'D'$

由Fundemental Theorm：A projectivity is determined when three col linear points and the corresponding three collinear points are given，我們可以知道至少存在一projectivity使得 $ABC\barwedge A'B'C'$ 假設 $D\barwedge D''$

則 $(A,B;C,D)=(A',B';C',D')$

但已知 $(A,B;C,D)=(A',B';C',D')$

$\Rightarrow(A',B';C',D')=(A',B';C',D'')$

$\Rightarrow D'=D''$

$\therefore\ ABCD\barwedge A'B'C'D'$ 得證。

得到上述定理的結果後，我們再來考慮直線上相異四點 A、B、C、D，能有24種排列方法，就會有24個交比，但並非所有的均不相同，若 $(A,B;C,D)=\lambda$，則可分為下列六類：

(a) $(A,B;C,D)=(B,A;D,C)=$
$(D,C;B,A)=(C,D;A,B)=\lambda$

(b) $(A,B;D,C)=(B,A;C,D)=$
$(C,D;B,A)=(D,C;A,B)=\dfrac{1}{\lambda}$

(c) $(A,C;B,D)=(C,A;D,B)=$
$(D,B;C,A)=(B,D;A,C)=1-\lambda$

(d) $(A,C;D,B)=(C,A;B,D)=$
$(B,D;C,A)=(D,B;A,C)=\dfrac{1}{1-\lambda}$

(e) $(A,D;C,B)=(D,A;B,C)=$
$(B,C;D,A)=(C,B;A,D)=\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$

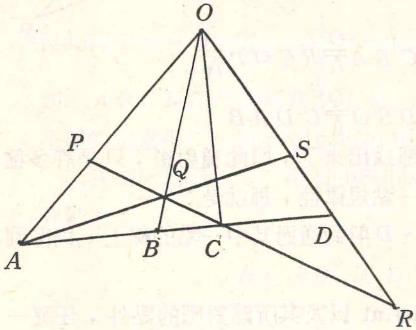
(f) $(A, D; B, C) = (D, A; C, B)$

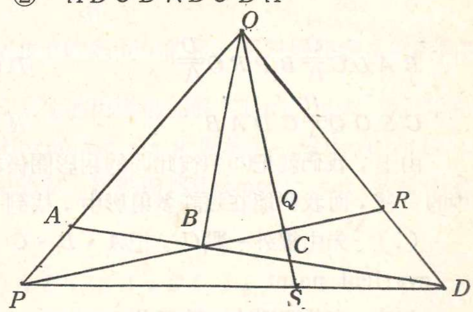
$$(C, B; D, A) = (B, C; A, D) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

由定理㈠，㈡我們可以知道交比相同，則能產生射影關係；交比不同，則不能產生射影關係。因此我們只能確定在同一類中的點，彼此間能產生射影。即我們只能確定有$BADC$，$DCBA$，$CDAB$能射影到$ABCD$：$ABCD \barwedge BADC \barwedge DCBA \barwedge CDAB$。

今再對射影的過程加以討論，如：舉(a)中的點來討論：

① $ABCD \barwedge BADC$　　② $ABCD \barwedge DCBA$

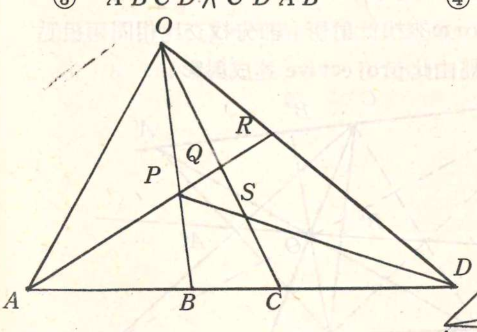


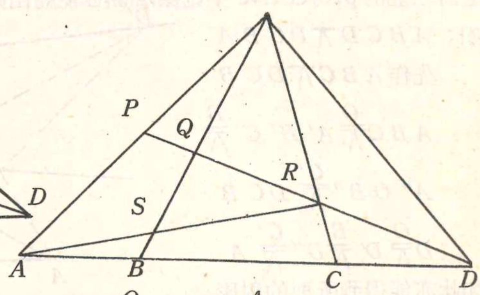


$ABCD \overset{O}{\barwedge} PQCR \overset{A}{\barwedge}$　　$ABCD \overset{O}{\barwedge} PBQR \overset{D}{\barwedge}$

$OSDR \overset{Q}{\barwedge} BADC$　　$SCQO \overset{P}{\barwedge} DCBA$

③ $ABCD \barwedge CDAB$　　④ $BADC \barwedge DCBA$

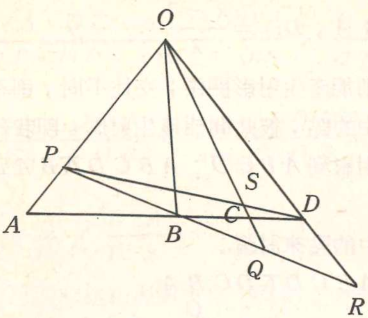


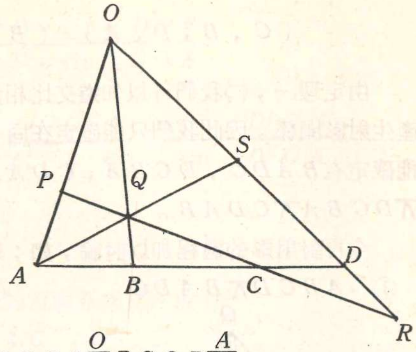


$ABCD \overset{O}{\barwedge} APQR \overset{D}{\barwedge}$　　$BADC \overset{O}{\barwedge} QPDR \overset{A}{\barwedge}$

$CSQO \overset{P}{\barwedge} CDAB$　　$QOBS \overset{R}{\barwedge} DCBA$

⑤ $BADC \barwedge CDAB$　　⑥ $DCBA \barwedge CDAB$





$B\,A\,D\,C \overset{O}{\barwedge} B\,P\,R\,Q \overset{D}{\barwedge}$　　　　$D\,C\,B\,A \overset{O}{\barwedge} R\,C\,Q\,P \overset{A}{\barwedge}$

$C\,S\,O\,Q \overset{P}{\barwedge} C\,D\,A\,B$　　　　$R\,D\,S\,O \overset{Q}{\barwedge} C\,D\,A\,B$

由上，我們就把(a)中彼此間的射影關係都找出來了，而此種射影，只是許多種中的一種，而我們能在這許多射影中，找到一點規律性，那就是：

（i） 先由線外一點O，把A、B、C、D射到通過其中一點的線上，則得到一 invarient point 。

（ii） 在此四點中，除了此 invarient point 以及其所應對應的點外，任選一點爲 center ，再射影到 invarient point 所對應的點及O的連線上。

（iii） 則必能在已有的點中，找到一點爲 center ，完成我們所要的射影。

利用這個規律，我們就能很容易的找到在(b)、(c)、(d)、(e)、(f)中的點，彼此間的射影。如此，則眞正把交比與射影關係關聯在一起了！

另外我們可利用Fundemental Theorm來找此射影，即先找交比相同兩組點之前三點的 projective ，則第四點必能經由此 projective 達成射影。

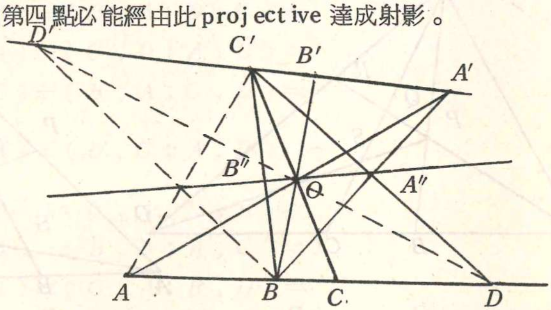
如：$A\,B\,C\,D \barwedge D\,C\,B\,A$

先作$A\,B\,C \barwedge D\,C\,B$

$A\,B\,C \overset{O}{\barwedge} A'\,B'\,C' \overset{B}{\barwedge}$

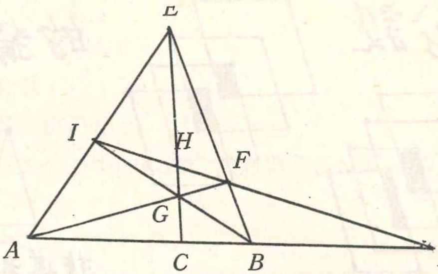
$A''\,O\,B'' \overset{C'}{\barwedge} D\,C\,B$

$D \overset{O}{\barwedge} D' \overset{B}{\barwedge} D'' \overset{C'}{\barwedge} A$



如此亦能得到所要的射影。

附帶考慮一種特殊情形，即$\lambda = -1$時，我們稱此四點爲Harmonic set，即一對角線與另二對角線的交點，調和的分離此對角線上的頂點，如下圖



（圖二）

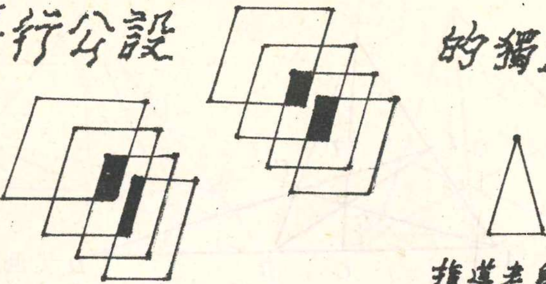
但此時 $\lambda = -1$，則 $\lambda = \frac{1}{\lambda} = -1$，故在(a)與(b)中的每一組點均能產生射影關係，如：$A\,B\,C\,D \overset{G}{\barwedge} F\,I\,H\,D \overset{E}{\barwedge} B\,A\,C\,D$ 其他的射影也能很容易的找出來。再利用交比不變的定理得：一個 projective 把 Harmonic set 射影到另一個 Harmonic set，因其交比均爲 -1。所以(a)與(b)中的每一組點均爲 Harmonic set，故能得到下列結果：

$$H(AB, CD), H(BA, DC),$$
$$H(DC, BA), H(CD, AB),$$
$$H(AB, DC), H(BA, CD)$$
$$H(CD, BA), H(DC, AB)$$

〔參考資料〕

(1) Frank Ayres, Jr. Projective Geometry.
(2) H.S.M. Coxeter Projective Geometry.
(3) R. Courant What is Mathemetics ?

平行公設的獨立性



金鈴

指導老師：林福來

1 幾何學的區分

幾何學和其他的科學一樣是由許多簡單的和複雜的命題集合而成的，也和數學中其它各門一樣是一部演繹的科學，一部幾何學就是一串的命題。

它的一般過程可大致區分如下：

定義——公設 公理——性質——引理——定理和作圖題——系理——再分系理。

因此我們可給予幾何學一個適當的定義：

幾何學就是研究幾何圖形任意移動後（剛體運動）仍不改變的性質的科學。

如此一來，幾何空間或運動群不同，此運動群所保有的不變性也就不同，那麼所得到的幾何學也就不同了。例如歐氏空間中的「平移」，「旋轉」，「鏡射」等等就是此空間的運動群，而弧長，線段長和面積的量（或謂大小）在這些運動群的運動之下恒保持不變。

我們先由歐氏幾何說起，以下便是著名的歐氏五大公設：

(1)任意兩點劃一直線。

(2)直線上的線段可連續延長。

(3)可以任意點爲圓心任意長爲半徑劃圓。

(4)直角皆相等。

(5)一直線與兩共面的直線相交若該直線的一傍其兩內角之和小於兩直角則兩直線無窮延長之後必在此傍交於一點。

由以上的第五公設可知其特別冗長，可見歐氏下定決心之不易，在歐氏幾何學中扮演的角色與「平行」一詞息息相關，因此一般亦稱爲「平行公設」。歐氏平行線的定義爲：“共平面的兩直線若不相交則爲平行”，由平行公設及平行線的定義可導出很多與平行公設等價（ equivalence ）的敍述（僅列出一部分與往後有關者）。

(a)過直線外一點最多有一平行線。

(b)過直線外一點恰有一平行線。

(c)內角和等於180° 的三角形存在。

(d)任一三角形的內角和為180°。

平面幾何空間——歐氏二維平面。

我們若將歐氏的五大公設中的前四公設合稱為基底E。並將平行公設改寫(否定)為:

(5)′ 過直線外一點有無限多條平行線。

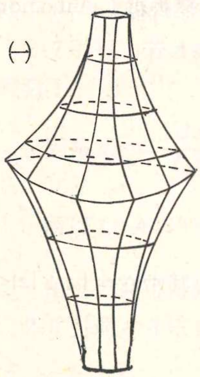
那麼由於公設的改變，因此它所代表的幾何空間與運動群也就跟著不同了，這就是我們所了解的"雙曲線型幾何"，再者，我們可由(5)′導出若干的等價敘述:

(b)′ 過直線外一點有無限多條平行線。

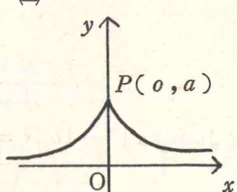
(d)′ 任一三角形的內角和小於180°。

雙曲線型幾何空間的模型——擬球(Pseudosphore)如左圖(一)

(一)



(二)



左圖(一)是由擺曳線α((二))繞其漸近線(x軸)旋轉所得的曲面，以尖點(o,a)分擺曳線為兩半取其一半旋轉所得的曲面(擬球的一部分)即為雙曲線型幾何的模型，這是Beltrami 於1868年所提出且證明的(詳見本刊蘇郁文所寫的內容)。

2.雙曲線型幾何學的另一模型——Poincare模型

前面我們已將雙曲線型幾何學的基本公設建立起來接著便以Poincare 模型來觀察其幾何性。

Henri Poincare 。, C.(瑞士人)所假設的物理空間是一個以R為半徑的球，設在這球內任一與球心距離為r的點處的絕對溫度為t則

$t = c(R^2 - r^2)$ 其中c為一比例常數。

考慮一過表現物理空間的Poincare 球的球心之平面上的點而得出一模型那正是Poincare 模型。任一通過此球心的平面與此球相交而得之圓我們稱之為這平面上的定圓，而那些與這定圓正交的圓的幾何即為雙曲線型幾何。因此在Poincare模型中此平面與Poincare' 球交於一定圓且其中的點即為此定圓之內點(interior points)直線乃是那些與此定圓正交的圓上的弧。

若以△表示單位圓盤(unit disk)內部且$U=\{z : Imz>0\}$，因圓的內部與上半平面是同胚，故我們將在上半平面來討論，現在我們迫切想要知道的是雙曲線型幾何的圖形在Poincare 模型中，不改變其性質的運動群是什麼？那就是Γ_R即U的自保形變換群(Automorphism Group)

2-1 定義：$U=\{z : Imz>0\}$

$$\Gamma_R=\left\{\frac{az+b}{cz+d} \mid a、b、c、d\in \boldsymbol{R},\ ad-bc=1\right\}$$

$$M_k=\left\{\frac{az+b}{cz+d} \mid a、b、c、d\in K,\ ad-bc\neq 0\right\}$$

$$\Gamma_k=\left\{\frac{az+b}{cz+d} \mid a、b、c、d\in K,\ ad-bc=1\right\}$$ 其中$K=\boldsymbol{C}$ or $\boldsymbol{R}$

2-2 定理：$(M_k,\circ)$與$(\Gamma_k,\circ)$均為群，其中"$\circ$"為合成運算。

2-3 定義：$A(G)=\{f \mid f : G\xrightarrow{\text{保角}}G\}$ 稱為G的自保形變換群(Automorphism Group)。

2-4 定理：

(i) $A(\hat{C})=M_C$

(ii) $A(\triangle)=\left\{\dfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}} \mid \text{其中}|a|^2-|b|^2=1\right\}$。

$$=\left\{e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z} \mid |z_0|<1,\ \alpha\in \boldsymbol{R}\right\}$$，其中$\triangle=\{z : |z|<1\}$

(iii) $A(U)=\Gamma_R$。

(iv) $A(\triangle)\cong A(U)$。

我們由以上定理得知$\hat{C}$，單位圓盤與上半平面的自保形變換群分別為M_C，$\left\{\dfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}} \mid |a|^2-|b|^2=1\right\}$與$\Gamma_R$。前面已談過我們所要討論的是幾何空間$U$中的幾何圖形經過$\Gamma_R$中的元素的映射後保持不變的性質，而這些性質乃是所謂的幾何基本性質。如一線段經過移動後其長度保持不變，一三角形經過移動後其面積保持不變等等，因此我們必須先定義兩點間的距離，即空間U上的度量(metric)和三角形的面積。

設$A\in\Gamma_R$，經過直接計算可得$I_m[A(z)]=|A'(z)|\cdot I_m z=\dfrac{|dA(z)|}{|dz|}\cdot I_m z$

因此，$ds=\dfrac{|dz|}{I_m z}=\dfrac{|dA(z)|}{I_m A(z)}$對$\Gamma_R$而言為一不變的微分，所以我們考慮下面的弧

長定義：

2-5定義：設γ：〔0，1〕$\longrightarrow U$爲可微曲線，則γ的雙曲線型弧長定義爲：

$$l(r)=\int_0^1\frac{|r'(t)|}{I_m r(t)}\,dt=\int_r ds \qquad ds=\frac{|dz|}{I_m z}\quad。$$

2-6定理：r：〔0,1〕$\longrightarrow U$爲可微曲線若$r(0)=i$，$r(1)=iy_0$，$y_0>1$ 則 $l(r)\geqslant l_n y_0$，且等號只當r爲線段〔i，iy_0〕時成立。

證明：

設$r(t)=x(t)+iy(t)$則$r'(t)=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\geqslant y'(t)$ 等號只當$x'(t)=0$ 時成立，$i.e.\ x(t)=c$,c爲一常數，因$x(t)=c$且$x(1)=0$。

所以$x(t)=c \Longleftrightarrow x(t)=0$，$\forall t\in$〔0，1〕

$\Longleftrightarrow r$ 爲線段〔i，iy_0 〕

$$所以\ l(r)=\int_0^1\frac{|r'(t)|}{y(t)}\,dt\geqslant\int_0^1\frac{y'(t)}{y(t)}\,dt=\int_1^{y_0}\frac{dy}{y}=l_n y\,\Big|_1^{y_0}=l_n y_0$$

故$l(r)\geqslant l_n y_0$。

2-7引理：若$A\in\Gamma_R$ 則$l(\gamma)=l(A\circ\gamma)$，$\forall\gamma$：〔0,1〕$\rightarrow U$可微。

證明：

$$因爲\ ds=\frac{|dz|}{I_m z}=\frac{|dA(z)|}{I_m A(z)}$$

$$所以\ l(A\circ\gamma)=\int_{A\circ\gamma}\frac{|dA(z)|}{I_m A(z)}=\int_r\frac{|dz|}{I_m z}=l(\gamma)$$

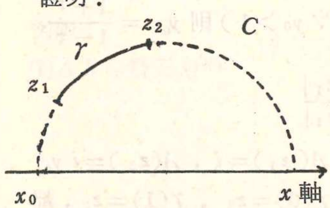
由上引理可得知任一可微曲線之雙曲線型弧長在$A\in\Gamma_R$之映射下保持不變。

2-8引理：$A\in\Gamma_R\Longleftrightarrow A\in M_R$且$I_m A(z)>0$，$\forall I_m z>0$

$\Longleftrightarrow A\in M_R$且"$\exists z_0\ni I_m z_0>0 \Longleftrightarrow I_m A(z_0)>0$"。

2-9定理：設z_1，$z_2\in U$,則恰有一最短雙曲線型路徑連接z_1，z_2（此即連接z_1，z_2之圓弧）。

證明：



作圖c過z_1，z_2，且與x軸正交，設$x_0\in c\cap\hat{R}\ni$ $|z_1-x_0|\leq|z_2-x_0|$則$\exists!\,A\in\Gamma_R\ni A(x_0)=0$，$A(z_1)=i$，因$A(z_1)=i$，則$I_m A(z_1)>0$，因此由引理2-8得知$A\in\Gamma_R$。欲證：$A(z_2)\in y$軸。因$z_1$，$x_0$，$\bar{z}_1\in c$ 且$A(z_1)=i$ ，$A(x_0)=0$，$A(\bar{z}_1)=-i\in y$軸，又線性變換具有保圓性所以$A(z_2)\in y$軸。

設$A(z_2)=iy$，欲證$y>1$，因$x_0-z_1-z_2$ 決定c之方向且$A(x_0)=0$，$A(z_1)=i$，$A(z_2)=iy$，又因線性變換具有保向性，所以$\theta-i-iy$ 決定了$A(c)$（$=y$

軸）的方向且 $y>0$ ，故 $y>1$ 。

考慮 i 到 iy 的所有路徑，其中恰有一最短路徑〔 i ， iy 〕且因｛ r ｝與 $\{A\circ\gamma\}$ 成一對一對應。

所以 A^{-1} ：〔 i, iy 〕$\longrightarrow$ " z_1 到 z_2 的最短路徑"。

2-10 定義： $z_1, z_2 \in U$ 則其間的距離以 $\rho(z_1, z_2)$ 表示：

$$\rho(z_1, z_2) = inf \quad l(r) \qquad\qquad l(r) = \int_r \frac{|r'(t)|}{I_m r(t)}\, dt$$

$$r: [0, 1] \to U$$

$$r(0) = z_1, \; r(1) = z_2,$$

$\rho(z_1, z_2)$ 稱爲 z_1, z_2 間的線段長。

由此可知線段長在 $A \in \Gamma_R$ 之映射下保持不變（ 2-7 引理），由 2-9 定理中作通過 z_1 ， z_2 並與 x 軸正交的半圓這種半圓我們稱之爲在 U 中通過 z_1, z_2 的直線（測地線：Geodestic ）。既然我們已經定義了距離，接著我們希望知道 ρ 是否爲一度量（ metric）？卽（ U ， ρ ） 是否爲一度量空間？ ρ 到底如何表示？如歐氏空間中兩點間的距離爲各座標差之平方和開方。

2-11 定理：（ U ， ρ ）爲一度量空間（ ρ ：Poincare 度量）

2-12 定理：若 $z_1, z_2 \in U$ 則 $\rho(z_1, z_2) = l_n \dfrac{1+\tau}{1-\tau}$ ，其中 $\tau = \dfrac{|z_2 - z_1|}{|z_2 - \bar{z}_1|}$

證明：(i)若 $z_1 = i$ ， $z_2 = iy_0$ ， $y_0 > 1$ ，則 $\rho(z_1, z_2) = l_n\, y_0$ ，

又 $\tau = \dfrac{|iy_0 - i|}{|iy_0 + i|} = \dfrac{|y_0 - 1|}{|y_0 + 1|} = \dfrac{y_0 - 1}{y_0 + 1}$ （ $\because y_0 > 1$ ）則 $y_0 = \dfrac{1+\tau}{1-\tau}$ ，

故 $\rho(z_1, z_2) = l_n \dfrac{1+\tau}{1-\tau}$ 其中 $\tau = \dfrac{|z_2 - z_1|}{|z_2 - \bar{z}_1|}$

(ii)設 $A \in \Gamma_R$ 爲對應於 z_1 ， z_2 之線性變換 $i.e.$ $A(z_1) = i$ ， $A(z_2) = iy_0$ ， $y_0 > 1$ ，因 $l(r) = l(A\circ\gamma)$ 對每一個 γ ： $\gamma(0) = z_1$ ， $\gamma(1) = z_2$ ，都成立，故 $\rho(z_1, z_2) = \inf\limits_{\gamma} l(r) = \inf l(A\circ\gamma) = \rho(A(z_1), A(z_2))$ 。

2-13 定理：Γ_R 爲（U，ρ）的自保角，保向，保長運動群。

設 $z=x+iy$，$A(z)=u+iv$，由 2-7 引理可得 $\dfrac{|dA(z)|}{I_m A(z)}=\dfrac{|dz|}{I_m z}$ ，即

$\dfrac{|dA(z)|}{|dz|}=\dfrac{I_m A(z)}{I_m z}$，又 $|A'(z)|^2=\dfrac{du\,dv}{dx\,dy}$ 因此 $\dfrac{v^2}{y^2}=\dfrac{du\,dv}{dx\,dy}$ 對 Γ_R 而言 dA

$=\dfrac{dx\,dy}{y^2}=\dfrac{du\,dv}{v^2}$ 爲一不變的微分所以我們考慮以下的定義：

2-14 定義：設$S\subset U$，S的面積爲 $\displaystyle\iint_s \frac{dx\,dy}{y^2}$ 並以$\boldsymbol{A}(s)$表之，即$\boldsymbol{A}(s)=$

$\displaystyle\iint_s \frac{dx\,dy}{y^2}$ 。

2-15 定理：若$A\in\Gamma_R$ $S\subset U$，則$A(S)=\boldsymbol{A}(A(S))$

證明：

由 2-7 引理中得知：　　設 $z=x+iy$，　$A(z)=u+iv$

$$\frac{|dA(z)|}{I_m A(z)}=\frac{|dz|}{I_m z}=\frac{|dz|}{y}\text{，則 } y^2=\left(\frac{|A(z)|^2}{|dz|^2}\times\frac{1}{[I_m A(z)]^2}\right)^{-1}=\frac{(I_m A(z))^2}{|A'(z)|^2}$$

因 $|A'(z)|^2=\dfrac{du\,dv}{dx\,dy}$ 則 $\displaystyle\boldsymbol{A}(S)=\iint_s\frac{dx\,dy}{y^2}=\iint_{A(s)}\frac{|A'(z)|^2}{(I_m A(z))^2}\times\frac{du\,dv}{|A'(z)|^2}$

$$=\iint_{A(s)}\frac{du\,dv}{v^2}=\boldsymbol{A}(A(S))$$

因此三角形的面積在$A\in\Gamma_R$ 的映射下保持不變。

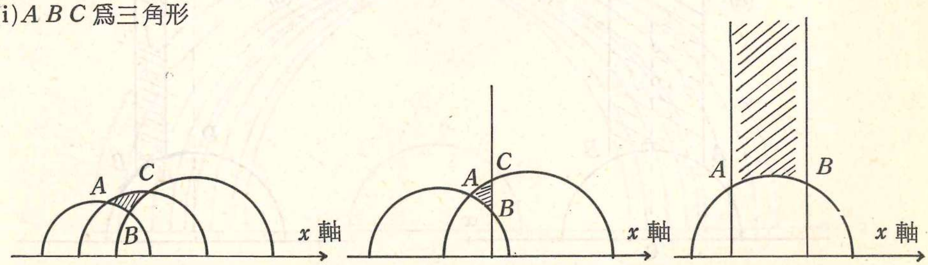
2-16 定義：

(i) U中不共線的三點間的連接線段之聯集稱爲三角形。

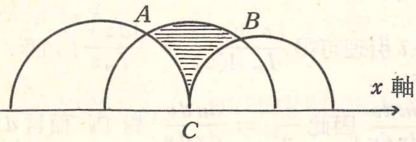
(ii) U 中的三角形若有一頂點在 x 軸上則稱爲三邊形。

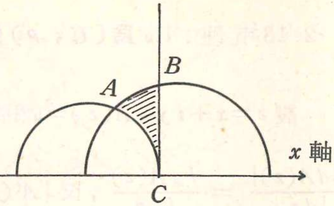
例如：

(i) ABC 爲三角形



(ii) ABC 爲三邊形：





2-17 定理：(Gauss-Bonnet)

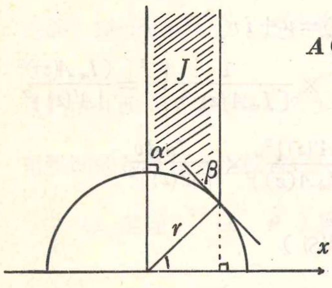
設 J 爲 $(\mathcal{U}, \rho)$ 中的三角形或三邊形，其內角分別爲 α，β，γ 則 $A(J)=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$

（ 註：當 J 爲三邊形時有一內角爲零 。）

證明：(一) J 爲有一頂點在 ∞ 的三角形 。

(i) J 形如：

$$\alpha=\frac{\pi}{2}, \ \gamma=0$$



$$A(J)=\iint_J \frac{dx\,dy}{y^2}=\int_0^a dx\int_{\sqrt{r^2-x^2}}^{\infty}\frac{dy}{y^2}$$

$$=\int_0^a dx\left(-\frac{1}{y}\right)\Bigg|_{\sqrt{r^2-x^2}}^{\infty}=\int_0^a\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$$

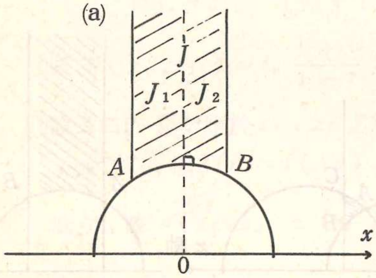
$$=\int_0^{\frac{a}{r}}\frac{d\frac{x}{r}}{\sqrt{1-(\frac{x}{r})^2}}=\sin^{-1}t\,\Bigg|_0^{\frac{a}{r}}=\sin^{-1}\frac{a}{r}-\sin^{-1}0$$

其中 $t=\dfrac{x}{r}$

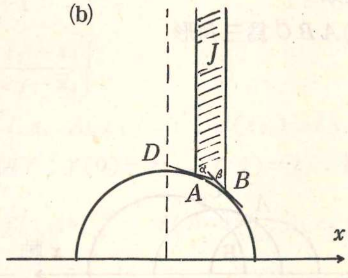
$$=\frac{\pi}{2}-\beta=\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\beta+0\right)=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)。$$

(ii) J 形如：

(a)



(b)

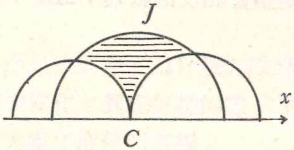


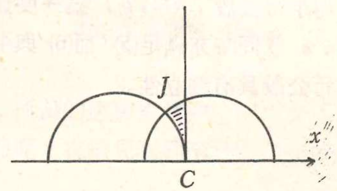
(a) $A(J)=A(J_1)+A(J_2)=\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$，$\gamma=0$

(b) $A(J)=A(\triangle DBC)-A(\triangle DAC)=(\frac{\pi}{2}-\beta)-(\frac{\pi}{2}-(\pi-\alpha))$

$=\pi-\alpha-\beta=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$，其中 $\gamma=0$ 。

㈡若 J 有一尖端（Cusp）在實軸上，即 J 爲三邊形

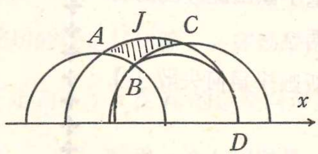




則可以找一 $A\in\Gamma_R$，使得 A 映 C 至 ∞，且 A 由 2-14 定理爲保面積，保角、保長，則 $A(A(J))=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$（由(ii)得）故得：

$A(J)=A(A(J)=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$，其中 $\gamma=0$ 。

㈢若 J 的三頂點都在 U 中，則沿長 $\overline{AC}$ 到 $D\in$ 實軸（x 軸）令三邊形 BCD 爲 J_1，ABD 爲 J_2，



則 $A(J)=A(J_2)-A(J_1)$

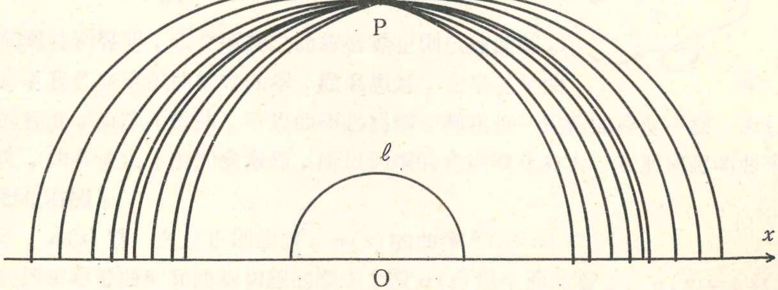
$=[\pi-(\alpha+\beta+\delta)]-[\pi-(\delta+(\pi-\gamma))]$

$=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$

其中 $\angle CBD=\delta$

2-18 推論：(U,ρ) 中每一三角形的內角和都小於 π。

（作圖）：作過線 l 外一點 P 的諸平行線 。



至此我們已實際的找到上半平面U的自保形變換群Γ_R，同時也知道任意U中的線段，面積在Γ_R的映射下保持不變，而且由2-18推論中得知U中的任意一三角形內角度量和恒小於π，即前面的(d)′ 而此敍述爲(5)′之等價敍述，因此我們就可以確定的說（U，ρ）上的幾何確實爲雙曲線型幾何。

3.平行公設的獨立性（不可證！）

前節我們已實際地找出（U，ρ）——Poincare 模，完全符合基底E及(5)′，因此其爲雙曲線型幾何的另一模型。若平行公設不具獨立性則我們一定可由基底E推得平行公設，（U，ρ）爲一度量空間滿足基底E，因此必滿足平行公設，但是（U，ρ）同時亦滿足(5)′而(5)′與平行公設是恰好相反的敍述，這是不可能的，因此平行公設具有獨立性。

理解一項理論並不足以表示它發展的途徑上沒有障礙存在；必需去考慮選擇這一途徑的理由。若硬從嚴謹的邏輯的確定形式開始，建立一項理論，毫不顯出此理論的各種嘗試與努力，這種理論能被人理解嗎？

【摘自「新數學爲何失敗」】

直線的認識

蘇郁文

指導老師 林福來

直線是不是直的呢？爲什麼非歐幾何學裏，所劃的直線會彎曲，爲什麼平行線之間的距離會變化。到底怎樣的線，才稱爲直線呢？在這兒我們來談空間中線與面的觀念，使大家了解何謂直線。

一、曲線的認識

從幾何圖形來看，曲線可視爲點移動的軌跡。所以曲線可視爲參數 t 的函數。

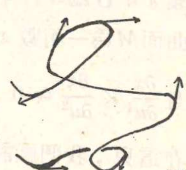
〔定義〕：一正則曲線（ regular curve ）爲一函數。

α ：$(a, b) \to R^3, \alpha \in C^k$ ，$k \geq 1$ 且 $\frac{d\alpha}{dt} \neq 0$ $\forall t \in (a, b)$，便於研究曲線的基本性質，所以我們以正則曲線爲討論對象，$\frac{d\alpha}{dt} \neq 0$ 也就是切向量存在。與曲線最密切的就是其切線。在運動學上說，也就是速度。

〔定義〕：α 在 t_0 的速度向量爲 $\frac{d\alpha}{dt}(t_0)$，$\frac{d\alpha}{dt}$ 稱爲 α 的速度向量 $T(t) = \frac{d\alpha}{dt} / |\frac{d\alpha}{dt}|$

稱爲 α 的么切向量。

我們可借著參數的變換（限於篇幅，不加討論），而使得 $\frac{d\alpha}{dt} = T(s)$，亦即 $|\frac{d\alpha}{dt}| = 1$，這樣的曲線，我們稱爲么速曲線。如無特別聲明，本文所設之曲線皆爲正則么速曲線。

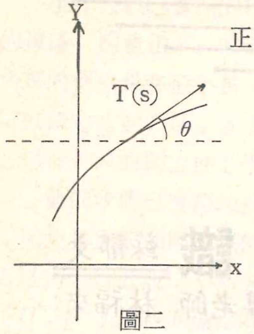


圖一

緊接著我們要定義曲線之曲率。顧名思意，曲率就是曲線彎曲的程度。直線不彎曲，所以曲率必爲零。圓在每一點彎曲程度一樣，所以必爲一常數，曲率愈大，彎曲愈激烈，所以切線的角度變化愈大。我們將證明曲率和切線之變化有關。

〔定義〕：$\alpha(s)$ 爲一么速正則曲線。$\alpha(s)$ 的曲率 $K(s) = |T'(s)|$。

讓我們來看看曲率和曲線切線的關係。設 $\alpha(s)$ 爲平面曲線。$\therefore \alpha(s) = (x(s),$



圖二

$y(s),0)$，令 $\theta=\sphericalangle(T(s)$，$X$軸 $)$也就是切向量和X軸正向之夾角欲證$K(s)=|\dfrac{d\theta}{ds}|$，即曲率是曲綫夾角的變化率。

$$T(s)=\frac{d\alpha}{ds}=(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$$

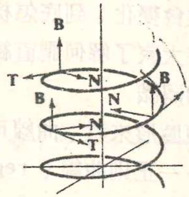
$$(\because\ |T(s)|=1)$$

$$\therefore T'(s)=(-\sin\theta\frac{d\theta}{ds}\ ,\cos\theta\frac{d\theta}{ds}\ 0)$$

$$=(-\sin\theta,\ \cos\theta,\ 0)\frac{d\theta}{ds}$$

$$\therefore |T'(s)|=|\frac{d\theta}{ds}|$$

我們研究曲線的性質，還有一個非常重要的工具，就是 Frenet－Serret 標架 $\{T,N,B,K,\tau\}$。



圖三

〔定義〕：$T(s)=\dfrac{d\alpha}{ds}/|\dfrac{d\alpha}{ds}|$ 稱爲切向量

$N(s)=\dfrac{T'(s)}{K(s)}$ 稱爲主法向量

$B(s)=T\times N$ 稱爲次法向量

$\tau(s)=-<N(s),B'(s)>$稱爲扭率。

註：$a\times b$ 爲 a,b 之外積。

註：$<a,b>$爲 a,b 之內積。

有了曲率，平面上的曲線就能控制了。再加上扭率空間中的曲線我們也可加以控制。利用解微分方程的方法，我們可知道若$K(s)$，$\tau(s)$爲已知，則可求出曲線方程式。

二、曲面的認識：

從幾何的觀點來看，曲面可視爲將平面彎曲扭動而得，所以曲面做如下的定義。

〔定義〕：U 爲 R^2 中之開集，方便起見視爲單連通域。

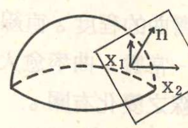
一單曲面M爲一函數 $x:\mathrm{U}\to R^3$，$x\in C^k$，$k\geq 3$，（爲了討論曲面的理論而設）。

且$\dfrac{\partial x}{\partial u^1}\times\dfrac{\partial x}{\partial u^2}\neq 0$，（即切面存在）$\dfrac{\partial x}{\partial u^i}$爲其偏微分。

在這兒，我們祗討論單曲面，曲面祗是多片單曲面疊合而成的，我們不詳加討論。

〔定義〕：x 爲一單曲面，$P=x(a,b)$爲曲面上之一點。

$$\overrightarrow{x_1}(a,b)=\frac{\partial x}{\partial u^1}(a,b)\qquad \overrightarrow{x_2}=\frac{\partial x}{\partial u^2}(a,b)$$



圖四

令 $n=\overrightarrow{x_1}\times\overrightarrow{x_2}/|\overrightarrow{x_1}\times\overrightarrow{x_2}|$ 爲曲面之法向量。

於是我們得到 $\{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, n\}$ 一組活動標架。垂直於 n 的平面，我們稱爲切平面。我們用 T_pM 表示過 P 點的切平面。

很明顯可看出，在定義曲線時，要使得切線存在，在定義曲面時，是要使得切面存在。曲線上有活動基底 $\{T, N, B\}$，曲面上也有 $\{x_1, x_2, n\}$。我們就是要利用這些工具來探討我們的主題。

三、曲面上的曲綫：

平面上兩點，連接此兩點的最短路徑，我們稱爲直線。那麼在一曲面上，連接兩點間最短的路徑，又該是什麼曲線呢，其有何性質呢？

設 $x: \mathbf{U} \to R^3$ 爲一單曲面 M。

$r: (a, b) \to R^3$ 爲一么速正則曲線。

若 $\forall S_0 \in (a, b) \to r(S_0) \in M$，則稱 r 爲 M 上之一曲線。

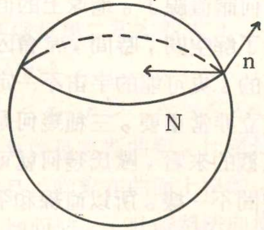
若 P 點在 r 上，所以也在 M 上。於是 P 點在 $r(s)$ 有 $\{T, N, B\}$，P 點在 M 上有 $\{x_1, x_2, n\}$。

我們知道 nN 不一定一樣。

取 $S = n \times T$，可知 $S \in T_pM$ 且 $\{S, T, n\}$ 爲一正交基底。

在 P 點有切面 T_pM，且 $n \perp T_pM$ 令 $N_pM = \{rn \mid n \in R\}$。

$\therefore\ R^3 = T_pM \oplus N_pM$



圖五

$r''(s) \in R^3\ \therefore r''(s) = X(s) + V(s)$，$X(s) \in T_pM$，$V(s) \in N_pM$。

欲證 $<X, T> = 0$，$\because\ r'' = (r')' = (T)' = KN$

$\therefore <r'', T> = <X, T> + <V, T> = <X, T>$

又 $<N, T> = 0 \quad \therefore <r'', T> = 0 = <X, T>$ ＃

故 $r''(s) = Kg(s)\, S + Kn(s)\, n$

〔定義〕：$Kn(s)$ 稱爲法曲率。$Kg(s)$ 稱爲測地曲率。

〔定義〕：x 爲一曲面，$r(s)$ 爲曲面上之一曲線

$\forall S\ \ Kg(s) = 0$，則稱 $r(s)$ 爲測地線。

亦即 $r''(s) = Kn(s)\, n(s)$

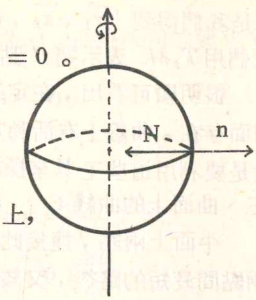
由上知 $r'' = T' \ \therefore Kg = <T' S>$

$<T', S> = [T', n, T] = [n, T, T'] = <n, T \times T'> = <n, T \times$

$、N>=K<n,B>=K\cos\theta$

角度 θ 是 n 和 B 的夾角，所以知夾角為 $90°$ 時 $Kg(s)=0$ 。

例：球上的測地線為大圓。



圖六

如圖，設球心在 0 點，$\therefore P$ 點的 $n=\dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$

P 點在一大圓上，整個大圓在一平面上，$\overrightarrow{OP}$ 在平面上，

$\therefore n$ 在平面上，又大圓為一平面曲線。

$\therefore N_p=\pm\dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$ $\quad\therefore n=\pm N$

$\therefore r''=KN=\pm Kn$ ，故 $Kg=0$ ⌗

測地線，它又扮演什麼角色呢？在平面上給定一點，給一斜率，就存在一直線。也就是任一方向皆有一直線。同樣，在給定曲面上的一點 P ，給定 T_pM 上的一向量，我們就可有一條測地線。更重要的，平面上，連接兩點最短的路徑為直線。而曲面上，連接兩點最短的路徑就是測地線。

$Kg=0$ 不是很明顯的告訴我們，除了曲面本身的彎曲，這測地線不再彎曲了嗎？換句話說，Kg 就是曲線對曲面的曲率。測地線，也就是曲面的相對直線了。從這裏我們已可很明白了解何謂直線了。地球上的直線，也就是大圓。

物理學的發展，使我們了解空間，時間，常會因為重力場，磁場，甚至別的因素而扭曲，平面，不再是平的。更可能的宇宙不一定是無限，不一定是歐氏幾何的空間。因此幾何學理論的建立非常重要。三種幾何是並存不相悖的。站在局部的觀點，歐氏幾何是對的。拿巨觀的來看，歐氏幾何就可能不適合了。很明顯直線性質的變異，是因為所觀察的空間不一樣。所以直線和平面本身的性質就有關係了。

四、旋轉曲面及其性質

旋轉曲面是一種性質比較好的曲面，把一曲線繞著一固定軸旋轉，而得的曲面就是旋轉曲面。那麼它的方程式該如何表示呢？

考慮一曲線（ $r(t)$, $z(t)$ ），繞著 z 軸旋軸。形成一曲面 $X=(x,y,z)$ 。很顯然 z 軸的高度不變，$\therefore z=z(t)$, 設原來之曲線在 $X-Z$ 平面上，旋轉 θ 角，把 P 點轉成 P' 點，$\therefore P'$ 到 Z 轉的距離，還是等於 r ，將之投影到 $X-Y$ 平面。

$\therefore$ 投影點的坐標應是（ $r\cos\theta$, $r\sin\theta$, 0 ）。

$\therefore P'$ 點的坐標是（ $r(t_0)\cos\theta$, $r(t_0)\sin\theta$, $z(t_0)$ ）。

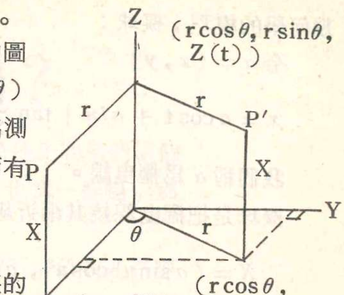
$\therefore$ 旋轉曲面的坐標，$X=(\,r(t),\cos\theta,r(t)\sin\theta,z(t)\,)$, $0<\theta<2\pi$

例：球為一旋轉面。

令 $\alpha(t)=(\cos t,\sin t)$ $\quad t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 為一半圓繞 Z 軸轉，則 $X(t,\theta)$

$=(\cos t\cos\theta\ ,\ \cos t\sin\theta\ ,\ \sin t)\ \theta\in(0,2\pi)$。

令 $\theta=\theta_0$ 則 $X(t\ ,\theta_0)$ 是爲 $\alpha(t)$ 旋轉 θ_0 時的圖形，我們稱爲徑線，又稱子午線。令 $t=t_0$ 則 $X(t_0\,\theta)$ 爲一高度一樣的線，我們稱爲緯線。在圓很容易看出測地線是大圓。在別的旋轉曲面又如何看呢？旋轉曲面有下列二性質：



圖七

(1)每一經線皆爲測地線。

(2)若緯線爲測地線⇔緯線上每一點，對其子午線的切向量，都平行於旋轉軸。

現在我們已經了解，所謂的直線，和曲面的性質，發生了很大的關係，那麼我們怎麼來把曲面分類呢？

五、第一基本型式，第二基本型式和高斯曲率

$X:\mathbf{U}\to R^3$ 爲一單曲面

考慮 $\mathrm{I}=\langle dx\ dx\rangle$（我們稱爲第一基本型式）

$\because X=X(v\ ,\nu)$. $\therefore dx=x_1du+x_2dv$

$\langle dx\ ,dx\rangle=E(du)^2+2Fdudv+G(dv)^2$

其中 $E=\langle x_1\,x_1\rangle\quad F=\langle x_1\,x_2\rangle\quad G=\langle x_2\,x_2\rangle$

考慮 $\mathrm{II}=-\langle dx\ ,dn\rangle$（我們稱爲第二基本型式）

$=L\,du^2+2M\,dudv+Ndv^2$

其中 $L=\langle x_{11}\ n\rangle\quad M=\langle x_{12}\ n\rangle\quad N=\langle x_{22}\ n\rangle$

決定曲面有一個重要的工具就是高斯曲率，什麼是高斯曲率呢？它是描述曲面「彎曲大小」的量。它的意思是：當點在曲面上移動，相應地曲面上單位法向量的終端，也在單位球面上掃出一塊面域。（此時將法向量起點固定在球心），那麼這個從曲面到球面映射的有號面積漲縮率（亦卽兩塊面積比值），便是高斯曲率 K。

我們可導得 $K=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}$（$L\ ,M\ ,N\ ,E\ ,G\ ,F$，是第Ⅰ和第Ⅱ基本式的符號。）

高斯曲率和非歐幾何學又有何關係呢？我們怎麼利用高斯曲率來幫助我們了解非歐幾何學。歐氏幾何模型是一平面，所以 n 爲一常數，由上高斯曲率之意義可看出平面高斯曲率爲 0。橢圓幾何學之模型爲一球面，在 P 點有一 n 我們知 $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{P}$，

∴高斯曲率爲 $+1$（設單位球面，一般爲 $\dfrac{1}{r^2}$）。並且，我們可算出 poincare模式的高斯曲率爲 -1。

很顯然的三種幾何學的空間，可利用高斯曲率來判別。$K=0$ 爲歐氏幾何學 $K>0$ 爲橢圓幾何學，$K<0$ 爲雙曲線幾何學 Beltrami 在 1868 年證得擬球爲雙曲線

幾何學的模型，擬球：

令$\alpha=(x,y)$

$$x=a\cos t+a\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| \qquad y=a\sin t \text{。}$$

我們稱α為擺曳線。

擬球是把擺曳線繞其漸近線旋轉，所得的旋轉曲面。我們得其方程式為

$$X=\left(a\sin u^1\cos u^2, a\sin u^1\sin u^2, a\cos u^1+a\ln\tan\frac{u^1}{2}\right)$$

我們利用$K=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}$ 可算出$K=-\dfrac{1}{a^2}$ 當$a=1$時得$K=-1$ ＃它的高斯曲率恰合我們双曲線幾何學空間的曲率一樣。擬球上的測地線，我們怎麼找呢？由前知道，子午線為測地線。任意兩點之間一定存在一測地線。並且知道，任一方向，亦有一測地線。到目前為止，我尚不知其他的測地線為何種曲線，擬球上的幾何學又是怎麼看。

參考資料：

1. Introduction to Differential Geometry Abraham Goetz.
2. Elements of Differential Geometry Richard. S. Millman. George D parker.
3. 初等微分幾何講稿　黃武雄著（萬人出版社）

將直覺觀察出的敍述給予正式的證明，然後再直覺地觀察正式的證明，是一種增强實力的心智訓練。不幸在教室中常常沒有足夠的時間從事這種工作。——「摘自「怎樣解題」

象有幾條腿？

每當學生來尋求指導時，輔導員總是先問他們這個問題：「正常的象有四條腿。假如鼻子也算一條腿，那麼象有幾條腿？」

假如學生回答：「在你所說的假設下，象有五條腿。」輔導員就勸他去作數學家。

假如學生回答：「那是一種例外，平均而言象有四條腿。」輔導員就勸他去學統計。

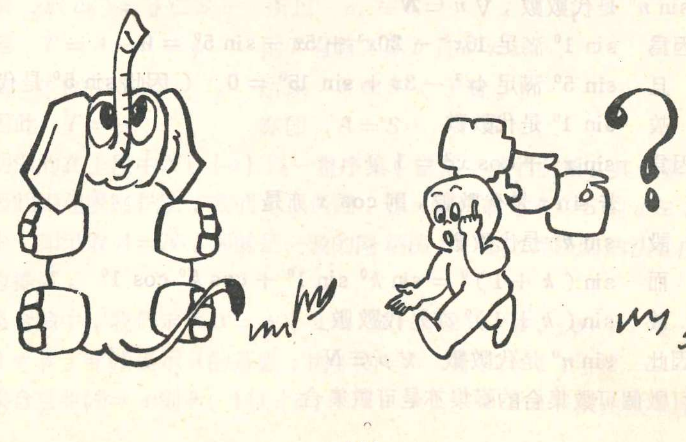
假如學生回答：「鼻子本來就不是腿，光把鼻子說成腿，並不會更改它的類別，所以象有四條腿。」輔導員就勸他去作動物學家。

假如學生回答：「假如鼻子算腿的話，尾巴也算腿，所以象有六條腿。」輔導員認爲這位同學善於搬弄事實，就勸他學社會科學。

假如學生回答：「你說正常的象有四條腿，但你沒有說這隻象是否正常。在缺乏充分證據下，我寧願保留我的意見。」輔導員就勸他學法律。

假如學生回答：「哼，這是一個好問題！」輔導員就勸他去當老師。

——摘自「數學傳播」第十期



簡介超限歸納法

・謝卿宏

在證明一些數學的理論當中，我們常用到皮阿諾的五大公設之一：數學歸納法。於此，我們將歸納法從N引入整序集（well-orderd sets）。於是就有了超限歸納法的公設。現在，先看看幾個普通的歸納法的例子。

例：1. $[0.1]=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}\cdot 1+\frac{1}{n})$

很明顯的，若$x\in[0,1]$，則$x\in(-\frac{1}{1},1+1)=(-1,2)$

因為　$x\in(1-\frac{1}{k},1+\frac{1}{k})$　且　$x\in(-\frac{1}{k+1},1+\frac{1}{k+1})$

$\therefore$　$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n})$，故　$[0,1]\subset\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n})$

而　$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n})$亦包含於$[0,1]$

2. $\sin n^0$ 是代數數，$\forall\, n\in N$

因為　$\sin 1^0$ 滿足 $16x^5-20x^3+5x-\sin 5^0=0$

且　$\sin 5^0$ 滿足 $4x^3-3x+\sin 15^0=0$　（因此 $\sin 5^0$ 是代數數）

故　$\sin 1^0$ 是代數數

因為　$\sin x^2+\cos x^2=1$

$\therefore$　若 $\sin x$ 是代數數，則 $\cos x$ 亦是

設　$\sin k^0$ 是代數數

而　$\sin(k+1)^0=\sin k^0\sin 1^0+\cos k^0\cos 1^0$

故　$\sin(k+1)^0$ 亦是代數數

因此　$\sin n^0$ 是代數數　$\forall\, n\in N$

3. 可數個可數集合的聯集亦是可數集合

設 $A_1 = \{ a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots\cdots \}$

$A_2 = \{ a_{21}, a_{22}, a_{23}, \cdots\cdots \}$

$A_3 = \{ a_{31}, a_{32}, a_{33}, \cdots\cdots \}$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

今欲證 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是可數集合　　令 $p(n) = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

顯而易見的 $p(1)$ 是可數集合

設 $p(k)$ 是可數的

所以 $p(k)$ 可表成 $\{ b_1, b_2, b_3, b_4, \cdots\cdots \}$

$p(k+1) = p(k) \cup A_{k+1} = \{ b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots \}$

$\cup \{ a_{k+1\,1}, a_{k+1\,2}, \cdots\cdots \}$

$= \{ b_1, a_{k+1\,1}, b_2, a_{k+1\,2}, b_3, a_{k+1\,3}, \cdots\cdots \}$

故 $p(k+1)$ 亦可數

$\therefore$ $p(n)$ 是可數的　　$\forall n \in N$

至目前爲止，我們討論的歸納法只限於自然數，亦即對於一般在 N 中討論的推證，利用皮阿諾公設也就夠了！然而，像在這麼的一個集合 $N \cup \{a\}$ 其中 $a \notin N$，且 a 是此集合的末元素（ last element ）。若 1 滿足某個式子 $p(x)$，且設 k 亦滿足此式，可導出 $k+1$ 亦滿足，則所有的 $x \in N \cup \{a\}$ 都能滿足 $p(x)$ 嗎？很顯然的，皮阿諾公設是不夠的。因此，我們就有了超限歸納法，像此類問題，它是能夠勝任愉快的。於此略述我們的主題：超限歸納法（ transfinite induction ）。

〔定理〕 $(A, \angle)$ 是整序集　$S \subset A$ 且 $s(a) = \{ b \in A \mid b < a \}$

若 S 滿足 $s(a) \subset S \Rightarrow a \in S$　則 $A = S$

證明：$\because$ A 爲整序集　$\therefore$ A 有首元素 a_0

又 $s(a_0) = \phi \subset S$　　所以 $a_0 \in S$

若 $T = A - S \neq \phi$　　則 T 有首元素 b 且 $b \neq a_0$

故 $s(b) \subset S$　　所以 $b \in S$ （矛盾）

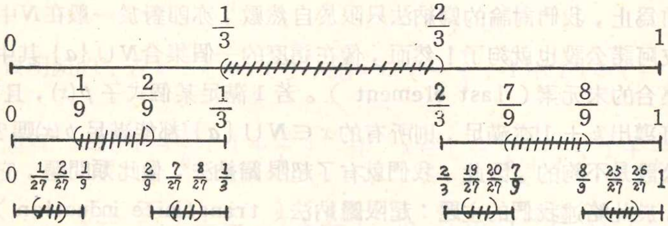
因此 $T = \phi$　　亦即 $A = S$

很明顯的在上段中 $N \cup \{a\}$ 爲一整序集（當然，我們必須在其元素間建立一次序），因此由超限歸納法，我們可以保證：若 $s(n) \subset S \Rightarrow n \in S$ 則 $a \in S$。在超限歸納法中，如果取 $A = N$，那就是一般的歸納法了。所以超限歸納法是皮阿諾的歸納公設的推廣。

在集合論中，我們定義 $0 = \phi$，$1 = \{\phi\}$，$2 = \{\phi, \{\phi\}\}$，……若 A 爲一集合且 $A \neq \phi$，$\#(A)$ 表示 A 的基數，則 $\#(0) = 0$，$\#(1) = 1$，$\#(2) = 2$……。若 A 爲有限集合且 $\#(A) = n$ 則 $\#(A \cup \{a\}) = n+1$　$a \notin A$。故由數學歸納法，我

們得知$\#(\boldsymbol{R})$存在。因爲任何集合都能在其上定義一次序，使其成爲整序集，現在考慮$\#(\boldsymbol{R})$是否存在？令$\angle$爲定義在$\boldsymbol{R}$上的次序，且使（$\boldsymbol{R}$，$\angle$）是一整序集，假設$\#(s(a))$存在，且$\#(s(a))=\alpha$，則$\#(s(a)\cup\{a\})=\alpha+1$故由超限歸納法得知$\#(\boldsymbol{R})$存在！因此我們知道任給一集合$A$，則$\#(A)$必存在。同理,任何集合$A$的序數亦必存在。

現在我們來討論一個奇特的集合，堪托集合（Cantor Set）——含有不可數個點，但其長度爲零。將〔0,1〕分成三段後，取去（$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$），於是剩下〔0，$\frac{1}{3}$〕，〔$\frac{2}{3}$，1〕；接著再將〔0，$\frac{1}{3}$〕，〔$\frac{2}{3}$，1〕分別三等分，再取去此二線段的中央部分，亦卽（$\frac{1}{9}$，$\frac{2}{9}$），（$\frac{7}{9}$，$\frac{8}{9}$），於是就只剩下〔0，$\frac{1}{9}$〕，〔$\frac{2}{9}$，$\frac{3}{9}$〕，〔$\frac{6}{9}$，$\frac{7}{9}$〕，〔$\frac{8}{9}$，1〕。見下圖



再就剩下的線段繼續不斷地重複上述的步驟。當上述步驟繼續不斷地重複時，顯而易見的，我們已經取走了〔0，1〕整個一單位的長度了；然而，我們仍剩下無窮多個點（當然不能遺有區間，若如此，我們還可以繼續上述的步驟，使區間不再存在。）設這個點集合爲C。例如0，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，1，$\frac{1}{9}$，$\frac{2}{9}$，……，這些點都屬於C；很顯然的，上述這些點（卽0，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，1，$\frac{1}{9}$，$\frac{2}{9}$，……）之集合是可數的。可是，除了這些點外，我們還留下甚多的點，現在我們就來討論堪托集合的元素個數問題。

因爲每次我們都把剩餘的線段三等分，所以我們可以三進位法來描述〔0,1〕上的點。例如0.1，0.2分別表示$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$；而0.0……則表示〔0，$\frac{1}{3}$）上的點，〔$\frac{2}{3}$，1）上的點則可以以0.2……來表示。令$S=\{\,x\mid x=0.x_1x_2x_3\cdots x_n\cdots,$

$x_i \in \{0, 2\}$，$\forall i \in N\}$，很顯然地 S 是一個不可數集合，此時我們欲證 $C = S$。因為 $0 \in C$，所以 $C \neq \phi$，且 $C = S$。設"$\angle$"為定義在 S 上的一個次序，使得 $(S, \angle)$ 是一個整序集。若 $T = S - C \neq \phi$，則 T 必有首元素 y，故 $s(y) \subset C$。設 $y = 0.y_1 y_2 y_3 \cdots\cdots$，令 $p(n)$ 表示 $0.y_1 y_2 \cdots\cdots y_n$ 在第 n 個步驟時仍位於未被取走的線段上。因為 $y \in S$，所以 $y_1 \in \{0, 2\}$，故 $0.y_1$ 等於 0 或 0.2，因此落於 $[0, \frac{1}{3}]$ 或 $[\frac{2}{3}, 1]$，故 $p(1)$ 是眞。設 $p(k)$ 為眞，則 $0.y_1 y_2 \cdots\cdots y_k$ 在第 k 個步驟時仍在還沒被取走的線段上。因此，由三進位法知 $0.y_1 \cdots\cdots y_k 0$ 和 $0.y_1 \cdots y_k 2$ 在第 $k+1$ 個步驟後仍留在剩下的線段上，故 $p(k+1)$ 亦眞，亦即 y 還留在在 $[0.1]$ 上，未被取走。所以 $y \in C$，故 $S = C$。因此 C 是個不可數集合，且 C 的長度是 0。此處所言及的 C，就是一般所稱的堪托集合了！

最後，我們再舉個例子來說明超限歸納法，這是一個有關於黎曼和（Riemann Sum）的例子。設 $[a, b]$ 是實數線上的一閉區間，$a \neq b$，若 P 是 $[a, b]$ 的一個分割，則 $\mathrm{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$，其中 $x_0, \cdots, x_n \in \boldsymbol{R}$，且 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$。令 $\boldsymbol{P} = \{\mathrm{P} \mid \mathrm{P}$ 是 $[a, b]$ 的一個介割$\}$，且"$\angle$"是定義於 $\boldsymbol{P}$ 上的一個次序，其關係為 $\mathrm{P}_1 \prec \mathrm{P}_2 \Leftrightarrow \mathrm{P}_2 \subset \mathrm{P}_1$，因此 $\boldsymbol{P}$ 是一個有向集（directed set）。如果 f 是一個從 $[a, b]$ 映至 $\boldsymbol{R}$ 的函數，對於任一個分割 P，

我們令 $S(f, \mathrm{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$，則 $S(f, -)$ 是一個 $\boldsymbol{P}$ 映至 $\boldsymbol{R}$ 的函數，所以是 $\boldsymbol{R}$ 中的一個網（net）。如 y_0 是 $\boldsymbol{R}$ 中的任一點，令 $\mathcal{U}(y_0) = \{\mathrm{U}(y_0) \mid \mathrm{U}(y_0)$ 是 y_0 的鄰域$\}$，$\mathcal{U} = \{\mathrm{U}(y_0) \mid \exists P \ni S(f, T_p) \subset \mathrm{U}(y_0)$，$\mathrm{U}(y_0) \in \mathcal{U}(y_0)\}$。其中 $T_p = \{\mathrm{P}' \mid \mathrm{P}' \succ \mathrm{P}\}$。因此，我們只要能夠證明：若 $s(\mathrm{U}(y_0)) \subset \mathcal{U}$ 則 $\mathrm{U}(y_0) \in \mathcal{U}$，那麼 $\mathcal{U} = \mathcal{U}(y_0)$（當然我們能夠在 $\mathcal{U}(y_0)$ 上定義一次序，使得 $\mathcal{U}(y_0)$ 是一個整序集）。這也就是說，只要 $s(\mathrm{U}(y_0)) \subset \mathcal{U} \Rightarrow \mathrm{U}(y_0) \in \mathcal{U}$ 成立，則 $S(f, -)$ 收斂至 y_0，這就是黎曼和的存在問題了。

至此，我們僅以一些例子來說明超限歸納法，甚至以和已往經驗不同的角度來討論某些問題；當然，這些都是用來表達超限歸納法的功能。除此之外，我們還須說明兩點，㈠任何集合都能夠在其上定義一次序，使其成為整序集。這個性質是成立的，但是就一般來說，我們是很難尋得這麼的一個次序的，尤其是當這集合是一個不可數集合時。例如，如何在 $\boldsymbol{R}$ 上建立一次序，使其成為整序集呢？㈡超限歸納法是一個保證從有限推廣到無限，或從已知推廣到未知成立的性質。

參考資料：1. Dugundii：Topology.　　2. Pinter：Set Theory.

淺談冪級數與其簡單應用

胡昇鋒

一、序列與級數：打從高中以來，我們就知道什麼叫序列：設A是一個集合，由$\{1,2,3,\cdots\cdots,n,\cdots\cdots\}$映至$A$的任意一個函數$\boldsymbol{a}$稱爲序列；當$A=\boldsymbol{R}$時，爲數列。

基於以上觀點，我們知

（i）1，$\frac{1}{2}$，$\cdots\cdots$，$\frac{1}{n}$ 爲一n項序列。

（ii）對任一$n\in N$，$A_n=\{1,2,\cdots\cdots,n\}$，則$A_1$，$A_2$，$\cdots\cdots$，$A_n$，$\cdots$爲一無窮序列。

（iii）甚至於"你，我，他"亦爲一個有限序列。

設$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$是一個數列，令$S_1=a_1$，$S_2=a_1+a_2$，$S_3=a_1+a_2+a_3$，$\cdots$，$S_n=a_1+\cdots\cdots+a_n$

以部分和S_i做第i項則$S_1,S_2,\cdots\cdots,S_n$亦是一個新序列，此時S_n稱爲由n項數列$\boldsymbol{a}$所成的級數。故級數乃是：

定義：設$\boldsymbol{a}$是一個數列$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$則形如$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots$的式子稱爲由$\boldsymbol{a}$所成的級數。

由此可見級數與數列的關係。所以數列與級數在某些方面有極類似的地方。以下是序列與級數間一些類似的定義，僅供參考。

例一、數列$\boldsymbol{a}=\{a_n\}$，若存在A，使得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，則稱數列$\boldsymbol{a}$爲收斂。若一數列不收斂，則稱爲發散。

即任給$\varepsilon>0$，存在$n_0\in N$，使得$|a_n-A|<\varepsilon$，對每一$n>n_0$都成立。

對應級數爲：任給$\varepsilon>0$，存在$n_0\in N$，使得$\|S_n-S\|<\varepsilon$，對每一$n>n_0$都成立，即

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots$$

例二、數列：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ 則

（i） $\lim\limits_{n\to\infty} k\, a_n = kA$，$k$ 爲常數。

（ii） $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 與 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k}$ 具有相同的斂散性。

級數：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 亦收斂則

（i） $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k\, a_n = k \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

（ii） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 與 $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ 具有相同的斂散性。

例三、數列 $a = \{ a_n \}$ 爲收斂的充要條件爲：任給 $\varepsilon > 0$，存在 $n_0 \in N$，使得 $\| a_m - a_n \| < \varepsilon$，$m$，$n \geq n_0$

級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂的充要條件爲：任給 $\varepsilon > 0$，存在 $n_0 \in N$，$\| S_m - S_n \| = \| a_{n+1} + \cdots + a_m \| < \varepsilon$，特殊地 $\| a_n \| < \varepsilon$，$n \geq n_0 + 1$，$\lim a_n = 0$。

例四、數列：設 $\boldsymbol{a} = \{ a_n \}$ 爲單調遞增之數列，則此數列 $\boldsymbol{a}$ 收斂的充要條件爲此數列有界。

對應級數爲：設 $\{ a_n \}$ 爲非負數列，則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 爲收斂的充要條件爲部分和數列 $S = \{ S_k \}$ 爲有界。

縱然序列與級數間有密切的關係，但其中亦有許多差異頗大的地方，如：序列中，絕對值收斂的序列，其本身並不一定收斂。例：$\{ 1, -1, 1, -1, \cdots \}$。但級數中，絕對收斂的級數必爲收斂級數。（證：利用 $\| x_{n+1} + \cdots\cdots + x_m \| \leq \| x_{n+1} \| + \cdots\cdots + \| x_m \| < \varepsilon$。

又如：$X = \{ x_n \}$，$Y = \{ y_n \}$ 均爲非負實數列，

設 $k \in N$ 使得 $x_n \leq y_n$，對於所有 $n \geq k$ 均成立，若 $\sum y_n$ 收斂，則 $\sum x_n$ 亦同。但

序列則否，例：

$X=\{1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \cdots\cdots\}$ 發散，$Y=\{3+\frac{1}{n}\}$ 收斂。

二、冪級數：對級數有些認識後，我們接著看含有一個變數的級數。設其含一個變數 x，假如級數對某一區間之 x 值皆收斂，則級數之和 $S(x)$ 在此區間爲 x 的函數，此時之級數稱爲「表示」此函數，或稱爲此函數之「級數展開式」。

例：$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots$

對每一個固定的 $x=x_0$ 而言，我們知其收斂，且其和爲 e^x。所以此級數爲此函數 $f(x)=e^x$ 之「級數展開式」或 $f(x)=e^x$ 爲所予級數所「表示」。

特殊的情況：我們時常遇到一種如下形式的級數：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots$$

其中係數 a_n 爲常數，x 爲一變數，此種形態的級數，特稱爲冪級數。因爲冪級數的特殊形式，所以冪級數，往往具有一般函數級數所沒有的更好的性質。

定理：假如冪級數 $\sum a_n x^n$ 在 ξ 處收斂，則對於所有的 z 當 $|z|<|\xi|$，$\sum a_n z^n$ 亦收斂，如果 $\sum a_n x^n$ 在 ξ 處發散，則對於所有的 z 當 $|z|>|\xi|$ $\sum a_n z^n$ 亦發散。

由此定理甚易得知，（情況一）若存在一點 $x_0>0$，使得 $\sum a_n x^n$ 收斂，亦存在一點 $y_0>0$，使得 $\sum a_n x^n$ 發散。顯然 $x_0<y_0$，則得一區間 $J_0=[x_0, y_0]$

若 $\frac{x_0+y_0}{2}$ 亦使 $\sum a_n x^n$ 收斂則令 $\frac{x_0+y_0}{2}=x_1$，$y_1=y_0$

若 $\frac{x_0+y_0}{2}$ 使 $\sum a_n x^n$ 發斂則令 $\frac{x_0+y_0}{2}=y_1$，$x_1=x_0$

令 $J_1=[x_1, y_1]$

$\vdots$

若 $\frac{x_{j-1}+y_{j-1}}{2}$ 使 $\sum a_n x^n$ 收斂則令 $\frac{x_{j-1}+y_{j-1}}{2}=x_j$，$y_j=y_{j-1}$

若 $\frac{x_{j-1}+y_{j-1}}{2}$ 使 $\sum a_n x^n$ 發散則令 $\frac{x_{j-1}+y_{j-1}}{2}=y_j$，$x_j=x_{j-1}$

令 $J_j=[x_j, y_j]$

則 $\forall j\in N$，$\sum a_n x_j{}^n$ 均收斂

$\forall j \in N$，$\sum a_n y_j{}^n$ 均發散

且　$J_1 \supset J_2 \supset \cdots\cdots \supset J_j \supset \cdots\cdots$

$\lim \mid x_n - y_n \mid = 0$

$\Rightarrow$由完備性質知$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = R$

此時 $|x| < R$ 時，此級數收斂

$|x| > R$ 時，此級數發散

因此，R 稱爲冪級數$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收斂半徑，（$-R$，R）稱爲收斂區間。

（情況二）$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 僅當 $x=0$ 時收斂此時將其收斂半徑視成 0；而當$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$對每一實數 x 都收斂，則其收斂半徑視爲∞。

冪級數於收斂半徑內皆收斂，則此級數之和將爲一函數 f，$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，$|x| < R$，所以我們研究 $f'(x)$與 $\int f(x)\,dx$ 將是順理成章的，更確實的，我們有如下的性質：

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots\cdots$$

$$\int f(x) = c + a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots\cdots$$

此即表示冪級數具有多項式的微分與積分的性質，這是其它函數所不一定有的。

〔註〕

證此二式以前我們先證以下二個定理。

定理：若級數$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收斂半徑爲 R，則級數$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$之收斂半徑亦爲 R，即

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 與$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 具有相同的收斂半徑。

定理：若 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，$|x| < R$

$\Rightarrow$　$f(x)$在 $|x| < R$ 爲連續。

證：設 x_0 爲任意數，且 $|x_0| < R$，$0 < |x - x_0| < S$

欲證 $\lim\limits_{x\to x_0} | f(x) - f(x_0) | = 0$

$$f(x)-f(x_0)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x_0{}^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x^n-x_0{}^n)$$

$$|x^n-x_0{}^n|=|x-x_0|\ |x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\cdots\cdots+x_0{}^{n-1}|$$

令 $r>m_{ax}\{|x|,|x_0|\}$，且 $r<R$，

$$\Rightarrow\quad |x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\cdots\cdots x_0{}^{n-1}|\leq n\,r^{n-1}$$

故 $|f(x)-f(x_0)|\leq\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\,|x^n-x_0{}^n|$

$$\leq|x-x_0|\sum_{n=1}^{\infty}n\ |a_n|\ r^{n-1}$$

令 $A=\sum_{n=1}^{\infty}n\,|a_n|\,r^{n-1}$（注意 $0\leq A<\infty$）

則 $|f(x)-f(x_0)|\leq A\ |x-x_0|$

故 $f(x)$ 在 $|x|<R$ 連續

〔微分定理〕若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$，$|x|<R$

$$\Rightarrow\quad f'(x_1)=\sum_{n=1}^{\infty}n\,a_n\,x_1{}^{n-1},\ |x_1|<R$$

〔積分定理〕若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$，$|x|<R$

$$\Rightarrow\int f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int a_n x^n\,dx=c+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$

證：考慮級數 $F(x)=c+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$

$$\Rightarrow\quad F'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=f(x)\quad\Rightarrow\quad F(x)=\int f(x)\,dx.$$

在前面我們已經提到任何一收斂半徑不爲零之冪級數可表示一函數。$f(x)=$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，此時稱 f 爲解析函數。所以解析函數亦可由冪級數表出，且其表示法對其收斂區間內任一固定點是唯一的。以下我們將討論其表示法：

由微分定理中的證明知，若 f 爲一解析函數

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow \quad f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_1)^k \ , \ b_k=\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} a_{n+k} x_1^n$$

逐次導數之得

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)a_{n+1}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+k)a_{n+k}x^n$$

$$\vdots$$

若令　$x=x_1$，則 $f^{(k)}(x_1)$ 與 b_k 比較得

$$b_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_1)$$

所以　$f(x)=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_1)(x-x_1)^k$

此只是 $f(x)$ 的另一種冪級數表示而已。

更一般些：若函數 f 在〔a，b〕$=J$ 定義，且其 n 階導數 $f'(x)\,f''(x)\cdots\cdots\cdots f^{(n)}(x)$ 在 J 內均連續，並 (a,b) 區間內均存在，則仿前可作出一冪級數，趨近於此函數。記之爲

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(x_1)}{n!}(x-x_1)^n$$

特別於 $x_1=0$ 時，$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}x^n$

例一、 $y = a^x$

$x = \varphi(y) = \log_a y$

$y = \varphi'(y) = \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{1}{\ln a}$

$(a^x)' = y \ln a = a^x \ln a$

特別當 $a = e$ 時

$(e^x)' = e^x$

$e^x \sim 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots\cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots\cdots$

例二、更一般的，我們會遇到函數的參數表示，如

$$y = y(u), \qquad x = x(u)$$

則 $y_x' = \dfrac{dy}{dx}$

$$y_{xx}'' = \left(\frac{dy}{dx}\right)_x' = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{dxd^2y - d^2xdy}{dx^2}}{dx}$$

i.e. $y''_{xx} = \dfrac{dxd^2y - d^2xdy}{dx^3}$

$$y'''_{xxx} = \left(\frac{dxd^2y - d^2xdy}{dx^3}\right)_x = \frac{d\left(\frac{dx - d^2y - d^2xdy}{dx^3}\right)}{dx}$$

$$= \frac{\frac{(d^2x \cdot d^2y + dxd^3y - d^3xdy - d^2xd^2y)dx^3 - d(dx)^{\cdot 3}}{dx^6}}{dx}$$

$$\frac{\frac{(dxa^2y - d^2xdy)}{dx^6}}{dx}$$

$$= \frac{dx^3(dxd^3y - d^3xdy) - 3dx^2d^2x(dxd^2y - d^2xdy)}{dx^6 \cdot dx}$$

i.e. $y'''_{xxx} = \dfrac{dx(dxd^3y - d^3xdy) - 3d^2x(dxd^2y - d^2xdy)}{dx^5}$

設 $x = x(u)$ 的反函數爲 $u = u(x)$

令 $u_0 = u(x_0)$

$\Rightarrow \quad y(u(x)) \sim y(u_0) + y'(u_0)x + \dfrac{y''(u_0)}{2!}x^2 + \dfrac{y'''(u_0)}{3!}x^3 + \cdots\cdots$

$$= y(u_0) + x\left(\frac{dy}{dx}\Big|_{u=u_0}\right) + \frac{x^2}{2!}\left(\frac{dxd^2y - d^2xdy}{dx^3}\Big|_{u=u_0}\right)$$

$$+ \frac{x^3}{3!}\left(\frac{dx(dxd^3y - d^3xdy) - 3d^2x(dxd^2y - d^2xdy)}{dx^5}\Big|_{u=u_0}\right)$$

$$+ \cdots\cdots$$

不難發現，若我們利用此種冪級數的表示，來估計解析函數 $f(x)$ 於一點 x_0 時的特殊值，將是頗爲合理的。

例一、估計 $\sin 0.1$ 的值

令 $f(x) = \sin x$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x + \pi)$$

一般有 $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$

所以 $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\cdots$

$$\Rightarrow \sin 0.1 \fallingdotseq 0.1 - \frac{(0.1)^3}{3!} + \frac{(0.5)^5}{5!} = 0.099833$$

例二、估計 $31^{\frac{1}{5}}$ 的值

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots\cdots$$

$$31^{\frac{1}{5}} = (32-1)^{\frac{1}{5}} = 2\left(1 - \frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$31^{\frac{1}{5}} \fallingdotseq 2\left[1 + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{32}\right) + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{32}\right)^2 + \frac{1}{3!}\,\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{5}\cdot\left(-\frac{1}{32}\right)^3\right]$$

$$\fallingdotseq 2\left[1 - 0.00625 - 0.000078\right]$$

$$\fallingdotseq 2 \times 0.99367 = 1.98734$$

亦可用來估計定積分

例三、估計 $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ 的值。

我們用冪級數的表示

$$e^{-x^2} \sim 1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{12}{4!}x^4-\frac{120}{6!}x^6+\frac{1680}{8!}x^8-\frac{22920}{10!}x^{10}+\cdots\cdots$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^{-x^2}dx \doteqdot 1-\frac{2}{2!}\cdot\frac{1}{3}+\frac{12}{4!}\cdot\frac{1}{5}-\frac{120}{6!}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1680}{8!}\cdot\frac{1}{9}-$$

$$\frac{22920}{10!}\cdot\frac{1}{11}$$

$$\doteqdot 0.76667-0.02381+0.00057$$
$$=0.74692$$

應用冪級數，解不定式

例四、求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\ln(1+x)}$

$$\tan x \sim x+\frac{x^3}{3}+\cdots\cdots$$

$$\ln(1+x)\sim x-\frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \tan x - x \sim \frac{x^3}{3}+\cdots\cdots$$

$$x^2\ln(1+x)\sim x^3-\cdots\cdots$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+\cdots\cdots}{x^3-\cdots\cdots}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}+\cdots\cdots}{1-\cdots\cdots}=\frac{1}{3}$$

無可否認的，一解析函數與其冪級數表示之間存在著

餘式 $r_k(x)=f(x)-\sum\limits_{n=0}^{k}\dfrac{f^n(x_1)}{n!}(x-x_1)^n$

不難知道，當 $x\to x_1$ 時，$r_n(x)\to 0$

事實上是 $\lim\limits_{x\to x1}\dfrac{r_n(x)}{(x-x_1)^n}=0$

i.e. $r_n(x)=\circ\,[(x-x_1)^n]$

更進一步，中間值定理告訴我們可證得下面的定理：

定理：假定 $f(x)$在 $[x_0, x_0+H]$ 上有 n 階連續有限導數，且在 (x_0, x_0+H) 中有第 $n+1$ 階有限導數。若 $g(z)$在 $[x_0, x]$ 上連續，且在 (x_0, x) 的導數都存在且不等於 0，則存在 c，$x_0<c<x$，使得 $r_n(x)=\dfrac{g(x)-g(x_0)}{g'(c)}$

$$\frac{f^{n+1}(c)}{n!}\ (x-c)^n$$

證：設 φ：〔 x_0, x_0+H 〕$\to R$ 爲下式所定義

$$\varphi(z)=f(x)-f(z)-\frac{f'(z)}{1!}(x-z)-\frac{f''(z)}{2!}(x-z)^2-\cdots\cdots$$

$$-\frac{f^n(z)}{n!}(x-z)^n \qquad x_0<z<x$$

則知 φ：〔 x_0, x_0+H 〕$\to R$ 爲連續且在（x_0, x_0+H）內任一點均具有導數。

$$\varphi'(z)=-f'(z)-\left[\frac{f''(z)}{1!}(x-z)-\frac{f'(z)}{1!}\right]-\left[\frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2\right.$$

$$\left.-\frac{f''(z)}{1!}(x-z)\right]-\cdots\cdots-\left[\frac{f^{n+1}(z)}{n!}(x-z)^n-\frac{f^n(z)}{(n-1)!}\right.$$

$$\left.(x-z)^{n-1}\right]$$

$$=-\frac{f^{n+1}(z)}{n!}(x-z)^n$$

$$=\varphi'(c)=-\frac{f^{n+1}(c)}{n!}(x-c)^n$$

由 $\varphi(x)$ 的定義知：$\varphi(x)=0$ $\qquad\qquad \varphi(x_0)=r_n(x)$

由中間值公式 $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\dfrac{\varphi'(c)}{g'(c)}$

$$\Rightarrow \varphi(x_0)=-\frac{\varphi'(c)}{g'(c)}(g(x)-g(x_0))+\varphi(x)$$

$$\Rightarrow r_n(x)=\frac{g(x)-g(x_0)}{g'(c)}\ \frac{f^{n+1}(c)}{n!}(x-c)^n \text{ 得證}$$

特殊的令 $g(z)=(x-z)^p$ $\qquad p>0$

$\Rightarrow g'(z)=-p(x-z)^{p-1}$ $\qquad x_0<z<x$

則 $r_n(x)=\dfrac{(x-x_0)^p}{p(x-c)^{p-1}}\cdot\dfrac{f^{n+1}(c)}{n!}(x-c)^n$

$$=\frac{f^{n+1}(c)}{n!\,p}(x-c)^{n+1-p}(x-x_0)^p \qquad x_0<c<x$$

若令 $c = x_0 + \theta(x - x_0)$ $\qquad 0 < \theta < 1$

則 $r_n(x) = \dfrac{f^{n+1}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!\,p}(1-\theta)^{n+1-p}(x - x_0)^{n+1} \qquad 0 < \theta < 1$

取 $p = 1$ 則

$$r_n(x) = \frac{f^{n+1}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(1-\theta)^n (x - x_0)^{n+1} \qquad 0 < \theta < 1$$

取 $p = n + 1$ 則

$$r_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

於是一解析函數 $f(x)$ 更可精確的表之爲

$$f(x) = \sum_{R=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad x_0 < c < x$$

所以 $f(x)$ 在一特定點 $x = x_0$ 上的特殊值乃被我們精確的估計著。

例：我們計算 $\sin \dfrac{\pi}{18}$ 的範圍。

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

$$\sin\left(c + \frac{2n+3}{2}\pi\right) \qquad 0 < c < x$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{18} \sim \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\times\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 \doteqdot 0.174533 - 0.000886 = 0.173647$$

$$0 < R_2 = \frac{x^5}{5!}\sin\left(c + \frac{5\pi}{2}\right) < \frac{x^5}{5!} = \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 \doteqdot 0.0000016$$

所以 $0.173647 < \sin\dfrac{\pi}{18} < 0.1736486$

冪級數可用以計算所求解答之值，故極有實際用途。此外，冪級數解法，應用到甚多，如：微分、相加、相乘等各種不同之級數運算。以下僅以些以冪級數解微分方程的例子作結。

例一、解方程式 $y' - y = 0$

$$令\ y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \Rightarrow y' = \sum_{m=1}^{\infty} m\, a_m x^{m-1}$$

代入方程式　$(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots)-(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)=0$

合併同次方之 x 項

$$(a_1-a_0)+(2a_2-a_1)x+(3a^3-a_2)x^2+\cdots\cdots\cdots=0$$

得　$a_1-a_0=0$　　$2a_2-a_1=0$　　$3a_3-a_2=0$

則　$a_1=a_0$　　$a_2=\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{a_0}{2!}$　　$a_3=\dfrac{a^2}{3}=\dfrac{a_0}{3!}$

故　$y=a_0+a_0x+\dfrac{a_0}{2!}x^2+\dfrac{a_0}{3!}x^3+\cdots\cdots$

$y=a_0e$

例二、解方程式　$y''+y=0$

令　$y=\sum\limits_{m=0}^{\infty}c_mx^m \Rightarrow y''=\sum\limits_{m=2}^{\infty}m(m-1)c_mx^{m-2}$

代入方程式

$$(2c_2+3\cdot 2x+4\cdot 3x^2+\cdots\cdots\cdots)$$

$$+(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots\cdots)=0$$

合併同次之 x 項

$$(2c_2+c_0)+(3\cdot 2c_3+c_1)x+(4\cdot 3c_4+c_2)x^2+\cdots\cdots=0$$

得　$2c_2+c_0=0$，　$3\cdot 2c_3+c_1=0$，　$4\cdot 3c_4+c_2=0$

則　$c_2=\dfrac{c_0}{2!}$　　$c_3=-\dfrac{c_1}{3!}$　　$c_4=-\dfrac{c_2}{4\cdot 3}=\dfrac{c_0}{4!}$

故　$y=c_0+c_1x-\dfrac{c_0}{2!}x^2-\dfrac{c_1}{3!}x^3+\dfrac{c_0}{4!}x^4+\dfrac{c_1}{5!}x^5+\cdots\cdots$

$y=c_0\cos x+c_1\sin x$

〔註〕：逐項微分性質

設級數 $f_0(z)+f_1(z)+f_2(z)+\cdots\cdots$ 在範圍 G 內收斂，其和爲 $F(z)$ 且級數 $f_0'(z)+f'_1(z)+f'_2(z)+\cdots\cdots$ 在 G 中爲一致收斂，其中各項 $f'_0(z)$，$f'_1(z)$，…… 等在 G 中均係連續性。則對 G 中所有 z 而言，

$$F'(z)=f_0'(z)+f'_1(z)+f_2^1(z)+\cdots\cdots$$

有逐項積分性質

設　$F(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z)=f_0(z)+f_1(z)+\cdots\cdots$

在範圍G內爲一致收斂之連續級數。設c爲G中任何路徑，則級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_c f_n(z)\,dz = \int_c f_0(z)\,dz + \int_c f_1(z)\,dz + \cdots\cdots$$

參考資料：

1. 陳昭地，顏啟麟：數學分析，汝旭圖書有限公司印行。
2. Erwin kreyszig：Advanced Engineering Mathematics.
3. Abraham Spitzbart：Calculus With Analytic Geometry.
4. Dr. Konrad Knopp：Theory And Application of Infinite Series.

即使是很優秀的學生，當他們得出問題的解答，清楚地寫下之後，總是蓋好書本，馬上注意別的事去了。這種做法會使他們遺漏了這工作中重要而有益的一面。回顧整個答案，重新檢視答案與得出答案的途徑，可以充實自己解題的知識，發展自己解題的能力。一個好教師應該懂得，而且使學生也懂得，沒有一個問題一經解決，整個事情就算做完了的。

——摘自「怎樣解題」

微分方程中幾個「分離解法」問題

游寶達

在微分方程中的「分離解法」，就是把問題中的變數分離成幾組，以利於求取解答。下面就以「分離」的手段，來討論幾個問題。

甲、在 $(ax + by + c)dx + (\alpha x + \beta y + \gamma)dy = 0$ 的問題中。

一般解法是先把常數項 c 及 γ 消去，再利用齊次法解之。若 $a/\alpha = b/\beta$ 則利用代換法。但在 $b = \alpha$ 時，就不必那麼麻煩，可以利用「分離解法」迅速解出。

$$(ax + by + c)dx + (bx + \beta y + \gamma)dy = 0$$

$$\Longrightarrow \quad (axdx + cdx + \beta ydy + rdy) + b(ydx + xdy) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \text{變成分離的形式}\ d\left(\frac{ax^2}{2} + \frac{\beta y^2}{2} + cx + ry\right) + b\,dxy = 0$$

因此其解為 $\frac{ax^2}{2} + bxy + \frac{\beta y^2}{2} + cx + ry + f = 0$，$f$ 為常數，這樣可減少一部分運算上的麻煩。

※ $xdy + ydx = dxy$ 在此處佔着重要的地位。

乙、令 $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ 為 $\left(3x^2 + \frac{2y}{x}\right)dx + \left(2ln3x + \frac{3}{v}\right)dy = 0$ 則 $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{2}{x}$ 為一個正合（exact）微分方程式。

要解此題的一般方法有兩種：

(1) $\int M(x,y)dx + \varphi(y) = \int N(x,y)dy + \phi(x) = c$ 　c 為常數。

比較等式兩邊，可找出 $\varphi(y)$ 及 $\phi(x)$，其中 $\varphi(y)$，$\phi(x)$ 分別為 y 及 x 的函數。

(2) $\int_a^x M(t,y)dt + \int_b^y N(a,t)dt = c$ 　c 為常數。

在(1)中欲找出 $\varphi(y)$ 及 $\phi(x)$ 並不很明顯化。(2)中又須考慮 a，b 之値

及$N(x,y)$無意義。

若利用解離法，則變成。

$$\left(3x^2+\frac{2y}{x}\right)dx+\left(2ln3x+\frac{3}{y}\right)dy=0$$

$$\Rightarrow 3x^2dx+\frac{2ydx}{x}+2(ln3+lnx)dy+\frac{3dy}{y}=0$$

$$\Rightarrow dx^3+2(ydlnx+lnxdy)+2ln3dy+3dlny=0$$

$$\Rightarrow dx^3+2d(ylnx)+2ln3dy+3dlny=0$$

因此變成分離狀態，其解為。

$x^3+2ylnx+2yln3+3lny=c$ 。（c 為常數）

※在很多的正合積分中，都可以利用「分離解法」來找答案，各位不妨試試所遇到的題目，說不一定能更迅速的得到分解。

丙、當我們見到微分方程的題目時，總先分析它屬於那一類型的題目，若沒有一般的公式解，則大抵必須把它處理成分離型，但是有些題目較複雜，沒有辦法很快的分離開來。下面有一個方法供大家參考：

把共同的繁式變因簡化，也許更容易分離。看一個例子。

$\varphi(x^m y^n)ydx+\phi(x^m y^n)xdy=0$

$x^m y^n$ 是共同的繁式變因，故令 $z=x^m y^n$，

而 $dz=dx^m y^n=mx^{m-1}y^n dx+nx^m y^{n-1}dy=mz\dfrac{dx}{x}+nz\dfrac{dy}{y}$

（可以視 $\varphi(z)$ 或 $\phi(z)$ 函數的繁雜與否，取 dx 或 dy）

取　$dy=y\left(\dfrac{dz-mzdx/x}{nz}\right)$ 代入 $\varphi(z)ydx+\phi(z)xdy=0$ 中

$$\phi(z)ydx+\phi(z)x\left[y\left(\frac{dz-mz\dfrac{dx}{x}}{nz}\right)\right]=0$$

$$\Rightarrow y=0 \text{ 或 } nz\varphi(z)dx+\phi(z)(xdz-mzdx)=0$$

$$\Rightarrow y=0 \text{ 或 } (nz\varphi(z)-mz\varphi(z))dx+\phi(z)xdy=0$$

$$\Rightarrow y=0 \text{ 或 } x=0 \text{（對取 } dx \text{ 時得）或 } \frac{dx}{x}+\frac{\phi(z)dz}{z(n\varphi(z)-m\phi(z))}=0$$

這樣便達成分離的形式。因此，只要給定比 $\varphi(z)$ 及 $\phi(z)$ 便可以求出式中的答案了。

丁、處理正合積分時，目的在找一個函數 $f(x,y)$，使得 $f(x,y)$ 滿足 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 中 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$

這樣整個式子$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$可變成$df(x,y)=0$，所以正合積分也可以變成分離型。但是有些方程式並不一定就是正合形式，因此便需利用乘以積分因子。其中以$\frac{dY}{dX}+P(X)Y=Q(X)$形式較爲重要,大部分的積分因子都可以用此法處理，看一個例子。

$$dx-2xydy=6x^3y^2e^{-2y^2}dy$$

$$\Rightarrow\ dx+xd(-y^2)=6x^3y^2e^{-2y^2}dy$$

$$\Rightarrow\ dxe^{-y^2}=e^{-y^2}(6x^3y^2e^{-2y^2}dy)=6x^3e^{-3y^2}y^2dy$$

$$\Rightarrow\ \frac{dxe^{-y^2}}{(xe^{-y^2})^3}=6y^2dy \qquad \text{兩邊積分得}$$

$$-\frac{1}{2}(xe^{-y^2})^{-2}=2y^3+c_1$$

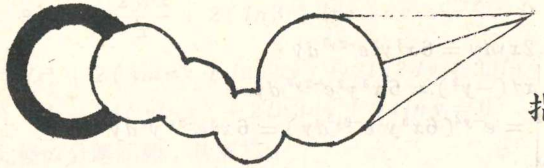
$$x^{-2}e^{2y^2}=c-4y^3 \qquad c\text{ 及 }c_1\text{ 爲常數}$$

總之用「分離解法」來處理微分方程的問題，不必具備較高深之數學工具而是以較簡易的初微理論爲基礎來求答案，所以這個方法應多利用而且加以推廣。

參考資料：Lyman M. Kells Elementary Differential Equations.

教授數學時需要常規問題，甚至需要很多，但是只叫學生演算常規問題而不做別種問題，則是不可原諒的。只教常規的數學手續而不教別的，還夠不上烹飪書的水準，因爲厨房裏的處方還給厨子留下一些想像和判斷的餘地，數學的處方却連一點也沒有。——摘自「怎樣解題」

複數平面上的保圓變換



作者：
郭忠勝
指導老師：
林義雄

在一般幾何學上，所謂圓乃是指在平面上對一固定點等距離的點所成的集合。在複變中直線亦稱爲圓；因爲，我們可找到一由複數平面映到球面的函數（即Stereographic projection ）使得它們在拓樸學的觀點上是等價的（ topological equivalent ），且由它們的對應情形，我們很容易看出平面上的直線與圓都映到球面上的圓。而所謂「保圓變換」乃是將圓映到圓的一種變換。

現在，讓我們來看看在複變中的兩種變換：

㈠ 令$M_C = \{ \dfrac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \boldsymbol{C},\ ad-bc \neq 0 \}$

則稱每一$M_{\boldsymbol{C}}$ 中的元素爲一綫性變換（ Linear transformation or homography ）

例：單位變換$T(z)=z$；平移：$T(z)=z+a$，$a\in\boldsymbol{C}$；旋轉：$T(z)=e^{i\alpha}z$，$\alpha\in\boldsymbol{R}$；漲縮：$T(z)=\rho z$，$\rho>0$；反商函數：$T(z)=\dfrac{1}{z}$……等都是綫性變換。且我們易證得（$M_{\boldsymbol{C}}$，o）爲一群。

㈡ 令$T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}\in M_{\boldsymbol{C}}$，則稱 $A(z)=T(\bar z)=\dfrac{a\bar z+b}{c\bar z+d}$ 爲anti-homography.

設C爲通過z_1, z_2, z_3之一圓，我們定義交比（ cross ratio ）爲$(z;z_1,z_2,z_3)=\dfrac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\dfrac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$，則$R$：$\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$定義爲$R(z)=z^*$（其中$(z^*;z_1,z_2,z_3)=(\overline{z;z_1,z_2,z_3})$）稱爲平面上對$C$的鏡射（ reflection）。當圓$C$爲$|z-a|=r>0$時，由簡單的代數運算，我們可得

$$z^*=R(z)=\frac{r^2}{\bar z-\bar a}+a$$

當圓C爲通過z_1，z_2，∞的直線時，則可得$\dfrac{z^*-z_1}{z_2-z_1}=\dfrac{\overline{z}-\overline{z}_1}{\overline{z}_2-\overline{z}_1}$ 的形式。故我們知道鏡射這個變換，其實是anti-homography的一特例。

因爲平面上所有滿足方程式$az\overline{z}+bz+c\overline{z}+d=0$（其中$a,d\in\boldsymbol{R}$，$b$，$c$爲共軛複數）的點卽爲一圓，反之亦然。令

$T：\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$，定如$T(z)=\dfrac{1}{z}$，且$C$爲$C$上任一圓。滿足$az\overline{z}+bz+c\overline{z}+d=0$

$a,d\in\boldsymbol{R}$，$b=\overline{c}$；則C上之點z經過T變換後爲$\dfrac{1}{z}=w\Rightarrow z=\dfrac{1}{w}$

$$\Rightarrow a\cdot\frac{1}{w}\cdot\left(\overline{\frac{1}{w}}\right)+b\frac{1}{w}+C\left(\overline{\frac{1}{w}}\right)+d=0$$

$$\Rightarrow dw\overline{w}+cw+b\overline{w}+a=0$$

故C經過T的變換後仍爲圓。顯然，平移、旋轉及漲縮變換都是保圓變換。而對於任意綫性變換$\dfrac{az+b}{cz+d}$，令

$$\rho=\left|\frac{bc-ad}{c^2}\right|,\quad \alpha=\arg\left(\frac{bc-ad}{c^2}\right),$$

則 $$\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}+\rho e^{i\alpha}\cdot\frac{1}{z+d/c}$$

故線性變換爲保圓變換。（保圓變換的合成仍爲保圓變換）。

令　$R：C\to C$，$R(z)=\overline{z}$，$C：az\overline{z}+bz+c\overline{z}+d=0$爲平面上之任一圓，則$C$上的點$z$經過$R$之變換後爲$\overline{z}=w\Rightarrow z=\overline{w}\Rightarrow aw\overline{\overline{w}}+b\overline{w}+c\overline{\overline{w}}+d=0\Rightarrow aw\overline{w}+b\overline{w}+cw+d=0$仍爲一圓，故$R(z)=\overline{z}$爲一保圓變換。而任一anti-homography都是由綫性變換與R之合成，故它也是一種保圓變換。特別當它爲鏡射時亦是一保圓變換。

現在，我們要問在複數平面上是否還有其他的保圓變換？下面的定理替我們回答了這個問題：

〔定理〕：令$w=f(z)$：$\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$的可逆變換，使得圓蓋射到圓，則$f(z)$必爲一綫性變換或anti-homography.

證明：

①令M爲一綫性變換，使得$f(0)\to 0$，$f(1)\to 1$，$f(\infty)\to\infty$，則$M(f(z))$與$M(\overline{f(z)})$亦爲可逆的保圓變換。且0，1，∞爲其固定點。令g爲二者中使得$Im\,g(i)>0$的變換。$\because g(\infty)=\infty$，$g(0)=0$，$\therefore g$把過原點的直線映到過原點

的直綫，且 $g(1)=1 \Rightarrow g$ 把實軸映到實軸。且 g 把相切圓映到相切圓，特別 g 把平行綫映到平行綫。

② 令 z_0, z_1, z_2 爲平面上三不共綫點，則經過 z_1 與 $\overrightarrow{z_0 z_2}$ 平行的直綫 l_1，與經過 z_2 平行於 $\overrightarrow{z_0 z_1}$ 的直綫 l_2 相交於 $z_1+z_2-z_0$，由①知其所對應的像爲過 $g(z_1)$ 平行於 $\overrightarrow{g(z_0)g(z_2)}$ 的直綫與過 $g(z_2)$ 平行於 $\overrightarrow{g(z_0)g(z_1)}$ 的直綫，故其交點 $g(z_1)+g(z_2)-g(z_0)$ 應爲 $z_1+z_2-z_0$ 的像，即 $g(z_1+z_2-z_0)=g(z_1)+g(z_2)-g(z_0)$ 特別當 z_1, z_2, 0 三點不共綫時

$$g(z_1 \pm z_2)=g(z_1) \pm g(z_2) \qquad (*)$$

由(*) $\quad g(z_1)-g(z)=g(z_1-z)=g(z_1+(-z))=g(z_1)+g(-z)$

故 $$-g(z)=g(-z) \qquad (**)$$

現在設 z_1, z_2, 0 三點共綫，且 $z_1 \neq \pm z_2$，則 z_1-iz_1，$z_2 \pm iz_1$，0 三點不共綫，由(*)

$$\begin{aligned} g(z_1 \pm z_2) &= g((z_1-iz_1) \pm (z_2 \pm iz_1)) \\ &= g(z_1-iz_1) \pm g(z_2 \pm iz_1) \\ &= g(z_1)-g(iz_1) \pm [g(z_2) \pm g(iz_1)] \\ &= g(z_1) \pm g(z_2) \end{aligned}$$

當 $z_1=\pm z_2$ 時，顯然上式可成立。

故 $$g(z_1 \pm z_2)=g(z_1) \pm g(z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \boldsymbol{C} \qquad (***)$$

由（**）及（***）二式及歸納法，我們可以得到 $g(nz)=ng(z), \forall n \in \boldsymbol{Z}$

$$g(z)=g\left(m \cdot \frac{z}{m}\right)$$

$$=mg\left(\frac{z}{m}\right)$$

$$\Rightarrow \quad g\left(\frac{z}{m}\right)=\frac{1}{m}\, g(z)$$

且 $$g\left(\frac{n}{m}\, z\right)=g\left(n \cdot \frac{z}{m}\right)=ng\left(\frac{z}{m}\right)=n/m\ g(z)$$

故 $$g(rz)=rg(z) \quad \forall r \in \boldsymbol{Q}$$

當 $z=1$， $$g(r)=r \qquad \forall r \in \boldsymbol{Q}$$

③ 證明 g 保持垂直性：

令 l_1, l_2 爲二互相垂直的直綫，取二異於 l_1, l_2 的直綫 l_1', l_2' 使得 $l_1' \| l_1$，$l_2' \| l_2$，則構成一個矩形，且其對應之四直綫構成一平行四邊形 P，（由①），但因 l_1, l_2, l_1', l_2' 其四交點位於一圓上，故由保圓性其所對應的四點（即 $g(l_1), g(l_2), g(l_1'), g(l_2')$ 之交點）亦位於某一圓上，故 P 爲一矩形 $\Rightarrow g(l_1)$ 與 $g(l_2)$ 互相垂直，因爲 g 把實軸映到實軸故 g 把虛軸映到虛軸，令 $g(i)=\lambda i$

$\lambda \in \boldsymbol{R}$，由（＊＊＊）$g(\pm 1+i)=g(\pm 1)+g(i)=\pm 1+\lambda i$. $\because \overrightarrow{0,1+i} \perp \overrightarrow{0,-1+i}$ $\therefore \overrightarrow{0,1+\lambda i} \perp \overrightarrow{0,-1+\lambda i} \Rightarrow \lambda=\pm 1$，但我們假設 $Im\, g(i)>0$

$\therefore \quad \lambda=1$

且 $\quad g(r+si)=r+si \qquad A\,r, s \in \boldsymbol{Q}$

④ 令 $\alpha \in \boldsymbol{R}-\boldsymbol{Q}$，$r_0, r_1, r_2 \in \boldsymbol{Q}$，$\ni\ r_0<r_1<\alpha<r_2$

C 爲過過 r_1, r_2, i 之一圓，則任一通過 r_0, α 的圓必與 C 相交 $\Rightarrow$ 每一通過 $g(\alpha)$，$g(r_0)=r_0$ 的圓亦必與 $g(C)=C$ 相交，由①知 $g(\alpha) \in \boldsymbol{R}$，$\therefore r_1<g(\alpha)<r_2$。此對任意的 r_1, r_2 都成立，故

$$g(\alpha)=\alpha \qquad \forall \alpha \in \boldsymbol{R}$$

同理，$g(i\alpha)=i\alpha, \Rightarrow g(z)=g(\alpha+i\beta)=g(\alpha)+g(i\beta)=\alpha+i\beta=z$，$\forall z \in \boldsymbol{C}$。

$\therefore \quad M(f(z))=z$ 或 $\overline{M(f(z))}=z$

即 $\quad f(z)=M^{-1}(z)$ 或 $f(z)=M^{-1}(\overline{z})$

而定理得證。

結論：

1. 參考資料：

① Lars V. Ahlfors：Complex Analysis McGraw-Hill. Co. 1953.

② Hans Schwerdtfeger：Geometry of Complex number, Canada, 1962.

③ C. Caratheodory：The most general transformations of plane regions which transform circles into circles, Bull. Amer. Math. Soc. 43(1937)

2. 在定理中我們要求 $f(z)$ 爲一可逆變換，假如定理中的可逆條件去掉，而只要求 $w=f(z)$ 爲一保圓變換，那麼，定理是否仍能成立？

線性變換的全等圓

陳愷琪

指導老師　林福來

$$w = A(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad a, b, c, d \in c, \quad ad-bc=1 \qquad (1)$$

爲一線性變換（Möbius transformation），而此變換有一相當重要的保圓性，也就是說 $A(z)$ 會將圓映至圓。如果 $A(z)=z+b$ 或 $A(z)=e^{i\theta}z$，前者是一平移變換，後者是一旋轉變換，在這二種單純的線性變換中，不僅是將圓映至圓。實際上是將圓映至全等圓（圓面積不因經過 $A(z)$ 而改變）。但是多數的線性變換當然不會如此單純，它會將一圓映至另一經過脹縮變換的圓，此時圓面積必會有所改變了。然而，在這種會改變圓面積的脹縮變換中，是否仍然會將某一類的圓保持圓面積不變呢？這一類的圓就是下面要介紹的全等圓。

我們首先注意到(1)式給了一個 $A(z)$ 的限制：$ad-bc=1$ 那麼當 $ad-bc \neq 1$ 時要如何處理呢？沒關係，我們只要將 $A(z)$ 稍加改寫：

$$w = A(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\dfrac{a}{\sqrt{ad-bc}}\,z + \dfrac{b}{\sqrt{ad-bc}}}{\dfrac{c}{\sqrt{ad-bc}}\,z + \dfrac{d}{\sqrt{ad-bc}}} \qquad (ad-bc \neq 0)$$

如此 $\dfrac{a}{\sqrt{ad-bc}} \cdot \dfrac{d}{\sqrt{ad-bc}} - \dfrac{b}{\sqrt{ad-bc}}\ \dfrac{c}{\sqrt{ad-bc}} = 1$，則可符合(1)式的要求。

再者，若 $c=0$，則 $w = \dfrac{a}{d}\,z + \dfrac{b}{d}$　　其中 $ad=1$

若 $|a|=|d|=1$，則 $w = e^{i\theta}z + \dfrac{b}{d} \Rightarrow$ 任意的圓都是此變換的全等圓。

若 $|a| = \dfrac{1}{|d|} \neq 1$，則 $w = a^2 z + \dfrac{b}{d}$　$|a^2| \neq 1 \Rightarrow$ 所有的圓都是此變換的全等圓，所以當我們討論(1)式的全等圓時，必須在 $c \neq 0$ 的情況下。

讓我們接著看一些例子：

例1： $w=\dfrac{z-1}{3z}$ $\quad 1\cdot 0-(-1)\cdot 3=3$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}Z-\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}\,Z} \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 0-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=1$$

其反函數爲$Z=\dfrac{-\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}\,w-\frac{1}{\sqrt{3}}}$

下面考慮幾個圓，看它們的脹縮情形如何。

⑴在此變換中，$d=0$，我們找一個圓心不在原點的圓如

$|\sqrt{3}\,z-2|=1$

$(\sqrt{3}\,z-2)(\sqrt{3}\,\bar{z}-2)=1$

$3z\bar{z}-2\sqrt{3}\,z-2\sqrt{3}\,\bar{z}+3=0$

$z\bar{z}-\frac{2}{3}\sqrt{3}\,z-\frac{2\sqrt{3}}{3}\bar{z}+1=0$

$\because z=\dfrac{-1}{3w-1}$

$$\therefore \left(\frac{-1}{3w-1}\right)\left(\frac{-1}{3\bar{w}-1}\right)-\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{-1}{3w-1}\right)-\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{-1}{3\bar{w}-1}\right)+1=0$$

去分母，得$(3w-1)(3\bar{w}-1)+\frac{2}{\sqrt{3}}(3\bar{w}-1)+\frac{2}{\sqrt{3}}(3w-1)+1=0$

$$w\bar{w}+\left(\frac{2\sqrt{3}-3}{9}\right)w+\left(\frac{2\sqrt{3}-3}{9}\right)\bar{w}+\frac{6-4\sqrt{3}}{27}=0$$

$$\left(w-\frac{3-2\sqrt{3}}{9}\right)\left(\bar{w}-\frac{3-2\sqrt{3}}{9}\right)=\frac{1}{27}$$

$$\left|w-\frac{3-2\sqrt{3}}{9}\right|^2=\frac{1}{27}$$

$$\left|w-\frac{3-2\sqrt{3}}{9}\right|=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

而現在此圓的半徑不會等於原來的$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$。

⑵我們再找一個圓心在原點，而半徑爲$\dfrac{1}{|c|}$的圓。

如 $|\sqrt{3}\,z|=1$　即 $|z|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　此圓會對應到

$$\left|\frac{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}\,w-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}\quad 即\ \left|\sqrt{3}\,w-\frac{1}{\sqrt{3}}\right|=1\qquad \left|w-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

此對應圓之半徑與原來相等，所以 $|\sqrt{3}\,z|=1$ 是

$$A(z)=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}z-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}\,z}\text{的全等圓}$$

(3)考慮 $|2z|=1$ 即圓 $|z|=\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，此圓會對應到

$$\left|\frac{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}\,w-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}\right|=\frac{1}{2}\quad 即\ \left|\sqrt{3}\,w-\frac{1}{\sqrt{3}}\right|=\frac{2}{\sqrt{3}},\ \left|w-\frac{1}{3}\right|=\frac{2}{3}>\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(4)考慮圓 $|z|=1>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 此圓會對應到

$$\left|\frac{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}\,w-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}\right|=1\quad 即\ \left|\sqrt{3}\,w-\frac{1}{\sqrt{3}}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \left|w-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}<\frac{1}{\sqrt{3}}$$

例2：$w=\dfrac{4z-7}{3z-5}$　　$4\cdot(-5)-(-7)\cdot 3=1$

其反函數為 $z=\dfrac{5w-7}{3w-4}$

(1)在此變換中，$d\neq 0$，我們考慮二個圓心在原點的圓，如圓

如圓 $|z|=\dfrac{1}{3}$，對應到 $\left|w-\dfrac{101}{72}\right|=\dfrac{1}{72}$

圓 $|z|=\dfrac{1}{6}$，對應到 $\left|w-\dfrac{416}{297}\right|=\dfrac{2}{297}$

這仍然是改變了半徑的圓。

(2)讓我們考慮

$|3z-5|=1$，　即圓 $\left|z-\dfrac{5}{3}\right|=\dfrac{1}{3}$　此圓會對應到

$$\left| \frac{5w-7}{3w-4} - \frac{5}{3} \right| = \frac{1}{3} \quad 即\ |3w-4| = 1, \quad \left| w - \frac{4}{3} \right| = \frac{1}{3}$$

此圓半徑不變，因此圓面積亦不會改變。

所以 $|3z-5|=1$ 是 $A(z)=\dfrac{4z-7}{3z-5}$ 的全等圓。

(3) $|3z-5|=\dfrac{1}{2}$ 即 $\left|z-\dfrac{5}{3}\right| \doteq \dfrac{1}{6} < \dfrac{1}{3}$，此圓會對應到

$$\left| \frac{5w-7}{3w-4} - \frac{5}{3} \right| = \frac{1}{6}, \quad 即\ |3w-4| = 2, \quad \left| w - \frac{4}{3} \right| = \frac{2}{3} > \frac{1}{3}$$

圓面積增大。

(4) $|3z-5|=6$ 即 $\left|z-\dfrac{5}{3}\right| = 2 > \dfrac{1}{3}$，此圓會對應到

$$\left| \frac{5w-7}{3w-4} - \frac{5}{3} \right| = 2 \quad 即\ \left| w - \frac{4}{3} \right| = \frac{1}{18}$$，圓面積減小。

由上面的例題，我們發現圓心在 $-\dfrac{d}{c}$，而半徑爲 $\dfrac{1}{|c|}$ 的圓經過(1)式後，半徑將不會有所改變，現在給予一個正式的定義：

稱圓Ⅰ：$|cz+d|=1, \quad c \neq 0$

爲 $A(z)=w=\dfrac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc=1$

的全等圓（isometric circle）

即圓Ⅰ經 $A(z)$ 後，其對應圓面積將不變。另外，我們稱其反函數 $A^{-1}(z)$ 的全等爲圓Ⅰ′。

以下我們討論一些全等圓的線性變換的性質。

一、圓Ⅰ經過 $A(z)$ 後的對應圓爲圓Ⅰ′

$|cz+d|=1$ 即 $\left|z+\dfrac{d}{c}\right| = \dfrac{1}{|c|}$ 此圓會對應到

$$\left| \frac{-dw+b}{cw-a} + \frac{d}{c} \right| = \frac{1}{|c|}, \quad \left| \frac{bc-ad}{cw-a} \right| = 1, \quad 即\ |cw-a| = 1$$

（半徑不變）

我們可以看出，此圓即是其反函數 $z=\dfrac{-dw+b}{cw-a}$，$(-d)(-a)-bc=1$，的全等圓。

性質1：$A(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $ad-bc=1$，$c \neq 0$，將其全等圓Ⅰ：$|cz+d|$

$=1$ 映至其反函數 $A^{-1}(z)=\dfrac{-dz+b}{cz-a}$ 的全等圓 I′：$|cz-a|=1$

二、圓面積的變化

若 $|cz+d|=r$

則 $\left|c\dfrac{az+b}{cz+d}-a\right|=\left|\dfrac{ad-bc}{cz+d}\right|=\dfrac{1}{|cz+d|}=\dfrac{1}{r}$

(一) $|cz+d|=1\rightarrow|cz-a|=1$

(二) $|cz+d|=r>1\rightarrow|cz-a|=\dfrac{1}{r}<1$

(三) $|cz+d|=r<1\rightarrow|cz-a|=\dfrac{1}{r}>1$

性質 2：圓 I 上的點映至圓 I′上，圓 I 內的點映至圓 I′外，圓 I 外的點映至圓 I′內。

性質 3：圓 I 經過 $A(z)$ 後保持圓面積不變（保面積）。

圓 I 內的同心圓經過 $A(z)$ 後圓面積增大。

圓 I 外的同心圓經過 $A(z)$ 後圓面積減小。

三、線段長度的變化

$$|A(z_1)-A(z_2)|=\left|\frac{az_1+b}{cz_1+d}-\frac{az_2+b}{cz_2+d}\right|$$

$$=\left|\frac{(ad-bc)(z_1-z_2)}{(cz_1+d)(cz_2+d)}\right|$$

所以 $|A(z_1)-A(z_2)|=\dfrac{|z_1-z_2|}{|cz_1+d|\cdot|cz_2+d|}$

(一)若 z_1，z_2 均在圓 I 上，即 $|cz_1+d|=|cz_2+d|=1$

則 $|A(z_1)-A(z_2)|=|z_1-z_2|$

(二)若 z_1 在圓 I 內（外），而 z_2 在圓 I 上

則 $|A(z_1)-A(z_2)|=\dfrac{|z_1-z_2|}{|cz_1+d|}>|z_1-z_2|$

$(|A(z_1)-A(z_2)|<|z_1-z_2|)$

(三)若 z_1，z_2 均在圓 I 內（外）

則 $|A(z_1)-A(z_2)|>|z_1-z_2|$　$(|A(z_1)-A(z_2)|<|z_1-z_2|)$

性質 4：圓 I 上的點經過 $A(z)$ 後保長（保持距離不變）。

圓 I 內的點經過 $A(z)$ 後增長。

圓 I 外的點經過 $A(z)$ 後減長。

四、$A(z)$ 的分類與圓 I ，圓 I′間之相關位置。

於複變數函數論中，我們曾經討論過，在 $A(z)$ 中，令 $t_A=\dfrac{(a+d)^2}{ad-bc}=(a+d)^2$ 則 $A(z)$ 此種變換可被分爲双曲線型（$t_A>4$ 或 $|a+d|>2$），橢圓型（$0\leq t_A<4$ 或 $|a+d|<2$），及拋物線型（$t_A=4$ 或 $|a+d|=2$）及偏斜型（$t_A<0$）四類。（此處提到的双曲線、橢圓、拋物線，僅是線性變換分類上所採用的分類名稱，並非一般所說的圓錐曲線，這是千萬不可混淆的），如今圓 I 及圓 I′之圓心分別爲 $-\dfrac{d}{c}$，$\dfrac{a}{c}$，所以圓心距離爲 $\left|\dfrac{a}{c}+\dfrac{d}{c}\right|=\dfrac{|a+d|}{|c|}$，而圓 I 及圓 I′半徑均爲 $\dfrac{1}{|c|}$，所以兩圓半徑和爲 $\dfrac{2}{|c|}$，由線性變換的分類，我們立刻可以得到下列的結果。

性質 5：若 $A(z)$ 爲双曲線型（$|a+d|>2$），則圓 I 及圓 I′相離。
若 $A(z)$ 爲拋物線型（$|a+d|=2$），則圓 I 及圓 I′相切。
若 $A(z)$ 爲橢圓型（$|a+d|<2$），則圓 I 及圓 I′相交。

各位應可注意到，當 $|a+d|=0$ 時，圓 I 及圓 I′ 實際上已重合爲一圓了。

五、幾何性

$|cz+d|=1$ 即 $cz+d=e^{i\theta}$

則 $c\dfrac{az+b}{cz+d}-a=\dfrac{-(ad-bc)}{cz+d}=-\dfrac{1}{cz+d}=-e^{-i\theta}$

性質 6：圓 I 上的點沿著逆時針方向行進時，則會對應到圓 I′上的點沿著順時針方向行進。

在結束本文之前，我們再看一下例 2：$A(z)=\dfrac{4z-7}{3z-5}$ $\quad |4+(-5)|=1$

（$A(z)$ 爲橢圓型）

圓 I：$|3z-5|=1$ 圓 I′：$|3z-4|=1$ （半徑均爲 $\dfrac{1}{3}$）

圓 I 及圓 I′之圓心距：$\left|\dfrac{5}{3}-\dfrac{4}{3}\right|=\dfrac{1}{3}<\dfrac{2}{3}$（圓 I 及圓 I′相交）

圓 I 上點：$3z-5=e^{i\frac{\pi}{6}} \rightarrow 3z-4=-e^{i(-\frac{\pi}{6})}$

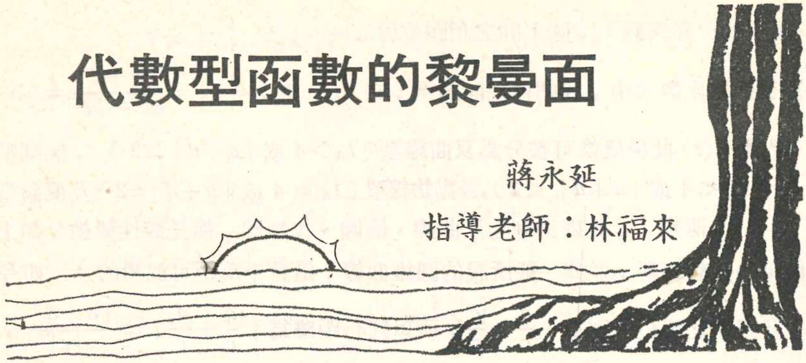
$$3z-5=e^{i\frac{\pi}{4}}\rightarrow 3z-4=-e^{i(-\frac{\pi}{4})}$$

參考資料：Automorphic functions Ford L. R.

代數型函數的黎曼面

蔣永延

指導老師：林福來



§ 1　緒言：

在複變函數論的課程中，我們常看到“黎曼面”（ Riemann Surface ）這樣的東西，然而到底什麼是黎曼面呢？又爲什麼要造黎曼面？黎曼面是黎曼（ C.F. B. Riemann 1826 — 1866 ）爲了處理一些給定 z 值而有 n 個對應值的多值函數 $\omega(z)$ ，及檢驗其連續性，而創造出的著名曲面。這個曲面是自分枝點（ branch-points）間的路徑割開的 n 葉完全相同的連通曲面，在這條割開的路徑上所連接而成，且使函數 $\omega(z)$ 變成單值連續函數的連通曲面。以下我們以 $\omega=\sqrt{z}$ 爲例，來看看黎曼面的眞義。

§ 2　$\omega=\sqrt{z}$ 的黎曼面：

$\omega=\sqrt{z}$ 則 $z=\omega^2$ ，若 $z=re^{i\theta}$ 爲給定的值，則有兩個值 $\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$ 及 $\sqrt{r}\,e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$ 與 z 對應，故 ω 爲一多值函數。爲使 ω 成爲一單值函數，很直覺地可有以下兩種定義方式，考慮 $\omega:\hat{C}\to\hat{C}$ 定義爲

$$\omega:\ z=re^{i\theta}\ \mapsto\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}\ ,\text{或}$$

$$\omega:\ z=re^{i\theta}\ \mapsto\sqrt{r}\,e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}\ ,$$

但在這兩種定義下，ω 均非連續。因若令 $z_0=r_0e^{i\theta_0}$, $z_n=r_0e^{i(\theta_0+\theta_n)}$,

其中 $\theta_n=2\pi-\dfrac{2\pi}{n}$ ，則

(i)　當 $\omega:\ z=re^{i\theta}\mapsto\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$ 時，得 $\omega(z_0)=\sqrt{r_0}\,e^{i\frac{\theta_0}{2}}$ ，且

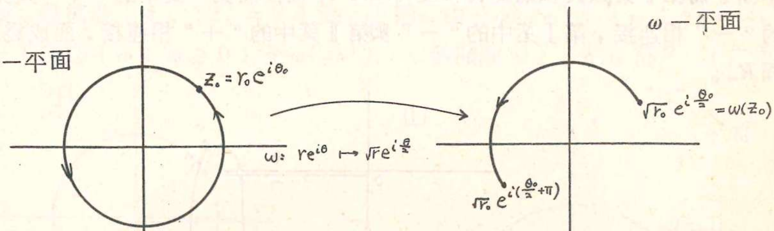
$$\omega(z_n)=\sqrt{r_0}\,e^{i(\frac{\theta_0}{2}+\pi-\frac{2\pi}{2n})}\xrightarrow[n\to\infty]{}\sqrt{r_0}\,e^{i(\frac{\theta_0}{2}+\pi)}\neq\omega(z_0),$$

(ii) 當 $\omega:\ z=re^{i\theta}\mapsto\sqrt{r}\,e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$ 時，得 $\omega(z_0)=\sqrt{r_0}\,e^{i(\frac{\theta_0}{2}+\pi)}$ ，且

$$\omega(z_n)=\sqrt{r_0}\,e^{i(\frac{\theta_0}{2}+\pi-\frac{2\pi}{2n})+\pi}=\sqrt{r_0}\,e^{i(\frac{\theta_0}{2}-\frac{2\pi}{2n})}\xrightarrow[n\to\infty]{}\sqrt{r_0}\,e^{i\frac{\theta_0}{2}}\neq\omega(z_0)$$

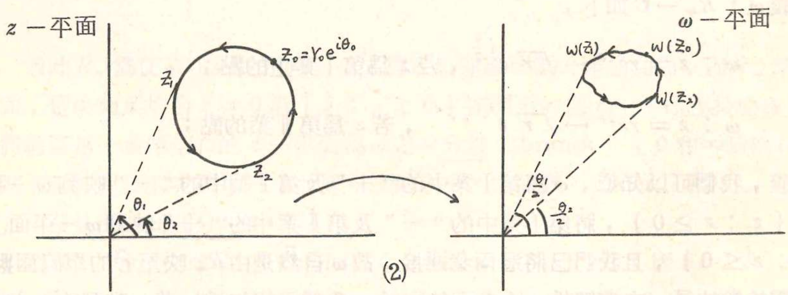
)。

但是我們不難了解，欲使 ω 為單值函數，除了 $\omega: z=re^{i\theta}\mapsto\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$ 或 $\omega: z=re^{i\theta}\mapsto\sqrt{r}\,e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$ 兩種對應方式之外，別無其它途徑可尋。然而讓我們再進一步地看看在這兩種對應之下的映射行為，只需檢驗 $\omega: z=re^{i\theta}\longmapsto\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$ 的映射行為即可（因這兩種對應方式，只在角度上差 π）。因 $\omega(z)=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$，$z=re^{i\theta}$，則 $|\omega|=\sqrt{r}$，$\arg\omega=\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}\arg z$，因此 ω 將 $\{z: |z|=r\}$ 映至 $\{\omega: |\omega|=\sqrt{r}$，且 $0\leq\arg\omega\leq\pi\}$，因此 z 在 z 一平面上由 $z_0=r_0e^{i\theta_0}$ 沿 $\{z: |z|=r_0\}$ 繞 $z=0$ 一圈回到 z_0 時，ω 在 ω 一平面上由 $\omega(z_0)=\sqrt{r_0}\,e^{i\frac{\theta_0}{2}}$ 沿 $\{\omega: |\omega|=\sqrt{r_0}\}$ 繞 $\omega=0$ 到 $\sqrt{r_0}\,e^{i(\frac{\theta_0}{2}+\pi)}$（見圖(1)）。



(1)

當 z 在 z 一平面上，由 $z_0=r_0e^{i\theta_0}$ 沿 $\{z: |z|=r_0\}$ 繞 $z=0$ 兩圈回到 z_0 時，ω 在 ω 一平面上，由 $\omega(z_0)=\sqrt{r_0}\,e^{i\frac{\theta_0}{2}}$ 沿 $\{\omega: |\omega|=\sqrt{r_0}\}$ 繞 $\omega=0$ 一圈回到 $\omega(z_0)$。若 z 在 z 一平面上，由 z_0 沿 $\gamma=\{z: |z-a|=r$，$0<r<|a|\}$ 繞一圈回到 z_0 時，ω 在 ω 一平面上由 $\omega(z_0)$ 沿 $\omega(\gamma)$ 繞 $\omega(a)$ 一圈回到 $\omega(z_0)$。因 z 在 z 一平面上沒有繞過 $z=0$，而回到 z_0，則角度變化量為零，故 ω 在 ω 一平面上亦沒有繞過 $\omega=0$，而回到 $\omega(z_0)$。（見圖(2)）

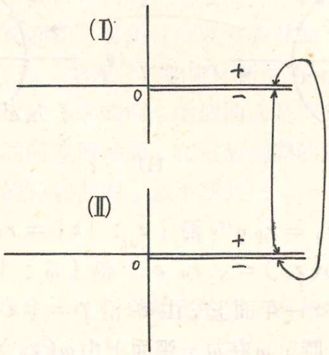


根據以上的討論，可得下列兩項重要結果：

(1) 在 z 一平面上收斂到 z_0 之數列 $\{z_n\}$，其收斂的路徑，若沒有繞過 $z=0$（即角度變化量為零），則 $\{\omega(z_n)\}$ 亦收斂到 $\omega(z_0)$。

(2) 在 z 一平面上收斂到 z_0 之數列 $\{z_n\}$，其收斂的路徑，若繞 $z=0$ 一圈（即角度變化量爲 2π），則 $\{\omega(z_n)\}$ 收斂到 $-\omega(z_0)$。

因此若我們將 ω 限制在 $\hat{C}-\{z\in \boldsymbol{R}: z\geq 0\}$，則 ω 爲單值連續函數，且若 $\omega: re^{i\theta}\mapsto\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$，則 ω 將 $\hat{C}-\{z\in \boldsymbol{R}: z\geq 0\}$ 一對一映成至 ω 一平面的上半平面（即 $\{\omega: \mathrm{Im}\,\omega>0\}$；若 $\omega: re^{i\theta}\to\sqrt{r}\,e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$，則 ω 將 $\hat{C}-\{z\in \boldsymbol{R}: z\geq 0\}$ 一對一映成至 ω 一平面的下半平面（即 $\{\omega: \mathrm{Im}\omega<0\}$。於是我們將兩葉完全相同的 z 一平面，均自 $z=0$ 沿 $\{z\in \boldsymbol{R}: z\geq 0\}$ 割開至 $z=\infty$，成爲"＋"與"－"兩條射線，"＋"表 $\arg z=0$，"－"表 $\arg z=2\pi$，如圖(3)。將第Ⅱ葉以實軸爲旋轉軸旋轉 180°，而後將第一葉中的"＋"與第Ⅱ葉中的"－"相連接，第Ⅰ葉中的"－"與第Ⅱ葉中的"＋"相連接，而成爲一連通曲面 R_ω。



(3)

如今，我們希望在 R_ω 上重新定義 $\omega: R_\omega\to\hat{C}$，使 $\omega=\sqrt{z}$ 成爲單值連續函數。定義 $\omega: R_\omega\to\hat{C}$ 如下，

$$\omega: z=re^{i\theta}\mapsto\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}，若 z 爲第Ⅰ葉上的點；$$

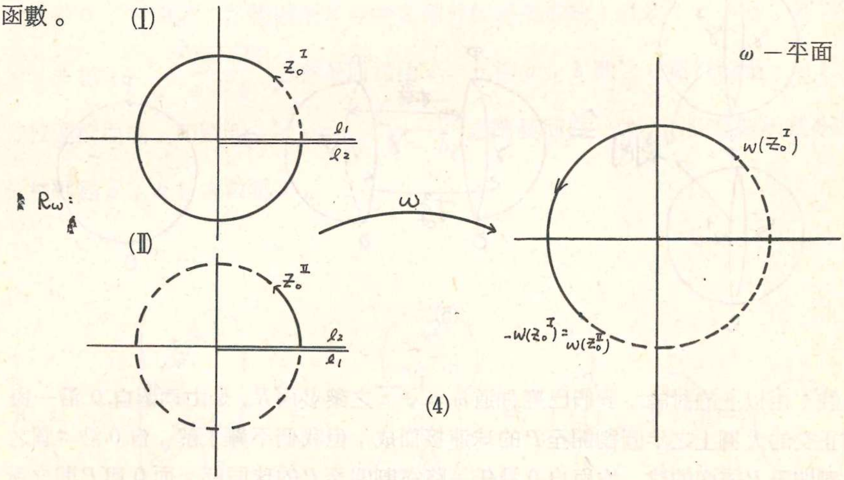
$$\omega: z=re^{i\theta}\mapsto\sqrt{r}\,e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}，若 z 爲第Ⅱ葉的點；$$

由此定義，我們可以知道，ω 將第Ⅰ葉中的"＋"及第Ⅱ葉中的"－"映到 ω 一平面上的 $\{z: z\geq 0\}$，將第Ⅰ葉中的"－"及第Ⅱ葉中的"＋"映到 ω 一平面上的 $\{z: z\leq 0\}$，且我們已將這兩葉連接，故 ω 自然是由 R_ω 映至 $\hat{C}$ 的單值函數。接著所需檢驗的是 ω 之連續性，由前面的討論，我們已經知道，若一數列 $\{z_n\}$ 收斂到 z_0 且其收斂路徑不通過 $\{z: z\geq 0\}$，則 $\omega(z_n)\to\omega(z_0)$，當 $n\to\infty$；故我們僅需檢驗，當 $\{z_n\}$ 之收斂路徑通過 $\{z: z\geq 0\}$ 時，$\omega(z_n)$ 是否亦收斂到 $\omega(z_0)$，即檢驗當 z 繞 $z=0$，通過 $\{z: z\geq 0\}$ 回到 z_0 時，$\omega(z)$ 是否 亦

。

繞$\omega(0)=0$通過$\{\omega:\omega\geq 0\}$回到$\omega(z_0)$。

設R_ω上第Ⅰ葉之"＋"與第Ⅱ葉之"－"所連接而成之射線爲l_1，第Ⅰ葉之"－"與第Ⅱ葉之"＋"所連接而成之射線爲l_2，且設$z_0{}^{\mathrm{I}}$爲第一葉上之z_0，$z_0{}^{\mathrm{II}}$爲第Ⅱ葉上之z_0，則當z由$z_0{}^{\mathrm{I}}$沿$\{z:|z|=r\}$繞$z=0$通過l_2，此時z由第Ⅰ葉轉到第Ⅱ葉（因第Ⅰ葉之"－"與第Ⅱ葉之"＋"連接之故），然而當z在第Ⅱ葉上沿$\{z:|z|=r\}$到$z_0{}^{\mathrm{II}}$時，ω在ω－平面上，由$\omega(z_0{}^{\mathrm{I}})$沿$\{\omega:|\omega|=\sqrt{r}\}$繞$\omega(0)=0$到$\omega(z_0{}^{\mathrm{II}})=-\omega(z_0)$（因$\omega:z_0{}^{\mathrm{II}}\to|z_0|^{\frac{1}{2}}e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$）；然而$z$在第Ⅱ葉上繼續沿$\{z:|z|=r\}$繞$z=0$通過$l_1$，此時，$z$由第Ⅱ葉轉到第Ⅰ葉，繼續沿$\{z:|z|=r\}$到$z_0{}^{\mathrm{I}}$則$\omega$由$-\omega(z_0)$沿$\{\omega:|\omega|=\sqrt{r}\}$繞$\omega=0$通過$\{\omega:\omega\geq 0\}$至$\omega(z_0{}^{\mathrm{I}})$，（參閱圖(4)），故$\omega$爲$R_\omega$上之連續函數。



(4)

因此R_ω爲使ω在如此定義下，成爲單值連續函數之連通曲面，即R_ω爲ω之黎曼面，是由兩葉均自$z=0$沿$\{z:z\geq 0\}$割開至∞之z－平面連接而成，因此我們稱這每一葉帶切口的z－平面爲ω之一分枝（branch），0和∞稱爲ω之分枝點，因其連接的次數爲一，則稱分枝點0，∞之次數（order）爲1。

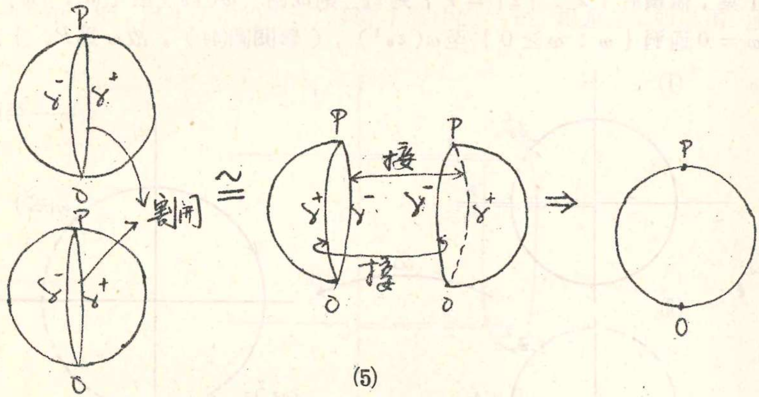
§3. 黎曼面的同胚分類：

因$\boldsymbol{R}^3$中的單位球S^2與$\hat{C}$是同胚（Homeomorphic），（因$St:S^2\cong\hat{C}$,其中St爲Stereographic Projection, c.f.:Nevalinna Chap 3 Linear transformation），即球與複數平面是同胚，且

$$St^{-1}:z=0\ \to 0$$

$$St^{-1}:z=\infty\ \to P$$

其中 0，P 分別表球上之南北極，因此每一自 $z=0$ 沿 $\{z : z \geq 0\}$ 割開至∞的 z 一平面與自 0 沿一與赤道正交的大圓上之半圓割開至 P 的球同胚。設 St^{-1} ：$+ \to \gamma^{+}$，且 St^{-1} ：$- \to \gamma^{-}$，因"＋"與"－"連接，即兩球中 γ^{+} 與另一球之 γ^{-} 連接，故將這樣的兩個球均自 γ^{+} 與 γ^{-} 沿球面壓成半球，再將這兩半球之 γ^{+} 與其中另一半球的 γ^{-} 相連接，則得一球，故 $\omega=\sqrt{z}$ 之黎曼面 R_{ω} 與 S^{2} 同胚(參閱圖(5))，且因球是 $\boldsymbol{R}^{3}$ 中之緊緻集，因此，若一函數 ω 之黎曼面爲 $\boldsymbol{R}^{3}$ 中之緊緻集，則稱 ω 之黎曼面爲緊緻黎曼面(Compact Riemann Surface)，反之，則稱 ω 之黎曼面爲開黎曼面(Open Riemann Surface)，如 $\omega=\log z$ 之黎曼面 即爲開黎曼面；故 $\omega=\sqrt{z}$ 之黎曼面爲緊緻黎曼面。



(5)

註：由以上的討論，我們已經知道 $\omega=\sqrt{z}$ 之黎曼面 R_{ω} 是由兩個自 0 沿一與赤道正交的大圓上之半圓割開至 P 的球連接而成，但我們不難了解，自 0 沿 π 圓之半圓割開至 P 這樣的球，均與自 0 沿任一路徑割開至 P 的球同胚，而 0 與 P 間之所有路徑又與複數平面上，$z=0$ 與∞之間的所有路徑成一對一映成的關係，故在 z 一平面上，可選擇 $z=0$ 與∞之間任一路徑割開即可。

§ 4.　代數型函數之黎曼面

現在我們對黎曼面已有了初步的認識，接著我們要談的是本文的主題，即代數型函數 $\omega(z)$ 的黎曼面。那麼，何謂代數型函數？即若函數 $\omega(z)$ 滿足下列方程式

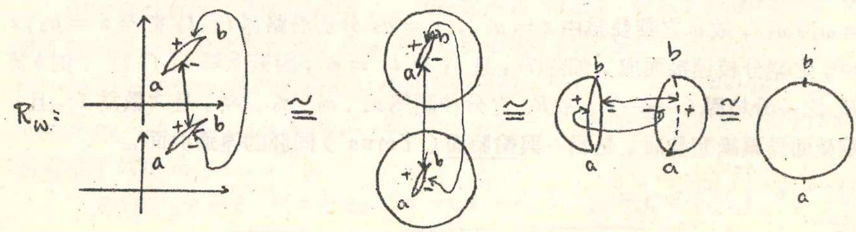
$$a_{n}(z)\,\omega^{n}+a_{n-1}(z)\,\omega^{n-1}+\cdots\cdots+a_{1}(z)\omega+a_{0}(z)=0\ ,$$

其中 $a_{i}(z)$ 均爲佈於 $\boldsymbol{C}$ 之多項函數，$i=0,1,2,\cdots\cdots,n$，且 $a_{n}(z)\neq 0$，則稱 $\omega(z)$ 爲一代數型函數(Algebraic Function)。在本文中，我們將僅探討下列兩種情況之代數型函數的黎曼面，即(I) $\omega(z)$ ：$a_{1}(z)\omega+a_{0}(z)=0$，$a_{1}(z)\neq 0$；與(II) $\omega(z)$ ：$a_{2}(z)\,\omega^{2}+a_{1}(z)\,\omega+a_{0}(z)=0$，$a_{2}(z)\neq 0$。例如 $\omega=\sqrt{z}$ ；$\omega=\sqrt{\dfrac{z-a}{z-b}}$，$a\neq b$

；$\omega=\sqrt{(z-a)(z-b)}$，$a\neq b$；$\omega=\sqrt{z^2}$；$\omega=\dfrac{Q(z)}{P(z)}$，其中$P$，$Q$均爲佈於$\hat{C}$之多項函數；這些函數均屬於這兩類的代數型函數，接著我們就來看看這些函數的黎曼面爲何。

<u>例1</u>　$\omega=\sqrt{\dfrac{z-a}{z-b}}$，$\omega$爲一多值函數。

　　令　$Z=\dfrac{z-a}{z-b}$　，則$Z:\hat{C}\to\hat{C}$爲一<u>綫性變換</u>（Linear transformation），因綫性變換爲將$\hat{C}$一對一映成至$\hat{C}$的<u>保角映射</u>（Conformal mapping），故$\omega=\sqrt{Z}$的黎曼面與$\omega=\sqrt{\dfrac{z-a}{z-b}}$的黎曼面是同胚。又$\omega=\sqrt{Z}$的黎曼面爲由$Z=0$沿$0$，$\infty$間之一路徑割至$Z=\infty$之兩分枝連接而成，且$Z:a\to 0$，$Z:b\to\infty$，所以$\omega=\sqrt{\dfrac{z-a}{z-b}}$之黎曼面爲由$z=a$沿$a$，$b$間之一路徑割至$z=b$之兩分枝連接而成，如圖(6)。故$\omega=\sqrt{\dfrac{z-a}{z-b}}$之黎曼面爲一球，因此爲緊緻黎曼面，分枝點爲$a$，$b$且次數爲1。



(6)

<u>例2</u>　$\omega=\sqrt{(z-a)(z-b)}$，$a\neq b$，ω爲一多值函數。

　　令　$\omega_1=\sqrt{z-a}$，$\omega_2=\sqrt{z-b}$，因$A:z\to(z-a)$，爲一線性變換，且$A:a\to 0$，$A:\infty\to\infty$，故ω_1之黎曼面爲由$z=a$沿a，∞間之一路徑割開至$z=\infty$的兩分枝連接而成。又因$\omega=\omega_1.\omega_2$ 則$\omega=R_{\omega_1}\cap R_{\omega_2}\to\hat{C}$ 爲一單值連續函數，因此ω之黎曼面爲由$z=a$沿$a-\infty-b$之路徑割至$z=b$之兩分枝連接而成，即ω之黎曼面爲由$z=a$沿a，b間之一路徑割至$z=b$之兩分枝連接而

成，由圖(6)得知，$\omega=\sqrt{(z-a)(z-b)}$之黎曼面爲一球，爲緊緻黎曼面，且分枝點 a ，b 的次數爲1 。

例3. $\omega=\dfrac{Q(z)}{P(z)}$，對於每一個 z 僅有一個 ω 與其對應，且除了 $P(z)$之零根外，ω 在 z 均可解析，則 ω 在 z 連續，若 z 不爲 $P(z)$之零根，且若 z_0 爲 $P(z)$之任一零根，則爲 ω 之極點，即 $\omega(z_0)=\infty$。若 $z_n\to z_0$ ，因 $P(z)$，$Q(z)$均爲多項函數，則 $P(z_n)\to P(z_0)$，且 $Q(z_n)\to Q(z_0)$，故

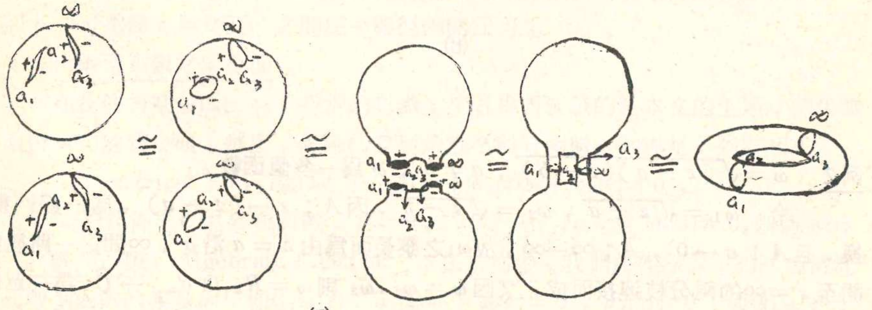
$$\omega(z_n)=\frac{Q(z_n)}{P(z_n)}\to\infty=\omega(z_0)$$

故 $\omega:\hat{C}\to\hat{C}$ 爲一單值連續函數，即 R_ω 爲 $\hat{C}$，且 $\hat{C}\cong S^2$ ，因此 R_ω 爲球，所以 $\omega(z)$之黎曼面爲緊緻黎曼面 。

例4. $\omega=\sqrt{z^2}$，ω 爲一多值函數；$\omega=\pm z$ 。因找不出一連通曲面使得 $\omega(z)$ 爲一單值連續函數，即若 R_ω 爲一使 ω 爲單值連續之曲面，則 R_ω 必不連通；故 $\omega=\sqrt{z^2}$ 之黎曼面爲無意義。

例5. $\omega=\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}$，$a_1$，$a_2$，$a_3$ 互異，$a_i\in C$，$i=1,2,3$，ω 爲一多值函數。

令 $\omega_1=\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)}$，$\omega_2=\sqrt{z-a_3}$ ，則 ω_1 之黎曼面爲由 $z=a_1$ 沿 a_1，a_2 間之一路徑 l_1 割至 $z=a_2$ 之兩分枝連接而成，（由例2.得知），而 ω_2 之黎曼面爲由 $z=a_3$ 沿 a_3，∞間之一路徑 l_2 割至 $z=\infty$之兩分枝連接而成。然而 $\omega=\omega_1\cdot\omega_2$ ，故 ω 之黎曼爲由 $z=a_1$ ，$z=a_3$ 分別沿路徑 l_1，l_2 割至 $z=a_2$，$z=\infty$，之兩分枝連接而成，如圖(7)，且 $l_1\cap l_2=\phi$ ，因若 $b\in l_1\cap l_2$ ，則 b 亦爲 R_ω 之一分枝點（$\rightarrow\!\!\times\!\!\leftarrow$）。故 R_ω 之分枝點爲 a_1，a_2，a_3，∞，且次數爲1 ，且 ω 之黎曼面爲緊緻黎曼面，是爲一與輪胎面（ Torus ）同胚的連通曲面。



(7)

例 6. $\omega=\sqrt{z^2(z-a)}$ $a\in \boldsymbol{C}$，ω 為一多值函數，且 $\omega(z)=z\sqrt{z-a}$，令 $\omega_1=z$，$\omega_2=\sqrt{z-a}$，則 $\omega=\omega_1\cdot\omega_2$ 且 ω 之黎曼面與 ω_2 之黎曼面同胚，又由例 2. 得知，ω 之黎曼面為一與球同胚的連通曲面，且分枝點為 a，∞，次數為 1。

看過這些例子之後，我們曉得這些代數型函數，若其黎曼面有意義，（即可找到一連通曲面 R_ω，使得此代數型函數 ω 為單值連續函數），則其黎曼面均為緊緻黎曼面。然而，是否本文中 I，II 兩類代數型函數之黎曼面均為緊緻黎曼面？讓我們來探討一下這個問題。

若 $\omega(z)$：$a_1(z)\omega+a_0(z)=0$，$a_1(z)\neq 0$，則 $\omega(z)=-\dfrac{a_0(z)}{a_1(z)}$，在例 3. 中已討論過，在此不復贅敘。

若 $\omega(z)$：$a_2(z)\omega^2+a_1(z)\omega+a_0(z)=0$，$a_2(z)\neq 0$，則對每一個 z，有兩個 ω 值與此 z 值對應，因若 z 固定，則 $a_2(z)\omega^2+a_1(z)\omega+a_0(z)=0$ 為 ω 之二次方程式，由代數基本定理得知，此有二解；因此 $\omega(z)$ 為一多值函數。

令 $\zeta=2a_2\omega+a_1$，(*)，$P(z)=a_1^2-4a_2a_0$，則

$$\begin{aligned}\zeta^2-P(z)&=4a_2^2\omega^2+4a_1a_2\omega+a_1^2-(a_1^2-4a_2a_0)\\&=4a_2^2\omega^2+4a_1a_2\omega+4a_2a_0\\&=4a_2(a_2\omega^2+a_1\omega+a_0)=0\end{aligned}$$

i.e. $\zeta^2=P(z)$

由(*)可以看出，當 z 固定時，ζ 為 ω 之一線性變換，故我們只需找出 $\zeta(z)$ 的黎曼面即可得知 $\omega(z)$ 之黎曼面，因 $\omega(z)$ 之黎曼面與 $\zeta(z)$ 之黎曼面同胚。

因 $\zeta^2=P(z)$，且 $P(z)$ 為佈於 $\boldsymbol{C}$ 的多項函數.，令 $P(z)=z^n+b_{n-1}z^{n-1}+\cdots\cdots+b_1z+b_0$，$b_i\in\boldsymbol{C}$，$i=0,1,2,\cdots\cdots,n-1$；由代數基本定理得知 $P(z)$ 可分解成下列型式：

$$P(z)=(z-\xi_1)(z-\xi_2)\cdots\cdots(z-\xi_n),\ \xi_i\in\boldsymbol{C},\ i=1,2,\cdots,n$$

故我們僅考慮 $\zeta=\sqrt{z-\xi}$；$\zeta=\sqrt{(z-\xi_1)(z-\xi_2)}$，$\xi_1\neq\xi_2$；……；$\zeta=\sqrt{(z-\xi_1)(z-\xi_2)\cdots\cdots(z-\xi_n)}$，$n\in\boldsymbol{N}$；這些函數之黎曼面即可。

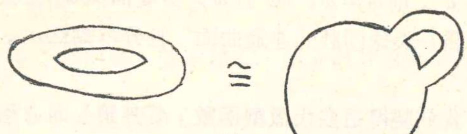
(i) $\zeta=\sqrt{z-\xi}$，這函數之黎曼面已在例 2. 討論過。

(ii) $\zeta=\sqrt{(z-\xi_1)(z-\xi_2)}$，若 $\xi_1=\xi_2$，令 $Z=z-\xi_1$，為一綫性變換，則 $\zeta=\sqrt{Z^2}$，由例 4. 得知其黎曼面無意義；若 $\xi_1\neq\xi_2$，已在例 2. 中討論過。

(iii) $\zeta=\sqrt{(z-\xi_1)(z-\xi_2)(z-\xi_3)}$，若 ξ_1,ξ_2,ξ_3 互異，則由例 5. 得知，其黎曼面為一與輪胎面同胚之連通曲面；若 $\xi_1=\xi_2$，則 $\zeta=(z-\xi_1)\sqrt{z-\xi_3}$，由例 6. 得知其黎曼面為一與球同胚的連通曲面。

又因輪胎面與一球加一把（ genus ）同胚，如圖(8)，故當 ξ_1,ξ_2,ξ_3 互異時，

其黎曼面為一與一球加一個把同胚的連通曲面。



(8)

(iv) $\zeta=\sqrt{(z-\xi_1)(z-\xi_2)(z-\xi_3)(z-\xi_4)}$，$\xi_1$，$\xi_2$，$\xi_3$，$\xi_4$互異，則

$$\zeta=\sqrt{(z-\xi_1)(z-\xi_2)(z-\xi_3)}\ \sqrt{z-\xi_4}$$

且其黎曼面為以ξ_1，ξ_2，ξ_3，ξ_4為分枝點，由分別割ξ_1，ξ_2，ξ_3，ξ_4間之路徑的兩個完全相同的分枝連接而成，故其黎曼面與$\zeta=\sqrt{(z-\xi_1)(z-\xi_2)(z-\xi_3)}$，$\xi_1$，$\xi_2$，$\xi_3$互異之黎曼面同胚，即與一球加一個把同胚。若$\xi_1=\xi_2$，且$\xi_3\neq\xi_4$，則$\zeta=(z-\xi_1)\sqrt{(z-\xi_3)(z-\xi_4)}$，且其黎曼面與$\zeta=\sqrt{(z-\xi_3)(z-\xi_4)}$之黎曼面同胚。若$\xi_1=\xi_2$，$\xi_3=\xi_4$，則$\zeta=\pm(z-\xi_1)(z-\xi_3)$，其黎曼面無意義。

依此方法繼續作下去，我們可得下列結論：

$\zeta=\sqrt{(z-\xi_1)(z-\xi_2)\cdots\cdots(z-\xi_n)}$，且$\xi_i\neq\xi_j$，若$i\neq j$則$\zeta$之黎曼面為

(i) n為奇數：分枝點ξ_1，ξ_2，……，ξ_n，∞，次數為1，即由兩葉完全相同之分枝連接而成，且

$$g=\left(\frac{n+1}{2}\right)-1,$$

其中g表把之個數。

(ii) n為偶數：分枝點ξ_1，ξ，……，ξ_n次數為1，亦由兩葉完全相同之分枝連接而成，且$g=\left(\frac{n}{2}\right)-1$。

故本文中，Ⅰ，Ⅱ類之任一代數型函數，若其黎曼面有意義，則其黎曼面均為兩葉完全相同之分枝連接而成；分枝點次數為1；且為一與加有限個把的球同胚的連通曲面，故為緊緻黎曼面。

參考書籍：

1. Nevanlinna : Introduction to Complex Analysis.
2. Springer : Introduction to Riemann Surfaces.

編後語

編輯小組成立一年來，深感責任重大，每位組員都辛勞的爲編好這份刋物而努力，甚至連寒暑假也照常工作。

這期有兩個特點：

第一、這期的稿件幾乎全是同學的作品，投稿量比以前增加了一倍以上。可見同學們都有能力投稿，只是過於謙虛不願提起筆來寫而已。希望有投稿經驗的同學，下期再接再厲，繼續寫作；尚未投過稿的，也請大膽的嘗試一下。這片園地是屬於大家的！

第二、以往同學們對「師大數學」這份刋物的反應是內容過於艱深，只有作者及少數人懂得那是在說些什麼。這期同學們將會發現，我們除了保持較專門性的作品外，還有很多作品是不需要高深的預備知識便可看懂的。希望我們這麼安排，能使這份刋物與大家的距離更加靠近。

最後，我們要謝謝諸位作者的賜稿；林福來、趙文敏、林義雄、吳森原、王建都諸位老師的熱心指導同學寫作；以及系裏諸位老師所給予的任何協助。

另外，美工方面，封面是由美術系符中原設計，內文部份則由海報宣傳組全力協助完成，也非常謝謝他們。

張 永 寬　　謹啟

六十八年五月廿五日

六十七學年度數學學會組織概況

理 事 長：毛仁利（三丙）

副理事長：陳火炎（夜四）

理　　事：柯坤山（四甲）　陳慶揚（四乙）　鍾達財（四丙）
張永寬（三甲）　盧繼忠（三乙）　毛仁利（三丙）
戴仁傑（二甲）　林明珠（二乙）　陳　淮（二丙）
曾富明（一甲）　張協權（一乙）　孫新光（一丙）
許慶堂（夜五）　陳火炎（夜四）　潘定藩（夜三）
陳秀宜（夜二）　林玉琴（夜一）

文敎股長：詹文豪（三丙）　祕　書：盧鴻鋆（二乙）

師大數學組組長：張永寬（三甲）

數靈編輯組組長：林壽福（二乙）

海報宣傳組組長：陶淑玲（二丙）

總務股長：施朝元（三丙）

體育股長：朱亮儒（二甲）

康樂股長：蔡秋穎（二甲）

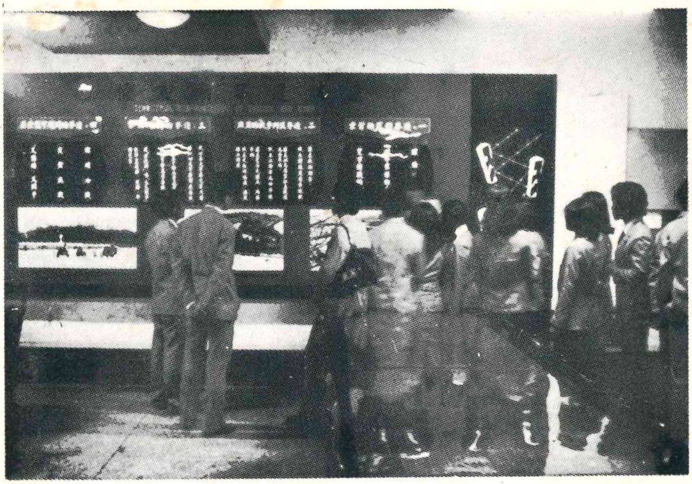
交通股長：張協權（一乙）

衞生股長：朱雪慧（二丙）

服務股長：謝瑞康（二乙）　祕　書：林坤宏（二乙）

監 事 長：林鈞涵（三丙）

監　　事：朱紫媛（四甲）　張仲浩（夜四）
曾憲錠（二丙）　陳澤民（一丙）



參觀政治作戰學校

師大數學　第十三期

發行人：常法徽

出版者：國立台灣師範大學數學學會

主　編：張永寬

編　輯：張樹城、李鎭煌、鐘偉誠
許清土、簡素貞、林晶璟
何淑艷、陳翠華

印刷者：九章出版社

地址：台北市松山路419巷11號

電話：(02) 7683413

出版日期：中華民國六十八年五月三十日
師大訓課刊登第136號