師大數學

16

系主任序

本系成立於民國三十五年八月，首由張儒林教授擔任系主任，當時僅有數學系一年級及二年制專修科一年級各一班，同學三十餘人，教授三位，助教一位，嗣由管公度、潘璞、李新民、康洪元、范傳坡、常法徽各教授輪掌系務，歷經各主任與同仁之群策群力，始具今日之規模。三十四年來本系之畢業系友，已逾貳仟叁佰餘人，多各有成就；其中具博士學位者逾一百四十人，僅獲碩士學位約百叁拾人，或執教於高等學府，或繼續高深研究，餘多服務於中等教育界，平時諄諄教學，誨人不倦，敦品篤行，懷抱熱忱，此實本校優良風氣之所致。

現本系有效師四十一人，學生方面日間部有十二班，夜間部五班，共有同學六百餘人，圖書兩萬餘册，雜誌百餘種；自六十四年夏遷於現址後，環境煥新，出國學成系友或返校互相砥礪，研究風氣已大弧度地提高；今日數學系之師生孜孜不息，無不爲美好遠景而奮發。

近來科學發展甚速，對數學之需要甚切，本系之任務更日益增大，除肩負數學教育之發展及中等數學教育之輔導外，亦兼具數學學術研究之重要任務。爲增强研究風尙，本系於十六年前創辦師大數學年刋，以供師生發表教學及研究心得。切磋琢磨，提高學習及研究興趣，屢經負責同學之辛勞耕耘及師生系友之共同支持。漸茲茁壯，今後請更不吝珠璣，源源賜稿，則本刋必前程似錦，散發絢爛光芒，於此，敬表謝忱，更盼我師生系友善珍此片園地。

顏啓麟　謹識

七十一年五月

師大數學

第十六期 目錄

師長作品欄：

包括訪問系主任及呂溪木老師的二篇稿子及林義雄老師所介紹的「複變數微分與一個或兩個實變數微分的比較」。

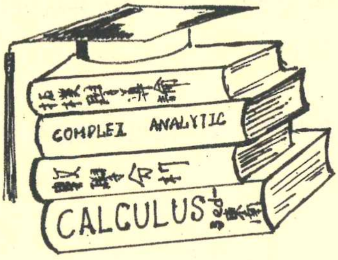
當你身爲數學系學生時，你可曾想到數學是什麼？應以何種態度學習，將來若要進修，可走那幾方向？

當你學習代數時，你可知它的演進歷史，重要性？

當你學完高微及複變時，你可曾想到它們微分之異同？

看完三篇稿子後，你可得正確概念。

訪系主任談數學系



許玉華 整理

問：〃數學〃究竟學些什麼？

主任：這要看到底是屬於什麼程度的數學，不同程度所學的便不一樣。例如義務敎育及高中所學的數學，這些程度的數學一方面是要訓練計算能力，另一方面是要學習其他學科跟數學有關的運算。但這並不是小學及中學敎育學數學最主要的目的，因爲計算能力的培養並不是每個人都需要的，若繼續升學，那當然是必備的，可是若不繼續升學，學了些公式，根本無意義。最主要的是在無形中觀念的培養，而這便包括了數值性及非數值性，數值性的便是如何把一個問題數量化後，再加以處理；非數值性的便是遇到問題需要解決時，應該如何著手，應該經過什麼過程，所下的結論是否合理，這便是數學在這方面的應用。另外若較爲高階層的數學，如大學、研究所等，這便與中小學的數學不同，前面計算能力及處理事物的訓練應是足夠了。最主要的還是在於應用上。這時學數學便要了解一個數學問題是如何產生的，產生這個問題的背景爲何；更具體的說，便是它爲了要處理解決某一問題，才會有這個數學的產生，這也很淸楚的說明了〃爲何要學數學〃，因爲它是由什麼問題發生，便知道應該可用到什麼，但是，事實上，還不至於此；雖然是從解決某一問題所發現的數學除了可以得到一個解決該問題的很好結果之外，這個結果可能還可以應用來解決許多其他的問題。而關於學數學便是把實際的事物給予抽象化；擧個最簡單的例子，如三公斤加五公斤等於八公斤，而三公尺加五公尺是八公尺，不管論重量及長度，在於數學的表示都是三加五等於八。事實上在許多不同領域中，用不同的語言表示出來的問題，若將它給予抽象化後，却是同一問題。因此學數學並不希望單只爲了解決某一問題，而所

得的結果只能用在這個問題上而已，而是從某一問題開始，發展了解決這個問題的工具，設法徹底解決這個問題，最後利用這結果或解決這個結果有關的工具，拿來解決其他的很多問題。

問：在大學四年中，數學系訓練學生關於那方面的問題？

主任：師大的宗旨分兩方面來說，一方面培養中學師資；另一方面造就研究高深數學之人才；這不是口號，師大數學系也確確實實做到。現於中學方面，較具規模之學校之數學老師大部份是師大數學系畢業的，而於其他大學數學系中，也有很多是師大數學系系友在當系主任、所長的。有些培養中學數學師資，有些培養數學學術人才，其中包括數學教育學術人才。在這大原則確定之下，我們的課程也是往此目標上安排，其中有些必修科，它是數學系學生最起碼應該了解的，這些必修科除數學本身外有一般做一教師所應具備的國文、英文、民族精神教育及教育專業科目等，因為不管將來在中學或大學，做學術研究老師們總希望把心得傳授給他們的學生，所以這些知識是必要的。除此之外，另有數學各分支，看同學的興趣，選擇其有興趣的科目。例如：將來走中學教育方面應在數學及數學教育方面研究多予加强；做學術研究的範疇很廣，因為數學本身分支很多，一個人不可能把分析、幾何、代數及實用的各分支都涵蓋。所以系裡各方向都開些課程，以便同學選擇；如果同學喜歡代數方面的課程，就可選環論，範疇代數，同調代數等；分析方面則是泛函、測度、實變等等。

問：具體而言，數學系所學有那些分支？

主任：這個問題很難回答，因為低層次與高層次數學之分法不一樣，愈高層次數學分得愈細。數學一般分為傳統及非傳統，前者如分析．代數、幾何、拓樸等，非傳統數學如統計、作業研究、數值分析、電腦等，傳統方面再細分，如分析又可泛函，複變（單複變及多複變）、實變、機率、調和分析、級數論等等；代數方面如群論、環論、度議代數，體等，而群論又分無限群，有限群、交換群……等等。

問：身為數學系學生，應以何種態度從事對數學的探討？

主任：這要看是唸到何種程度的數學，因為每一階層都不一樣。在中學時代所學，有很多都不求甚解，例如 $\sin x = 0.8$ 學生往往先查表或利用內差法求 x，但是為什麼可以用內插法，為何有解不提，並且用內插法所得的結果與實際的值誤差多大呢，就是不求甚解也無謂。到了某種程度如大學、研究所。不但要求甚解，還要知道問題的來龍去脈，進而知道中間發展的情形。不過有

一點絕對不可以的，即以爲〝唸數學僅在幫人家證明些什麼〞，換句話說就是看到定理，就把定理一句句的背下，這句是如何，又可推到下一句是如何……，這是不可以的。因爲唸數學是希望有前有後，進而知道中間。由前頭會想到後頭，由後面結果能想出可能之充分條件。

要得到這個結論最起碼的條件爲何，或是由些條件可推得什麼結論，融會貫通，而不是被人牽著鼻子走。

問：系上同學一般的水準如何？用功程度呢？如何使同學用功呢？

主任：依程度而言，論大學聯考的成績，能進入師大數學系都可算是佼佼者，可能乍看分數比其他系低，但好的還是比其他系好，所以說程度還不錯。但是論用功程度，少部分同學還可以，但是大部分的同學還是不用功。沒有一個人肯下定論說：絕對有辦法讓每位同學都用功認眞。因對每個人用的方法不同。有些老師想跟同學接觸，了解學習情形，但是有些同學雜務太多，能眞正接觸不多，在這情形之下，只有特別差及特別好的能夠受到照顧，位於中間者較無法受到照顧。本來能進入本系的同學的差距不大，但是用功與不用功，迫使程度差距愈大，要解決此一問題，唯有那部份的同學及時回頭，迎頭趕上差距就不大了，尤其是一、二年級同學，如果起步稍慢，沒有關係，加緊用功，一定可以趕上的。

問：對於系上同學兼家教的觀感如何？對於以後教學有何幫助？

主任：首先，我個人很反對兼家教，因爲四年求學期間很難得，如果不繼續升學，大學將是求學的終點站，等你踏出學校，走入社會想再回頭，機會不是完全沒有，但是不多，所以同學應珍惜這四年寶貴的光陰。因你如出去當老師，所接觸都是同事，如果想請教他們問題，其他老師是否能徹底了解呢？即使是，同事們是否會傾囊相告呢？還是會略有保留呢？當然，還有可能你爲了某種因素，所以連問都不敢（想）問呢？

在這情形之下，如不好好把握，現在發時間去學習，將來連問問題都問的不切題，那就說不過去。因爲如要問的切實，就須對問題有切實的了解。所以把時間花在家教上，只爲區區的二、三仟元，那實在太得不償失了。當然，有些同學逼不得已，爲了家庭生計，爲了維持生活，兼個家教，那還說得過去，但是對經濟狀況許可的同學，我是非常不贊成。若說對教學有何幫助那更不然，把這個時間拿來和同學互相研究功課，將同學不懂的設法使他清楚，這種教學經驗比兼家教好得多。而且本身的知識也會增加，但是如果你教一個中學生，你講錯了，他也不知道，在這種情形之下，對教學能有多少幫

助呢？

問：如果同學們畢業之後，想再繼續進修，有那些方向可走？

主任：方向有很多，例如可再繼續唸數學研究所，或選擇管理、統計、資訊等方面之研究，甚至於做心理學方面研究等。

問：若想繼續進修的話，那麼在大學四年之中，應該做些什麼樣的準備工作？

主任：若想繼續進修，意志是很重要的，因爲進修不算是長程也算是中程，首先應對將來要走的方向有些了解，否則就如同上了賊船，進退兩難。其次是衡量自己的興趣。這樣才能發揮自己的長處。但也可能你在某一方面的能力很強，但是却不喜歡以那種性質之學科爲將來你所要從事的事業，這樣並不見得好。或許開始時對這方向並沒有興趣，學習之後却發生很大的興趣，因此必須充分了解自己。其次是將來要走那一方向，就應具備些什麼基本知識，例如唸研究所所學的都不是基礎課程，所以要事先準備。尤其是在台灣，進入研究所必須先通過入學考試，所以最少要先通過入學考試。至於平常所看的參考書，視所走的方向而定。難的不一定就有好處，而且難易也很難分，但基本概念最重要。例如學數學認爲最難的部分學統計的則認爲很簡單，相反的學統計最難的部分，學數學的可能認爲很簡單。所以只要把數學觀念弄清楚，其他學科的理論發展，只不過是數學的應用罷了。但欲知其如何應用也要知道在它們領域之內涵與概念，例如，熟知了經濟內涵與概念，就可利用數學之研究它們，即所謂之計量經濟學。

問：如果要唸研究所，應在國內或國外唸呢？

主任：假如像我那時候要出國的話，我會毫不考慮的說〝到國外去〞。但是近十年內，國內的研究所都很有成就，且在很多方面的師資，很多國外大學或許還不如國內。但在國外有一好處，就是學生較有專業精神，不像在國內很多學生都兼家教。而且到了國外，會把時間都放在自己的學習上，或許人的心理都認爲已經出國了，來個破釜沈舟，丟不起中國人的臉，因此，部份情況或許在國外效果較佳。

問：身爲一個數學老師應具備那些條件？在這四年中應如何培養它呢？

主任：首先，本身的數學修養要夠，其次是教學能力的培養，老師懂了，還要想辦法讓學生了解，遇到何種學生應用何種方法，才能讓學生吸收它。第三是做人方面：當一位老師，尤其要成爲一位很好的老師，不但要能教書，還要跟學生多接觸，培養其健全能力，包括其思想、心態方面，另外還要看週記，這就須具備文學素養。總之：師範學生當老師要比其他學校的學生要求的高

，不但要當經師，更應爲人師。

問：今日及未來數學發展的方向爲何？

主任：今日數學發展趨向，大致還可以看出一些，但是未來則不得而知。因爲科學常有「山窮水盡疑無路，柳暗花明又一村」的現象。一般數學所走的趨向就是起於實際問題，而終於實際問題。現在也是如此發展。以前只重視存在問題，現在不但要知道存在還要找解。今日光靠能找出解還不算，今日受計算機影響還要計算以多快速度得到，所以今後在此方向發展較多。

問：四年級學生即將出去當老師，老師是否對他們有些勉勵的話？對於在校生呢？

主任：對於即將到中學服務的同學，應了解中學數學的功能和爲什麼學生要學數學。今日並不是一個學生教會了就繼續教，而教不會的就放棄的時代，老師對於學生的學習是應負起責任的。教書時難免受家長、校長的影響，對升學比較重視，但是要想想看高中與國中之人數比例，除了升高中、高工、高職的人外，那些不升學的人，我們也要顧全。因爲數學教學是多方向的，不是單方向只走升學一途，不要有不考聯考就不必學數學的想法，對不升學的同學，多多少少一定要讓他們知道學數學的功用，但對他們不要以求達到聯考的標準爲標準，多多少少給學生從數學中學習到做人做事的方法。要時常鼓勵學生主動學習，要使學生有成就感，所謂成就感就是學生學多少，得到多少分數。不要連續考很難的題目，使學生學起來蠻有收穫的感覺。否則學生再用功永遠只考十分、二十分，那麼學生認爲「反正我花了再多的時間都是這樣，假如我把這些時間拿來讀歷史、地理，可以考高分一點，怎樣考數學都不會超過二十分」於是放棄數學。所以教學時必須使學生完全明瞭，用功的同學聽得懂，一般的學生也能理解，不要鑽牛角尖，不要認爲考試就是爲了針對聯考的想法。

對於在校的同學，希望同學們能好好把握這四年，不要把時間都花在家教及其他無意義的活動上。大學生活固然有一方面要去享受，但是要分輕重，有的人過分強調舉辦活動，但這並不是同學進入數學系所希望得到的。同學們應多把握這四年，當然讀書之餘，多做有益身心的活動也是應該的。

訪呂溪木老師談代數

詹玉玲 整理

在大學四年中，代數是屬於一門很重要的基礎學科。爲了使同學們對於代數有更深一層的瞭解，我們走訪了呂溪木老師。希望能由呂老師以前的學習心得及其數學經驗來帮助同學們解決在學代數時所遇到的疑問及困難。

問：老師您以前是主修代數的嗎？

答：是的，我是主修代數的。

問：老師當初您爲何不選分析或幾何，而選代數呢？

答：主修那一門課是到唸研究所後才決定的。我是在國外唸研究所，在碩士階段也沒有很明顯的主修，到了博士班快畢業時有一資格考試，並且需要寫論文，那時我才決定主修代數的。實際上讀數學對每一科基本課程都要讀。至於我選代數，這與興趣和心得有關。譬如說這門功課你學得好，自然而然興趣高，在這方面就會多下功夫，因此我便主修代數。至於興趣和心得，依我自己的情況，其中最大的因素是老師，在這一門課，我碰到我很喜歡的老師，修課時便比較有心得，所花的時間也比較多，所以決定主修代數。我想很多情況都是這樣的，一開始時都沒有什麼決定，後來因爲每一次這方面成績都較好，因而興趣也高，所以才選擇這門課。然而成績好，興趣高與環境及所碰到的老師是有關的。

問：請問老師早一點決定唸那一科是否比較好，或是讓其自然發展呢？

答：在現在這個時候，我想不應該很早決定唸那一門。我常常在上課時提到，如果只懂得代數一科是不可能成爲一位很好的數學家的，看看那些較有名的數學家，他們幾乎每一門都行。況且就如在爬一座山一樣，你可以有很多條路徑上到山頂去，若你只曉得其中某一條路而已，雖然你一樣是可以上到山頂去，可是等到你循著原路下到山下來之後，你對於整座山的瞭解是非常有限的。學數學

也是一樣的，如果你光學某一門課而已，那麼你對於整個數學領域的瞭解是非常有限，你所能硏究的範圍也是非常狹窄的。因此我認爲在大學四年中，對於每一門基礎學科都要好好去學，不應對於某些學科而有所偏廢，當然在學習過程中對於某些部分難免會有所偏好的，對於自己所偏好的部分一直往前深入去探討，這是很好的，可是也不要因此偏廢了其他部分。

問：請老師談談您從大學的學生時代到今天的一些經歷。

答：很坦白的講，我在大學時並不是個很好的學生，我在大學時並不太用功。所以我現在就非常注意到我的學生，一直是很鼓勵他們用功唸書，因爲我覺得我在大學時代浪費了很多時間。當然年青人都較好玩，因而活動也參加的多。雖然並不致於荒廢了學業，但是有很多時間都並沒拿來讀書。不過，基本課程也學得不錯，當時的老師及學生素質也都很好，且學生人數也少，在考試時也都能開夜車唸到天亮，所以功課都沒有甚麼問題。大家的基礎都不錯、潛力也很夠，只是時間花得不夠多而已。所以雖在大學裏並沒有學得很好，但基礎並不差。我在師大畢業後就到新竹中學教書，當時我並沒有想到要繼續唸書，就只是想教書而已，到了新竹中學後，對補習一點都沒興趣，（我從沒上過補習班），但那時每個月的薪水只有７７０元而已，而單身宿舍的伙食費就需要 300元，這樣看來不補習顯然是不行的，那時大概是民國５０幾年的事。後來去服了一年預官役，回來後便不想在中學教書，因此就回台北到明志工專當助教，教了幾年後便出國，因爲當助教是不可能一直待在那助教位子上的，一直很想跳出來，因爲經過這段期間，所以到國外之前便有所準備，非常珍惜這段寶貴的時間。到了國外唸書便一直都很順利，差不多四年的時間就畢業了。過了一、二年，自己希望對於社會能有所貢獻，所以便回國來，回到本校，一直到今天。

問：請老師談談代數的由來及其發展演進。

答：代數的發展是很早的，遠在公元前１６００年，巴比倫人就提出了一元二次方程式的求解問題。到了公元１５３５年，意大利數學家 Cartan 發現了用根式來解三次方程式，後來他的學生 Ferrai又利用了他的方法來解得四次方程。而 Galois Theory是近世代數的主題之一，它繼續有系統的來處方程式根的問題，實際上這是廿世紀的時候才發展出來的。後來代數便有了很快的發展！

問：請問老師代數在數學上有何貢獻及其有何用途。

答：代數純粹在數學上的貢獻是它爲數學解決了很多問題。譬如說許多存在定理實際上是代數貢獻。除了支援其他各科發展外，它眞正的實用價值並不很高。但

我們唸書一定不可以那麼現實，即有用的才學，看來似乎並沒有多大用途的便不去學它，這是不對的，因爲那些看來似乎並沒有什麼用途的，將會便很可能很廣泛的應用於其他方面。例如：在電子計算機中有一門課—— Encoding－Decoding（給密碼－解讀密碼），它用了許多關於 Finite Field Theory 及數論等方面的理論，然而這些在很早以前並不覺得會很有用，但現在它已經非常實際的應用到電腦上面了。所以目前研究的數學成果雖然並沒有實用價值，但還是要好好的去學，或許將來有一天它會派上用場。

問：請問老師學代數還需要具備其他的如分析或幾何的基本知識嗎？

答：是的，例如：在研究代數幾何時，不僅要懂得代數，懂得複變，射影幾何也是非常重要的。

問：代數是否會較其他分枝（分析、幾何等）難學？

答：一般人認爲它跟分析不同，唸分析時，在各種不同的情況都可以拿來算一算，至少都可得到一點結果。但是代數則不同，學代數首先必須先瞭解它整個的結構，所以在剛開始學代數時會感到須要記憶的非常多，也比較難。事實上，代數應該是比較容易學才對，只要把一種代數結構學通後，其他的使都可以觸類旁通。以群和環爲例，先把群的整個結構學通後，則群之 normal subgroup 就是和環的 ideal 相類似的，而 group homomorphism 和 ring homomorphism 是相類似的，在群中有 first isomorphism theorem 和 second isomorphism theorm，在環中也有同樣的性質，其他的如 Kernel, Quotient space 等等也都是一樣的，只不過其名稱有所不同而已。所以從以上例子看來，代數並不會很難學。

問：有些理論都是非常抽象的，而這些理論是如何產生的呢？

答：事實上很多理論是從某些實際問題中得來的。例如我們在代數中談到的群，實際上它是從幾何上的一些剛性運動的性質得來的。

問：代數包括了那些部分、系上所開的課程有那些是屬於代數的部分。

答：在大學所學的代數是一些基礎，如果將來要繼續研究，則這些課程是必需的，而且是一般性的，對你所學的都會有用處的。如你們剛開始學抽象代數，一直讀了二年，大概比較近代的代數結構都已經有所了解，如你們剛開始學抽象代數，一直讀了二年，大概比較近代的代數結構都已經有所了解，如群、體、環，Linear Algebra，向量空間等這些基本的代數結構，讀完以後，將來在代數方面的分支，一個是數論，另一個則是代數。以前的數論都是在於研究整數，而現在研究數論則都是用複變作爲工具。在代數方面又可分爲交換代數

及非交換代數兩支。

至於系上所開關於代數部分的課程，我是在民國62年回到我們系裡的，因爲那時選課的人較多，所以代數課程開得比較多，現在選課的人比較少，所以選修課並沒有開得很多。現在所開的有代數(一)(二)，四年級有環論（選修），且嚴格講起來數論和 Linear Algebra 也都算是代數，除了這些以外並沒有開其他的代數課程。以前我所開的課還有 group ring （群環），這也屬於代數課程。

問：拓樸學是否屬於代數？

答：拓樸不應屬於代數，嚴格地說它是基礎課程，但是有很多人都把它歸在分析裏。而拓樸主要分爲兩支，一爲點集拓樸，一爲代數拓樸。實際上學拓樸學是各門如代數，分析等都要用到，只不過分析用了特別多而已，所以一般都認爲它是分析課程，但嚴格說來，它應該屬於基礎課程，只是分析用得多而已。

問：學代數應該要有甚麼態度？

答：應該培養出興趣來，不要太計較它是否馬上有用，把它看成是數學上的一支，繼續深入的往前探討，不要一直問學代數有什麼用？即使是大家公認爲極有用的微積分，在日常生活中也未必眞能派上用場！所以代數是否有用，暫時不要去管它，要看看它在數學發展上的貢獻，我認爲把代數基礎打好，以後學那一門都是很有幫助的。

問：如何才能學好代數？

答：要學好代數，首先一定要做習題。做習題當然是件很花時間的事情，但是在做習題的過程中可以學到很多處理問題的技巧，進而使你對於所學能有全盤的瞭解。在做習題時若碰到較難的，可與同學討論或參考過去別人的解答，但這是最後時才用，一開始一定要自己去想，如果習題都是用抄的，這是沒有用的，抄一百題，還不如自己做兩三題。

第二學代數一定學作「統整」。許多同學都認爲學代數需要背，或者好像定義與定理或定理與定理之間並沒有太大的關聯，感覺到相當抽象。實際上這是在於並沒有把觀念統整。學了 Linear Algebra 後，事實上都學得很好，可是等學群時，便把它擺在一邊，而不將它拿來與群做比較，若你能將它拿來與群比較，你便會發覺，事實上這些結果都是完全一樣的，所以你要是把 Linear Algebra 弄懂後，再利用統整的觀念，其他的也就都能通了。所以學代數應該做到這一點，然而最大的困難是在於還沒有把所有的 Topics

讀完時，便無法做統整，而不能做統整，對於所學的了解便打了折扣，因此學代數常常是往前走一步，然後再往後看一步的來學，等到你學完以後，便會發覺原來是這麼一回事，所以讀書時有些觀念並不很清楚也不要太擔心，很多都是等到你教書時才完全弄懂的，以前讀書時都是一直往前鑽，很會做題目，但是並沒有整體的概念，等到有一天需要表達給別人知道時才會去靜靜的想，如何去安排、組織，別人才能了解，有些人在畢業前便能做到這一點，但大部都是畢業後才能做到，才弄懂的。就如高中數學，相信你們很多人是在大一、大二當家教時才弄懂的，對不對？所以學代數時一定要做統整，如果沒有，就會如同學所說的，這裏一個定理，那裏一個定理的顯得非常零散，如果你會作統整，實際上代數是一串的。

另外，一定要看參考書。至於看參考書並不是拿一本書來就從頭看到底，這樣很容易抹殺同學們的興趣，因爲參考書很多，不可能全部把它看完。譬如說你現在正在學群論。以教科書爲主，再找許多參考書對有關群的部分過目一下，若完全一樣就不必看，如不太一樣就仔細看一看，因爲每一位作者都有其獨到之處，所以一定要看參考書。如果你只讀一本書是無法把這某一門課學好的，尤其很多同學習慣於光看老師的筆記，這是不行的，老師講課時只講重點，如光看筆記，對於考試或許有用，但你對這門課不一定能讀通。所以一定看多看參考書。

問：應如何選擇參考書呢？

答：靠有經驗的人介紹，才不會隨便拿一本書來讀而抹殺了你的興趣；所以最好請老師或有經驗的學長來介紹，這樣比較能夠由淺入深。若老師在上課時未必都能介紹參考書籍給你們看，這時你們應該主動在下課時找老師聊聊天，請教他們，相信再忙的老師，也都是樂意幫助你的。所以不要太被動，要主動去接近老師，這樣學校的優良師資你才算是利用到了。

關於參考書籍，這裡介紹幾本，以供參考：

線性代數：(1) Linear Algebra and Matrix Theory : E.D. NERING.

(2) Linear Algebra : Nomizu.

(3) Linear Algebra : Hoffman and Kunze （東南）

代數：(1) Topics in Algebra : I.N. Herstein.

(2) Abstract & Linear Algebra : D. Burton.

(3) University Algebra : R.E. Johnson.

(4) A First Course in Abstract Algebra : John B. Fraleigh.

群：(1)Group Theory:Rotman.

(2)Permutation Groups : Passman.

(3)Groups I & II : Kurosh.

環論：(1)Theory of Rings : N. McCoy.

(2)Lectures on Rings & Modules : J. lamberk.

(3)Noncommutative Rings : I.N. Herstein.

同調代數：A Course in Homological Algebra : Hilton & Stammbach

範疇代數：Category Theory: Miehell.

要瞭解數學上某一個理論最好的方法就是去找一個最富有代表性的具體實例，然後把這個例子加以好好研究，一般學生，甚至於好學生，最大的毛病就是不實在，他們或許能滔滔不絕地「吐」出某些定理的正確敍述，並且也記得正確的證明，但是他們就是舉不出例子，找不出反例，甚至於也做不出特殊條件下的問題。

—— Hilbert

複變數函數微分 與 一個或二個實變數函數微分的比較

林義雄

平面上的點（x, y），如解釋爲從坐標原點到該點的向量，並賦予內積運算時，這個平面是Euclid空間R^2；如解釋爲複數 $z = x + iy$ 時，就是複數面 C 。但是，R^2並不完全等於 C，主要是代數運算性質差異所引起的：向量並沒有"乘積"運算使它變成一個數，所以R^2並不是一個體，而複數却有乘積運算，整個C就是一個體。因此，在R^2及 C上各作微分，其定義方式及效果應該是迥異的。本篇的目的，在於初步討論定義方式的差異及關連

複變數的複值函數的微分定義，跟單實變數的實值函數的微分定義，表面上看來完全一模一樣，這種表面上的類似，充其量只能保證微分運算性質的類似而已。更深一層的探討，便可看出它們所產生的理論有很大的差異。其中最顯著最重要最基本的差異應該是：

(一)如函數 $w = f(z)$在z_0的某個鄰域（neighborhood）上到處可微分，則 f在E上無限次的可微分，即f的第 n 階導數 $f^{(n)}(z) = (f^{(n-1)})'(z)$ $n \geq 1$　$f^{(0)} = f$都會存在；而且f在 z_0 的附近可展成冪級數（power series）即

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \qquad |z - z_0| < r$$

反之，如$w = f(z)$可寫成上式，則f在z_0的附近到處可微分，這種函數就是<u>解析函數</u>（analytic function）。

(二)即使 $y=g(x)$，$x, y\in R$，在 x_0 的某個鄰域上到處可微分，也不能保證導函數 g' 會連續，更遑論 g'' 會存在了。就是說 g 在 x_0 附近無限次可微分，也不能保證 g 在 x_0 點的附近可展成冪級數。

″例如 $g(x):\begin{cases} e^{-x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 當 $x\neq 0$，

$f^{(k)}(x)=Q\left(\frac{1}{x}\right)e^{-x^{-2}}$，式中 $Q(x)$ 是 x 的多項式函數，

由於對任意 $k\geq 0$，

當 $x\to 0$，$x^{-k}e^{-x^{-2}}\to 0$ 於是 $\lim\limits_{x\to 0}f^{(k)}(x)=0$

又由定義 $$f^{(k)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(k-1)}(x)-f^{(k-1)}(0)}{x-0}=0$$

所以 $f\in C^\infty[a.b]$ $\quad -\infty<a<b<\infty$

雖然對任意 $k\geq 0$，$f(x)=f^{(k)}(c)\,x^k/k!$，$0\leq|c|\leq|x|$

可見 f 在 0 點附近不能用它的 Taylor 級數 $\sum\limits_{x=0}^{\infty}f^{(k)}(0)\,x^k/k!$ 來表示之，因它恒等於 0，而 f 僅在 $x=0$ 時，才等於 0″。

問題是何以會有這種差異？我們知道 R 是個有序體，實數是一維的數，反應在求微分的步驟

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

上，就是 x 只能從 x_0 的左邊或右邊二個方向趨近於 x_0。簡單說來，這是一種一維的極限步驟。相形之下，C 是個體，但不是有序體。就我們所知複數是一個能同時兼顧旋轉及伸縮運動的數，即複數是二維的數，所以，在求微分的步驟

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

時，z 可從各種方向按所有可能的方式趨近於 z_0。這眞是道道地地的二維極限步驟。綜合地說來：形式雖然相同，但本質上一個是一維極限步驟，一個是二維極限步驟，才是此二種微分步驟的根本差異所在。同時，我們可以看出來複變數的微分，對函數本身行爲及性質良好程度的要求，遠比實變數微分來的嚴又苛。所以我們有理由去預期複値可微分函數會有良好的分析性質。

既然複變數的微分是一種二維的極限步驟，那麼它跟我們在實變數課程裡所學的 R^2 上的微分，又有何差異及關連呢？爲探討這個問題，我們先回憶一下 R^2 上的微

分定義及性質與R^2上的綫性代數觀念。

設$(u,v)=f(x,y)$是從R^2上點集到R^2中的函數。如存在綫性變換$df(x_0,y_0)$ $: R^2 \longrightarrow R^2$ = 使得對所有向量$(\alpha,\beta)\neq o$，只要其長度$|(\alpha,\beta)|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$充分的小，就有

$$f(x_0+\alpha,\ y_0+\beta)=f(x_0+y_0)+df_{(x_0\ y_0)}(\alpha,\beta)+o((\alpha,\beta))\cdots\cdots(1)$$

$$\lim_{(\alpha,\beta)\to o}\frac{o((\alpha,\beta))}{|(\alpha,\beta)|}=0$$

此時，稱f在(x_0,y_0)可微分(ifferentiable)，其全微分為$df_{(x_0,y_0)}$，而$df_{(x_0,y_0)}(\alpha,\beta)$恰是$f$在$(x_0,y_0)$點沿方向$(\alpha,\beta)$的方向導數(directional derivatve)。這種微分法也有與一維實變數微分所具有的各種運算法則。

底下，我們討論(1)式的三個等價式子，並據此來跟複變數微分

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)$$

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+o(z-z_0)\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

或 $$\lim_{z\to z_0}\frac{o(z-z_0)}{z-z_0}=o$$

比較異同之處。

第一：如令$z_0=x_0+iy_0$， $z=(x_0+\alpha)+i(y_0+\beta)$，那麼$z-z_0=\alpha+i\beta$，此時(1)式可改寫成

$$f(z)=f(z_0)+df_{z_0}(z-z_0)+o(z-z_0)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1')$$

此處$df_{z_0}(z-z_0)$必須解釋為R^2上的綫性變換df_{z_0}作用在向量$z-z_0$上，所以$df_{z_0}(z-z_0)$還是R^2中的向量。但是，在(2)式中$f'(z_0)(z-z_0)$且是二個複數$f'(z_0)$及$z-z_0$的相乘積。我們知道，給定一個複數ℓ，則乘積運算ℓw，$w\epsilon$，可視用為C到C的一個綫性變換，即ℓ可視為綫性變換；反之，從C到C的綫性變換可看為一固定的複數ℓ，並表成乘積ℓw，$w\epsilon C$的形式。所以(2)中的$f'(z_0)$代表從C到C的線性變換作用在$z-z_0$上得到複數$f'(z_0)(z-z_0)$

可見這二種微分最大的差異，在於$df_{z_0}(z-z_0)$及$f'(z_0)(z-z_0)$所實際代表的意義的不同。顯然，如f按(2)式可微分，則f必按(1′)可微分。而且會有下列結果（為什麼？）

$$f'(z_0)(z-z_0)=(\alpha,\beta)\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{bmatrix}=\alpha u_x-\beta u_y+i(\alpha u_y+\beta u_x)$$

$$=(u_x+iu_y)(\alpha+i\beta)\ ,\quad z-z_0=\alpha+i\beta,\ f=u+iv$$

於是，我們的核心問題是：在什麼樣的條件之下，如函數f按(1′)可微分，則必按(2)也可微分？由於$df_{z_0}(z-z_0)=\alpha\, df_{z_0}((1,0))+\beta\, df_{z_0}((0,1))$

所以

$$df_{z_0}(z-z_0)=(\alpha,\beta)\begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix}=(\alpha u_x+\beta u_y,\alpha v_x+\beta v_y)$$

如上式的功用等同於$f'(z_0)(z-z_0)$的功用，即"$df_{z_0}(z-z_0)=f'(z_0)(z-z_0)$"成立，則必須$df_{z_0}(1)=df_{z_0}((1,0))=f'(z_0)$，而$df_{z_0}(i)=df_{z_0}((0,1))=f'(z_0)i$，此二者導出$u_x=v_y$, $u_y=-v_x$。

我們的結論是，<u>僅當$f=u+i\nu=(u,v)$的偏導數滿足所謂的</u>

Cauchy—Riemann <u>方程式</u>（Cauchy—Riemann equations）

$$\begin{aligned} u_x&=v_y \\ u_y&=-v_x \end{aligned} \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

<u>時，f按(1′)的微分才等於按(2)的微分</u>。此時，df_{z_0}按　中自然基底的方陣表示式$[df_{z_0}]$可寫成

$$[df_{z_0}]=\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{bmatrix}$$

$$=\gamma\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},\quad \gamma=\sqrt{u_x^2+u_y^2}\ ,\quad \theta=\tan^{-1}\frac{u_y}{u_x}\cdots\cdots(4)$$

如$\gamma\neq o$，那麼(4)式表示$df_{z_0}=f'(z_0)$是伸縮運動（對所有方向的伸縮率皆為γ）暨旋轉運動(將所有的向量旋轉θ角度)，即直交變換的組合運動。換句話說，<u>只有當df_{z_0}代表如此的運動時，f按二個實變數的微分才會等於按複變數的微分。</u>

<u>第二</u>：令$w=u+iv=f(z)$，規定符號

$$\frac{\partial f}{\partial x}=u_x+iv_x=(u_x,v_x)=df_{z_0}((1,0))=f_x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=u_y+iv_y=(u_y,v_y)=df_{z_0}((0,1))=f_y\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

此時，$df_{z_0}(z-z_0)=\alpha df_{z_0}((1,0))+\beta df_{z_0}((0,1))=\alpha f_x+\beta f_y=(z-z_0)$
$(f_x\cos\theta+f_y\sin\theta)$，
其中 $\theta=\arg(z-z_0)$，於是(1)式可改寫成

$$f(z)=f(z_0)+e^{-i\theta}(f_x\cos\theta+f_y\sin\theta)(z-z_0)+o(z-z_0)$$
$$\theta=\arg(z-z_0) \qquad (1'')$$

如$(1'')$要等同於(2)，則必須

$$f''(z_0)=e^{-i\theta}(f_x\cos\theta+f_y\sin\theta)=df_{z_0}(e^{i\theta})\ ,\quad \theta\in R_i$$

但上式左邊是個常數$f'(z_0)$，但右邊恰是f在z_0點沿著任意單位向量$e^{I\theta}$的方向導數。特別，$df_{z_0}(1)=df_{z_0}(i)$，即爲

$$f_x=-ify\ (=f'(z_0))$$

恰是(3)式的 Cauchy-Riemann 方程式，我們的結論是：僅當f在z_0。點沿著任意單位向量$e^{i\theta}$的方向導數$df_{z_0}(e^{i\theta})$等於常數函數$f'(z_0)$時，f按此二種方式的微分（$(1'')$及(2)才會相同)；這是等價於(3')式的成立。這個結論及其幾何意義同第一項。

第三：由於 $\alpha=\frac{1}{2}[(z-z_0)+(\overline{z}-\overline{z}_0)]$，$\beta=\frac{1}{2i}[(z-z_0)-(\overline{z}-\overline{z}_0)]$，

所以$df_{z_0}(z-z_0)=\alpha f_x+\beta f_y$
$$=\frac{1}{2}(f_x-if_y)(z-z_0)+\frac{1}{2}(f_x+if_y)(\overline{z}-\overline{z}_0)$$

因此，如規定符號：

$$\frac{\partial f}{\partial z}=f_z=\frac{1}{2}(f_x-if_y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=f_{\overline{z}}=\frac{1}{2}(f_x+if_y) \cdots\cdots(6)$$

並稱爲f在z_0點對於z及$\overline{z}$的複微分係數或複導數（回憶$x=\frac{1}{2}(z+\overline{z})$，$y=$
$(z-\overline{z}))$，即視z及$\overline{z}$爲兩個獨立變數，而f爲z及$\overline{z}$的函數；現如對形式的微分算z

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right) \cdots\cdots(7)$$

作微分，即可得(6)式。於是，(1)式又可改寫成

$$f(z)=f(z_\circ)+f_z(z-z_\circ)+f_{\bar z}(\bar z-\bar z_\circ)+o(z-z_\circ) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1'')$$

如上式要等同於(2)式，則必須$f_{\bar z}=o$ ………………………………………………（$3''$）

此即爲 Cauchy－Riemann 方程式的複數式。此時

$$f'(z_\circ)=f_z \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

我們的結論是：僅當$f=f(z,\bar z)$跟$\bar z$無關時（即（$3''$）成立），f按此二種方式的微分（即(2)及（$1'''$））才會相同。幾何意義同前

習　題：

1.在下列各函數中，如在$z_\circ$點按(1)可微分，試寫出對應的（$1'$），（$1''$），（$1'''$）式；並據此判斷是否按(2)式可微分：

$\bar z$，$z|z|$，Rez，$I_m z$，$|z|$，argz，zRez，$zI_m z$，$|z|^2$，$\sqrt{|(xy)|}$($z=x+iy$)，e^z，$\cos z$，$\sin z$，$\log z$。

如可能，並寫出Cauchy－Riemann方程式。

2.設T：$R^2\to R^2$是線性算子（變換）。則可找到唯一的非負算子N：$R^2\to R$（即N對稱，這是說按R^2上自然內積$<,>$有$<Ns,t>=<s,Nt>$，$s,t\in R^2$；而且$<Ns,s>\geq 0$），以及直交算子U：$R^2\to R^2$（即$<U_s,U_t>$：$<s,t>$，$s,t\in R^2$），使得$T=U\circ N$

稱爲算子T的極化分解。這個結論在R^n及C^n中照樣會成立；在C^n中時，U是個單式方陣（unitary matrix）。如U是個直交算子，$r>0$，$S_\circ\in R^2$是固定向量，泛稱變換$S\to rUs+s_\circ$爲相似變換。設f在$z_\circ$點按(1)式可微分。記

$$J_f(z_\circ)=\det\,[\,df z_\circ]$$

稱爲f在$z_\circ$點的Jacobi行列式，試做下列各題：

(a)如$J_f(z_\circ)\neq 0$，找出相似變換及（或）反射變換（$z\to\bar z$），使得$z_\circ=0$，$f(z_\circ)=0$，且（$1''$）可改寫成

$$f(z)=Dx+iy+o(z)\ ,\quad D\geq 1$$

注意，此時$f_x=D$，$f_y=i$

(b) 如 $J_f(z_0)=0$，而 $\max|df_{z_0}(e^{i\theta})|>0$，找出相似變換，使得 $z_0=0$

$f(z_0)=0$　且（$1''$）可改寫成

$$f(z)\,x+o(z)$$

注意，此時 $f_x=1$，$f_y=0$

(c) 找出相似變換，使得 $z_0=0$，$f(z_0)=0$，而且（$1'''$）可改寫成

$$f(z)=|f_z(0)|z+|f_{\bar{z}}(0)|\bar{z}+o(z)$$

注意：此時 $f_z(0)=|f_z(0)|$，$f_{\bar{z}}(0)=|f_{\bar{z}}(0)|$

3. 試用複微分係數(6)來表示各種微分運算法則，如和，乘及組合函數的微分等等。

附註：承數三丙葉國忠同學熱心邀稿（他跟我要了很多次，而我自己也拖了很多次，對不起！），勉強將我的來書初等複變函數論第一册裡的一小節內容由同學們自行整理成本文，以登在系刋上，希望對同學們能有所助益才好。因係摘錄，所以上面文中可能需要更多註明或預備知識，只好從略，可參考理論分析初步第四章第二部份，理論分析上册第三章以及數三乙班刋裡拙文「陋巷雜感」。

林　義　雄　於 1982. 5. 24.

四年級作品：

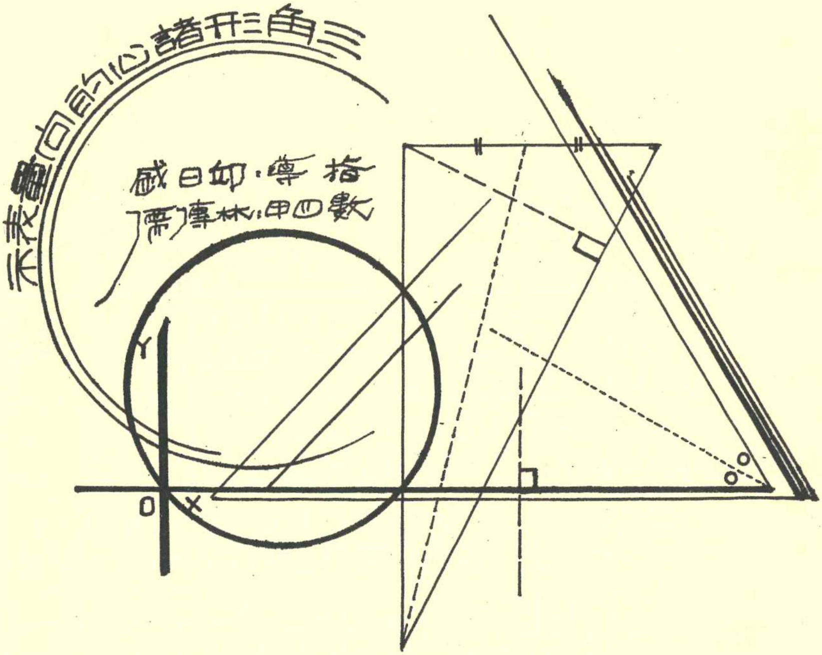
本欄包括“三角形諸心的向量表示”，“圖形學中的多筆畫問題”，“Topics In Geometry”三篇四年級學長們的作品。

你對一個三角形的五個心很清楚嗎？你知道應該如何用向量來表示這五個心？

對於一個簡單的圖形，你可曾想過在何種情況下，它們是多筆畫的情形。

你對球面三角的瞭解有多少呢？你想知道它的一些性質嗎？

看完了以上各篇，你可得到必須的正確概念。



本文介紹平面幾何中三角形的幾個性質；這裡也牽涉到向量與座標幾何。首先，讓我們看

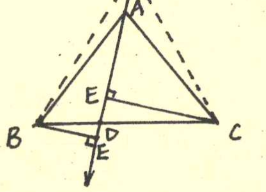
定理 1：設 D 爲 ΔABC 的邊 BC 上一點。若 P（≠A）是直線 AD 上任意一點，則 $a\Delta ABP : a\Delta ACP = \overline{BD} : \overline{CD}$

證明：如圖一，無論 P 在 ΔABC 的內部、外部或邊 BC 上，∵ ΔABP 與 ΔACP 的底皆爲 $\overline{AP}$，我們都有 $a\Delta ABP : a\Delta ACP = \overline{BF} : \overline{CE}$ ……………(1)

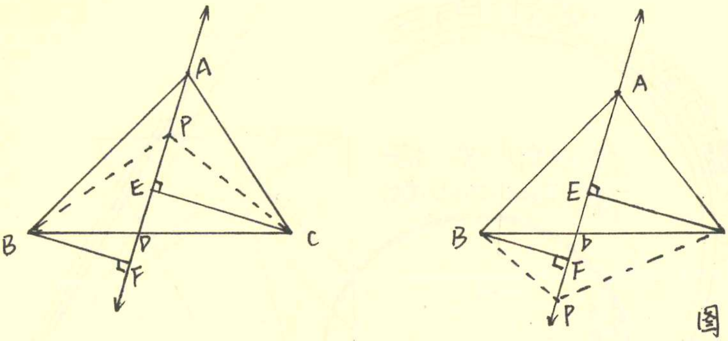
又 ΔBDF 相似於 ΔCDE，

∴ $\overline{BF} : \overline{CE} = \overline{BD} : \overline{CD}$ ………(2)

由(1)及(2)得



$a\Delta ABP : a\Delta ACP = \overline{BD} : \overline{CD}$



圖一

定理２：在定理１中，我們有

$$\overline{AP} : \overline{PD} = (a\Delta ABP + a\Delta ACP) : a\Delta BCP$$

證明：由 ΔABP 來看，可得　　$\overline{AP} : \overline{PD} = a\Delta ABP : a\Delta BDP$ …………(3)

（$\because \Delta ABP$ 與 ΔBDP 的高皆爲 BF）

由 ΔACP 來看，可得　　$\overline{AP} : \overline{PD} = a\Delta ACP : a\Delta CDP$ ………… (4)

由(3)，(4)及合比定律得

$\overline{AP} : \overline{PD} = (a\Delta ABP + a\Delta ACP) : (a\Delta BDP + \Delta CDP) = (a\Delta ABP + a\Delta ACP)$

$: a\Delta BCP$

例１：ΔABC 中，P 爲中線 $\overline{AD}$ 之中點，$\overrightarrow{BP}$ 交 $\overline{AC}$ 於 H，求 $a\Delta APH : a\Delta ABC$

解：設 $a\Delta BCP = \ell$，$a\Delta CAP = m$，$a\Delta ABP = n$。則

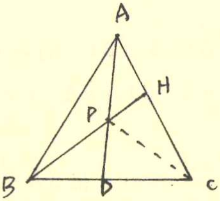
$(m+n) = \ell = 1:1$　　（定理２）

$m : n = 1:1$　　　　（定理１）

$\therefore \ell : m : n = 2 : 1 : 1$

$\overline{AH} : \overline{HC} = n : \ell = 1 : 2$

故 $a\Delta APH = \frac{1}{3} a\Delta APC = \frac{1}{3}(\frac{1}{4} a\Delta ABC) = \frac{1}{12} a\Delta ABC$



圖二

定理３：設點 P 在 ΔABC 內部。若 $a\Delta BCP : a\Delta CAP : a\Delta ABP = \ell : m : n$，則

$\ell\overrightarrow{AP} + m\overrightarrow{BP} + n\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{0}$

證明：如圖三。$\overline{BD} : \overline{DC} = a\Delta ABP : a\Delta CAP = n : m$（定理１）

$\overrightarrow{AD} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}$，………………(5)

$\overline{AP} : \overline{AD} = (a\Delta ABP + a\Delta CAP) : (a\Delta ABP + a\Delta BCP + a\Delta CAP)$

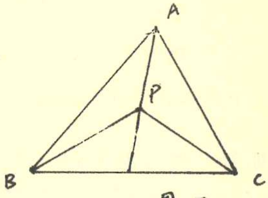
$$=(m+n):(\ell+m+n) \quad (定理2)$$

$$\overrightarrow{AD}=\frac{\ell+m+n}{m+n}\overrightarrow{AP} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

由(5)，(6)得

$$(\ell+m+n)\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}=m(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{BP})+n(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{CP})$$

$$\therefore \ell\overrightarrow{AP}+m\overrightarrow{BP}+n\overrightarrow{CP}=0$$



圖三

事實上，若點P在ΔABC內部　則

$$a\Delta BCP:a\Delta CAP:a\Delta ABP=\ell:m:n \Longleftrightarrow \ell\overrightarrow{AP}+m\overrightarrow{BP}+n\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{0}$$

※對任意一點0，尤其是原點，我們有

$$\ell\overrightarrow{AP}+m\overrightarrow{BP}+n\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{0}\Longleftrightarrow \ell(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})+m(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})+n(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{0}$$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{OP}=\frac{\ell}{\ell+m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{\ell+m+n}\overrightarrow{OB}+\frac{n}{\ell+m+n}\overrightarrow{OC}$$

因此，若給定A，B，C的座標，我們很容易地得到點P的座標。

例2：不共線三點O，A，B。設 $\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OB}$，且E是 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 的交點。試將 $\overrightarrow{OE}$ 表為 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 的線性組合。

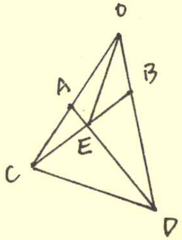
解：$a\Delta OCE:a\Delta CED=\overline{OB}:\overline{BD}=1:2$ （定理1）

$a\Delta CED:a\Delta OED=\overline{CA}:\overline{AO}=1:1$

$\therefore a\Delta OCE:a\Delta CED:a\Delta OED=1:2:2$

$$\overrightarrow{OE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OO}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OD} \quad (定理3)$$

$$=\frac{2}{5}(2\overrightarrow{OA})+\frac{1}{5}(3\overrightarrow{OB})=\frac{4}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$$



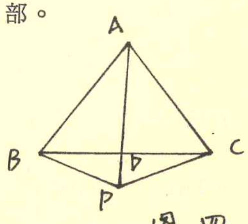
定理4：如圖四，點P在∠BCA內部，但不在ΔABC內部。

若 $a\Delta BCP:a\Delta CAP:a\Delta ABP=\ell:m:n$ 則

$$(-\ell)\overrightarrow{AP}+m\overrightarrow{BP}+n\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{0}$$

證明：$\overline{BD}:\overline{DC}=a\Delta ABP:a\Delta ACP=n:m$ （定理1）

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{m+n}(m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$



圖四

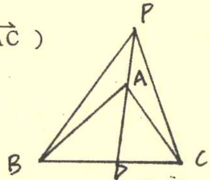
$$\overline{AP}:\overline{DP}=(a\Delta ABP+a\Delta CAP):a\Delta BCP=(m+n):\ell \quad (定理2)$$

∴ $\overline{AD}:\overline{AP}=(m+n-\ell):(m+n)$ ……………(8)

由(7)及(8)得 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{m+n}{m+n-\ell}\,\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{m+n-\ell}\,(m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC})$

∴ $(m+n-\ell)\,\overrightarrow{AP}=m(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{BP})+n(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{CP})$

即 $(-\ell)\overrightarrow{AP}+m\overrightarrow{BP}+n\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{0}$



圖五

如果 P 的位置如圖五所示且 $a\Delta BCP:\Delta CAP:a\Delta ABP=\ell:m:n$ 則 $(-\ell)\overrightarrow{AP}+m\overrightarrow{BP}+n\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{0}$ ，試自證之

爲了方便起見，我們規定：

ΔABC 中，$\angle CAB=\alpha$，$\angle ABC=\beta$，$\angle BCA=\gamma$，$\overline{BC}=a$ ，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$ 。

定理 5：若 I 是 ΔABC 的內心，則 $\sin\alpha\,\overrightarrow{AI}+\sin\beta\,\overrightarrow{BI}+\sin\gamma\,\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{0}$

證明：設 γ 是 ΔABC 的內切圓半徑，則

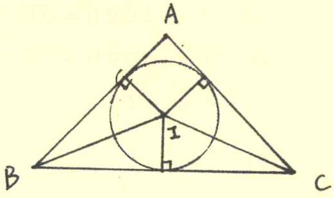
$a\Delta BCI:a\Delta CAI:a\Delta ABI=$

$(\frac{1}{2}a\gamma):(\frac{1}{2}b\gamma):(\frac{1}{2}c\gamma)$

$=a:b:c=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$

由定理 3 得

$\sin\alpha\,\overrightarrow{AI}+\sin\beta\,\overrightarrow{BI}+\sin\gamma\,\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{0}$



圖六

註：在※中令 O = A ，P = I 　則得

$\overrightarrow{AI}=\dfrac{b}{a+b+c}\,\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\,\overrightarrow{AC}$

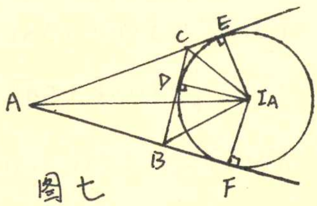
定理 6：若 I_A 是 ΔABC 的傍心，I_A 在 $\angle CAB$ 的內部，則

$(-\sin\alpha)\overrightarrow{AI_A}+\sin\beta\,\overrightarrow{BI_A}+\sin\gamma\,\overrightarrow{CI_A}=\overrightarrow{0}$

證明：$\overline{DI_A}=\overline{EI_A}=\overline{FI_A}$

$a\Delta BCI_A:a\Delta CAI_A:aABI_A=$

$(\frac{1}{2}a\cdot\overline{DI_A}):(\frac{1}{2}b\cdot\overline{DE_A}):(\frac{1}{2}c\cdot\overline{FI_A})$



圖七

$= a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$

由定理4得證

$$(-\sin\alpha)\overrightarrow{AI_A} + \sin\beta\,\overrightarrow{BI_A} + \sin\gamma\,\overrightarrow{CI_A} = \vec{0}$$

定理7：若O是ΔABC的外心，則$\sin 2\alpha\,\overrightarrow{AO} + \sin 2\beta\,\overrightarrow{BO} + \sin 2\gamma\,\overrightarrow{CO} = \vec{O}$

證明：若O在ΔABC內部，如圖八，則

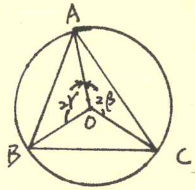
$\angle BOC = 2\alpha$，$\angle COA = 2\beta$，$\angle AOB = 2\gamma$

令R表ΔABC外接圓的半徑

$a\Delta BCO : a\Delta CAO : a\Delta ABO =$

$\frac{1}{2}R^2\sin 2\alpha : \frac{1}{2}R^2\sin 2\beta : \frac{1}{2}R^2\sin 2\gamma$

$= \sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma$



圖八

$\therefore \sin 2\alpha\,\overrightarrow{AO} + \sin 2\beta\,\overrightarrow{BO} + \sin 2\gamma\,\overrightarrow{CO} = \vec{O}$

………（定理3）

若O在ΔABC外部，如圖九，則

$\angle AOB = 2\angle BCA = 2\gamma$ （同對$\overset{\frown}{AB}$）

$\angle COA = 2\angle ABC = 2\beta$ （同對$\overset{\frown}{AC}$）

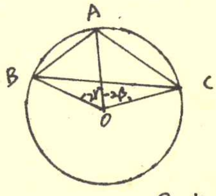
$\angle BOC = \angle AOB + \angle COA = 2\gamma + 2\beta$

$= 2\pi - 2\alpha$

$\therefore a\Delta BCO : a\Delta CAO : a\Delta ABO$

$= \frac{1}{2}R^2\sin(2\pi - 2\alpha) : \frac{1}{2}R^2\sin 2\beta$

$: \frac{1}{2}R^2\sin 2\gamma$



圖九

$= (-\sin 2\alpha) : \sin 2\beta : \sin 2\gamma$

故$(-(-\sin 2\alpha))\,\overrightarrow{AO} + \sin 2\beta\,\overrightarrow{BO} + \sin 2\gamma\,\overrightarrow{CO} = \vec{O}$（定理4）

則 $\sin 2\alpha\cdot\overrightarrow{AO} + \sin 2\beta\,\overrightarrow{BO} + \sin 2\gamma\,\overrightarrow{CO} = \vec{0}$

例3：設ΔABC 之三頂點為$A(-4,2)$，$B(1,3)$，$C(-5,6)$求

(i)ΔABC 的內心 $I(x,y)$，(ii)ΔABC 的外心 $T(x,y)$。

解　$a=3\sqrt{5}$　，$b=\sqrt{17}$，$c=\sqrt{26}$

$$\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma = \left(2a\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) : \left(2b\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)$$

$$: \left(2c\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$$

$$= a^2(b^2+c^2-a^2) : b^2(c^2+a^2-b^2)$$

$$: c^2(a^2+b^2-c^2)$$

$$= (-5) : 51 : 52$$

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{3\sqrt{5}+\sqrt{17}+\sqrt{26}}\left(3\sqrt{5}(-4,2)+\sqrt{17}(1,3)+\sqrt{26}(-5,6)\right)$$

$$\overrightarrow{OT} = \frac{-5}{98}(-4,2)+\frac{51}{98}(1,3)+\frac{52}{98}(-5,6) = \left(\frac{-189}{98},\frac{445}{98}\right)$$

$$= \left(-\frac{27}{14},\frac{445}{98}\right)$$

例4：設O是ΔABC的外心，$a=4$，$b=5$，$c=6$　求將$\overrightarrow{AO}$ 表成$\overrightarrow{AB}$ 與

$\overrightarrow{AC}$的線性組合。

解　$a^2 : b^2 : c^2 = 16:25:36$　，$\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma = (16\times$

$45):(25\times 27):(36\times 5) = 16:15:4$

$$\therefore \overrightarrow{AO} = \frac{15}{35}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{35}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{35}\overrightarrow{AC}$$

定理8：設ΔABC 不是直角三角形，且H是ΔABC的垂心。則

$$\tan\alpha\,\overrightarrow{AH} + \tan\beta\,\overrightarrow{BH} + \tan\gamma\,\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{0}$$

證明：若H在ΔABC內部，如圖十，則

$a\Delta BCH : a\Delta CAH = \overline{BF} : \overline{FA} = \overline{CF}\ \cot\beta : \overline{CF}\cot\alpha$

$= \tan\alpha : \tan\beta$

$a\Delta CAH : a\Delta ABH = \overline{CD} : \overline{DB} = \overline{AD}\cot\gamma : \overline{AD}\ \cot\beta$

$= \tan\beta : \tan\gamma$

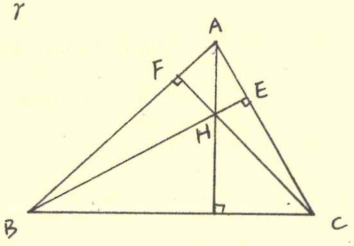


圖 十

$\therefore a\Delta BCH : a\Delta CAH : a\Delta ABH = \tan\alpha : \tan\beta : \tan\gamma$

由定理3得 $\tan\alpha\ \overrightarrow{AH} + \tan\beta\ \overrightarrow{BH} + \tan\gamma\ \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{0}$

若H在 ΔABC 外部，如圖十一，則

A為 ΔHBC 之垂心，$\angle BHC = \pi - \angle EAF$

$= \pi - \angle CAB = \pi - \alpha \quad \angle HBC = \frac{\pi}{2} - \angle BCA$

$= \frac{\pi}{2} - \gamma$ ，$\angle BCH = \frac{\pi}{2} - \angle ABC = \frac{\pi}{2} - \beta$

故 $\tan(\pi - \alpha)\ \overrightarrow{HA} + \tan\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)\ \overrightarrow{BA}$

$+ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\ \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$

$-\tan\alpha\ \overrightarrow{HA} + \cot\gamma\ (\overrightarrow{BH} -$

$\overrightarrow{AH}) + \cot\beta\ (\overrightarrow{CH} - \overrightarrow{AH})$

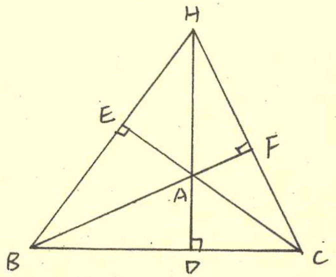
$= \overrightarrow{0}$

$\therefore (\tan\alpha - \cot\gamma - \cot\beta)$

$\overrightarrow{AH} + \cot\gamma\ \overrightarrow{BH} + \cot\beta$

$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{0}$

等式兩邊皆乘以 $\tan\beta\ \tan\gamma$ 得



圖十一

$(\tan x\ \tan\beta\ \tan\gamma - \tan\beta - \tan\gamma)\ \overrightarrow{AH} + \tan\beta\ \overrightarrow{BH} + \tan\gamma$

$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{0}$

$\therefore \tan\alpha\ \overrightarrow{AH} + \tan\beta\ \overrightarrow{BH} + \tan\gamma\ \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{0}$

$(\because \alpha + \beta + \gamma = \pi \quad \therefore \tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma = \tan\alpha +$

$\tan\beta + \tan\gamma\ )$

例 5：設ΔABC 三頂點為$A(1,-2)$，$B(6,10)$，$C(-8,10)$

求$\angle CAB$ 內部的傍心 $I_A(x, y)$

解 $a = 14$， $b = 15$， $c = 13$

$$\overrightarrow{OI_A} = \frac{-14}{42}(1,-2) + \frac{15}{42}(6,10) + \frac{13}{42}(-8,10)$$

$$= (\frac{-28}{42}, \frac{308}{42})$$

$$= (-\frac{2}{3}, \frac{14}{3})$$

例 6：設ΔABC 三頂點為$A(-4,2)$，$B(1,3)$，$C(-5,6)$

求垂心 $H(x, y)$

解 $a^2 = 45$， $b^2 = 17$， $c^2 = 26$

$$\tan\alpha : \tan\beta : \tan\gamma = \frac{2abc}{b^2+c^2-a^2} = \frac{2abc}{c^2+a^2-b^2} = \frac{2abc}{a^2+b^2-c^2}$$

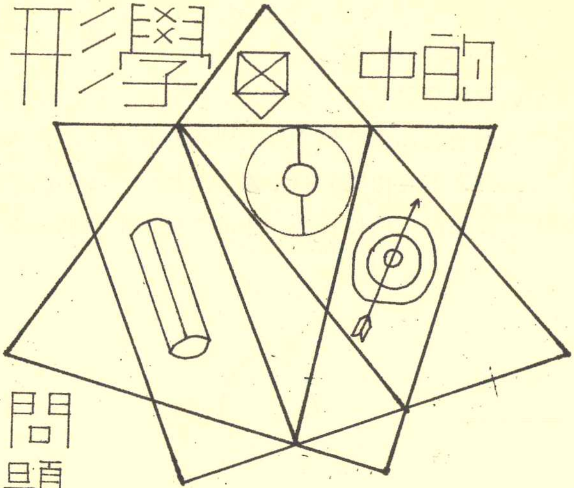
$$= (-\frac{1}{2}) : \frac{1}{54} : \frac{1}{36} = (-54) : 2 : 3$$

$$\therefore \overrightarrow{OH} = \frac{-54}{49}(-4,2) + \frac{-2}{49}(1,3) + \frac{-3}{49}(-5,6)$$

$$= (\frac{229}{49}, \frac{-132}{49})$$

以上幾個例子，當然也可用其他方法解出。在本文裡最重要的是定理 1，定理 2 及其應用。

圖形學中的多筆畫問題

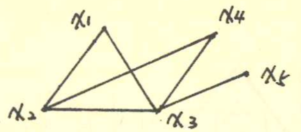


指導老師：吳森原
數四乙 廖哲健

我們先對“圖形”下個簡單的定義：設 $V=(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)$ 爲頂點的集合，$E=(e_1, e_2, \cdots\cdots e_m)$ 爲邊的集合，則 $G=(V, E)$ 爲一個圖形；當 $|V|=P$，$|E|=q$ 時，我們亦稱 G 爲一個 (p, q) 圖形。在此，我們要特別强調的是：我們僅就“簡單圖形”來加以討論。所謂簡單圖形就是一個圖形中沒有“迴邊”與“重邊”（如圖(一)）的存在

圖(一)

給定圖形 G，我們再給個定義如下：設頂點 μ 與 ν 有一邊 $\{\mu, \nu\}$ 連接時，則稱 μ 與 ν 是相鄰的，特別稱 μ，ν 入射於邊 $\{\mu, \nu\}$，否則稱爲不相鄰。設 G 如圖(二)所示，則 x_1 與 x_2、x_3 相鄰，但 x_1 與 x_4 或 x_5 則不相鄰。



圖(二)

在圖(二)中，我們要注意到一點：邊$\{x_1, x_3\}$與$\{x_2, x_4\}$似乎有一個交點，但在我們討論中，我們稱其爲虛交點（即交點不存在），不列入頂點的集合之內。

綜合來說，一個圖形就是由點與綫（邊）所組成，而點的位置並不固定，綫也不限定直綫，也不計其長度，所以在圖(三)中的三個圖形我們均視爲同一圖形。

圖(三)

現在我們對圖形已經有個了解了，底下我們再針對一個圖形來下一些定義。設 $G=(V, E)$ 是一個圖形，若 $x_0 \in V$，則 x_0 的價數或次數（Valency or degree）以 $d(x_0)$ 表示，定之爲 $d(x_0) = |\{e \in E \mid x_0 \text{入射於} e\}|$。

設 $G=(V, E)$ 是一個圖形，且序對 $(V_1, V_2 \cdots\cdots, V_k)$，若(1) $V_1, V_2, \cdots\cdots V_k \in V$ (2) V_i 與 V_{i+1} 是相鄰的，$i=1, 2 \cdots\cdots k-1$，則稱此序對爲一條道路（Walk），其長度爲 $k-1$，若 $V_1 \neq V_k$ 則稱其爲開放道路。若 $V_1 = V_k$ 則稱其爲封閉道路。

設 $(V_1, V_2, \cdots\cdots V_k)$ 是一條道路，若此條道路所經之各邊均相異，則稱之爲路徑（trail）。

設 $(V_1, V_2, \cdots\cdots V_k)$ 是一條道路，若此條道路所徑之各邊頂點均相異則稱之爲路綫（Path）。

設 G 是一個圖形，若 G 中任意兩點必存在一條路綫連接之，則稱 G 是一個連接圖形。

到此，我們把定義介紹清楚了，底下我們就來看看一些必須的定理。根據定義，若 G 不是一個連接圖形，則我們可將此圖形分開討論，所以底下我們所討論的圖形皆以連接圖形來說明。

定理(一)　設 $G=(V, E)$ 是一個圖形，則 $\sum_{x \in V} d(x) = 2|E|$

證　因爲 $d(x)$ 表示 x 入射於圖形 G 中的邊之邊數，且每一個邊均使圖形 G 中

的兩相異點的價數各增加 1 ，所以當圖形 G 中邊的個數每增加 1 ，則其點的價數之總和就增加 2 ，所以我們就得到

$$\sum_{x\in V} d(x) = 2\,|E|$$

定理(二) 設 G＝(V, E) 是一個圖形，則 G 中價數為奇數的頂點必為偶數。

證 設 $|V| = n$ ，且 G 中價數為奇數的頂點個數為 m ，則 G 中價數為偶數的頂點個數為 $n-m$ ，由定理(一)可知：$\sum_{x\in V} d(x) = 2\,|E|$ ，即 G 中所有頂點的價數和為一偶數。而 G 中價數為偶數的頂點之價數和當然為一個偶數，所以 G 中價數為奇數的頂點之價數和必為偶數。又因為其每一頂點的價數均為奇數，所以其個數必為偶數。

底下，我們再介紹兩個定理，做為我們本文所要討論主題的預備定理。

定理(三) 在連接圖形 G 中，下列兩條件為同義：

(I) G 中存在一條封閉的路徑包含 G 的每一個邊。

(II) G 中每一頂點的價數均為偶數。

證 (I)⇨(II)設路徑 C 包含 G 的每一個邊。設 x_0 是 G 的一個頂點，則 x_0 每次出現在 C 中時，必有兩個邊與之相連，故 x_0 在 C 中出現次數之 2 倍即為 x_0 在 G 中之價數，所以 $d(x_0)$ 為偶數。

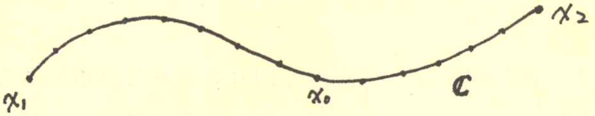
(II)⇨(I)設 x_0 為 G 的一個頂點，因為 G 中每一頂點的價數均為偶數，所以由 x_0 可得一條封閉的路徑 C ，以 x_0 為起點與終點，且 C 之長度為最大值。若 C 包含 G 的每一個邊，則已得證。否則，令 $G' = G - C$（去掉 C 中各邊，點不去掉），則 G' 中每一頂點的價數對 G' 而言亦為偶數，故在 G' 中必存在一條封閉路徑 C'，且 C' 與 C 至少有一個共同的頂點，設為 ν 。則由 C 與 C' 可以形成一個長度為 C 與 C' 之和的封閉路徑 C''。但其長度大於 C ，矛盾。

定理(四) 在連接圖形中，下列兩條件為同義：

(I) G 中存在一條開放路徑包含 G 的每一個邊。

(II) G 中價數為奇數之頂點恰有兩個。

證 (I)⇨(II)設開放路徑 C 包含 G 的每一個邊。



依定理(三)的證法，我們可知除了路徑 C 的兩個端點 x_1，x_2 之外，其餘各點 x_0 在 C 中每出現一次其價數就增加 2，故除了 x_1，x_2 兩點外，其餘各點的價數均為偶數。即 G 中價數為奇數之頂點恰有兩個。

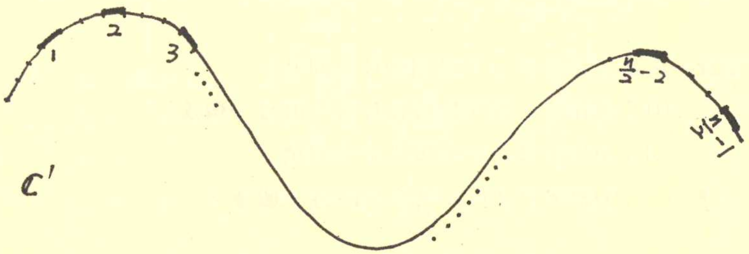
(II)⇨(I) 設 μ，ν 是 G 中價數為奇數之兩個頂點。在 G 中加上由 μ 與 ν 二頂點所連接的綫，則此圖形中每一頂點之價數均為偶數。由定理(三)，我們知必存在一條封閉路徑 C′ 包含 G 中的每一個邊。令 $C = C' - \{\mu, \nu\}$，則 C 為一開放路徑，且包含 G 中的每一個邊。

藉著上面的定理，我們就來研究一個圖形能夠被幾筆畫來完成。這裡我們要說明一點，所謂圖形 G 為 n 筆畫意即：至少要用 n 條彼此互斥的開放路徑才能將圖形 G 的每一邊蓋住。

底下，我們就可以得到我們所要探討的主題。

定理： 若一圖形 G 中價數為奇數的頂點個數為 n，則此圖形必為 $\frac{n}{2}$ 筆畫圖形。

證： 設此圖形為 n 筆畫圖形，由定理(二)可知，n 必為偶數，所以 $\frac{n}{2}$ 必為整數。我們若在此 n 個頂點中任取 $n-2$ 個頂點，以每兩點為一組加上一邊，（共加上 $\frac{n}{2}-1$ 個邊），得到新圖形 G′，則 G′ 中價數為奇數的頂點個數恰有兩個，依定理(四)可知，G′ 中存在一條開放路徑 C′ 包含 G′ 的每一個邊。（如圖，圖中加粗綫部分表示所加上的邊）



在路徑C′中去掉所加上的$\frac{n}{2}-1$個邊，則將此路徑分成$\frac{n}{2}$條開放路徑，而且此$\frac{n}{2}$條路徑恰爲G中的$\frac{n}{2}$條開放路徑，即G可爲$\frac{n}{2}$筆畫圖形。所以若G爲m筆畫圖形，必有$m \leqq \frac{n}{2}$……(1)

其次我們欲證　$m \geqq \frac{n}{2}$。

由上面證明，在G中我們可確定$\frac{n}{2}$條開放路徑包含G中所有的邊，且此$\frac{n}{2}$條路徑的交集不包含G中任何一邊，如此我們發現那些價數爲奇數的頂點必爲某一路徑的始點或終點，而且我們已知一條開放路徑的始點與終點各爲一個。因爲我們有n個如此的頂點，所以至少需要$\frac{n}{2}$條路徑才能包含G中的每一個邊，亦即$m \geqslant \frac{n}{2}$…………(2)

由(1)(2)可知　$m = \frac{n}{2}$。

參考資料：

1. 諸嘉明編著：郵遞問題與奇偶點圖上作業法，人間文化事業公司，民國68年出版。
2. J. A. Bondy and U.S.R. Murty: Graph Theory with Appotications, Macmillan prers. 1976.

INTERESTING TOPICS IN GEOMETRY

指導：邱日盛
數四丙：T.M.G.

The follwoing article is adapted from various sources. As the title suggested, it deals with some elementary, but interesting, methods in geometry which, probably, you have not yet learned from the theoretical teatbooks. Though they may be of great importance in application, we present them just for entertainment.

I. Topics about Spherical Trigonometry:

A spherical triangle is constructed by three arcs of great circles. These three arce are called the sides of the spherical triangle. Each of the three psints where two arcs meet is called a vertex of the spherical triangle.

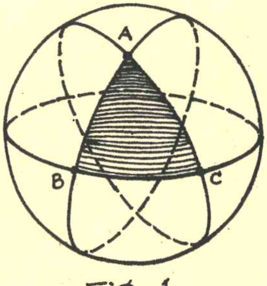


Fig. 1

Figure 1 shows an example of a spherical triangle ABC. We use the lowercase letters a, b, and c to denote the three sides $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, and $\overset{\frown}{AB}$ respectively.

Suppose we have a spherical triangle ABC. Draw the tangent lines of $\overset{\frown}{AB}$ and $\overset{\frown}{AC}$ at A with directions to the points B and C respectively. (that is, the tangent lines should lie on the plane where the arcs lie and point, from A, to the third side). The angle between these two lines is defined to be the angle $\angle$ A. Similarly, we can measure $\angle$ B and $\angle$C. Please refer to figure 2. Notice that $\angle$A is exactly the angle between the two planes AOB and AOC.

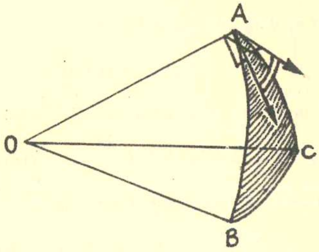


Fig. 2

Suppose we have a spherical triangle ABC. Let A', B', and C' be the poles of the arcs $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, and $\overset{\frown}{AB}$ respectively. Since through two points on the surface of a sphere, not being the two endpoints of a diameter, there is exactly one great circle, we can construct the spherical triangle A'B'C'. It is called the polar triangle of the original spherical triangle ABC. See figure 3.

Since B' and C' are poles of the arce $\overset{\frown}{CA}$ and $\overset{\frown}{AB}$, the arcs $\overset{\frown}{AB'}$ and $\overset{\frown}{AC'}$ are all quadrant arcs. Thus A is also a pole of the arc $\overset{\frown}{B'C'}$. Similarly, B and C are poles of the arcs $\overset{\frown}{C'A'}$ and $\overset{\frown}{A'B'}$. This shows that the spherical triangle ABC is also the polar triangle of the spherical triangle A'B'C'.

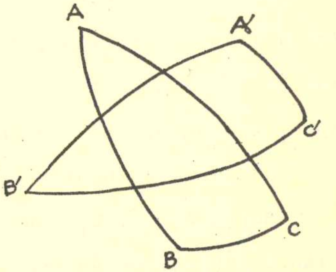


Fig. 3

Now, we call the region between two great circles a lune. Refer to figure 4 and 5.

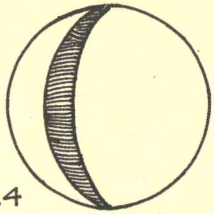


Fig.4

The angle between the two great circles is called the vertex angle of the lune. The area of a lune is clearly in proportion to its vertex angle.

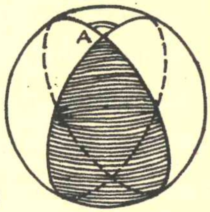


Fig.5

The whole surface of a sphere with radius γ may be viewed as a lune with vertex angle 2π and area $4\pi\gamma^2$. Thus a lune with vertex angle A should have area $4\pi\gamma^2(\frac{A}{2\pi}) = 2A\gamma^2$

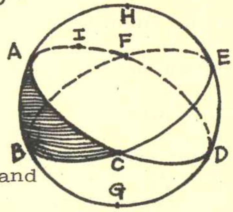


Fig.6

Suppose we got a spherical triangle ABC on a sphere with radius γ. Referring to figure 6, we see that area ABC + area BGDC = area ABGDC = $2A\gamma^2$,

area AB + area AHEC = area BCEHA = $2B\gamma^2$, and

area ABC + area BFIA = area CAIFB = $2C\gamma^2$.

Adding the above three equalities, we get 2 areaABC + area of the hemisphere = $2(A+B+C)\gamma^2$. Thus the area of a spherical triangle ABC is

$$2(A+B+C-\pi)\gamma^2$$

(From this we see that, for a spherical triangle ABC, the sum of its angles is greater than 180°). The number $A+B+C-\pi$ is called the spherical excess of the spherical triangle ABC.

II. Topics about complex numbers in geometry:

Suppose z_0, z_1, and z_2 are three distinct points in the complex plane. The oriented angle from the vector $\overrightarrow{z_0 z_1}$ to the vector $\overrightarrow{z_0 z_2}$ is Arg $(z_2 - z_0)$ - Arg $(z_1 - z_0)$ = Arg $(z_2 - z_0 / z_1 - z_0)$.

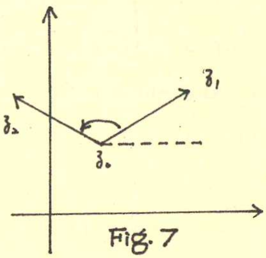


Fig. 7

Clarly, z_0, z_1 and z_2 are collinear if and only if the angle between $\overrightarrow{z_0 z_1}$ and $\overrightarrow{z_0 z_2}$ is 0 or π, that is, Arg $(z_2 - z_0 / z_1 - z_0)$ = 0 or π. This means that

$z_2 - z_0 / z_1 - z_0$ is real. In all, three distinct points z_0, z_1 and z_2 are collinear if and only if $z_2 - z_0 / z_1 - z_0$ is real.

Now, consider four distinct points z_0, z_1, z_2, and z_3 in the complex plane.

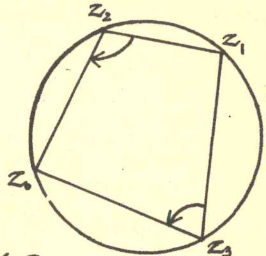
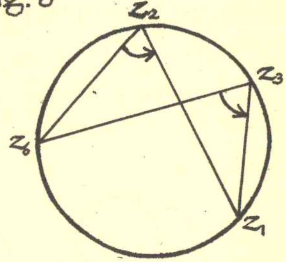


Fig. 8



These four points lie on a circle if and only if $\angle(\overrightarrow{z_0 z_2}, \overrightarrow{z_1 z_2}) - \angle(\overrightarrow{z_0 z_3}, \overrightarrow{z_1 z_3}) = 0$ or $\pm\pi$. However, $\angle(\overrightarrow{z_0 z_2}, \overrightarrow{z_1 z_2}) = \operatorname{Arg}(z_2 - z_0 / z_2 - z_1)$ and $\angle(\overrightarrow{z_0 z_3}, \overrightarrow{z_1 z_3}) = \operatorname{Arg}(z_3 - z_0 / z_3 - z_1)$. Thus the above condition can be written as $\operatorname{Arg}(z_2 - z_0 / z_2 - z_1) - \operatorname{Arg}(z_3 - z_0 / z_3 - z_1) = 0$ or $\pm\pi$, that is, $\operatorname{Arg}(z_2 - z_0 / z_2 - z_1, z_3 - z_1 / z_3 - z_0) = 0$ or $\pm\pi$. This means that $z_2 - z_0 / z_2 - z_1, z_3 - z_1 / z_3 - z_0$ is real. Hence four distinct points z_0, z_1, z_2, and z_3 are on a circle if and only if $z_2 - z_0 / z_2 - z_1$, $z_3 - z_1 / z_3 - z_0$ is real.

For the above work, we can prove some theorems about circles and lines in a much easier way. We just give one example.

Let four circles S_1, S_2, S_3, and S_4 be given in the complex plane. S_1 and S_2 intersect at z_1 and W_1. S_2 and S_3 intersect at S_4 intersect at z_3 and W_3. S_4 and S_1 intersect at z_4 and W_4.

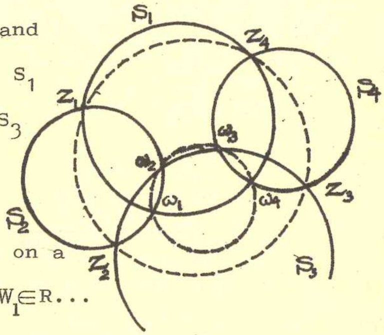


Fig. 9

Since z_1, W_2, z_2, and W_2 lie on a circle, $z_1 - z_2 / W_2 - z_2$, $W_2 - W_1 / z_1 - W_1 \in R$ ....(1) Similarly, $z_2 - z_3 / W_3 - z_3$, $W_3 - W_2 / z_2 - W_2 \in R$ ......(2), $z_3 - z_4 / W_4 - z_4$, $W_4 - W_3 / z_3 - W_3 \in R$ ......(3), and $z_4 - z_1 / W_1 - z_1$, $W_1 - W_4 / z_4 - W_4$ ....(4). Computing (1)/(2). (3)/(4), we get $(z_1 - z_2$

$/ z_3 - z_2 , z_3 - z_4 / z_1 - z_4)\ (W_1 - W_2 / W_3 - W_2 , W_3 - W_4 / W_1 - W_4) \in R.$ Consequently, $z_1 - z_2 / z_3 - z_2 , z_3 - z_4 / z_1 - z_4$ is real if and only if $W_1 - W_2 / W_3 - W_2 \cdot W_3 - W_4 / W_1 - W_4$ is real. In other words, z_1 , z_2 , z , and z_4 lie on a circle if and only if W_1 , W_2 , W_3 , and W_4 lie on a circle.

III. Topics about Apollonius circle:

Suppose three circles are given in a plane. We want to find a circle tangent to each of the three circles simultaneously. In case such a circle exists, it will be called the Apollonius circle of the three given circles. In special case, the given circle may be a point (with radius 0) or a line (with radius ∞). Refer to Figure 10.

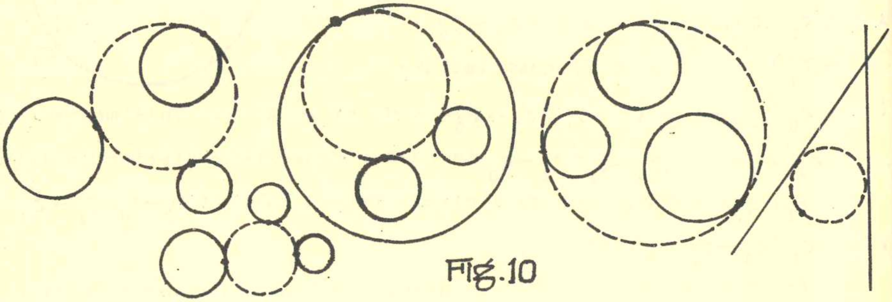


Fig.10

Here, we would use circular inversion transformation to solve it geometrically.

Let C be a given circle in the plane with center O and radius γ . The transformation of points in the plane Tc: $P \to p'$ such that P' lies on $\overleftrightarrow{OP}$ and $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \gamma^2$ for those p ints $P \neq O$, and Tc: $O \to \infty$ (the point at infinity), is called a (circular) inversion transformation (w.r.t. the circle C). The center O is called the center of inversion.

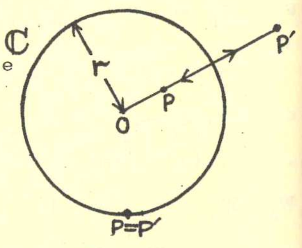


Fig.11

Clearly, the points inside the circle will be transformed into points outside the circle and vice versa: The points on the circle remain fixed.

How to construct the inversion point by rule and compass only?

Case (1): P is outsicle a circle C with center O and radius γ. Draw a circle with center P and radius $\overline{OP}$. It intersects C at R and S. Draw two circles with centers R and S and radii γ. They intersect each other a P', P' is just the inversion point of P. Proof is omitted. You only want to check O, P, and P are collinear and Δ ORP' $\simeq$ Δ RPO.

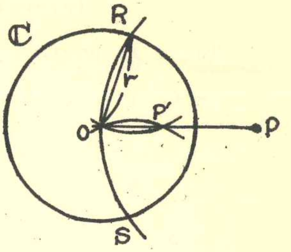


Fig. 12

Case (2): P is inside a circle C with center O and radius γ, but, the circle with center P and radius $\overline{OP}$ intersects C at two points. The steps and proof is similar to those of case (1).

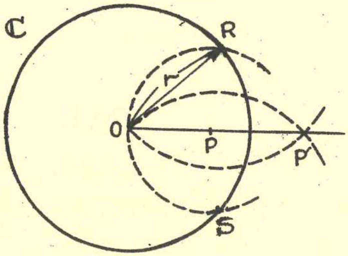


Fig. 13

Case (3): P is inside a circle with center O and radius γ, but, the circle with center P and radius $\overline{OP}$ doesn't intersect C at two points.

In such case, extend $\overline{OP}$ to some multiple, say $\overline{OR} = n \cdot \overline{OP}$ ($n \in Z^{+}$), such that R is outside C.

Construct the inversion point R' of R. By $\gamma^2 = \overline{OR'} \cdot \overline{OR} = \overline{OR'} \cdot (n \cdot \overline{OP}) = (n \cdot \overline{OR'}) \cdot \overline{OP}$, we see that the point P', where $\overline{OP'} = n \cdot \overline{OR'}$, is the inversion point of P.

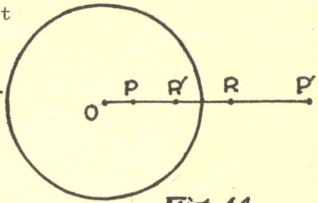


Fig. 14

There is another way of constructing the inversion point.

Case (1): P is outside a circle C with center O and radius γ.

Draw, with rule and compass only, the two tangent lines of C through P. The two tangent points are A and B. Join $\overline{AB}$ and $\overline{OP}$. The point of intersection P' is the inversion point of P.

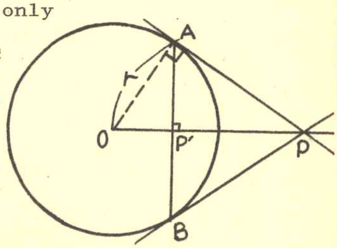


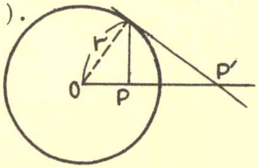
Fig. 15

To prove this, we just notice that $\Delta\, OAP \sim \Delta\, OP'A$.

Case (2): P is inside a circle C with center O and radius γ.

Just reverse the steps in case (1).

Fig. 16



We're particularly interested in the image of a circle, passing through the inversion center O, under the inversion transformation.

Draw the diameter of the circle passing through O with one end point O. Suppose the other end point is A. Construct the inversion point A' of A. Choose any P on the described

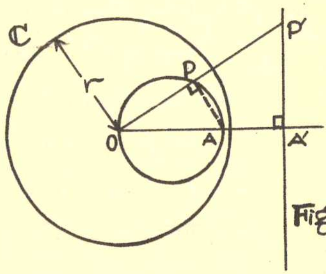


Fig. 17

circle. Let p'(be the inversion point of P.

$\overline{OP}\ \overline{OP'} = \gamma^2 = \overline{OA}.\overline{OA'}$ $\quad\overline{OP}/\overline{OA'} = \overline{OA}/\overline{OP'}$ Δ OPA$\sim\Delta$OA'P' . Since $\angle$ OPA = 90^o no matter where P is, $\overline{P'A'}$ is always perpendicular to $\overline{OA'}$. This tells us that the inversion image of a circle passing through O is a line not passing though O.

If two circles passing throug and tangenting at O, then their inversion image are two parallel lines . (Why?)

Now, we turn our attention to the Apollonius problem. Suppose A , B , and C are three given circles and have an Apollonius circle D. If the three circles' raclii extend (or contract) an amount, then the new Apollonius circle is just a concentric circle D. We use this concept and may assume that B and C tangent to each other

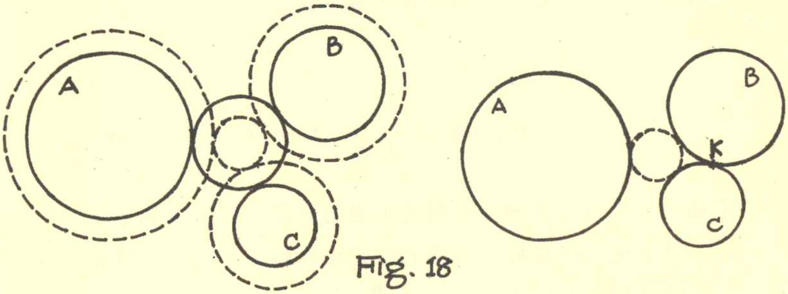


Fig. 18

at K.

Now, perform an inversion tranformation w.r.t. an arbitrary circle with center K. B and C will be transformed into two parallel luies while A into another circle. We can solve the Apollonius problem of this type and draw the Apollonius circle D'. Refer to figure 19. (Notice that all these can be done with only rule and compass.)

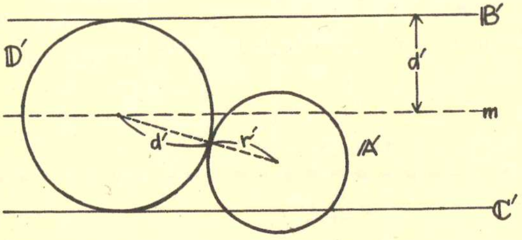


Fig. 19

Under the same inversion transformation, the original Apollonius circle O can be found.

* * *

References: "What is mathematics?" By Courant and Robins.
"Complex Numbers In Geometry." By I.M. Yaglom.
"Spherical Trigonometry." By K.C. Lee.

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

$\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$ 的一個簡單的證明

一般書上對於此定理的證明都是依賴於

$$|\sin h|\leq |h|$$

與 $\lim\limits_{\theta\to 0}\sin\theta=0$, $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos h=1$ 上

下面所證明的方法却並不用到上面的式子，其證明如下：

設 P 表一內接於半徑爲 γ 的圓之內接正 n 邊形的周長

則可得 $P=2n\gamma\sin\dfrac{\pi}{n}$

由平面幾何學中可知

當 $n\to\infty$ 時，此正 n 邊形即構成一以 γ 爲半徑之圓

即 $\lim\limits_{n\to\infty} P=2\pi\gamma$

i.e. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{n}=1$

令 $\theta=\dfrac{\pi}{n}$ 則 $n\to\infty \Rightarrow \theta\to 0$ 故得 $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

三年級作品欄：

本欄包括了“機率與統計概念”，“數論上歸納法之應用”，“高斯消去法之程式設計”，“代數的連貫性”，“π之表示法”，“賽跑風波”等六篇。

你對機率和統計的觀念是否很清楚？你是否想進一步的去瞭解機率與統計正確的基本概念？

你對歸納法的來龍去脈很清楚嗎？你曾想到它是如何的應用到數論上的？

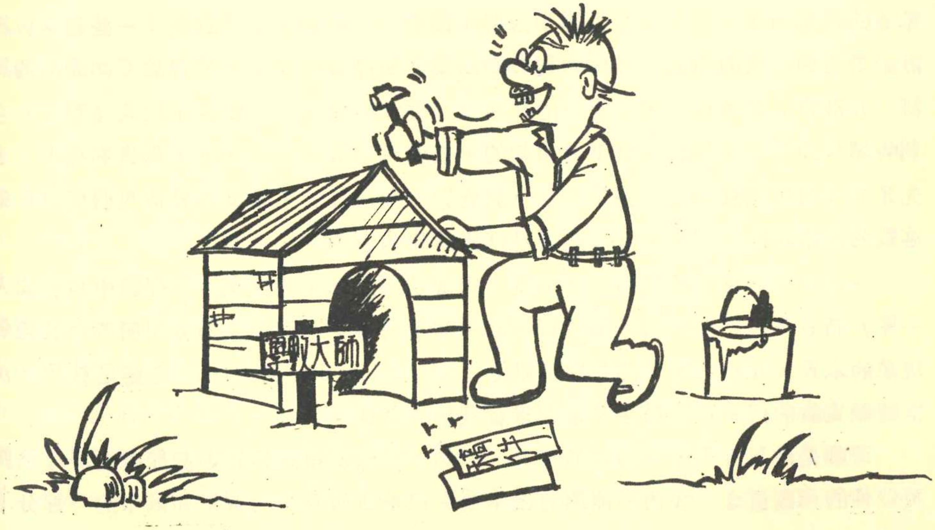
你對 Basic 語言的程式設計瞭解多少？你想知道高斯消去法是如何設計的？你想知道一個大程式的設計是如何組織而成的？

尚未學代數，而即將進入代數領域的同學，你對代數瞭解有多少，你想先得到一些基本概念嗎？已經學了代數的同學，你對於代數的基本定很清楚嗎？你想更進一步去瞭解它嗎？

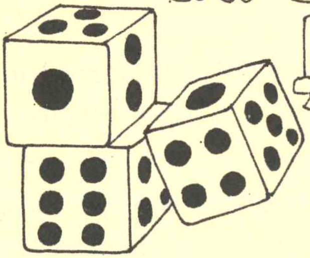
自小學有圓面積的計算開始，一直到現在，你對π的瞭解有多少呢？你是否考慮過關於π的一些奇妙的特性？

學完了微積分或高等微積分，你對極限的概念很清楚嗎？可曾想到些關於極限方面有趣的問題？

看完了這些作品，你將可以獲得你所想要得到的概念。



機率與統計概念



指導老師 黃登源
數三甲 林忻隆

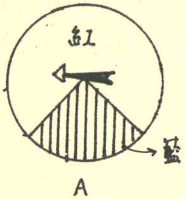
本文大抵是Thompson. M.(*1976*) Probability and Statistics的摘譯。其主旨在提供教師一種教材教法，俾使教師能將機率與統計概念清晰且具體地輸導給學生。尤其是指那些抽象能力尚未成熟的學生。

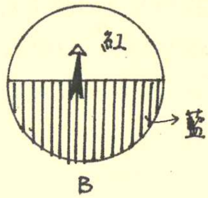
在我們日常生活中遭遇到的許多事物都牽涉到所謂的不確定性。例如：◎中視氣象台播報員馮鵬年說：「明天有70％機會會下雨。」那麼就台灣本島而言，「70％的機會會下雨」代表著什麼？70％這數字如何決定的呢？◎長壽香煙盒上印著國建會學人的建議「爲了您的健康，吸煙請勿過量」吸煙過量，有害健康的斷言有何根據呢？◎綠色革命後，稻米的單位產量，已由過去的低產量提昇到高產量。其主要的原因之一就是由應用機率的基因理論而來。同時，作物生產量也能早在收穫前準確的預知出來。這些日常生活，醫藥、農業……的例子，只說明了一些機率與統計影響我們生活的方式，其他尙能舉些商業（如品質管制）、消費論（如產品的試測）及教育（如課程或學生能力的評估）等方面的例子。上面例子的共同點就是它們的結果均是不確定的或是不可預知的。我們將用隨機這個名詞來代表那些不能事先預測其明確或細節的實驗或現象。研究機率和統計的原因就在於使我們能以精確客觀的態度討論含有不確定性或者是所謂隨機的事物。

我們可能並沒有認知到這件事實，那就是一般學生的日常生活經驗中也和成人一樣充滿著不確定性。因此教授機率的一個主要目標，就是使學生能明瞭含有運氣現象的本質。在這方向下的初始活動（ Initial activities ）應是使學生決定隨機實驗的所有可能結果和最大機會發生的事件。

遊戲是教授機率的一個自然工具。例如：一個旋轉針輪的遊戲能幫助學生發展可能性的直觀概念。我們不能認定機率概念已是每個學生的背景知識中的一部分，

因此一位教師應詳細的詢問並幫助學生瞭解到下面的結論。





在A針輪上紅的比藍的易發生。　　在B針輪上兩者是一樣易發生的。

特別是對一個喜歡藍色或他已在針輪A上得到一次藍色的學生而言，上面的結論還是對的。當得此情況的直觀感受後，學生就能以「在針輪A上紅的發生是藍的兩倍」來量化。然後他們可作一大串的試驗試圖去驗證此推測。除了針輪外，還有許多隨機裝置能運用在機率活動上。如：對大多數學生，銅板、骰子都是他們熟悉的，雖然他們可能沒有想到用一種有系統的方式來實驗。教授統計最初主要的工作是從眞實世界（real world）收集、組織、解釋資料，顯然地如此的活動就牽涉到算術與製圖的技巧。同時也常牽涉到度量。例如：一班的學生收集他們鞋子大小的資料，此資料能以一個每一尺寸有多少人的表來組織或以圖表示。一個有趣的問題是決定這個班上學生鞋子的「典型」尺寸，一個可能有關典型的主張是：經常出現的鞋子尺寸；另外一個是當將鞋子尺寸自小排列到大時，出現在中間的。至於那一種主張較好及爲什麼較好的討論就是從統計觀念來檢定訊息的强度及缺失的問題。

有些重要的統計觀念是能從如此的資料收集實驗方法中傳遞給學生的。而這些觀念又能使學生以較佳的方式組織有關他本身及他周圍世界的知識。

※　※　※　※

在 Lennast Rade 編輯的「機率與統計的教學」中，提出了學習機率與統計的幾個階段。這些階段是

1. 操作含有機會的遊戲，自然事物及運動等方面的實驗和作統計上規則的觀察。
2. 能有用的討論這些實驗觀察的數學模式。
3. 運用數學模式描述，預估隨機現象問題的方法。
4. 公理化的機率論。

就上面的四個階段而言，本文著重 *1*、*2*、*3* 階段。爲了邏輯上的必要及行文的方便，本文以後將以「活動」作爲一個主題的介紹單元。(I)機率部分共 *7* 個活動。活動 *1* 包括一些往後活動 *2* 到活動 *5* 所提出的基本概念的動機實驗。活動 *6* 主要是敎

學上的本質問題，重點在於學生機率思考的發展，特別是經由遊戲情境中所發展出來的。活動7我們又回到利用數學模式來描述眞實世界的現象，同時也介紹做爲一個模式的重要模擬觀念。(II)統計部分共分2個活動。主要是介紹一些基本的統計概念及舉些學生日常生活中可能用到這些概念的例子。

(I) 機率部分

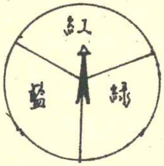
活動1　　實驗

重點：

這個活動是爲了提供操作含有不確定性實驗的經驗而設計的。機率的基本概念起源，及資料的組織記錄是本活動的重點。而這些實驗中所得的資料在以後的活動裏會用到。

材料：

1. 一些半徑一高比，不同的圓柱體。
2. 25個一模一樣的小木塊，但漆成四種不同顏色（如紅白藍綠）放置一小袋中。
3. 將一圓紙板分成三等分，其上分別刷上一種顏色（如藍綠紅）置一指針於其上，如下圖：

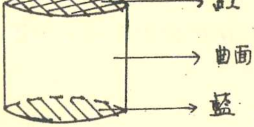


4. 一均勻銅板。

第一部份一操作下列所述的實驗

A、圓柱體的實驗：

1. 將圓柱體的兩面塗成如下圖所示。塗色的目的是爲了能區別圓柱體的兩端。將圓柱體拋擲，然後紀錄以那一面著地？



（註：先行操作幾次不同的拋擲手法，來決定那一種操作技巧，可以得到較佳的隨機著落位置。當拋擲技巧決定後，那麼整個實驗就得用同樣的方法。）

2. 操作(1)30次，將結果紀錄在表1。又擇另一個半徑一高比的圓柱體作同樣的實驗紀錄。

表 1

	結果	30 次實驗結果發生數
第一圓柱體	曲面	
	紅端	
	藍端	
第二圓柱體	曲面	
	紅端	
	藍端	

（註：紀錄時以〝正〞字來表示發生次數的多寡）

3. 在第一個圓柱體實驗中，那一結果常發生？若重覆這實驗，常發生的結果是否不變呢？

4. 在此兩個不同資料的圓柱體中有何差別？若兩個有相同半徑而高度不同的圓柱體，將有什麼預期的不同資料？

B、小木塊的實驗：

1. 一含有25個小木塊的袋子，不要檢查袋中所含或企圖決定袋中不同顏色小木塊的分配。搖一搖袋子，抽取一小塊，紀錄顏色，然後放回袋中。

2. 依步驟 1 重覆做25次，將結果紀錄於表 2 。

表 2

結果	25 次實驗的次數
紅	
白	
藍	
綠	

3. 利用袋中有25個小木塊及實驗所得數據，評估下列各量：

◎紅木塊的百分比

◎白木塊的百分比

4. 如再操作另一實驗，然後將新舊結果併合，那麼在步驟 3 的預估是否會一樣呢？為什麼？

C、針輪與銅板的實驗：

1. 此實驗是用一均勻銅板和材料 3 所述之針輪。旋轉指針，投擲銅板，紀錄結果。

2. 決定實驗的結果要如何紀錄，但要記住一項原則，即結果必得由指針所處位置的顏色及銅板著陸是正面或反面所組成。

3. 如此重覆操作24次，紀錄於表 3 。

表　3

結果	24 次中結果發生數

4. 利用實驗所得結果預測在 100 試驗的實驗中，出現藍－反結果的次數。

5. 假設不作任何實驗，而要預估藍－反結果的比例。如何預估？又何以如此？（提示：利用銅板及針輪的對稱性質來得到理論上預估）實驗結果與理論之間的關係是否合理？

第二部份—

A、圓柱體的實驗：

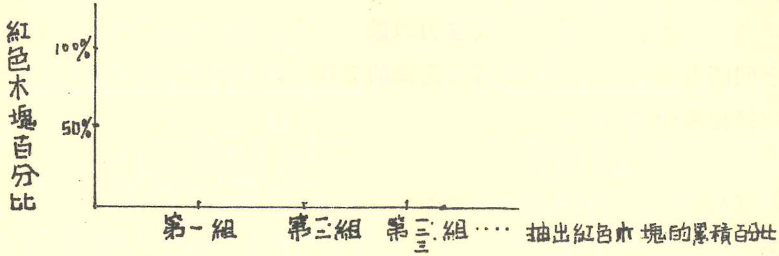
1. 同一個圓柱體反覆幾次實驗後，那麼在每一次實驗中最常出現的結果是否一樣？又以不同圓柱體做實驗時，結果又如何？

2. 比較實驗用圓柱體的幾何結構，及其實驗結果，儘可能精確的提出 3 種結果出現的頻率與幾何結構的關係，這關係和直觀上合得來嗎？

B、小木塊的實驗：

每一組均有如表 *2* 的資料，將這些資料表以下列方式結合。

1. 指定各組的號碼 *1, 2* ……等，藉以辨別不同組別的實驗。
2. 將第一組的紅色木塊百分比畫在下列圖上。
3. 將第一、二組的紅色木塊百分比畫在下列圖上。
4. 繼續這種過程，直到所有實驗結果資料結合在一起。



5. 利用圖形所示的實驗摘要，討論下列問題：

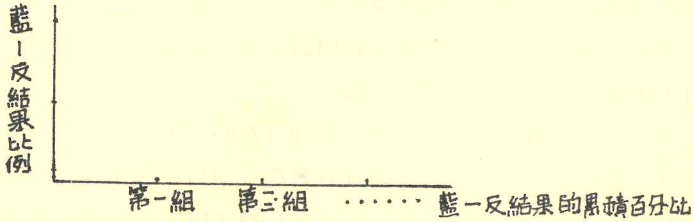
(1)當愈多的實驗組併合時，紅色木塊百分比的值有無一定的趨向？

(2)假如現在你要預估袋中紅色木塊的百分比，那麼你所預計的是多少？且袋中有多少紅色小木塊？

(3)打開袋子確實計數紅色木塊的個數，與前題中預計的比較如何？

C、針輪與銅板的實驗：

把所有實驗組的紀錄聯合起來，且完成如小木塊實驗的圖。就這圖而言，縱軸最恰當的代表是什麼？



利用此圖討論下列問題：

1. 當愈多實驗組併合討論時，藍一反結果的百分比有無一定趨向？
2. 在 *100* 次試驗的此實驗中，若要求你預計藍一反結果出現的百分比，你的預計是多少？
3. 先前用銅板及針輪對稱性質所預計出來的結果和用　題方法的預測結果有何不同？

一般性的問題：

假如你要預估某一特定籃球選手將球運到邊綫而獲得罰球機會。那麼那一種資料對你有用？從操作這活動的經驗中，利用資料來做預計時，應有何注意事項？

問題：

很多老師都覺得學生很可能用猜的而答對某些是非題。因此是非題測驗的分數應依對的題數，減某一有理數乘以錯的題數這個原則來決定。那麼「最好」的有理數是多少？即假如〝R〞代表答對題數，〝W〞代表答錯題數，〝P〞是介於0和1之間的有理數，〝S〞是所要紀錄的分數，則 $S = R - (P \times W)$。那麼P最好的選擇是多少？

活動 2　　　樣本空間及事件

重點：

樣本空間和事件在定量的討論機會（運氣）觀念上是兩個基本的概念。在這活動裏，會定義這些概念。且將其與活動 1 相關連。

討論 1：

一個實驗的樣本空間就是此實驗的所有可能結果所成的集合。

例子：

A、拋擲一個普通骰子，注意其出現的點數，那麼這結果可能是從 1 到 6 的整數。
因此樣本空間可定義爲這個集合

$$S = \{1、2、3、4、5、6\}$$

B、投擲銅板實驗的樣本空間 $S = \{H、T\}$ 其中 H 表正面 T 表反面。

C、在投擲一個骰子及一個銅板的實驗裏，每一個結果都由 1 到 6 的整數及 H 或 T 兩字組成。因此樣本空間可定爲

$S = \{1H、2H、3H、4H、5H、6H、1T、2T、3T、4T、5T、6T\}$

有時我們只對這集合的某些性質有興趣，而對整個集合反而沒有多大興趣。例如：拋擲骰子的點數爲偶數，有那些結果會發生呢？符合這條件的樣本空間子集是 $\{2、4、6\}$ 這集合。而這集合就是一個骰子的偶數事件。

討論 2：

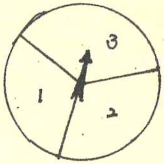
一事件 E 就是一個實驗的樣本空間的子集。假如實驗的結果是在 E 中，則我們說 E 發生。

例子：

、一由 6 歲或 7 歲的男、女孩混合所成的一年級班級，現在我們隨機地從這班上

抽點一小孩。然後紀錄他的年齡及性別，這樣子的樣本空間是｛6B、6G、7B、7G｝其中B表男孩，G表女孩。如從｛6B、7B｝這集合抽點一男孩。那麼我們說抽點男孩的事件發生。如從｛6B>6G｝這集合抽點一小孩，那麼我們說抽點6歲大的小孩事件發生。

B、旋轉下圖所示的指針2次，紀錄（依序）其結果。則其樣本空間爲｛（1,1），（1,2），（1,3），（2,1），（2,2），（2,3），（3,1），（3,2），（3,3）



若結果是｛（1,2），（2,1），（2,2），（2,3），（2,1）｝這集合的一個元素，則我們說至少有一次2的事件發生。若結果是｛（1,2），（2,1），（2,3），（3,2）｝的一個元素，則我們說恰有一個2的事件發生。

問　題：

1.指定下列各實驗的樣本空間：

(A)汽車牌照的最後一位數字。

(B)投向籃框的籃球。

(C)從一付牌中隨機挑出的牌。

2.在(A)實驗裡，寫出下列各事件：

(A)小於5的數字。

(B)偶數。

(C)非7的數字。

活動三　　機率的指定

重點：

當樣本空間決定後，緊接而來的問題是「如何計算某一特定結果發生的可能性？」這問題就是如何指定機率。對不確定性量化的問題是本活動的主題。因爲一適當的機率指定對於決策之助的機率有效性而言是很重要的。所以本活動相當重要的。

材料：

兩普通骰子，一付橋牌及活動 1 的結果。

討論：

雖然在某些情形下，你已有某一結果的機率（如氣象局認爲明天會下雨的機會是60％）然而有某些狀況的機率仍要由我們來計算的。下文中會談到指定機率的兩種不同方法，其中一種是以實際的實驗爲基礎，而另一種則是邏輯論證。

一個結果的機率是和這結果相結合的某一數。如以 A 表一結果，則 $P_r[A]$ 表結果 A 的機率。若 A 必定發生，亦即每次實驗 A 均發生，則 $P_r[A]=1$。若 A 從不發生，則 $P_r[A]=0$。如把所有情形都包括進去，則 $P_r[A]$ 是介於 0，1 之間的一數。一實驗的所有結果其對應的機率和是 1，也就是若有 m 結果，如 A_1，$A_2 \cdots\cdots A_m$，而恰一必發生，則

$$P_r[A_1]+P_r[A_2]+\cdots\cdots+P_r[A_m]=1$$

我們用來決定結果 A 的 $P_r[A]$ 的兩種方法是對稱法及相對頻率法。

對稱法（均等概率法 Equal likelihood）：

假如我們想用一顆骰子來決定遊戲的先後次序，則通常假設這骰子是均勻的。這假定來自於這骰子表面的檢查—每一樣似乎一樣的易發生。（除了點數不同）因此，給定一新骰子，假設它是均勻的或者假設當它擲轉時每一面出現的比一樣，因爲有 6 面，所以表示預期 1 出現的次數比是 $\frac{1}{6}$，2 出現的比是 $\frac{1}{6}$，……等。我們以結果 1 發生的機率爲 $\frac{1}{6}$，結果 2 發生的機率爲 $\frac{1}{6}$，……等爲正式的假設來表示。一均勻骰子的樣本空間是 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ 而由對稱法來的機率指定是 $P_r[1]=\frac{1}{6}$，$P_r[2]=\frac{1}{6}$，……$P_r[6]=\frac{1}{6}$。我們也可以下面的形式來表示：對 S 的每一結果 A，$P_r[A]=\frac{1}{6}$。注意 $0\leq P_r[A]\leq 1$，且 $P_r[1]+P_r[2]+P_r[3]+P_r[4]+P_r[5]+P_r[6]=1$。這兒用「對稱性」這名詞是因爲均等可能結果（Equally likely outcomes）的基本假設常來自物理儀器、狀況、或實驗的對稱性。另一個可以利用對稱性方法的例子是拋擲一均勻銅板。當然，如由對稱性而來的機率指定並不與觀察經驗所得一致的話，則均等可能結果的假設就應重新檢查。

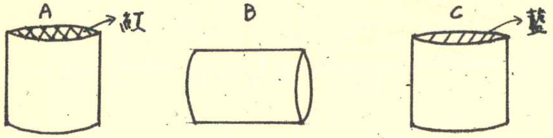
最後亦最重要的事是要確定是否眞有對稱性。有某些情形乍看下似乎合於對稱性，但事實上不然，下例就是一類似於此的問題。

假設有了對剛出生的雙胞胎，一對是同卵男性，一對是同卵女性，另一對是異卵異性。今有一實習護士想爲同卵男性的雙胞胎洗澡，當它打開尿布時，發現是男孩。問這對雙胞胎是同卵男性的機率是多少？

起初，你可能想用如下的對稱性來討論，由於這嬰兒是男的，所以我們知道他不是來自異卵異性，就是來自同卵男性。因爲他可能來自兩對的任一對，（這選取是隨機的）所以這對雙胞胎是同卵男性的機率是$\frac{1}{2}$。這結論是錯誤的，因爲這情況並非符合對稱性質。事實上，正確的答案是$\frac{2}{3}$。

相對頻率法：

活動二的圓柱體實驗是不能只用簡單的思考方式來指定它三結果的機率。



依圓柱的物理結構可以知道 P_r〔A〕= P_r〔C〕，但無論如何我們不能以對稱性質來決定 P_r〔B〕。在此情形下，利用結果B發生的相對頻率來預估 P_r〔B〕是很方便的。回想一下活動一的圓柱體實驗，通常實驗的次數愈多，則 P_r〔B〕的估計值是愈精確的。

事件的機率是和這事件相結合的某一數，只要樣本空間裏的每一結果都指定一機率，則我們就可依下面方式來定義任何事件的機率。

〝一事件的機率就是此事件每一結果的指定機率和〞例如：從一付牌挑選出皇后的事件是｛♠Q，♥Q，♦Q，♣Q｝如我們利用對稱法指定在一隨機抽樣抽取任一特定牌的機率爲$\frac{1}{52}$，則挑選皇后的機率是 P_r〔♠Q〕+ P_r〔♥Q〕+ P_r〔♦Q〕+ P_r〔♣Q〕$=\frac{1}{52}+\frac{1}{52}+\frac{1}{52}+\frac{1}{52}=\frac{4}{52}$

問題：

1. 利用活動一實驗的數據計算一特定圓柱體以曲面著地的機率？
2. 事件的機率是由事件中結果的機率來定義。因此，事件的機率也是介於0與1之間的數，那麼對於一事件E，P_r〔E〕$=1$ 和 P_r〔E〕$=0$，有何重要性？

活動四　計數

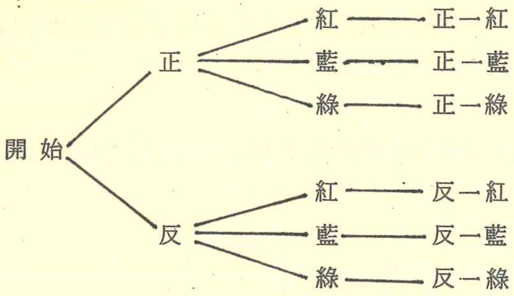
重點：

利用對稱法來指定機率時，通常都需要先決定實驗的所有可能結果的總數。本活動所介紹的計數技巧將有益於你這方面的決定。

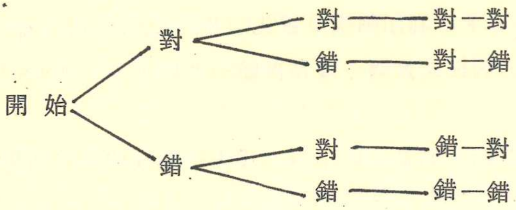
討論：

爲了使問題簡化，易於了解，我們通常利用樹形圖來幫助我們計數各種可能的

結果。例如：活動一的實驗 C 共有 6 種可能結果，用樹形來表示則為



假如有一學生在一是非測驗卷裡，以猜的方式回答兩題，則他的可能答案以樹形圖來為示為



由上面的討論可歸納出基本計數定理：

(*)假定有 m 個集合，第一個含有 n_1 個元素，第二個含有 n_2 個元素，……第 m 個含有 n_m 個元素，則每一組選一個元素出來作有序排列，一共有 $n_1 \times n_2 \times \cdots\cdots \times n_m$ 種可能。

當然(*)也可寫成如下的形式：

n 個不同元素的集合中選出 r 元素作有序排列，可能數目是 $n \times (n-1) \times \cdots\cdots \times (n-r+1)$。這敍述稱排列原理。

問題：

1. 大學聯考試卷的多重選擇題，通常是每題有五個選擇答案，對其中某 2 題或某 5 題的可能答案型成共多少？

但是有時我們並不注重順序問題，只對成員的不同有所注意。例如數學系的

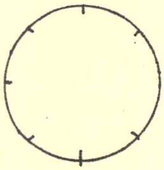
班際棒球賽，前三名的形式應有 $12 \times 11 \times 10 = 1320$ 種可能。但是最後決賽組的可能集合又怎樣呢？其中我們假定有了12隊參加比賽。我們知道70學年度的決賽組是 {四甲、三甲、四丙} 由這決賽組所產生的前三名形式應該有6種可能，因此，最後決賽組的形式是 $1320/6 = 220$ 種可能的。

由這討論也歸納出組合原理：

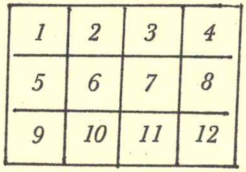
> 由含 n 個不同元素的集合裡挑選出含 r 個元素的可能集合數是
>
> $$\frac{n \times (n-1) \times \cdots\cdots \times (n-r+1)}{r \times (r-1) \times \cdots\cdots \times 2 \times 1}$$

問題：

1.將圖(一)的各點以直線相連，問一共多少條？



圖(一)



圖(二)

2.假如你有如圖(二)似的郵票12張，有位朋友向你討四張連在一起的郵票，即可能是 1，2，3，5 但不可能是 1，2，3，8，問有幾組郵票合於要求？

活動五　　機率的計算

重點：

在活動三利用對稱法指定機率時，經常遭遇到決定究竟有多少結果可能均等發生及有多少所要求性質結果的問題。在這活動裏，我們將用活動四所介紹的計數技巧來解決此類的問題。

討論：

假如我們只對實驗的某一特殊結果的機率有興趣，而要利用對稱法來決定這機率時，則必須先決定包含我們有興趣的均等可能結果集合。通常我們將這些性質的結果稱為適意的結果（ favorable outcomes ），這名稱只不過方便而已，並沒有隱含任何評價或喜歡的含意。如一共有 n 個均等發生的結果及 m 個適意結果，則指定給這所要結果集合的機率是 $\frac{m}{n}$。如所要的結果集合是 E，則

$$P_r〔E〕=\frac{\text{E中元素個數}}{\text{結果的總數}}=\frac{m}{n}$$

這結論立即從活動三的定義及每一結果的機率爲$\frac{1}{n}$而來。

例：在有了是非題的測驗裏，學生猜中至少兩題的機率爲何？回答這問題的可能形式共$2 \times 2 \times 2 = 8$種，而適意結果，亦即至少有二個答案正確的，可由下列來決定。

(A)恰兩題答對，一共有3種。即第一，二題；第二、三或第一，三題，而其餘答錯。

(B)三題均答對。這只有一種情形。

因此P_r〔至少兩題正確者〕$=\frac{3+1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

注意：在$\frac{3+1}{8}$式中，分子正是適意結果的總數。即$3+1=4$

問題：

投擲三個骰子，其和最容易出現的是那一個數？又機率爲多少？

活動六　　學生眼中的機率實驗

重點：

不確定性的數學研習概念是比那些數的運算還要來得複雜。此外個人的喜好及其他主觀影響都在學生眼中的機率情境扮演一很重的角色。本活動著重於學生對機率實驗的反應方式。

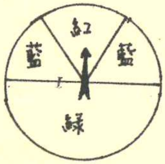
討論：

有關機率實驗的某些假設對教師而言，可能是相當合理的。但對於學生則可能是相當不合理，甚且是錯誤的。同時還有經常存在的溝通問題：教師和學生可能有相同的理念，但表示的方式卻大不相同，以致於不能互相了解對方的意圖。

1.閱讀下列師生的對話，然後回答而後的問題：

師：現在我們開始來玩遊戲，這兒有3種顏色，每人選1種，當指針停在某一顏色上時，選這顏色的人就在他的紀錄表劃一格，優勝者就是最先塡完紀錄表的人。

結束	結束	結束
開始	開始	開始
紅色	綠色	藍色



如你想獲勝，那一種顏色勝算較大？

龍龍：我選紅色。

師：爲什麼？

龍龍：因爲我喜歡紅色。

寶寶：我選藍色。

師：爲什麼？

寶寶：因爲藍色區域有兩處。

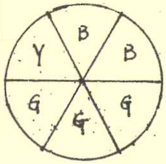
問題：

(A)龍龍對這遊戲的觀感是怎樣的？

(B)假如旋轉指針 3 次，而每一次都停在紅色，你想龍龍會做如何反應？而教師應做怎樣的適當回答？

(C)寶寶在分析狀況時的困難是什麼？

(D)下圖能否幫助他避免這錯誤？



(E)設計一個活動，其中學生被指定某種顏色，而後要他選擇一對他有利的針輪。

2.閱讀下列師生的對話，然後回答而後的問題：

師：這兒有一內含紅、白球的袋子，如你不看球而從袋中抽出一球，那你抽出的球可能是什麼顏色？

阿珍：白色？

師：還有其他色嗎？

阿珍：紅色？

師：就這些？

阿珍：（沉默不語）

師：能抽出一藍球嗎？

阿珍：假如放進一藍球就能。

問題：

(A)阿珍是否有那些結果可能，那些不可能的感受？

(B)阿珍是否了解樣本空間的概念？

(C)老師用〝可能〞這字是個好的選擇嗎？

(D)你怎樣來加强阿珍的學習經驗？

3. 在機率遊戲情境中堅持高度主觀的學生，你要如何改變他的觀念呢？

活動七　　眞實世界情況的機率模式

重點：

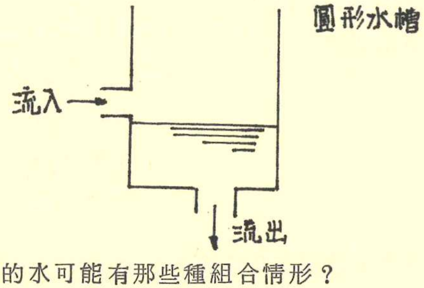
利用機率模式來幫助我們了解眞實世界的狀況。

討論：

許多牽涉到隨機的眞實世界情況可用針輪或者針輪組來模擬。

狀況：

假設下圖爲一圓柱形水槽儲水供師大男二舍使用，水源並非完全可控制，故任何一天補注入水槽的水深可能 3 、4 或 5 米且三者的或然率相等。男二舍需水 2 ，3 ，4 米，且三者或然率相等。



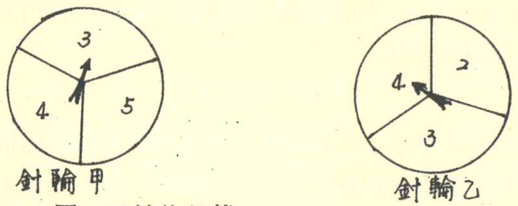
(A)一天中流入與流出水槽的水可能有那些種組合情形？

(B)設某日零時起，水槽水深爲 0.5 米，則隔日同時停水的機率爲多少？又當時至少有 2 米深的水留在槽內的機率爲多少？

(C)純粹是計數問題，可用計數基本原理簡單獲得。

至於(B)我們以如下的步驟來模擬。

1. 製作如下的針輪



注意：上圖三區域均相等。

2. 操作針輪組甲、乙 *120* 次，將你實驗的結果紀錄於下表

結　果	次 數	相對次數
(3,2)		
(3,3)		
(3,4)		
(4,2)		
(4,3)		
(4,4)		
(5,2)		
(5,3)		
(5,4)		

其中 (4,3) 代表針輪甲指針停於 4 處，針輪乙停於 3 處。

3. 依你的實驗結果，(B)的機率爲多少？

4. 如操作實驗次數增多，(3)的數值是否有一定的趨勢？

5. 在那方面上，這模式是很逼近眞實的？而它的缺點爲何？

問題：

生產〝乖乖〞的食品公司爲了提高銷售量，決定在每包〝乖乖〞中附贈科學小飛俠的塑膠模型，每一包送一個。假設五種模型是均勻的散佈在每包〝乖乖〞中，預計一下要買幾包才得完整的一組模型。用機率模式來模擬。

(Ⅱ) 統計部分

統計就是以有組織的，經過調查分析的，及評估的資料來幫助我們了解事情狀況及做決定（ decision-making ）的活動。這些活動就是本部份的主旨。

活動八　　利用統計來摘要資料

重點：

本活動介紹一些基本的統計概念，然後以例子來說明這些概念如何被利用來描述及摘要資料。在此活動前，我們曾爲統計下了一個定義，現在就讓我們簡略的檢查這些定義。我們用下面簡單的資料：*7*，*6*，*10*，*7*，*4*，*6*，*10*，*10*來說明這些基本概念，這組資料可想成是一組數學測驗的分數。

資料的組織

通常將資料組織而表現在圖表上是很有用的。

(A)記號圖—

4	6	7	10
1	11	11	111

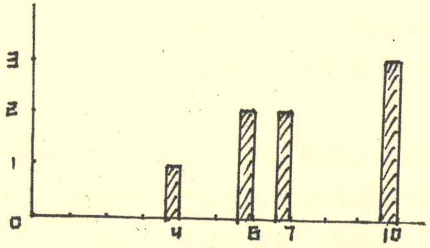
或

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
			一		T	T			下

(B)次數圖—

分數	次數
4	1
6	2
7	2
10	3

(C)長條圖—



資料的摘要

在摘要資料時要找一個適當代表整組資料的典型值。計算這值的方式通常是由狀況及這值如何被使用來決定的。除此之外，資料的分散大小的度量有時也是有用的。此訊息也就是提供一實際數據與所選典型值相差有多大的度量。

典型值（Typical Values）

(A)平均數：一組資料的平均值就是所有數據的和除以數據數目的分數。

7，6，10，7，4，6，10，10 的平均值是

$$\frac{7+6+10+7+4+6+10+10}{8}=\frac{60}{8} \text{ 或 } 7\frac{1}{2}$$

注意：平均值不一定是一個數據，事實上也不一定是一個可能的數據。在這例題中甚至測驗卷上的分數全是整數，然而其平均值還是 $7\frac{1}{2}$。同樣的像某一城市家庭人數的平均值是 4.3 人，也是實際上不能有的數據。

(B)中位數：將資料以遞增的順序排列。如數據個數是奇數，則中位數就是中間的數據。如數據個數是偶數，則中位數是中間兩數據的平均值。

例：4，6，6，7，7，10，10，10 的中位數是 $\frac{7+7}{2}=7$。

例：4，6，7，10 的中位數是 $\frac{6+7}{2}=6\frac{1}{2}$。

例：4，6，7，8，10 的中位數是 7。

(C)衆數：一組資料的衆數是那些經常出現的數據。

例：7，6，10，7，4，6，10，10 的衆數是 10。

例：10，7，6，10，7，4，6，10 的衆數是 6，7，10。

散佈的度量

(A)全距（Range）：一組資料的全距是最大與最小數據的差。

例：7，6，4，10 的全距是 $10-4=6$。

將全距分為四分位數，十分位數或百分位數，有時是有用的。例如：最低的四分位數已含了數據中最小的 $\frac{1}{4}$ 部份，最低的十分位數包含了數據中最小的 $\frac{1}{10}$ 部分。這些觀念在本文不再討論，有興趣的讀者可參閱有關的統計書籍。標準化的考試結果通常都是用百分位數及十分位數公布的。

(B)平均離差值（Mean deviation）：要計算一組資料的平均離差值首先要計算平均數及各數據與平均值之間的差，平均離差值就是各離差的絕對值的算術平均數。

例：7，6，10，7，4，6，10，10 的平均值是 $7\frac{1}{2}$，因此各離差值為

$-\frac{1}{2}$，$-1\frac{1}{2}$，$2\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$，$-3\frac{1}{2}$，$-1\frac{1}{2}$，$2\frac{1}{2}$，$2\frac{1}{2}$，故平均離差值是

$$\frac{\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}}{8}=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$$

一組資料的全距是由最大與最小數據所決定，而不是由分布在最大、最小間的數據來決定。兩組有相同最大和最小數據的資料有相同的全距。（事實上有更多的資料組有相同的全距）而另一方面，平均離差值是由分佈在最大、最小間的數據所決定。平均離差值給那些遠離平均值的數據以較重要的地位。因此它是比全距較靈敏的分散性測度。

除此之外，尚有他種的分散性測度。在資料有某些特性時，這些測度是相當有用的，如標準值。同樣地這些也能在統計方面的書籍找到，本文不再深入介紹。

例題與問題

平均數，中位數和衆數都是一組數據中心位置的測度，因此它們通常被稱為中心傾向（Central tendency）的測度。其中任一數都可用來描述一組資料的典型數。而如何選擇它們，就在於了解典型數的用途。

例一：

假定隨機挑選25個家庭，然後調查1965年及1970年的兒童數，將結果製成下表：（請參閱下頁）

1965年這些取樣家庭的兒童數目的典型數是3，而1970年也是3，然而1965—1970間增加的典型數是1。

如"典型數"表示中位數，則上述就和下列次數表所列的符合。（第十三個家庭的資料落在那兒？）

1965年的兒童數	次數
0	5
1	5
2	2
3	8
4	3
5	1
6	1
7	0

1970年的兒童數	次數
0	4
1	2
2	2
3	6
4	5
5	5
6	0
7	1

1965–1970年增加的兒童數	次數
0	10
1	11
2	3
3	1

家庭	兒童數		1965 – 1970 間增加的兒童數
	1965	1970	
1	3	3	0
2	3	5	2
3	1	2	1
4	3	4	1
5	0	3	3
6	3	3	0
7	1	3	2
8	0	0	0
9	0	0	0
10	2	4	1
11	0	0	0
12	3	2	0
13	2	4	1
14	5	5	0
15	1	1	0
16	4	5	1
17	6	7	1
18	3	4	1
19	1	1	0
20	2	3	1
21	1	3	2
22	4	5	1
23	0	0	0
24	4	5	1
25	3 56	4 76	1 20

因此我們的結果是 1965 年每個家庭的兒童中位數，加上 1965 – 1970 年所增加的中位數並不一定要等於 1970 年的中位數。

問題：

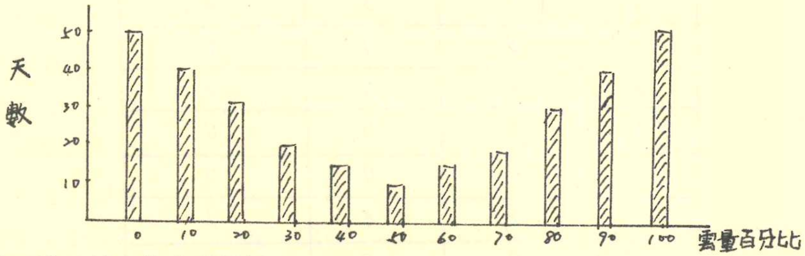
1.若上例所用的典型數改爲衆數，是否會得到相同結論？

2.同上，若改用平均數，結論是否一致？

3.一商業機構所有人的年收入爲2,000,000 NT$ 而老板的14位員工每人每年收入爲200,000 NT$，我們應如何決定這15人的典型收入？

4.有一考生考試分數分別爲95,75,70,100及75，他的典型分數爲如何？應如何計算？

5.美國許多城市均有類似下表的雲量分布：



要怎樣描述此城市的典型雲量？

6.那一種中心傾向測度考慮到每一數據，且經常當一個改變時就隨著改變？那種測度企圖忽略極端值？

在結束討論典型值之前，我們還得提到一點，即在某些情況下，典型值並不是我們所注意的。令人注意的是極端值，雖然橋樑設計師關心的是橋的典型交通流量，但是橋樑製造者卻想要這橋造得足以負擔最大的流量，而不是平均流量。同樣地，在考慮節省汽車燃料時，車子的實際速度是比平均速度重要的。簡單之，只能計算一平均數，是不同於表示這平均是有用且重要的。

例：

有一籃球教練想從兩位球員遴選一人，而這兩人的平均得分是一樣的。教練可能只注重在平均值附近的分數散佈情形。例如他可能喜歡用一位經常有某一固定水準的球員；另一方面，教練也可能在這場球定能發揮水準的信念下而動用曾有高分紀錄（但也有最低分紀錄）的球員。

問題：

1.你如何將考試分數散佈的情形告知班上學生的家長？

2.你對兩個相同平均待遇的工作，態度如何？而其中一個的平均待遇是由平均值附近的實際待遇散佈所影響的。

活動九　　利用統計來做決定

重點：

本活動著重利用統計來幫助決策，同時包括一般決策事宜的大要。

討論：

下列的樣式能幫助你利用統計來分析情況：

1. 確認問題及明確的陳述。
2. 收集有關資料。
3. 將資料適當組織。
4. 分析及解釋資料。
5. 將由資料所得的統計數字和原始問題相關連。

活動一、三中我們用資料及相對頻率法指定某一結果的機率。觀察上述決策過程的規則是屬於第四階段。因此我們知道活動三所著重的機率指定只不過是這兒所考慮過程的一部分而已。事實上，有時明顯的機率指定並不需如此，且這些資料也可以另外方式用在決策過程中。

例題：

1. 假定數學系欲舉辦一場女子壘球擲遠，每班各出一位代表，現在某班有 *3* 位選手，那麼應如何挑選選手呢？
2. 經磋商決定由這 *3* 位選手每人做 *5* 次擲遠，然後由成績來選出代表。

下表即爲該 *3* 位選手的成績：

選手	距	離（米）			
阿貞	*30.7*	*26.1*	*25.1*	*26.8*	*29.8*
阿珍	*27.0*	*26.3*	*30.4*	*26.9*	*30.1*
阿花	*26.1*	*29.7*	*31.8*	*20.8*	*28.6*

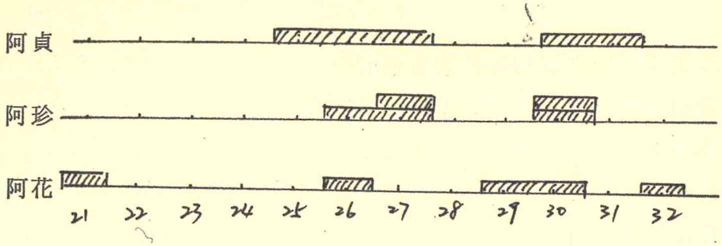
僅看這些資料很難選出代表選手，所以我們進一步將資料組織起來。

3. 我們用記號圖和長條圖來組織資料：

記號圖

	21	*22*	*23*	*24*	*25*	*26*	*27*	*28*	*29*	*30*	*31*	*32*
阿貞					−	−	−			−	−	
阿珍						−	T			T		
阿花	−					−			−	−		−

長條圖



單用上面的圖我們可提出一些粗略的結論：

例：阿珍、貞似乎比阿花穩定，然而阿花卻有較高成績。

4.分析資料時，時常伴隨著一些問題，而這正是我們所要討論的。最基本的問題就是選拔選手的標準是什麼？在回答這基本問題前，我們先考慮一些次要的問題？

(A)最好的選手是誰？特別是誰有最佳的典型成績？如何決定典型成績？

(B)在決定誰是最佳選手時，穩定性扮演的角色為何？

(C)每位選手投擲五次的次數是否恰當？應排除較差的成績嗎？

(D)將投擲距離的數據修整後，有無重大的資料訊息損失？

上面的每一個問題都引發了統計上重要的論點，問題(A)著重於找尋每一位選手最具代表性的距離。(B)著重資料的分散性。(C)則是要求所收集的資料對於原始問題是否恰當？(D)則是質問資料是否組織足夠？

(1)為了決定一典型的距離，計算每位選手的平均數及中位數，然後將結果填入下表：

	平均距離	中位數距離
阿 貞	27.8	27
阿 珍	28	27
阿 花	27.6	29

利用這些統計數字，討論究竟是那個選手有最典型的成績？為什麼？

(2)全距是資料分散性的一個普通度量，三位選手成績資料的全距為何？這資料訊息如何幫助我們決定選手？

(3)在這問題裏要考慮到什麼？指出然後討論三相關點。

最後比賽規則是否也扮演一個角色？

(4)在記號圖上組織資料時，事實上是在單位區間內分類的。20.6－21.5，21.6－

22.5，……31.6－32.5 ，如此的區間就是所謂的類區間（class interval ）而類區間的長度是可變的。

每次爲了方便將資料組織化地塡入類區間時，有些訊息是可能會丟掉的，在此例中所選的類區間是否會將資料扭曲呢？

最後用你所有的資料訊息，選出最佳代表選手，說明你的根據！

※※※※　　　　　　　※※※※

由一位初學者來敍述機率與統計的概念是很危險的一件事，只要其中有點疏忽，就可能會有馮京馬涼之誤，願諸君本著盡信書不如無書的態度來看視本文！最後以 John Cohen的一段話與諸君共勉！

" Our system of education tends to give children theimpression that every question has a single answer. This is unfortunate because the problems they will incounter in later life will generally have an indefinite characters. It seems important that during their years of schooling children should be trained to recognize degrees of uncertainty, to compair their private quesses and extrapolation with what actually takes place in short, to interpret and become masters of their own uncertainties."

數論上歸納法之應用

指導老師　趙文敏

數三丙　黃寶瑤

一、整數直角三角形

我們知道各邊爲3，4，5的三角形，可以構成一個直角三角形（$3^2+4^2=5^2$），數論的歷史中，這種〝整數直角三角形〞曾佔了一席之地。由於這種三角形的探討與推測，產生了有名的〝四平方定律〞與〝四奇數平方和〞。高斯曾說：在數論中常常有意料不到的運氣發生，從歸納法產生出最精美的新事實。這或許就是高斯所說〝最精美的新事實〞的一種吧！

經由證明推理，我們可以獲得數學上的知識，但是假說的可靠性則來自逼眞推理。一個讀數學的學生，必須學習證明，也必須學習猜測。在以下的幾個問題中，我們將以分析歸納的方式導出結論，而不予以嚴格的證明。但是由這種歸納的方式，我們可以相信其逼眞推理的可靠性。

問題一：給一已知整數 n，是否有一個整數直角三角形的斜邊爲 n？

(A)假設該三角形存在，且其兩股分別爲 x，y

其中 $x \geq y$

則 $x^2+y^2=n^2$，$0<y\leq x<n$

現在我們打算用歸納法來解決該問題，但是除非我們擁有一些相當的知識，否則可說沒有其他的方法可以引用。舉例來說：

取 $n = 12$ ，則 $x^2 + y^2 = 144 \quad x \geqslant y$

$x^2 = ?\quad 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121$

$x^2 = 121$ 嗎？若是，則 $y^2 = 144 - 121 = 23$

我們要一個個的試嗎？事實上用不著

$\because x \geqslant y$

$\therefore 2x^2 \geqslant x^2 + y^2 = 144$ ，$x^2 \geqslant 72$

$\therefore x^2 = 100$ 及 $x^2 = 81$ 是唯一的兩個可能

(1)若 $x^2 = 100$ ，則 $y^2 = 44$

(2)若 $x^2 = 81$ ，則 $y^2 = 63$

$\therefore$ 沒有斜邊爲 12 的整數直角三角形。

(B)同樣的步驟檢驗 20 以下之數，我們發現只有 5 ，10 ，13 ，15 ，17 五數滿足該問題

即：$5^2 = 3^2 + 4^2$

$10^2 = 6^2 + 8^2$

$13^2 = 5^2 + 12^2$

$15^2 = 9^2 + 12^2$

$17^2 = 8^2 + 15^2$

因爲三邊爲 10，8，6 及 15，9，12 的兩直角三角形與三邊爲 3，4，5 的直角三角形相似，所以可將上面所列簡化成：

$5^2 = 3^2 + 4^2$

$13^2 = 5^2 + 12^2$

$17^2 = 8^2 + 15^2$

也許大家注意到 5 ，13 ，17 均爲質數；當然它們不是 20 以下的全部奇質數，其他的奇質數 3，7，11，19 中爲何沒有一個是斜邊？兩組之間究竟有什麼不同？

問題二：在何種情形下，奇質數是整數直角三角形的斜邊？

(A)這是原來問題的修正，我們再用歸納法研究奇質數 P

斜邊爲 P 之直角三角形

3	――――
5	$5^2 = 4^2 + 3^2$
7	――――
11	――――
13	$13^2 = 12^2 + 5^2$
17	$17^2 = 8^2 + 15^2$
19	――――
23	――――
29	$29^2 = 20^2 + 21^2$
31	――――

觀察兩組質數：

5, 13, 17, 29, ………及 3, 7, 11, 19, 23, 31, 兩組都非常不規則的增加，更進一步地我們發現到第一組的形式皆爲 $4n+1$ ，第二組的形式皆爲 $4n+3$

(B)整數直角三角形問題，其性質之一已討論過，而且如我們所說，在數論的歷史中，它佔了一席重要的地位。事實上它引導更進一步的問題，那就是有名的 "Diophantine Problem" 我們知道 1, 4, 9, 16, 25, 36 …… 是完全平方數，而 2, 3, 6, 7 ……不是，但它們可以表示成完全平方數的和（例：$6=2^2+1+1$），對於一個非完全平方數，我們需要用幾個完全平方數的和將它們表示，二個？三個？四個？

二、四奇數平方之和

問題三：一個非完全平方數，最多需要用幾個數的平方和來表示？

(A) $1=1^2$

$2=1^2+1^2$

$3=1^2+1^2+1^2$

$4=1^2+1^2+1^2+1^2$

$5=2^2+1^2$

$6=2^2+1^2+1^2$

$7=2^2+1^2+1^2+1^2$

$8=2^2+2^2$

Bachot de. M'eziriac 繼續列表至325，發現很多數需要以四數的平方和表示，但卻未加證明，因此他成爲"四平方定律"的發現者，此定律如下：

$\forall n \in Z \Rightarrow n = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$

其中 x, y, z, w 爲非負整數

(B)如果我們將此非完全平方數限定爲奇數，那麼它表示法又如何呢？

問題四：令 u 表示一正奇數，用歸納法研究下列方程式的解答數：

$$4u = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

其中 x，y，z，w 均爲正奇整數。

(A)取 $u = 25$，則 $4u = 100$

考慮小於100的奇數平方：1，9，25，49，81

如果81是100的四個奇數平方和之一，則其餘三數之和必爲 $100 - 81 = 19$，小於19的奇數平方只有1，9，$19 = 9 + 9 + 1$

$\therefore u = 25$

$4u = 100 = 81 + 9 + 9 + 1$，依排列組合就有 $\dfrac{4!}{2!2!} = 12$ 種不同的表示法。

另外我們可以其他的方式來表示100

$$\begin{aligned} 100 &= 81 + 9 + 9 + 1 \\ &= 49 + 49 + 1 + 1 \\ &= 49 + 25 + 25 + 1 \\ &= 25 + 25 + 25 + 25 \end{aligned}$$

我們製表觀察：

u	$4u$		排列法	表示法
1	4	$1 + 1 + 1 + 1$	1	1
3	12	$9 + 1 + 1 + 1$	4	4
5	20	$9 + 9 + 1 + 1$	6	6
7	28	$25 + 1 + 1 + 1$	4	
		$9 + 9 + 9 + 1$	4	8
9	36	$25 + 9 + 1 + 1$	12	
		$9 + 9 + 9 + 9$	1	13
11	44	$25 + 9 + 9 + 1$	12	12
13	52	$49 + 1 + 1 + 1$	4	

		25 + 25 + 1 + 1	6	
		25 + 9 + 9 + 9	4	14
15	60	49 + 9 + 1 + 1	12	
		25 + 25 + 9 + 1	12	24
17	68	49 + 9 + 9 + 1	12	
		25 + 25 + 9 + 9	6	18
19	76	49 + 25 + 1 + 1	12	
		49 + 9 + 9 + 9	4	
		25 + 25 + 25 + 1	4	20
21	84	81 + 1 + 1 + 1	4	
		49 + 25 + 9 + 1	24	
		25 + 25 + 25 + 9	4	32
23	92	81 + 9 + 1 + 1	12	
		49 + 25 + 9 + 9	12	24
25	100	81 + 9 + 9 + 1	12	
		49 + 49 + 1 + 1	6	
		49 + 25 + 25 + 1	12	
		25 + 25 + 25 + 25	1	31

(B)　u：1，3，5，7，9，11，13，15，17

表示法：1，4，⑥，⑧，13，⑫，⑭，24，⑱

u：19，21，23，25

表示法：⑳，32，㉔，31

第一數列爲逐次的奇數，但支配第二數列的表示法又是什麼呢？

甲對於畫圓圈的數字，不難認出他們都是質數，我們一心一意只考慮平方，卻忽略了質數，在我們現在的問題中，質數也佔了一席之地，這不是怪事嗎？我們對此觀察覺得有意義是無可避免的，因爲它隱藏著豐富可觀的事物，即：

u爲質數 ⇨表示法爲 $u+1$

乙對於 其他數，它們的表示法究竟怎麼樣？

非完全平方數：$15=3\times 5$　，$21=3\times 7$

表示法：$24=4\times 6$　，$32=4\times 8$

完全平方數：$9=3\times 3$　，$25=5\times 5$

表示法：13　　31

丙至此，我們發現到一個與（甲）中觀察相似的地方：

P　　P_q

表示法：$P+1$　　$(P+1)(q+1)$

其中 P，q 均為質數

如果我們把對應於 Pq 的表示法換個方式來寫，也許可以看得更清楚。

$$P_q \xrightarrow{\text{表示法}} (P+1)(q+1)=P_q+P+\ \ +1$$

我們能看出甚麼來嗎？

事實上，$9 \xrightarrow{\text{表示法}} 13=9+3+1$

$$25 \xrightarrow{\text{表示法}} 31=25+5+1$$

如果再多一點眉目的話，就可以將片段的觀察組合成一個整體了：

P　　P_q　　9

表示法：$P+1$　　$P_q+P+q+1$　　$9+3+1$

因數!!

是的，第二列表示法為第一列數的因數和

結論："u 為奇數，$4u=x^2+y^2+z^2+w^2$" 的表示法為：u 之因數和

其中 x，y，z，w 為奇數

三、整數的除數和：

由於迄今關於質數序列的規則，數學家一直未發現，因此相信必有某些人類思想力所無法企及的神秘存在。有些人不厭其煩的計算至十萬以上，仍然察覺其間無次序無法則的存在，但是在偶然的機會，發現一個支配整數之除數和的極端奇特法則。以下我們將以 $\sigma(n)$ 表示 n 的除數和。

(A) 1. P 為質數，$\sigma(P)=1+P$

2. $q=P_1P_2$，其中 P_1，P_2 均為質數

$$\sigma(q)=P_1\ P_2\ \ +P_1+P_2+1=(1+P_1)(1+P_2)=\sigma(P_1)\sigma(P_2)$$

同理：$\sigma(P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\cdots\cdots P_n^{\alpha_n})=\sigma(P_1^{\alpha_1})\sigma(P_2^{\alpha_2})\cdots\cdots\sigma(P_n^{\alpha_n})$

3. P 為質數

$$\sigma(P^2)=1+P+P^2=\frac{P^3-1}{P-1}$$

$$\sigma(P^3)=1+P+P^2+P^3=\frac{P^4-1}{P-1}$$

....

$$\sigma(P^n)=1+P+P^2+\cdots\cdots+P^n=\frac{P^{n+1}}{P-1}$$

學例而言，試求 $\sigma(360)=?$

解：$360=2^3\times3^2\times5^1$

$$\sigma(360)=\sigma(2^3)\,\sigma(3^2)\,\sigma(5)=$$

$$=\frac{2^4-1}{2-1}\times\frac{3^3-1}{3-1}\times\frac{5^2-1}{5-1}=1170$$

4. 爲表達除數和的序列，從 1 到 99 的所有整數的除數和列如下表，其中若 P爲質數，則 $\sigma(P)$ 以畫圓圈表示。標明60 的這一列與 7 的這一行交點爲 $\sigma(67)$。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		1	3	4	7	6	12	8	15	13
10	18	12	28	14	24	24	31	18	39	20
20	42	32	36	24	60	31	42	40	56	30
30	72	32	63	48	54	48	91	38	60	56
40	90	42	96	44	84	78	72	48	124	57
50	93	72	98	54	120	72	120	80	90	60
60	168	62	96	104	127	84	144	68	126	96
70	144	72	195	74	114	124	140	96	168	80
80	186	121	126	84	224	108	132	120	180	90
90	234	112	168	128	144	120	252	98	171	156

若我們檢驗一下這些數的法則，必將大失所望，我們完全不敢希望找到一點點的規則等，然而經過數學家們不斷地嘗試後，卻發現到此序列是服膺於一個全然的法則：

$$\sigma(n)=\sigma(n-1)+\sigma(n-2)-\sigma(n-5)-\sigma(n-7)$$
$$+\sigma(n-12)+\sigma(n-15)-\sigma(n-22)-\sigma(n-26)$$
$$+\sigma(n-35)+\sigma(n-40)-\sigma(n-51)-\sigma(n-57)$$
$$+\sigma(n-70)+\sigma(n-77)-\sigma(n-92)-\sigma(n-100)$$

關於此公式，我們必須作下列聲明：

Ⅰ、序列之＋，一號，每二次爲週期。

Ⅱ、此法則雖可無窮的延續下去，但我們必須只取在σ下仍爲正數之各項。

Ⅲ、如果$\sigma(o)$在公式裏出現，因其本身值未定，故必須以假設之n值取代$\sigma(o)$

即當$n=1$時，$\sigma(o)=1$

當$n=3$時，$\sigma(o)=3$

Ⅳ、$1, 2, 5, 7, 12$……等數之法則，如果取其差，則明顯可見：

數 $1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40$…………

∴差①，3，②，5，③，7，④，9，⑤，11

對於上述的公式，雖然我們無法予以嚴格證明，但可以大量的例證來推斷其爲眞實，以下我們將由微分法得到此論證。

(B)考慮一級數

(Ⅰ) $S=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\cdots$

將該級數逐項乘之得。

(Ⅱ) $S=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}\cdots\cdots$

x的指數與上述公式一樣：

$1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35,$……

而且正負號的出現，也是每二次爲週期

(Ⅰ)取對數：$\ell_n S=\ell_n(1-x)+\ell_n(1-x^2)+\ell_n(1-x^3)+\cdots\cdots$

微分：$$\frac{1}{S}\frac{ds}{dx}=\frac{-1}{1-x}-\frac{2x}{1-x^2}-\frac{3x^2}{1-x^3}-\frac{4x^3}{1-x^4}-\cdots\cdots$$

乘$(-x)$：$$\frac{-x}{s}\frac{ds}{dx}=\frac{x}{1-x}+\frac{2x^2}{1-x^2}+\frac{3x^3}{1-x^3}+\frac{4x^4}{1-x^4}+\cdots\cdots$$

(Ⅱ)取對數：$\ell_n S=\ell_n(1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}\cdots\cdots)$

微分：$\frac{1}{S}\frac{ds}{dx}=\frac{-1-2x+5x^4+7x^6-12x^{11}-15x^{14}+\cdots\cdots\cdots\cdots}{1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-\cdots\cdots\cdots\cdots}$

乘$(-x)$：$\frac{-x}{S}\frac{ds}{dx}=\frac{x+2x^2-5x^5-7x^7+12x^{12}+15x^{15}-\cdots\cdots\cdots\cdots}{1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-\cdots\cdots\cdots\cdots}$

令 $t=\frac{-x}{S}\frac{ds}{dx}$ (I)中展開每一項爲幾何級數，得

$$
\begin{aligned}
t = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 &+ \cdots\cdots\cdots \\
+ 2x^2 \quad + 2x^4 \quad + 2x^6 \quad + 2x^8 &+ \cdots\cdots\cdots \\
+ 3x^3 \quad + 3x^6 \quad &+ \cdots\cdots\cdots \\
+ 4x^4 \quad + 4x^8 &+ \cdots\cdots\cdots \\
+ 5x^5 & \\
+ 6x^6 & \\
+ 7x^7 & \\
+ 8x^8 &+ \cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

x 的每一乘冪的係數都爲其指數的除數和，得

$t=\sigma(1)x+\sigma(2)x^2+\sigma(3)x^3+\sigma(4)x^4+\cdots\cdots\cdots(\quad)$

又由(II)，我們可得：

$t(1-x-x^2+x^5+x^7-\cdots\cdots)-(x+2x^2-5x^5\cdots\cdots)=0$

將(x)帶入上式：

$$
\begin{aligned}
&\sigma(1)x+\sigma(2)x^2+\sigma(3)x^3+\sigma(4)x^4+\sigma(5)x^5+\cdots\cdots\cdots \\
&\quad -x-\sigma(1)x^2-\sigma(2)x^3-\sigma(3)x^4-\sigma(4)x^5-\cdots\cdots\cdots \\
&\quad\quad -2x^2-\sigma(1)x^3-\sigma(2)x^4-\sigma(3)x^5-\cdots\cdots\cdots \\
&\quad\quad\quad +5x^5+\cdots\cdots\cdots \\
&=0
\end{aligned}
$$

集合各項

$\sigma(1)=1=\sigma(0)$

$\sigma(2)=\sigma(1)+2=\sigma(1)+\sigma(0)$

$\sigma(3)=\sigma(2)+\sigma(1)$

$\sigma(4)=\sigma(3)+\sigma(2)$

$\sigma(5)=\sigma(4)+\sigma(3)-\sigma(0)$

……………………………………

一般而言 x^n 之係數爲

$$\sigma(n)-\sigma(n-1)-\sigma(n-2)+\sigma(n-5)+\sigma(n-7)$$
$$-\sigma(n-12)-\sigma(n-15)+\cdots\cdots=0$$
$$\therefore \sigma(n)=\sigma(n-1)+\sigma(n-2)-\sigma(n-5)-\sigma(n-7)$$
$$+\sigma(n-12)+\sigma(n-15)-\cdots\cdots$$

參考書目：

1. Mathematics Todoy Twelve informal Essays：凡異出版社。
2. 數學與邏輯推理（上）：徐氏基金會出版，譯者：田成俠。

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

卓越的女數學家——蘇菲．柯瓦列夫斯基（Sonya Kovalevski）

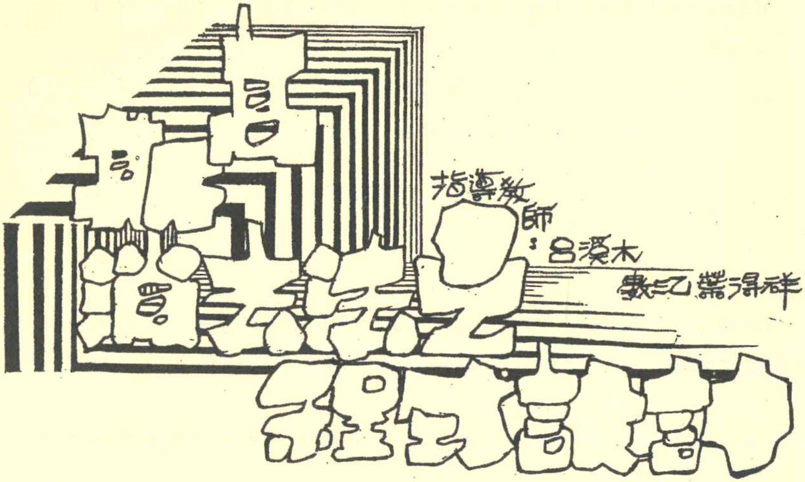
你相信嗎？“在舊時代而且處於被奴役與被壓迫的地位，竟能蘊育出一位女數學家？”但這是事實，而她就是俄國的蘇菲．柯瓦列夫斯基（1850～1891）。

蘇菲小時候常站在房間牆壁前幾小時研究裡面包含一些數學公式的符號的牆紙，且設法了解它的意義。14歲時就表現她聰明的才華，長大後為求更好的高等教育，不惜利用「假婚」與夫婿一同到外國唸書，蘇菲進入海德堡大學修完數、理、化和生理等大學課程為了再學習更深的數學，蘇菲決定到柏林大學跟隨維爾斯特拉斯（K.T.Weierstrass）然柏林大學一向不招收女生，雖然她有推薦信。所以她決心去找Weierstrass教授幫忙，結果以速度快，答案清晰且具有獨創性的通過Weierstrass教授的考試，雖然柏林大學仍不收女生，但Weierstrass教授決心教導她，於24歲未經口試就得到第二個博士。此時Weierstrass教授雖然想介紹她去教書，但當時認為讓女人走上講堂講課是有瀆神聖的表現，蘇菲只好回俄國，她的成就，別人一直不肯認同，但當她為「Evler和Legrange考慮過的“剛體繞固定點旋轉的問題”」提出論文而得到五千法郎時，她的成就才被認可，而成為第一個跨進法國科學院的女子。

蘇菲雖然只活了41歲，但她在科學上的貢獻却不少，更重要的是她作了一個榜樣：婦女也能在科學上與男士一樣並駕齊驅，充分發揮她們的才能。

摘自數學和數學家的故事

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※



本文所欲談的是如何把高斯消去法應用於計算機以處理一些數學問題。換個角度說，就是如何將高斯消去法寫成程式。本文僅討論 BASIC 語言。

大一的線型代數一門課裡，吾人已學得了高斯消去法，因此文中並不證明它，僅約略地提及如何使用，首先，讓我們看看行列式值的求法；令矩陣

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (G-1)$$

若能利用行列式的行列運算原則，使得矩陣改換成如下之形式：

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_{nn} \end{bmatrix} \qquad (G-2)$$

也就是說能使得主對角線下之各元素皆爲0，則可得

$$\Delta A = \Delta B = b_{11} \cdot b_{22} \cdot \text{------} \cdot b_{nn}$$

因此，欲求ΔA之值並不需將矩陣展開，只要吾人設法使主對角線以下（或以上）之元素全部爲零，即可由主對角線之乘積輕易求得。

欲使矩陣A轉換成矩陣B得先由第一行開始，將a_{11}以下之元素皆轉換成0，也就是設法把a_{21}，a_{31}，……，a_{n1}轉換成0。就a_{21}改換成0而言，則a_{22}，a_{23}，……，a_{2n}之值得隨a_{21}之改變而改變，使a_{21}變成0的方法是將第一列元素乘以$-a_{21}$再除以a_{11}，然後加到第二列；同理，欲將a_{i1}變成0時，可將第一列元素乘以$-a_{i1}$再除以a_{11}，再加至第i列，（$i = 3$，4，……，n）。

當a_{11}以下之元素全部爲零時，再依前述方法，使a_{22}，a_{33}，……，$a_{n-1\,n-1}$以下之元素全部爲零，於是可得如ΔB之形式，而求出A之值。

又吾人於計算過程中，發覺計算至欲使a_{jj}以下之元素爲0時，卻有a_{jj}及a_{jj}以下之元素（即$a_{j+1\,j}$，$a_{j+2\,j}$，……，a_{nj}）全部爲0，則可斷言該行列式值爲0。

茲將前述方法整理如后：即欲使a_{kk}（$k = 1$，2，……，$n-1$）以下全部爲0，則將第k列元素乘以$-a_{ik}$（$i > k$），除以a_{kk}，然後加至第i列，此時i列j行的新值爲

$$a_{ij} \doteq a_{ij} - a_{ik} \times a_{kj} / a_{kk} \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

在上述的計算過程中，因a_{11}，a_{22}，……，a_{k-1k-1}，以下之元素皆已全部爲0，所以第k列乘以$-a_{ik}$（$i = k+1$，……，n）除以a_{kk}再加至第i列之運算仍保持其值爲值爲0，此即可省去許多計算之步驟。

將上述方法改寫成 BASIC 程式片段：

```
100  FOR  K=1  TO  N-1
110  FOR  I=K+1  TO  N
120  FOR  J=K+1  TO  N
130  LET  A(I,J)=A(I,J)-A(I,K)*A(K,J
          )/A(K,K)
140  NEXT  J
150  NEXT  I
160  NEXT  K                    (P-1)
```

有了上述的討論，今再將高斯消去法求行列式值寫成程式如下：（程式－1）

```
10 REM:---DELAT---
20 REM:---DER SHIARNG YEH---
30 REM:---24,12,70---
35 DIM A(10,10)
40 READ N
45 IF N=1000 THEN STOP
60 FOR I=1 TO N
70 FOR J=1 TO N
80 READ A(I,J)
90 PRINT SPACE$(8-LEN(NUM$(A(I,J))));A(I,J);
100 NEXT J
110 PRINT
120 NEXT I
130 FOR K=2 TO N
140 IF A(K-1,K-1)=0 GOSUB 500
150 FOR I=K TO N
160 FOR J=K TO N
170 LET A(I,J)=A(I,J)-A(I,K-1)*A(K-1,J)/A(K-1,K-1)
180 NEXT J
190 NEXT I
200 NEXT K
210 LET B=1
220 FOR I=1 TO N
230 LET B=B*A(I,I)
240 NEXT I
250 PRINT:PRINT:PRINT "THE VALUE IS";B
255 PRINT:PRINT:PRINT
260 GOTO 40
500 REM:---SUBROUTINE---
510 FOR L=K TO N
520 IF A(L,K-1)<>0 THEN 600
530 NEXT L
540 PRINT:PRINT:PRINT "THE VALUE IS 0"
550 STOP
600 FOR M=K-1 TO N
610 LET A(K-1,M)=A(K-1,M)+A(L,M)
620 NEXT M
630 RETURN
700 DATA 3,1,0,1,0,3,2,-1,9,5
710 DATA 4,3,2,2,2,2,3,2,2,2,2,3,2,2,2,2,3
720 DATA 5,1,-1,0,5,0,1,0,0,2,-1,0,0,2,1,0,3,0,1,3,4,0,2,-1,2,1
730 DATA 4,1,0,-3,-1,0,2,1,0,3,1,-12,4,2,-1,2,1
740 DATA 1000
```

```
       1       0       1
       0       3       2
      -1       9       5


THE VALUE IS 0



       3       2       2       2
       2       3       2       2
       2       2       3       2
       2       2       2       3


THE VALUE IS 9
```

```
   1        -1        0        5        0
   1         0        0        2       -1
   0         0        2        1        0
   3         0        1        3        4
   0         2       -1        2        1

THE VALUE IS-140


   1         0       -3       -1
   0         2        1        0
   3         1      -12        4
   2        -1        2        1

THE VALUE IS-140
```

主程式：（10～260）

10～30　；附註

35　；宣告一10×10階之陣列以儲存矩陣之值。

40　；讀入行列式階數N。

45　；若N＝1000時便停止執行程式。

60～120；讀入並印出原矩陣。

130～200；作轉換工作

140；若主對角線上有0出現時，即將該元素以下之元素中有不爲零之列加至該元素所在之列。（至副程式執行此項工作。）

210～240；算出主對角線之積即爲行列式值。

250；印出行列式值。

260；回到40繼續讀下一筆資料。

副程式：（270～360）

280～310；由K－1列以下第K－1行若全爲0，則行列式值爲0，立即印出。否則至330行指標執行。

330～350；將第K－1行在K－1列以下不爲0之元素所在之列至第K－1列。

360；RETURN

接下來，我們將利用高斯消去法求聯立方程式之解，設有一聯立方程組如下

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -2 \end{cases} \qquad (G-3)$$

以矩陣形式，吾人可將上式寫成：

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad (G-4)$$

再簡化如下：

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \qquad (G-5)$$

這種增長的矩陣恰是原方程式中各行各列的數值組合，依照前述求行列式值的方法，若能將（G－5）改換成如下之形式：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \qquad (G-6)$$

則（G－3）方程組便與下列方程組同義：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14} \\ \qquad\qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{33}x_3 = a_{34} \end{cases} \qquad (G-7)$$

如此，吾人即可輕易的求出 x_1 ，x_2 ，x_3 之值。又

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1\cdot n+1} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} & a_{2\, n+1} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} & a_{n\, n+1} \end{bmatrix} \qquad (G-8)$$

$$\Rightarrow \quad x_n = a_{n\,n+1} / a_{nn}$$

$$x_{n-1} = (a_{n-1\,n+1} - a_{n-1\,n} \times x_n) / a_{n-1\,n-1}$$

$$\vdots$$

$$x_1 = [a_{1\,n+1} - (a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \cdots\cdots + a_{1n} x_n)] / a_{11}$$

所以 $x_j = [a_{j\,n+1} - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk} \; x_k] / a_{jj}$

寫成程式片段如下：（即程式－２之副程式８００～８８０）

```
800  LET  X(N)=A(N,N+1)/A(N,N)
810  FOR  I=1 TO N-1
820  LET  X(N-I)=A(N-I,N+1)
830  FOR  J=1 TO I
840  LET  X(N-I)=X(N-I)-A(N-I,N-J+
          1)*X(N-J+1)
850  NEXT J
860  LET  X(N-I)=X(N-I)/A(N-I,N-I)
870  NEXT I
880  RETURN                          (P-2)
```

其中：

８００　；先求出 x_n 值，然後才能求出 x_{n-1} ，x_{n-2} ⋯⋯，x_1

８１０～８２０　；因 x_1 ，x_2 ，⋯⋯ x_{n-1} 必須依逆序求得，故令Ｉ＝１　ＴＯ　Ｎ－１，然後再以Ｎ－Ｉ代替 j 。並先令 x（ j ）初值 $a_{j\,n+1}$

８３０　；因 $k = j+1$ ，$j+2$ ，⋯⋯，n 所以令Ｊ＝１　ＴＯ　Ｉ，再以Ｎ－Ｊ＋１爲 k 。

８４０　；即 x（ j ）＝ x（ j ）－Ａ（ j ，k ）×x（ k ）

８６０　；將 x（ j ）除以 A_{jj} 即爲眞正 x（ j ）值

８８０　；ＲＥＴＵＲＮ

將此一副程式與程式－1作適當修改後連結起來便可得程式－2如下：

```
10 REM:---DELAT---
20 REM:---DER SHIARNG YEH---
30 REM:---24,12,70---
40 READ N
50 DIM A(N,N+1)
60 FOR I=1 TO N
70 FOR J=1 TO N+1
80 READ A(I,J)
90 NEXT J
100 NEXT I
110 PRINT "THE MATRIX:"
115 PRINT:PRINT
120 GOSUB 1000
130 FOR K=2 TO N
140 IF A(K-1,K-1)=0 GOSUB 500
150 FOR I=K TO N
160 FOR J=K TO N+1
170 LET A(I,J)=A(I,J)-A(I,K-1)*A(K-1,J)/A(K-1,K-1)
180 NEXT J
190 NEXT I
200 NEXT K
210 GOSUB 800
215 PRINT:PRINT
216 PRINT "THE SOL:"
220 FOR I=1 TO N
230 PRINT "X";MID$(NUM$(I),2,1);"= ";X(I)
240 NEXT I
260 END
500 REM:---SUBROUTINE---
510 FOR L=K TO N
520 IF A(L,K-1)<>0 THEN 600
530 NEXT L
540 PRINT:PRINT:PRINT "THE VALUE IS 0"
550 STOP
600 FOR M=K-1 TO N+1
610 LET A(K-1,M)=A(K-1,M)+A(L,M)
620 NEXT M
630 RETURN
800 LET X(N)=A(N,N+1)/A(N,N)
810 FOR I=1 TO N-1
820 LET X(N-I)=A(N-I,N+1)
830 FOR J=1 TO I
840 LET X(N-I)=X(N-I)-A(N-I,N-J+1)*X(N-J+1)
850 NEXT J
860 LET X(N-I)=X(N-I)/A(N-I,N-I)
870 NEXT I
880 RETURN
1000 FOR I=1 TO N
1010 PRINT A(I,1);"X1";
1020 FOR J=2 TO N
1025 LET A$=FNA$(A(I,J))
1030 ON SGN(A(I,J))+2 GOTO 1040,1060,1060
1040 PRINT "-";A$;A(I,J)*-1;
1050 GOTO 1070
1060 PRINT "+";A$;A(I,J);
1070 PRINT "X";MID$(NUM$(J),2,1);
1080 NEXT J
1090 PRINT "=";FNA$(A(I,N+1));A(I,N+1)
```

```
1100 NEXT I
1110 RETURN
1120 DEF FNA$(X)=SPACE$(5-LEN(NUM$(X)))
2000 DATA 3,3,4,-1,0,2,7,1,9,1,-2,-4,-2
```

```
THE MATRIX:


 3 X1+    4 X2-    1 X3=    0
 2 X1+    7 X2+    1 X3=    9
 1 X1-    2 X2-    4 X3=   -2


THE SOL:
X1= -4.51613
X2=  2.87096
X3= -2.06451
```

副程式１０００～１１１０乃是用以控制印出報表形式而設定，１１２０ DEF　FNA＄（X）陳述語亦是用以控制印出報表形式而設，本文中不擬予以討論。

２１５～２４０各陳述語，則爲印出 x_1 ，x_2 ……之解

將2０００　DATA　修改後，可計算得另一聯立方程組之解如下：

```
2000 DATA 4,3,4,-1,-1,0,1,-1,1,1,1,1,-2,1,0,-1,3,0,1,-1,2,


THE MATRIX:


 3 X1+    4 X2-    1 X3-    1 X4=    0
 1 X1-    1 X2+    1 X3+    1 X4=    1
 1 X1-    2 X2+    1 X3+    0 X4=   -1
 3 X1+    0 X2+    1 X3-    1 X4=    2


THE SOL:
X1= -2
X2=  3
X3=  7
X4= -1
```

程式－２係完全依照數學方法將高斯消去法以程式方式寫出；所以基於數學的觀點，程式－２是沒有錯誤的（實際上，程式－２是正確的）。但，一般電腦儲存數值的方式各有所不同，以$\sqrt{4}$而言，有些電腦的儲存內值是２，也可能是１．９９９９９或２．００００１；所以，吾人不得不防範電腦儲存內值的方式。以底下兩個聯立方程組而言：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 1.00001\,x_2 = 2.00001 \end{cases}$$

其解是 $x_1 = x_2 = 1$。

$$\begin{cases} x_1 + \quad\quad x_2 = \\ x_1 + 1.00001\ x_2 = 1.99999 \end{cases}$$

其解是 $x_1 = 3$， $x_2 = -1$。

倘若我們的題意要求是 $x_1 + 1.00001\ x_2 = 2$，則內儲值是 2.00001 與內儲值是 2.00001 與內儲值是 1.99999 的兩部電腦所計算出的結果相差就很大了。再以下例言之：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

假設電腦將 1 誤存爲 $1 + z$，$z > 0$，那麼上式便爲：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 1 + z \end{cases}$$

其解是 $x_1 = 2 + \frac{1}{2}z$， $x_2 = 1 - \frac{1}{2}z$，若 z 非常小時，那麼

$x_1 = 2$，$x_2 = 1$ 是原方程組之解。可是若把常數項乘以 10^{10}，

則

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \times 10^{10} \\ x_1 - x_2 = (1 + z)\,10^{10} \end{cases}$$

其解 $x = (2 + \frac{1}{2}z)\,10^{10}$， $x_2 = (1 - \frac{1}{2}z)\,10^{10}$，若 z 值在

10^{-6} 左右（這已是非常小了），那麼 x_1 與 x_2 之值將比正確值大或小 $\frac{1}{2}$

$10^4 = 5000$；此類問題尤其是在係數很小的時候，計算所得的誤差更大。爲了使誤差儘量的減小，讓我們先看下面的例子：

假設 A = 5　　內儲值 4.99999

　　 B = 2　　內儲值 1.99999

今以A，B各除以100，於是可得

100/A ＝ 20.0004　　正確值 20

100/B ＝ 50.0025　　正確值 50

誤差各為0.0004與0.0025；所以可得一結論：除數愈大，則誤差愈小。

回想程式－2中，是以A（K－1，K－1）為除數，吾人並不知A（K－1，K－1）有多大，若A（K－1，K－1）太小時，可能造成較大的誤差。因此，可使A（K－1，K－1）之絕對值為最大。在許多的方法中，我們選擇的是將A（K－1，K－1）以下絕對值最大之數A（L，K－1）所在列加至第K－1列。當然目的是使A（K－1，K－1）之絕對值增大，因此，我們應考慮A（L，K－1）與A（K－1，K－1）之正負問題。若兩者異號，那麼就把第L列乘以－1加至第K－1列，若兩者同號，那麼直接把第L列加至第K－1列即可。底下程式－3是將程式－2修改後的新程式，其所不同的地方是：

主程式

170　；無論A（K－1，K－1）之值為何，都先到副程式執行。

副程式

505～530　；找出A（K－1，K－1）以下絕對值最大之數。

590　；若A（K－1，K－1）與A（K1，K－1）同號則S＝1，否則S＝－1。

610　；當然，若S＝1　表示將第K1列加至第K－1列。S＝－1表示將第K1列乘以－1後再加至第K－1列。

（程式－3）

```
10 REM:---DELAT---------------!
20 REM:---DER SHIARNG YEH---!
30 REM:---71,03,01-----------!
35 DIM A(10,11)
40 READ N
45 IF N=100 THEN STOP
60 FOR I=1 TO N
70 FOR J=1 TO N+1
80 READ A(I,J)
90 NEXT J
100 NEXT I
105 PRINT:PRINT:PRINT
110 PRINT "THE MATRIX:"
115 PRINT:PRINT
120 GOSUB 1000
130 FOR K=2 TO N
```

```
140 GOSUB 500
150 FOR I=K TO N
160 FOR J=K TO N+1
170 LET A(I,J)=A(I,J)-A(I,K-1)*A(K-1,J)/A(K-1,K-1)
180 NEXT J
190 NEXT I
200 NEXT K
210 GOSUB 800
215 PRINT:PRINT
216 PRINT "THE SOL:"
220 FOR I=1 TO N
230 PRINT "X";MID$(NUM$(I),2,1);"= ";X(I)
240 NEXT I
260 GOTO 40
500 REM:---SUBROUTINE---
505 LET G=ABS(A(K-1,K-1))
510 FOR L=K TO N
515 LET G1=ABS(A(L,K-1))
520 IF G1>G THEN G=G1:K1=L
530 NEXT L
535 IF G<>0 THEN 590
540 PRINT:PRINT:PRINT "NO S.P. SOL"
550 STOP
590 LET S=SGN(A(K-1,K-1)*A(K1,K-1))
600 FOR M=K-1 TO N+1
610 LET A(K-1,M)=A(K-1,M)+S*A(K1,M)
620 NEXT M
630 RETURN
800 LET X(N)=A(N,N+1)/A(N,N)
810 FOR I=1 TO N-1
820 LET X(N-I)=A(N-I,N+1)
830 FOR J=1 TO I
840 LET X(N-I)=X(N-I)-A(N-I,N-J+1)*X(N-J+1)
850 NEXT J
860 LET X(N-I)=X(N-I)/A(N-I,N-I)
870 NEXT I
880 RETURN
1000 FOR I=1 TO N
1010 PRINT A(I,1);"X1";
1020 FOR J=2 TO N
1025 LET A$=FNA$(A(I,J))
1030 ON SGN(A(I,J))+2 GOTO 1040,1060,1060
1040 PRINT "-";A$;A(I,J)*-1;
1050 GOTO 1070
1060 PRINT "+";A$;A(I,J);
1070 PRINT "X";MID$(NUM$(J),2,1);
1080 NEXT J
1090 PRINT "=";FNA$(A(I,N+1));A(I,N+1)
1100 NEXT I
1110 RETURN
1120 DEF FNA$(X)=SPACE$(10-LEN(NUM$(X)))
2010 DATA 2,1,1,2,1,1.00001,2.00001
2020 DATA 2,1,1,2,1,1.00001,1.99999
2030 DATA 2,1,1,2,1,1.00001,1.99990
2040 DATA 3,3,4,-1,0,2,7,1,9,1,-2,-4,-2
2050 DATA 4,3,4,-1,-1,0,1,-1,1,1,1,1,-2,1,0,-1,3,0,1,-1,2
2060 DATA 100
```

```
THE MATRIX:

 1 X1+          1 X2=          2
 1 X1+  1.00001 X2=  2.00001

THE SOL:
X1=  1.02439
X2=  .97561


THE MATRIX:

 1 X1+          1 X2=          2
 1 X1+  1.00001 X2=  1.99999

THE SOL:
X1=  3.07317
X2= -1.07317


THE MATRIX:

 1 X1+          1 X2=          2
 1 X1+  1.00001 X2=   1.9999

THE SOL:
X1=  12.2439
X2= -10.2439


THE MATRIX:

 3 X1+          4 X2-          1 X3=          0
 2 X1+          7 X2+          1 X3=          9
 1 X1-          2 X2-          4 X3=         -2

THE SOL:
X1= -4.51613
X2=  2.87096
X3= -2.06451
```

```
THE MATRIX:

3 X1+      4 X2-      1 X3-      1 X4=      0
1 X1-      1 X2+      1 X3+      1 X4=      1
1 X1-      2 X2+      1 X3+      0 X4=     -1
3 X1+      0 X2+      1 X3-      1 X4=      2

THE SOL:
X1= -2
X2=  3
X3=  7
X4= -1
```

再則，讓我們看看如何使用上述的程式－1來求出一矩陣之反矩陣，同樣的，於線型代數一門課裡，吾人學得了反矩陣的一種求法；假設如（G－1）形式之一矩陣。

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (G-9)$$

我們若能把（G－9）左右兩個矩陣，對應的轉換而使得左邊之矩陣成為一單位矩陣，則右邊之矩陣便成爲（G－9）左邊矩陣之反矩陣了。亦即將（G－9）改換成如下之形式：

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \cdots 0 & b_{11} & b_{12} \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots 0 & b_{21} & b_{22} \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots 0 & b_{11} & b_{12} \cdots & b_{nn} \end{array}\right) \qquad (G-10)$$

則

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \text{即爲} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{之反矩陣}$$

在程式－1中，吾人僅將主對角線以下之元素全部改換成0，所以程式寫法如（P－1）之形式。而在計算反矩陣過程中，吾人必須先使原矩陣變成單位矩陣，所以不僅得使主對角線以下之元素全部爲0，主對角線以上之各元素亦得爲0，因此，必須將（P－1）之程式略作修改如下：

```
160 FOR K=2 TO N+1
170 IF A(K-1,K-1)=0 GOSUB 420
180 FOR I=1 TO N
190 IF I=K-1 THEN 270
200 LET D=A(I,K-1)
210 FOR J=1 TO N
220 LET B(I,J)=B(I,J)-B(K-1,J)
        *D/A(K-1, K-1)
230 LET A(I,J)=A(I,J)-A(K-1,J)
        *D/A(K-1, K-1)
260 NEXT J
270 NEXT I
300 NEXT K
```

（P－3）

其中：

180 ；因由第一列做起，所以I＝1 TO N。

190 ；倘I＝K－1，即與a_{k-1k-1}同列，不用運算。

200 ；於計算過程中，A（I，K－1）會改變，因此先令D＝A（I，K－1）以便固定A（I，K－1）之值。

210 ；因由第一行做起，所以J＝1 TO N。

220～230 ；B矩陣爲單位矩陣，故得與A矩陣做同步轉換工作。

當160～300 諸陳述語被執行完後，所得之矩陣如下：

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a'_{11} & 0 & \cdots & 0 & b'_{11} & b'_{12} & \cdots & b'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \ddots & \vdots & b'_{21} & b'_{22} & \cdots & b'_{2n} \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a'_{nn} & b'_{n1} & b'_{n2} & \cdots & b'_{nn} \end{array}\right) \quad (G-11)$$

所以得將第一列全部除以a_{11}，第j列全部除以a'_{jj} 後才可獲得（G－10）之矩陣。

即：

```
310  FOR  I＝1  TO  N
320  FOR  J＝1  TO  N
330  LET  B（I，J）＝B（I，J）/A（I，I）
340  NEXT  J
350  LET  A（I，I）＝1
360  NEXT  I
```

330　；使B矩陣第I列全部除以A（I，I）

350　；因A矩陣除主對角線外其它元素皆為0，所以只須令A（I，I）＝1即可，因為A（I，I）/A（I，I）＝1。

於是程式－1經過修改後乃可用以求一矩陣之反矩陣，修改成程式－4如下：

```
10 REM:---DELAT---
20 REM:---DER SHIARNG YEH---
30 REM:---24,12,70---
40 LET E=.0001
50 DEF FNA$(X)=SPACE$(10-LEN(NUM$(X)))
60 READ N
70 DIM A(N,N),B(N,N)
80 FOR I=1 TO N
90 FOR J=1 TO N
100 READ A(I,J)
110 LET B(I,J)=0
120 NEXT J
130 LET B(I,I)=1
140 NEXT I
150 GOSUB 520
160 FOR K=2 TO N+1
170 IF A(K-1,K-1)=0 GOSUB 420
180 FOR I=1 TO N
190 IF I=K-1 THEN 270
200 LET D=A(I,K-1)
210 FOR J=1 TO N
220 LET B(I,J)=B(I,J)-B(K-1,J)*D/A(K-1,K-1)
230 LET A(I,J)=A(I,J)-A(K-1,J)*D/A(K-1,K-1)
240 IF ABS(A(I,J))<=E THEN A(I,J)=0
250 IF ABS(B(I,J))<=E THEN B(I,J)=0
260 NEXT J
270 NEXT I
280 PRINT:PRINT:PRINT
290 GOSUB 520
300 NEXT K
310 FOR I=1 TO N
320 FOR J=1 TO N
330 LET B(I,J)=B(I,J)/A(I,I)
```

```
340 NEXT J
350 LET A(I,I)=1
360 NEXT I
370 PRINT:PRINT:PRINT
380 PRINT TAB(10*N+5);"INVERS"
390 PRINT
400 GOSUB 520
410 END
420 REM:---SUBROUTINE---
430 FOR L=K TO N
440 IF A(L,K-1)<>0 THEN 480
450 NEXT L
460 PRINT:PRINT:PRINT "NOT EXIST"
470 STOP
480 FOR M=K-1 TO N
490 LET A(K-1,M)=A(K-1,M)+A(L,M)
500 NEXT M
510 RETURN
520 FOR I=1 TO N
530 FOR J=1 TO N
540 PRINT FNA$(A(I,J));A(I,J);
550 NEXT J
560 PRINT SPACE$(5);
570 FOR J=1 TO N
580 PRINT FNA$(B(I,J));B(I,J);
590 NEXT J
600 PRINT
610 NEXT I
620 RETURN
630 DATA 3,3,4,-1,0,2,7,1,9,1,
```

```
3        4         -1              1          0          0
0        2          7              0          1          0
1        9          1              0          0          1


3        4         -1              1          0          0
0        2          7              0          1          0
0  7.66666    1.33333       -.333333          0          1


3        0        -15              1         -2          0
0        2          7              0          1          0
0        0      -25.5       -.333333   -3.83333          1


3        0          0        1.19607    .254902   -.588235
0        2          0       -.091503   -.052287    .274509
0        0      -25.5       -.333333   -3.83333          1
```

```
                              INVERS

1          0          0          .398692    .084967   -.196078
0          1          0         -.045751   -.026143    .137254
0          0          1          .013071    .150326   -.039215
```

所以反矩陣爲：

```
INVERS

  .398692    .084967   -.196078
 -.045751   -.026143    .137254
  .013071    .150326   -.039215
```

程式中

８０～１４０　；讀入Ａ矩陣，同時設立一單位矩陣Ｂ。

１６０～３００　；作Ａ，Ｂ之轉換計算工作

２４０～２５０　；計算過程中會有估計誤差出現，（因爲ＢＡＳＩＣ語言不能作分數之加減，若一分數１／３，則以０.333333表示，於是出現了估計上之誤差）。所以大膽的假定若Ａ（Ｉ，Ｊ）　或　Ｂ（Ｉ，Ｊ）　之絕對值比Ｅ小時，便令Ａ（Ｉ，Ｊ）　或　Ｂ（Ｉ，Ｊ）　爲０。

２９０　；希望每計算一次，便相對的將Ａ，Ｂ矩陣寫出，以便於了解工作過程。

４２０～５１０　；即程式－１之２８０～３６０副程式，所不同的是，當矩陣Ａ之行列式值爲０時，其反矩陣便不存在。

５２０～６２０　；爲相對印出Ａ矩陣與Ｂ矩陣而設。

最後，我們看前述的聯立方程組之解法，如能像求反矩陣一般，即將（Ｇ－８）再化成：

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & 0 & \cdots & 0 & a'_{1\,n+1} \\ 0 & a'_{22} & \ddots & \vdots & a'_{2\,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a'_{nn} & a'_{n\,n+1} \end{pmatrix} \qquad (G-13)$$

之形式，（其實只需如求反矩陣一般的一次完成即可），則吾人便可輕易地求出 $x_1 = a'_{1\ n+1} / a'_{11}$，$x_2 = a'_{2\ n+1} / a'_{22}$，……，$x_n = a'_{n\ n+1} / a'_{nn}$。所以將程式－4修改後，便可得另一求聯立方程組之解的新程式如下：（程式－5）

```
10 REM:---DELAT---
20 REM:---DER SHIARNG YEH---
30 REM:---24,12,70---
35 DIM A(10,11)
40 READ N
45 IF N=100 THEN STOP
60 FOR I=1 TO N
70 FOR J=1 TO N+1
80 READ A(I,J)
90 NEXT J
100 NEXT I
105 PRINT:PRINT:PRINT
110 PRINT "THE MATRIX:"
115 PRINT:PRINT
120 GOSUB 1000
130 FOR K=2 TO N
140 GOSUB 500
150 FOR I=K TO N
160 FOR J=K TO N+1
170 LET A(I,J)=A(I,J)-A(I,K-1)*A(K-1,J)/A(K-1,K-1)
180 NEXT J
190 NEXT I
200 NEXT K
210 GOSUB 800
215 PRINT:PRINT
216 PRINT "THE SOL:"
220 FOR I=1 TO N
230 PRINT "X";MID$(NUM$(I),2,1);"= ";X(I)
240 NEXT I
260 GOTO 40
500 REM:---SUBROUTINE---
505 LET G=ABS(A(K-1,K-1))
510 FOR L=K TO N
515 LET G1=ABS(A(L,K-1))
520 IF G1>G THEN G=G1:K1=L
530 NEXT L
535 IF G<>0 THEN 590
540 PRINT:PRINT:PRINT "NO S.P. SOL"
550 STOP
590 LET S=SGN(A(K-1,K-1)*A(K1,K-1))
600 FOR M=K-1 TO N+1
610 LET A(K-1,M)=A(K-1,M)+S*A(K1,M)
620 NEXT M
630 RETURN
800 LET X(N)=A(N,N+1)/A(N,N)
810 FOR I=1 TO N-1
820 LET X(N-I)=A(N-I,N+1)
830 FOR J=1 TO I
840 LET X(N-I)=X(N-I)-A(N-I,N-J+1)*X(N-J+1)
```

```
850 NEXT J
860 LET X(N-I)=X(N-I)/A(N-I,N-I)
870 NEXT I
880 RETURN
1000 FOR I=1 TO N
1010 PRINT A(I,1);"X1";
1020 FOR J=2 TO N
1025 LET A$=FNA$(A(I,J))
1030 ON SGN(A(I,J))+2 GOTO 1040,1060,1060
1040 PRINT "-";A$;A(I,J)*-1;
1050 GOTO 1070
1060 PRINT "+";A$;A(I,J);
1070 PRINT "X";MID$(NUM$(J),2,1);
1080 NEXT J
1090 PRINT "=";FNA$(A(I,N+1));A(I,N+1)
1100 NEXT I
1110 RETURN
1120 DEF FNA$(X)=SPACE$(9-LEN(NUM$(X)))
2010 DATA 2,1,1,2,1,1.00001,2.00001
2020 DATA 2,1,1,2,1,1.00001,1.99999
2030 DATA 2,1,1,2,1,1.00001,1.99990
2040 DATA 3,3,4,-1,0,2,7,1,9,1,-2,-4,-2
2050 DATA 4,3,4,-1,-1,0,1,-1,1,1,1,1,-2,1,0,-1,3,0,1,-1,2
2060 DATA 100


THE MATRIX:


 1 X1+        1 X2=        2
 1 X1+ 1.00001 X2= 2.00001


THE SOL:
X1=  1.02439
X2=  .97561



THE MATRIX:


 1 X1+        1 X2=        2
 1 X1+ 1.00001 X2= 1.99999


THE SOL:
X1=  3.07317
X2= -1.07317



THE MATRIX:


 1 X1+        1 X2=        2
 1 X1+ 1.00001 X2=   1.9999
```

```
THE SOL:
X1=  12.2439
X2= -10.2439


THE MATRIX:


 3 X1+        4 X2-        1 X3=        0
 2 X1+        7 X2+        1 X3=        9
 1 X1-        2 X2-        4 X3=       -2

THE SOL:
X1= -4.51613
X2=  2.87096
X3= -2.06451


THE MATRIX:


 3 X1+        4 X2-        1 X3-        1 X4=        0
 1 X1-        1 X2+        1 X3+        1 X4=        1
 1 X1-        2 X2+        1 X3+        0 X4=       -1
 3 X1+        0 X2+        1 X3-        1 X4=        2

THE SOL:
X1= -2
X2=  3
X3=  7
X4= -1
```

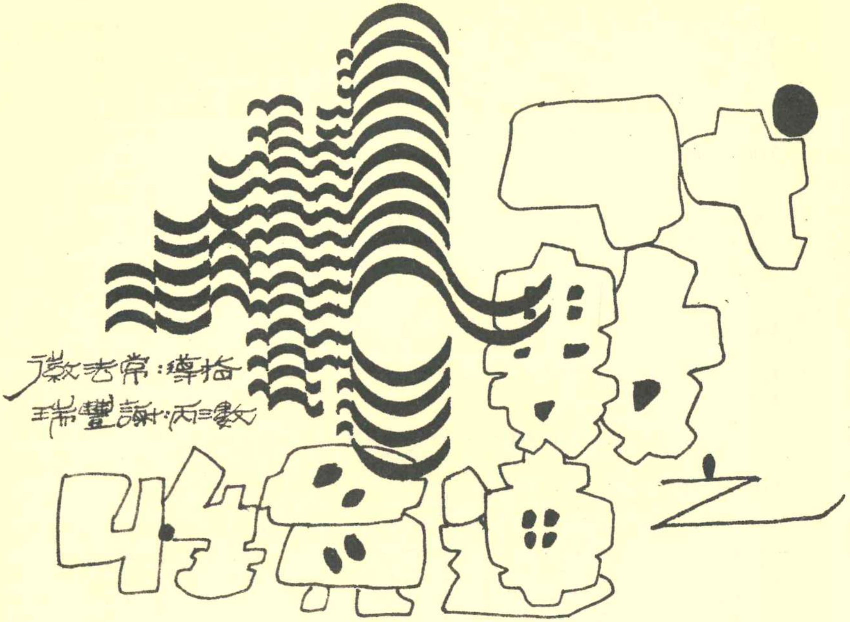
其中，

３１０～　３６０　；用以印出解

１０００～１１１０　；同程式－３之副程式１０００２～１１１０。

〔參考書錄〕：

1. NOBLE, BEN : applied linear algebra, Prentice-Hall, Inc. 1969。



從大二開始，每位數學系的同學即開始接觸一連串的專門知識訓練，包括高微、代數、射幾、微方、拓樸、機率與統計……等。其中代數所佔的份量非常的重。修完了這門課後，你知道何謂代數嗎？在此，大略的介紹一些代數的基本觀念。

㈠何謂代數？

剛開始這門課所學到的是一些簡單的群（Groups），環（Rings）實在看不出其與「代數」一詞有何相關，但再往下研究，我們將會學到體（Fields），向量空間（Vector spaces），模（Modules），代數（Algebras）等，而最後將討論各種代數形態之結構，由此，可看出代數這門課名稱之由來了。

實際上，代數乃是趨向於研討由臆說所定義體系之明顯結構，而此體系對於一或更多之運算具封閉性。

㈡幾個簡單之代數體系

在此，我們需要先了解一個很重要的名詞“二元運算（Binary operation）”。

定義：若 S 爲一非空集，對任意函數“$*$”。

$*: S\times S\rightarrow S$ 乃從 $S\times S=\{(S_1, S_2)\,|\,S_1, S_2\in S\}$ 映至 S 之寫像則稱“$*$”爲 S 上之二元運算。

下面開始介紹幾個代數體系：

(1)半群（Semigroups）

定義：S為一非空集，在其上定義一二元運算“$*$”滿足

(i) $\forall a, b \in S$，　$a * b \in S$　（封閉性）

(ii) $\forall a, b, c \in S$，　$a*(b*c)=(a*b)*c$　（結合律）

則稱（S，$*$）為一半群。

例：$(Z,+)$；$(Z,\cdot)$；$(Q,+)$；$(Q;\cdot)$；$(R,+)$；$(R,\cdot)$

皆為半群。

(2)群（Groups）

定義：G為一非空集

在G中定義一二元運算“$*$”滿足。

（i）（G，$*$）為半群。

（ii）$\exists\, e \in G \ni a * e = e * a = a \quad \forall a \in G$（單位元素）

（iii）$\forall a \in G$，$\exists\, a^{-1} \in G \ni$

$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$　（反元素）

則（G，$*$）稱為一群。

定義：若G為一群，且$\forall a, b \in G$

$a * b = b * a$　（交換律）

則（G，$*$）稱為一交換群（commutative groups）

例：令$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| ad - bc \neq 0 ; a, b, c, d \in R \right\}$

定義一二元運算“$*$”如下

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2, & c_1 a_2 + d_1 c_2 \\ a_1 b_2 + b_1 d_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

顯然，“$*$”滿足結合律及封閉性

且令$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　I即為G之單位元素。

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} \text{即為} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{之反元素}$$

故（G，$*$）為一群，但並非交換群。

例：$(R-\{0\},\cdot)$

其中"・"爲通常之乘法運算，R爲實數集。

則$(R-\{0\},\cdot)$爲一交換群

1爲其單位元素

$\forall \gamma \in R$，$\frac{1}{r}$爲反元素

定義：$(G,*)$爲一群

$\phi \neq H \subset G$，且$(H,*)$爲一群

則$(H,*)$稱爲G之一子群（Subgroups）

定義：$(H,*)$爲$(G,*)$之一子群，且

$$a*H=H*a,\quad \forall a \in G$$

$(\text{i.e.}\ a*h*a \in H,\ \forall a \in G,\ h \in H)$

則稱$(H,*)$爲$(G,*)$之一正規子群（Normal Subgroups）

例：$(R-\{0\},\cdot)$爲一群，則

$(Q-\{0\},\cdot)$爲其之一正規子群，其中Q爲有理數集

定義：$(G,*)$爲一群

$(H,*)$爲其之一正規子群

令$G/H=\{a*H \mid a \in G\}$且

$\forall\ a*H,\ b*H \in G/H$

$(a*H)*(b*H)=(a*b)*H$

則稱$(G/H,*)$爲G之一商群

例：$(3)=\{3m \mid m \in Z\}$

$(Z,+)$爲一群，則(3)爲Z之一正規子群

$Z/(3)=\{(3),\ 1+(3),\ 2+(3)\}$爲$(Z,+)$之一商群

(3)環（Ring）

定義：R爲一非空集，在其上定義二個二元運算，"＋"，"・"使得$\forall a,b,$

$c \in R$。

(i)（R，+）爲一交換群。

(ii) $a \cdot b \in R$

(iii) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(iv) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$\cdot (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

則（R，+，·）稱爲一結合環

然而，現在有些近世代數，將單位元素的存在性列入環的定義中，也就是（R,+,·）除滿足上述定義外，尚滿足

$\exists\, e \in R \ni \forall a \in R \Rightarrow a \cdot e = e \cdot a = a$

定義：若（R，+，·）爲一環，且滿足

$\forall a, b \in R \quad a \cdot b = b \cdot a$

則（R，+，·）稱爲一交換環（Commutative rings）

例：令E爲所有偶數所成的集合

定義"+"，"·"爲通常之加法及乘法

則R是一個交換環

例：令0爲所有奇數所成之集合

"+"，"·"同上例

則R不是一環，因對加法運算並不滿足封閉性

定義：（R,+,·）爲一群

（I,+）爲（R,+）之一子群，且

$\forall a \in I, \gamma \in R$

$a \cdot \gamma \in I \quad (\gamma \cdot a \in I)$

則I爲R之右（左）理想子環（Right－ideals（Left－ideals））

例：$R = Z_8$ 則 $(Z_8, +_8, \cdot_8)$ 爲一環

令 $I = \{[0], [2], [4], [6]\}$

則I爲R之一理想子環

有了 ideals，我們可以定義商環如下：

定義：$(R, +, \cdot)$ 爲一環

I 爲 R 之一理想子環

令 $R/I = \{ a + I \mid a \in R \}$

且 $(a+I) + (b+I) = (a+b) + I$

$(a+I) \cdot (b+I) = a \cdot b + I$

則 R/I 爲一 R 之商環（Quotient rings）

例：$(Z, +, \cdot)$ 乃一環，其中 Z 爲整數集

$(3) = \{ 3m \mid m \in Z \}$ 爲 Z 之一理想子環

則 $Z/(3) = \{ (3), 1+(3), 2+(3) \}$ 爲 Z 之一商環

(4)體（Fields）

定義：若 $(F, +, \cdot)$ 爲一結合環，且

(i) $\exists\, e \in R \ni a \cdot e = e \cdot a = a \quad \forall a \in F$

(ii) $\forall a \in F, \ \exists\, a^{-1} \in F \ni$

$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

(iii) $\forall a, b \in F, a \cdot b = b \cdot a$

則稱 $(F, +, \cdot)$ 爲一體（Fields）

由上定義可知，$(F, +, \cdot)$ 爲一體之充要條件爲

(i) $(F, +, \cdot)$ 爲一結合環，且

(ii) $(F - \{0\}, \cdot)$ 爲一交換群

例：R爲實數集，則 $(R - \{0\}, +, \cdot)$ 爲二體

"$+$" 乃通常之加法，"$\cdot$" 乃通常之乘法

以下我們將定義一些較複雜的代數體系

(5) R－模（R－Modules）

定義：$(R, +, \cdot)$ 爲一結合環

M 爲一非空集，且滿足

(i) $(M, +)$ 爲一交換群

(ii) $\forall \gamma \in R$, $m \in M \Rightarrow \gamma \cdot m \in M$

(iii) $\forall a, b \in M$, $r, s \in R$

$$\gamma \cdot (a + b) = \gamma \cdot a + \gamma \cdot b$$

$$\gamma \cdot (s \cdot a) = (\gamma \cdot s) \cdot a$$

$$(\gamma + s) \cdot a = \gamma \cdot a + s \cdot a$$

則稱M爲佈於R上之一模(Modules)

例：$(Z, +, \cdot)$爲一結合環，Z爲整數集

$(Z, +)$爲一交換群，且滿足上述定義

故Z爲佈於其本身之一模

(6)向量空間(Vector spaces)

定義：若$(V, +)$爲一交換群

$(F, +', \cdot')$爲一體，且滿足

(i) $\forall \nu \in V$, $\alpha \in F \Rightarrow \alpha \cdot \nu \in V$

(ii) $\nu, w \in V$, $\alpha \cdot \beta \in F$

$$\alpha \cdot (\nu + w) = \alpha \cdot \nu + \alpha \cdot w$$

$$(\alpha +' \beta) \cdot \nu = \alpha \cdot \nu + \beta \cdot \nu$$

$$(\alpha \cdot' \beta) \nu = \alpha \cdot (\beta \cdot \nu)$$

(iii) $e \cdot \nu = \nu$　其中e爲F之乘法單位元素

則稱V爲佈於F上之一向量空間(Vector spaces)

例：$(R - \{0\}, +, \cdot)$爲一體

則$(R - \{0\}, +, \cdot)$爲佈於其本身之一向量空間

(7)代數(Algebra)

定義：$(A, +, \cdot)$爲一結合環

若A爲佈於F之向量空間，且滿足

$\forall a, b \in A$,　$\alpha \in F$

$$\alpha (a b) = (\alpha a) b = a (\alpha b)$$

則稱A爲佈於F之結合代數

但有些書本定義 $(\alpha a)(\beta b)=(\alpha\beta)(ab)$ $\forall a,b\in A,\ \alpha,\beta\in F$ 爲代數的條件，實際上乃相同之定義證明如下：

若 $\alpha(ab)\overset{ⓐ}{=}(\alpha a)b\overset{ⓑ}{=}a(\alpha b)$ 則

$$\begin{aligned}(\alpha a)(\beta b)&=\beta((\alpha a)(b)) && \text{by ⓑ}\\ &=\beta(\alpha(ab)) && \text{by ⓐ}\\ &\doteq(\beta\alpha)(ab)\\ &=(\alpha\beta)(ab)\end{aligned}$$

若 $(\alpha a)(\beta b)=(\alpha\beta)(ab)$ 則

取 $\alpha=e\Rightarrow\ a(\beta b)=\beta(ab)$ 　 e 爲 F 中之乘法單位元素

$\beta=e\Rightarrow\ (\alpha a)b=\alpha(ab)$

故 $a(\alpha b)=\alpha(ab)=(\alpha a)b$

例：$(R-\{0\},+,\cdot)$ 爲佈於其本身之一向量空間

且 $\forall a,b,c,d\in R-\{0\}$

$(ab)(cd)=(ac)(bd)$

故 $R-\{0\}$ 爲佈於其本身之結合代數

結合代數中，若將其上之乘法結合律去掉，則稱其爲非結合代數，以下我們看看幾個特殊的代數體系

㈠李氏代數（Lie algebras）

定義：$(A,+,\cdot)$ 爲一佈於 F 之非結合代數

且 (i) $\forall a,b\in A$ 　 $a\cdot a=a^2=0$ 　 (i.e. $ab=-ba$)

(ii) $\forall a,b,c\in A$ 　 $(ab)c+(bc)a+(ca)=0$

（Jacobi 等式）

則稱 A 爲一李氏代數

例：在歐幾里得空間中定義，爲向量之矢積“X”則得一李氏代數

㈡布耳代數（Boolean algebras）

定義：B 爲一非空集

在其上定義二個二元運算“Λ”，“V”且滿足

(i) $a\vee b=b\vee a$; $a\wedge b=b\wedge a$ 　 $\forall a,b\in B$

(ii) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ $\forall a, b, c \in B$

(iii) $\exists\, 0 \in B$ $a \vee 0 = a$ $\forall a \in B$

$\exists\, 1 \in B$ $a \wedge 1 = a$

(iv) $\forall a \in B$, $\exists\, a' \in B$ ∋

$a \vee a' = 1$; $a \wedge a' = 0$

則稱 $(B, \vee, \wedge)$ 爲一布耳代數 (Boolean algebras)

例：Q爲有理數集，$P(Q) = \{A \mid A \subset Q\}$

則 $(P(Q), \cup, \cap)$ 爲一布耳代數

其中 $0 = \phi$，$1 = Q$

㈢ Jordan 代數

定義：若 $(J, +, \cdot)$ 爲佈於 F 上之一非結合代數

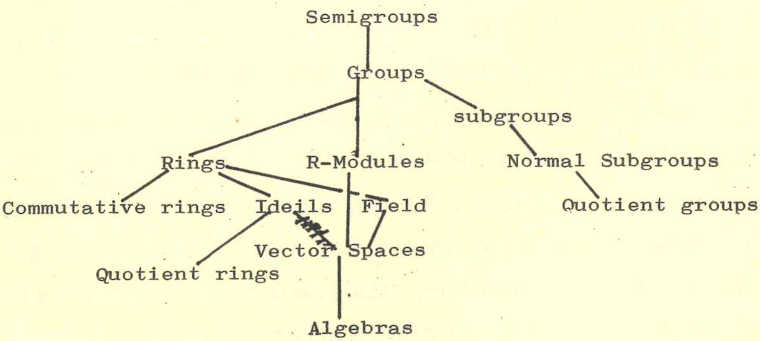
且(i) $\forall a, b \in J$ $ab = ba$

(ii) $\forall a, b \in J$ $(a^2 b) a = a^2 (ba)$

則稱 J 爲佈於 F 上之一 Jordan 代數

例：$(R - \{0\}, +, \circ)$ 並不爲 Jordan 代數，因其爲一結合代數。

以上所介紹之代數體系皆有其連貫性，現以一樹枝圖形表示如下：



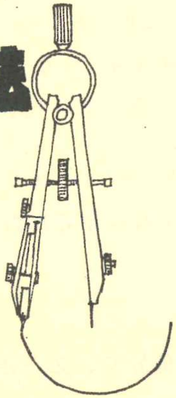
參考資料：

(1)近世代數之研究；徐氏基金會。

(2) Topics In Algebra ; i.n. herstein ；東南

(3) Abstract And Linear Algebra ; Burton.

π之表示法



指導老師 趙文敏
數三丙 華國忠

自從有人類歷史以來便有著圓周率——π的觀念了。從〃圓的周長：直徑＝常數〃的概念，一直推展到今日〃π爲一超越數（transcendental number）〃。在這幾千年來的發展中，由於有著〃π之值到底爲何〃的問題存在，便產生了古希臘三大難題之一——方圓問題。儘管在〃π爲超越數〃之問題尚未解決前，π的問題仍然無法完全解決，但是它經過了阿基米德、牛頓、Vieta、Wallis、Gregory、Euler ……等人之手後，π便有了各式各樣的表示法了，利用這些表示法，便漸漸的得到了π較精確的值了。等到其超越性被解決後，才算是完全的解決了π的所有問題。當然連〃方圓問題〃也不例外。現在就幾種π的表示法來表示π值。

一、首先讓我們看看當初阿基米德是如何去求得π之近似值的。

設 A ＝半徑爲 r 之圓周長

B ＝半徑爲 r 之圓的內接正 n 邊形周長

C ＝半徑爲 r 之圓的外切正 n 邊形周長

故可得 $B < A < C$

又 $A = 2\pi r$

$$B = 2nr\cdot\sin\theta$$

$$C = 2nr\ \tan\theta \qquad 其中\ \theta = \frac{\pi}{n}$$

$$\Rightarrow \quad 2nr\sin\theta < 2\pi r < 2nr\tan\theta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{n\sin\theta < \pi < n\tan\theta}$$

再將其原來之 n 邊形邊數加倍K次

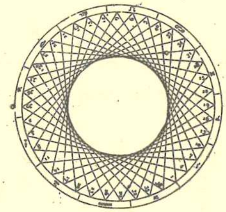
$$\Rightarrow \quad 2^k n\sin(\theta/2^k) < \pi < 2^k n\tan(\theta/2^k)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{K\to\infty} 2^k n\sin(\theta/2^k) = \lim_{K\to\infty} 2^k n\tan(\theta/2^k) = \pi$$

故先取定一 n 值，便可由取邊數加倍一個夠大的次數求得 π 之近似值。

當初阿基米德是從正六邊形開始，他當時只算到正96邊形，因而得到

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$



此圖為一個正40邊形

二、
$$\boxed{\pi = \cfrac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots\cdots}}$$

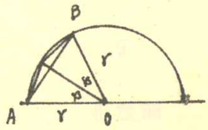
此為西元1593年，法國數學家Vieta 利用圓之正 n 邊形與正 $2n$ 邊形面積間的關係，而求得的。這不僅是歷史上第一個用一連串的代數運算的解析形式來表示 π，而且此表示式也是數學史上最早發現的一個無窮乘積。其作法如下：

設 $A(n)$ 表半徑為 r 的圓之內接正 n 邊形面積

如右圖則知 $A(n) = n\times(\triangle OAB$ 之面積)

$$= \frac{1}{2}nr^2\sin 2\beta \ (其中\ \beta = \frac{\pi}{n})$$

$$= nr^2\cos\beta\sin\beta$$



同理可得 $A(2n) = nr^2 \sin\beta$

$$\Rightarrow \frac{A(n)}{A(2n)} = \frac{nr^2 \sin\beta\cos\beta}{nr^2 \sin\beta} = \operatorname{Cos}\beta$$

同理 $\dfrac{A(2n)}{A(4n)} = \operatorname{Cos}\dfrac{\beta}{2}$

$$\vdots$$

由歸納法得

$$\frac{A(n)}{A(2^K n)} = \frac{A(n)}{A(2n)} \times \frac{A(2n)}{A(4n)} \times \cdots\cdots\cdots \times \frac{A(2^{K-1}n)}{A(2^K n)}$$

$$= \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\frac{\beta}{2} \operatorname{Cos}\frac{\beta}{2^2} \cdots\cdots\cdots \operatorname{Cos}\frac{\beta}{2^{K-1}}$$

又 $\lim\limits_{K\to\infty} A(2^K n) = \pi r^2$

$$\Rightarrow \pi = \frac{\frac{1}{2} n \sin 2\beta}{\cos\beta \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\beta}{2^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}$$

取 $\beta = \dfrac{\pi}{4}$ 即 $n = 4$，且利用 $\cos\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$ 之關係式

即可得到

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots\cdots\cdots\cdots}$$

三、 $\boxed{\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{2}{3}、\dfrac{4}{3}、\dfrac{4}{5}、\dfrac{6}{5}\cdots\cdots\cdots \text{(Wallis 乘積公式)}}$

此為另一 π 之無窮乘積表示法。

證明：

令 P_n 表示這個無窮乘積的第 n 個部分積

則 $P_{2n} = \dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \dfrac{2n}{2n-1}\cdot\dfrac{2n}{2n+1}$

$$P_{2n+1} = P_{2n}\frac{2n+2}{2n+1}$$

顯然地，$P_2 < P_4 < \cdots\cdots < P_{2n} < \cdots\cdots < P_{2n+1} < \cdots\cdots < P_3 < P_1$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty} P_{2n}$ 與 $\lim\limits_{n\to\infty} P_{2n+1}$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} P_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} P_{2n+1}$

其次，利用部分積分法

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$$

於是，依數學歸納法，

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\quad\cdots\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$I_{2n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,dx = \frac{(2n-2)(2n-4)\cdots\cdots 4\cdot 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots\cdots 5\cdot 3}$$

因此可得：$\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \dfrac{2}{\pi}P_{2n}$ 且 $\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n+2}} = \dfrac{2}{\pi}P_{2n+1}$

又因爲 $\sin^{2n+2} x \leqq \sin^{2n+1} x \leqq \sin^{2n} x$，故 $I_{2n+2} \leqq I_{2n+1} \leqq I_{2n}$

於是，對 $\forall\ n \in N$

$$P_{2n} \leqq \frac{\pi}{2}\ ,\ P_{2n+1} \geqq \frac{\pi}{2}$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \dfrac{\pi}{2}$

四、下列幾個小部分均爲 π 之無窮級數之表示法

(a)
$$\boxed{\begin{cases} \pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots\cdots\cdots\right) \\ \pi = \frac{6}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{3^2\cdot 5} - \frac{1}{3^3\cdot 7} + \cdots\cdots\right) \end{cases}}$$

因 $\tan^{-1} x = \int_0^x \dfrac{dx}{1+x^2}$

且 $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots\cdots\ \forall\ -1 \leqq x \leqq 1$

$$\Rightarrow \tan^{-1} x \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots\cdots)\,dx$$

$$= x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + x^9/9 \cdots\cdots\cdots$$

取 $x = 1$

則得 $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9}\cdots\cdots\cdots$

卽 $\pi = 4\left(1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9}\cdots\cdots\cdots\cdots\right)$

又取 $x=\sqrt{\frac{1}{3}}$

則得 $\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{3^2\cdot 5}-\frac{1}{3^3\cdot 7}+\cdots\cdots\cdots\cdots\right)$

即 $\pi=\frac{6}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{3^2\cdot 5}-\frac{1}{3^3\cdot 7}+\cdots\cdots\cdots\cdots\right)$

(b) $\boxed{\pi=6\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ \frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\ \frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\ \frac{1}{7\cdot 2^7}+\cdots\cdots\right)}$

因為 $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\mathrm{Sin}^{-1}x$

且由二項式定理知

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^6+\cdots\cdots\ \forall -1<x<1$$

$$\Rightarrow \mathrm{Sin}^{-1}x=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^x\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^6+\cdots\cdots\right)dx$$

$$=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\ \frac{x^7}{7}+\cdots\cdots$$

取 $x=\frac{1}{2}$

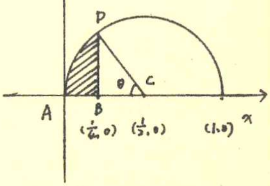
則得 $\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7\cdot 2^7}+\cdots\cdots\cdots$

即 $\pi=6\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ \frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\ \frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\ \frac{1}{7\cdot 2^7}+\cdots\cdots\cdots\right)$

(c) $\boxed{\pi=\frac{3\sqrt{3}}{4}+24\left(\frac{2}{3}\ \frac{1}{2^3}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}-\frac{1}{28}\cdot\frac{1}{2^7}-\frac{1}{72}\cdot\frac{1}{2^9}\cdots\cdots\cdots\cdots\right)}$

考慮一半圓 $y=\sqrt{x-x^2}$

即以 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 為圓心，$\frac{1}{2}$ 為半徑之半圓



由右圖知

ＡＤＢ之面積（即斜線部分之面積）為

$$A=\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{x-x^2}\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x}\ \sqrt{1-x}\ dx$$

由二項式定理知 $\sqrt{1+x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 \cdots\cdots\cdots$

$$\Rightarrow \sqrt{x}\ \sqrt{1-x} = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}} \cdots\cdots\cdots$$

$$\Rightarrow A = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}} \cdots\cdots\cdots\cdots \right) dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \Big|_0^{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} - \frac{1}{28}\ \frac{1}{27} - \frac{1}{72}\ \frac{1}{29} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

但由前圖中知ＡＤＢ斜線部分之面積等於扇形ＡＣＤ面積減去△ＢＣＤ之面積。

又 $\overline{CD} = \frac{1}{2}$，$\overline{BD} = \sqrt{\frac{1}{2} - (\frac{1}{4})^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

∴扇形ＡＣＤ之面積 $= (\frac{1}{2})^2\ \frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{24}$

且△ＢＣＤ之面積 $= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{32}$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32} = A = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} - \frac{1}{28}\cdot\frac{1}{2^7}\cdot\frac{1}{72}\cdot\frac{1}{2^9}\cdots\cdots$$

$$\Rightarrow \pi = 24\left(\frac{\sqrt{3}}{3^2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} - \frac{1}{28}\cdot\frac{1}{2^7} - \frac{1}{72}\cdot\frac{1}{2^9}\cdots\cdots\cdots\right)$$

即 $\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} - \frac{1}{28}\cdot\frac{1}{2^7} - \frac{1}{72}\cdot\frac{1}{2^9}\cdots\cdots\cdots\right)$

(d) $\boxed{\pi = 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot5^3} + \frac{1}{5\cdot5^5} - \frac{1}{7\cdot5^7} + \cdots\cdots\right) - 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot239^3} + \frac{1}{5\cdot239^5}\cdots\right)}$

令 $\tan\beta = \frac{1}{5}$

$$\Rightarrow \quad \tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \frac{5}{12}$$

$$\tan 4\beta = \frac{2\tan^2\beta}{1-\tan^2 2\beta} = \frac{120}{119}$$

$$\Rightarrow \tan\left(4\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan 4\beta-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan 4\beta\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan 4\beta-1}{1+\tan 4\beta}=\frac{1}{239}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{1}{239}=4\beta-\frac{\pi}{4}$$

$$=4\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}$$

由(a)知

$$\tan^{-1}x=x-x^3/3+x^5/3-x^7/7+x^9/9\cdots\cdots$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\tan^{-1}\dfrac{1}{239}=\dfrac{1}{239}-\dfrac{1}{3\cdot 239^3}+\dfrac{1}{5\cdot 239^5}-\dfrac{1}{7\cdot 239^7}+\cdots\cdots\\[2ex] \tan^{-1}\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{3\cdot 5^3}+\dfrac{1}{5\cdot 5^5}-\dfrac{1}{7\cdot 5^7}+\cdots\cdots\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

$$\Rightarrow \pi=16\tan^{-1}\frac{1}{5}-4\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

$$=16\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}-\frac{1}{7\cdot 5^7}+\cdots\cdots\right)-4\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot 239^3}+\frac{1}{5\cdot 239^5}\cdots\cdots\right)$$

(e)前面(a)～(d)部分中，皆爲 π 之無窮級數之表示法，現在讓我們來看看一個 π^2 之無窮級數之表示法。

即 $$\boxed{\frac{\pi^2}{6}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}$$

下列的導出方法是 Euler 所導出的。

由 Taylor 展開式知：

$$\sin x=x-x^3/3!+x^5/5!-x^7/7!+\cdots\cdots$$

因 0，$\pm\pi$，$\pm 2\pi$，$\pm 3\pi$，…… 爲 $\sin x=0$ 的根

令 $y=x^2$

則 $y=0$ 時

$$1-\frac{y}{3!}+\frac{y^2}{5!}-\frac{y^3}{7!}+\cdots\cdots\cdots\cdots=0$$ 的根為

π^2，$(2\pi)^2$，$(3\pi)^2$，$(4\pi)^2$$\cdots\cdots\cdots\cdots$

由方程式論中知

對任一方程式 $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots\cdots=0$

若此方程式之根為 α_i　$i\in A$

$$\Rightarrow \sum_{i\in A}\frac{1}{\alpha_i}=\frac{-a_1}{a_0}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

$$\therefore \frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{(2\pi)^2}+\frac{1}{(3\pi)^2}+\cdots\cdots\cdots=\frac{1}{3!}$$

$$\therefore e\quad \frac{\pi^2}{6}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

以上所得的結果是對的，但是其導出的過程有問題，即並非所有的方程式（$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots\cdots=0$）皆滿足（$*$）

故現在數學上並不用此法。至於另外的方法，因為還需要利用其他的幾個公式始能導出，而要先導出這些公式時，其過程又很繁，故在此不擬討論，在趙文敏老師所著之無窮級數 12375 ～ 376 中有一種導出方法，有興趣的可參考之。

以上僅是舉 π 的幾種較常見的表示法而已，其實 π 的表示法簡直不勝枚舉，要多少就有多少。最後還有個 π 的很重要的問題，也就是 π 的非有理性及超越性，本文中不擬討論這兩個問題，有興趣者可參照數論導引（凡異出版社）P 561～563

參考資料：

無窮級數：趙文敏著，正中書局

π 的故事：凡異出版社

數論導引：凡異出版社

賽跑風波

編輯小組

指導老師：鄭芳枝

由於學期將盡，因此體育老師便決定在本學期最後一次體育課時測驗*100*公尺短跑，以便於計算本學期的體育成績。當天班上所有的男同學爲了爭得高分數以便在班上女同學面前炫耀一番，因此大家都磨拳擦掌的在事前做好了萬全的準備。現在每一位同學也都集中在起跑點那邊，一方面舒展筋骨做賽前的準備，一方面等老師的到來，連那平時弱不禁風，走起路來都東倒西歪的瘦子也提起了精神在那邊動了動他那幾根快要分了家的瘦骨頭，看了他那付皮包骨的模樣，眞不敢想像等他〝跑〞完了這〝遙不可及的*100*公尺〞後，他將會變成甚麼樣子了。然而在瘦子一旁卻站著一位身材魁梧，十分高大的壯漢，此人卽是本班之鋒頭人物—胖子是也。瞧他那高大的身材，一看便知是位運動健將。他是班上各項運動的台柱，有了他便往往可使得比賽轉敗爲勝。今天看他一付精神煥發的英姿，看來是非常有希望打破上學期他自己牛刀小試所締造的班上記錄，胖子那付做賽前暖身操的姿態，簡直與一旁的瘦子成了强烈的對比。

等了好久，總算老師慢吞吞的來了，緊接著便開始測驗了。兩個兩個輪番上陣來比個高下，競爭之激烈，眞是盛況空前，前所未見。雖然比賽狀況非常激烈，但

是卻遲遲未見瘦子上場，而胖子也悠哉的在一旁觀看。最後瘦子一看除了胖子與他尚未測驗外，其餘的同學都已經在終點線那頭休息了。這時他想難道是他與胖子同一組不成，果然不假，接下來便輪到他與胖子上場。終於槍聲響了，只見胖子以火箭般的速度直往終點線衝，在終點線附近的同學們也都在那頭搖旗吶喊的爲胖子加油，大家莫不盼望他能打破記錄。總算如大家之所料，胖子終於以10秒9的成績刷新了他自己所保持的班上記錄。雖然胖子已經抵達終點了，然而反觀與他一起的瘦子竟然還在50公尺左右的地方慢吞吞的“跑”。15秒、16秒、17秒……。同學們都爲瘦子的遲遲未到而緊張，因此便開始齊聲的爲他計時，希望能提醒瘦子趕快抵達終點，趕快結束這段漫長的“太空漫步”。看樣子他這學期的體育將難以過關了，想到這裏同學們莫不爲他揑一把冷汗，可是在場上的瘦子似乎一點也沒有感覺到這利害關係，竟然還慢吞吞的，簡直比走路還慢。20秒、21秒、22秒、23秒、24秒、24秒5、25秒，終於瘦子到了，他共花了25秒的時間才跑完全程，可是他的體育也因此便成“鐵當”了。

瘦子托著沈重的身體回到了寢室，剛一進門便聽到室友們在那邊大吹特吹自己的成績，尤其欽佩胖子的成績，他便瑣緊了雙眉躺在床上愈想愈窩囊，竟然與胖子同組，人家跑了10秒9的成績，而他竟然跑個25秒，結果體育當了，這將來怎麼向班上女同學交待才好。他恨他自己爲什麼不能像胖子那樣，在班上女同學面前出盡鋒頭，這該是多麼風光的事啊！可是胖子除了體育方面比他行外，其他也並不見得比他好啊！而且還比不上他自己呢？可是胖子爲什麼就能那麼風光呢？瘦子自己實在想不透這是什麼緣故。這時正好住在隔壁寢室的胖子走了進來，他看到瘦子躺在床上不說話這情形，便知道是剛才的事使得他煩惱，一向心地善良的胖子便走到他的床緣要去安慰他，瘦子看到胖子坐在他床緣上，一向具有數學頭腦而且喜歡要點小聰明的他便突然靈機一動，想到數學上常用的某一觀念要來考考胖子，以便顯示自己並非平庸之才，也可以扳回自己的面子。

瘦子：你剛才100公尺跑幾秒？

胖子：10秒9

瘦子：那很快嘛！

胖子：其實沒什麼啦！

瘦子：怎麼會沒甚麼呢？不是還破記錄嗎？看樣子你明天又可以在班上同學們面前風光了。

胖子聽了這些話，不禁露出了一付很得意的樣子，那知

瘦子：不過，你知道嗎？雖然你的速度很快，而我却跑了個25秒，可是只要你讓

我先跑 1 公尺，那麼你就永遠追不上我了，即使把終點線定得多遠，你還是永遠跑在我後面的，你信不信呢？

胖子心想這怎麼可能呢？即使先讓他50公尺，相信自己也可以在100公尺內追上瘦子的，何況是在任何距離內呢？而且也只是讓了 1 公尺而已。可是他看瘦子一付興緻勃勃的樣子，雖然不相信他說的話，可是也不便於掃他的興。

胖子：爲甚麼呢？你能不能把你的理由說出來讓我知道。

瘦子：其實這很簡單，你100 公尺跑10 秒9 而我却是25 秒， 雖然你的速度是我的 2 倍多，爲方便起見就將它當成是 3 倍好了，可是你想想，當你跑了 1 公尺到達 A_1 處時，我則跑到距離你⅓公尺的 A_2 處了，而當你又跑了⅓公尺時，此時我則跑到離你 $\frac{1}{3^2}$ 公尺的 A_3 處了，……如此下去，儘管你和我的距離一直在不斷的縮短，可是你卻永遠追不上我，這便是我的理由，你認爲如何？

胖子想這明明是不可能的事，早上他都可以超前50公尺了，這區區的 1 公尺怎麼可能趕不上呢？可是剛剛瘦子的理由也很有道理，好像並沒有錯嘛！但是一時也想不出個所以然來。

胖子：我現在也不能確定你所說的是對或錯，可是總是覺得怪怪的，等我回去想清楚後再回答你。

就這樣胖子便退出了瘦子的寢室，回到了自己的書架前，便坐著開始思考這個問題了。可是總是想不出個所以然來，總覺得瘦子是應該對的，可是自己的想法也應該不會有錯才對啊！可是爲甚麼結果會不一樣呢？這時與胖子同寢室的阿呆正好回來，他看一向好動的胖子怎麼竟然一反常態的呆坐在那邊，想想便知準有事情，便上前向胖子問個清楚，胖子便把事情全部告訴了阿呆，聰明的阿呆想了幾分鐘，便開始慢條斯理的向胖子解釋。

阿呆：我現在問你，你是唸甚麼系的？

胖子：廢話，當然是數學系的，難道會是國文系的不成。

阿呆：那你現在是三年級對不對？

這時胖子有點火大了，阿呆不幫他解決問題，也就算了，竟然還問些明知故問的問題來尋他開心。

胖子：奇怪，你今天怎麼廢話一大堆，我和你同班，難不成會是一年級。

阿呆：你不要急嘛！我再問你，你學過高微了吧！

胖子：豈止學過，連現在都還在修呢？就爲了高微這10個學分，簡直把我搞得暈頭轉向的，不說也罷！

胖子去年高微當掉，今年重修，可是今年的情況好像又不太樂觀，運氣不好的

話又有被當的可能。

阿呆：那你總懂得極限（ limit ）這個名詞吧！

胖子：我當然懂得，我還知道 $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=0$ 且 $\lim\limits_{\theta\to 0}\tan\theta=1$

你看我極限的觀念還不錯吧！

胖子想到可以在班上數學高桿的大呆面前炫耀一下自己辛苦學來的極限觀念便禁不住的露出了個得意的笑容。

阿呆：噢！不，你錯了，是 $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$ 和 $\lim\limits_{\theta\to 0}\tan\theta=0$ 才對。

胖子：不管怎樣，我知道 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ 的意義即當對於任一正數 $\varepsilon>0$ 時，一定可以找到一正數 $\delta>0$ 使得當 $|x-a|<\delta$ 時，則 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ 就對了。可是這與我的問題會有關係嗎？

阿呆：正是，你想想看，你是否能追得上瘦子，這是個時間的問題。因此要解決這個問題時，你必須要把時間的因素加以考慮進去。現在我們假設瘦子的平均速度是每秒 V 公尺，那麼你的速度就應該是 $\dfrac{25}{10\cdot 9}$ V 公尺／秒了，為了方便起見，就以 $2V$ 計好了。那麼當你跑了 1 公尺時，也就是跑到 A_1 處時，則你共花了 $T_1=\dfrac{1}{2V}$ 秒，而在 A_2 處的瘦子離你的距離只剩 $\dfrac{1}{2V}\times V=\dfrac{1}{2}$ 公尺了。當你再跑到 A_2 時，一共用了 $T_2=T_1+\dfrac{1}{2^2V}=\dfrac{1}{2V}+\dfrac{1}{2^2V}$ 秒的時間。如此一直類推下去當你跑到 A_n 處時，你一共所用掉的時間便是

$$T_n=\frac{1}{2V}+\frac{1}{2^2V}+\frac{1}{2^3V}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^nV}$$

因為 T_n 是一個有限的等比級數，故利用等比級數公式便可得：

$$T_n=\frac{1}{V}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

由上面式子可以知道，無論 n 多大，你跑到 A_n 處所需的時間都永遠不會超過 $\dfrac{1}{V}$，但你稍微用一下頭腦想想，便可知道這 $\dfrac{1}{V}$ 秒正是你趕上瘦子的時刻。可是因為瘦子所討論的時間永遠都小於 $\dfrac{1}{V}$ 秒，因此瘦子會說你永遠追不上他，這也正是瘦子所犯錯誤的地方。這樣你懂了吧！

胖子：現在我終於懂了，可是我還有個疑問，便是這個與極限又有什麼關係呢？

阿呆：你看 $T_n=\dfrac{1}{V}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$ 雖然 T_n 始終不會超過 $\dfrac{1}{V}$，但是由極限觀念可知當 n

足夠大時，則T_n可與$\frac{1}{V}$任意地接近。即$\forall \varepsilon > 0$，$\exists K \in N \ni n \geq K$時恒有

$$|T_n - \frac{1}{V}| < \varepsilon$$

這便是$\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{V}$

這樣你該都懂了吧！

胖子：現在我總算全部了解了，想不到學數學的用處還會有那麼多，從今以後我一定要脚踏實地好好去學。眞謝謝你。噢！對了，我得趕快去告訴瘦子才對，把他錯誤的地方糾正過來。

胖子便興高采烈地去找瘦子了。

阿呆看了這個情形便想也眞不錯，想不到一個簡單的概念便可以把胖子對於數學的恐懼感去除了。要是和我一樣對數學有著濃厚的興趣的人多一點，那該是多麼美好的事啊！

後記：本文構想來自希臘詭辯家齊諾（Zeno）的一則賽跑問題，如欲更加明瞭其大意，可觀看系上所作之數學教育影片。

二年級作品：

本欄包括“旅行推員問題”，“資源分配”，“倒數計算及其應用”等三篇，另外附帶的增加了“師大數學系各年級修課內容及選課注意事項”。

你可曾想像郵差送信每天走了多少的寃枉路，你曾考慮過要如何走才能使得他能把要送的信全部都送達目的地，並且總與所經過的路程為最短？

你知道要如何利用手上所僅有資源（條件），來達到最大的權益？

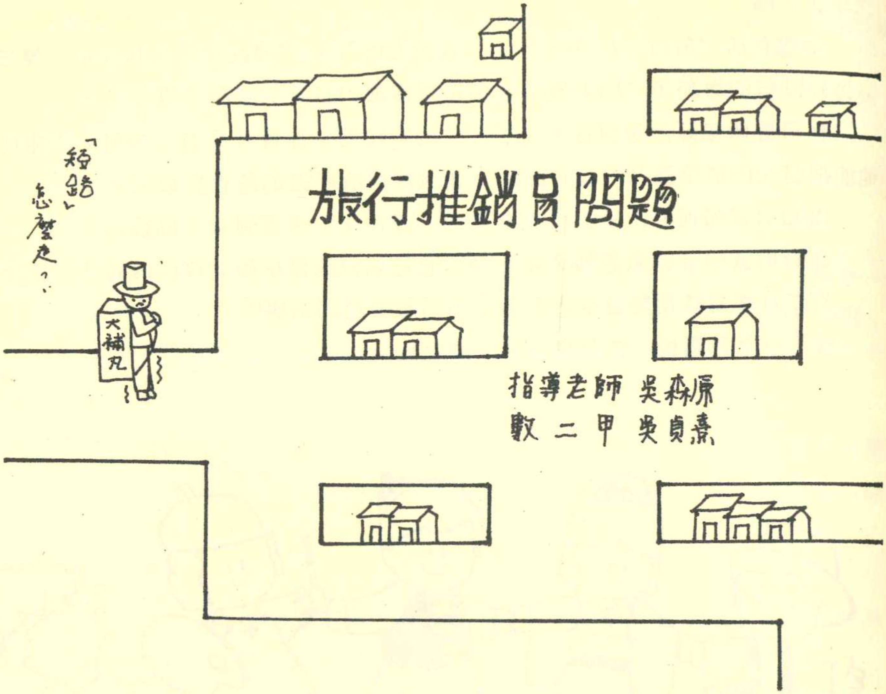
你對倒數的計算熟悉嗎？你想知道它是如何的應用到計算機的高速運算上？

你在每學期註册時會常因不知如何選課而感到困擾嗎？

看了以上各篇後，你將會有很大的收獲。

大家一起來

投稿師大數學



旅行推銷員問題

指導老師 吳森原
數二甲 吳貞素

當一個推銷員從一個特定的城市出發，到 n 個城市去訪問，然後回到原城市。假如把所有可能的路線都走一次，則會有 1/2（n－1）！個不同的走法。

旅行推銷員問題即是找最短的路線，使得所走路程之總和為極小。也就是給一個 n × n 的對稱矩陣 $D=(d_{ij})$，d_{ij} 代表從城市 i 到城市 j 間的距離，適當的排列這些點，使之形成一個包含 n 個點的循環，並使得此循環之總長為最小。

當推銷員從城市 i 到城市 j 時，矩陣中之第（i,j）個元素之值 $x'_{ij}=1$，其他的元素則為 0。

一個經過 n 個城市的路程可以視為一個秩為 n 的置換矩陣，並可表為一個 n－循環。

現在我們以 n＝5 為例

(I)

$$\|x'_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \end{Vmatrix}$$

(II)

$$\|x'_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \end{Vmatrix}$$

(I)代表經過城市 1 → 2 → 4 → 3 → 5 → 1

也可表爲（ 1 2 4 3 5 ）

（II）代表經過城市 1 → 2 → 1 和 3 → 5 → 4 → 3

也可表爲兩個子循環（ 1 2 ）和（ 3 5 4 ）

由(I)，（ II ）可得知所有的有向路線皆適合下列的關係：

$$\sum_i x'_{ij} = \sum_j x'_{ij} = 1 \quad , \quad x'_{ii} = 0 \ , \quad x_{ij} \geq 0$$

若所有的矩陣以對角線爲對稱軸，對角線以上的元素加到對角線以下的對稱元素，取其和則矩陣(I)，（II）可改爲

(I)

$$\left\| x_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} \cdot & & & & \\ 1 & \cdot & & & \\ 0 & 0 & \cdot & & \\ 0 & 1 & 1 & \cdot & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdot \end{matrix} \right\|$$

（II）

$$\left\| x_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} \cdot & & & & \\ 2 & \cdot & & & \\ 0 & 0 & \cdot & & \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdot \end{matrix} \right\|$$

此時 $x_{ij} = x'_{ij} + x'_{ji}$ 且第 k 行和第 k 列之和必爲 z，可表爲下列的關係式

$$\sum_{j<i} x_{ij} + \sum_{i>j} x_{ij} = 2 \quad (i = 1 , 2 \cdots\cdots n , x_{ij} \geqq 0) \cdots\cdots (1)$$

這個關係式表所有無方向的路線。

雖然矩陣（ II ）並不是一個可行的路線，但是依然適合(1)式。

在沒有方向的路程中 $x_{ij} = x_{ji}$ 則(1)式可以改爲

$$\sum_{j=i}^{n} x_{ij} = z \quad (x_{ij} \geqq 0 \ ; \ i = 1 , 2 , -\cdots - n \ ; \ i \neq j \ ; \ x_{ij} = x_{ji}) \cdots \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

則旅行推銷員問題就是找下式的最小值。

$$D (x) = \sum_{i<j} d_{ij} \ x_{ij} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

並受制於下列情形

$$\sum_{S} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

對於所有眞部分集合 $S \subset \{1, 2, \cdots\cdots n\}$，且其中
$|S|$ 表 S 集合的元素個數。
對於所有經過的路線的變數 x_{ij} 稱爲基本變數，其他的變數則爲非基本變數。
(2)式乘 π_i 並減去(3)式，則可得

$$D(x) = \sum_{i<j} d_{ij} x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} \pi_1 \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - 2 \right)$$

$$(x_{ij} = x_{ji},\ i \neq j)$$

$$= -\sum_{i>j} (\pi_i + \pi_j - d_{ij}) x_{ij} + 2 \sum_{1}^{n} \pi_i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

取 x_{ij} 的係數爲 δ_{ij} 則

$$D(x) = -\sum_{i<j} \delta_{ij} x_{ij} + z \sum_{1}^{n} \pi_i \quad (\delta_{ij} = \pi_i + \pi_j - d_{ij}) \cdots(6)$$

令 $\delta_{ij} = 0$ 即可求得 n 個 π_i 之值

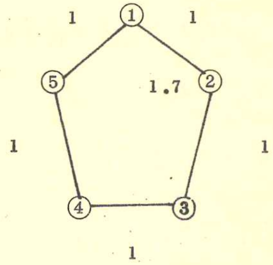
令 $D(\overline{x}) = z \sum_{1}^{n} \pi_i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$

則 $D(x) - D(\overline{x}) = -\sum_{i<j} \delta_{ij} x_{ij} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$

若 $\delta_{ij} \leqq 0$ 對於所有的 (i, j)，則 $D(x) - D(\overline{x}) \geq 0$ 即

$D(x) \geq D(\overline{x})$ 此時 $D(\overline{x})$ 爲最短的路程，即爲最佳解。

範例1：
現有5個城市形成一個規則的5邊形，每邊爲1單位長，對角線爲 $1/2(\sqrt{5}+1) \doteqdot 1.7$（如圖1），假設所走的路程爲（1 2 3 4 5）



（圖一）

這個問題是求(3)式的最小值且只有(2)式的限制

寫成線性規劃的形式爲：

$$\min z = x_{12}d_{12} + x_{13}d_{13} + x_{14}d_{14} + x_{15}d_{15} + x_{23}d_{23} + x_{24}d_{24} + x_{25}d_{25} + x_{34}d_{34} + x_{35}d_{35} + x_{45}d_{45}$$

$$= \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=i+1}^{5} x_{ij}d_{ij} = \sum_{\substack{1 \\ i<j}}^{5} x_{ij}d_{ij}$$

受制於

$$\left\{\begin{array}{l} x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=2 \\ x_{12}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=2 \\ x_{13}+x_{23}+x_{34}+x_{35}=2 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{45}=2 \\ x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}=2 \\ x_{ij}=0 \text{ 或 } 1 \end{array}\right. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

利用 Largrange 參數式得

$$D(x) = x_{12}d_{12}+x_{13}d_{13}+x_{14}d_{14}+x_{15}d_{15}+x_{23}d_{23}+x_{24}d_{24}+x_{25}d_{25} + x_{34}d_{34}+x_{35}d_{35}+x_{45}d_{45} - \pi_1(x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}-2) - \pi_2(x_{12}+x_{23}+x_{24}+x_{25}-2) - \pi_3(x_{13}+x_{23}+x_{34}+x_{45}-2)$$

$$-\pi_4(x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{45}-2)-\pi_5(x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}-2$$

$$=-(\pi_1+\pi_2-d_{12})x_{12}-(\pi_1+\pi_3-d_{13})x_{13}$$

$$-(\pi_1+\pi_4-d_{14})x_{14}-(\pi_1+\pi_5-d_{15})x_{15}$$

$$-(\pi_2+\pi_3-d_{23})x_{23}-(\pi_2+\pi_4-d_{24})x_{24}$$

$$-(\pi_2+\pi_5-d_{25})x_{25}-(\pi_3+\pi_4-d_{34})x_{34}$$

$$-(\pi_3+\pi_5-d_{35})x_{35}-(\pi_4+\pi_5-d_{45})x_{45}$$

$$+2(\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4+\pi_5)$$

取路線爲（１２３４５）則令

$$x_{12}=x_{23}=x_{34}=x_{45}=x_{51}=1 \qquad 其他\, x_{ij}=0$$

令 $\pi_1+\pi_2-d_{12}=0$，$\pi_2+\pi_3-d_{23}=0$，$\pi_3+\pi_4-d_{34}=0$

$\pi_4+\pi_5-d_{45}=0$，$\pi_5+\pi_1-d_{51}=0$

因 $d_{12}=d_{23}=d_{34}=d_{45}=d_{51}=1$

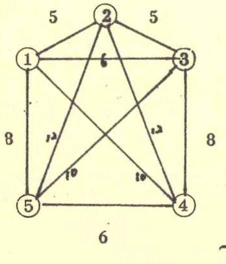
則 $(\pi_1+\pi_2)-(\pi_2+\pi_3)+(\pi_3+\pi_4)-(\pi_4+\pi_5)+(\pi_5+\pi_4)=2\pi_1=1 \qquad \therefore \pi_1=\frac{1}{2}$

$$\pi_2=\pi_3=\pi_4=\pi_5=\frac{1}{2}$$

全部之 $\delta_{ij}=(\pi_i+\pi_j-d_{ij})\leq 0$ 故（１２３４５）爲一組最佳解。

範例２：

另取一個５個城市的問題，這５個城市並不形成一個正５邊形（如圖２）



（圖２）

若取路線爲（ 1 2 3 4 5 ），則D（$\overline{x}$）=32，此時基本變數

$x_{12} = x_{23} = x_{34} = x_{45} = x_{51} = 1$　　其他的 $x_{ij} = 0$

重覆範例 1 的做法得

$$\begin{cases} \pi_1 + \pi_2 = d_{12} = 5 \\ \pi_2 + \pi_3 = d_{23} = 5 \\ \pi_3 + \pi_4 = d_{34} = 8 \\ \pi_4 + \pi_5 = d_{45} = 6 \\ \pi_5 + \pi_1 = d_{51} = 8 \end{cases}$$

$$2\pi_1 = (\pi_1 + \pi_2) - (\pi_2 + \pi_3) + (\pi_3 + \pi_4) - (\pi_4 + \pi_5) + (\pi_5 + \pi_1) = 5 - 5 + 8 - 6 + 8 = 10$$

得 $\pi_1 = 5$ ，$\pi_2 = 0$，$\pi_3 = 5$，$\pi_4 = 3$，$\pi_5 = 3$

$$\delta_{ij} = \pi_i + \pi_j - d_{ij}$$

則 $\delta_{31} = \pi_3 + \pi_1 - d_{31} = 4 > 0$　其他 $\delta_{ij} \leq 0$

令 $x \quad = \theta$　其他非基本變數依然取之爲 0，則由（ * ）得

$$\begin{cases} x_{12} + x_{13} + x_{15} = 2 \\ x_{12} + x_{23} = 2 \\ x_{13} + x_{23} + x_{34} = 2 \\ x_{34} + x_{45} = 2 \\ x_{15} + x_{45} = 2 \end{cases}$$

其中 $x_{31} = \theta$ 故得：

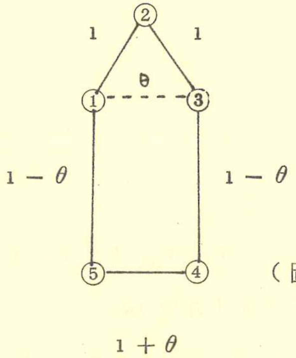
$$\begin{cases} x_{12} + x_{15} = 2 - \theta \\ x_{12} + x_{23} = 2 \\ x_{23} + x_{34} = 2 - \theta \\ x_{34} + x_{45} = 2 \\ x_{15} + x_{45} = 2 \end{cases}$$

解之　$zx_{15} = (x_{12}+x_{15}) - (x_{12}+x_{23}) + (x_{23}+x_{34}) - (x_{34}+x_{45}) + (x_{15}+x_{45}) = (2-\theta) - (2) + (2-\theta) - (2) + 2$

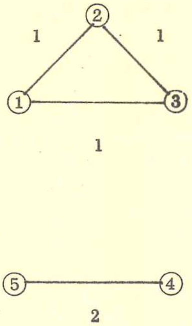
$x_{15} = 1-\theta$

$x_{12} = 1$，$x_{23} = 1$；　$x_{34} = 1-\theta$，　$x_{45} = 1-\theta$，

以下圖表之爲：



（圖3）



（圖4）

若 $\theta = 1$，則形成圖4，這是不合的，因爲 $x_{45} \leqq 1$（即 $x_{45} = 0$ 或 $x_{45} = 1$）。

故在（＊）中加入一個新的限制方程式：$x_{45} + y_6 - 1 = 0$（$y_6 \geqq 0$）然後回到原來的方法。

由範例1的D（x）再減去 π_6（$x_{45} + y_6 - 1$）化簡得

$$D(x) = -(\pi_1+\pi_2-d_{12})x_{12} - (\pi_1+\pi_3-d_{13})x_{13} - (\pi_1+\pi_{14}-d_{14})x_{14} - (\pi_1+\pi_5-d_{15})x_{15} - (\pi_2+\pi_3-d_{23})x_{23} - (\pi_2+\pi_4-d_{24})x_{24} - (\pi_2+\pi_5-d_{25})x_{25} - (\pi_3+\pi_4-d_{34})x_{34} - (\pi_3+\pi_5-d_{35})x_{35} - (\pi_4+\pi_5-d_{45}+\pi_6)x_{45} + z(\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4+\pi_6) + (\pi_6 - \pi_6 y_6)$$

則 $\delta_{45} = \pi_4+\pi_5-d_{45}+\pi_6$　其他　$\delta_{ij} = \pi_i + \pi_j - d_{ij}$

現在有六個基本變數 x_{12}，x_{13}，x_{23}，x_{34}，x_{45}，x_{15}　其對應的 δ_{ij} 之值爲0,

$$\begin{cases}\pi_1+\pi_3-d_{13}=0\\ \pi_1+\pi_2-d_{12}=0\\ \pi_2+\pi_3-d_{23}=0\\ \pi_3+\pi_4-d_{34}=0\\ \pi_4+\pi_5-d_{45}+\pi_6=0\\ \pi_1+\pi_5-d_{15}=0\end{cases}\quad 得\quad \begin{cases}\pi_1+\pi_3=d_{13}=6\\ \pi_1+\pi_2=d_{12}=5\\ \pi_2+\pi_3=d_{23}=5\\ \pi_3+\pi_4=d_{34}=8\\ \pi_4+\pi_5=d_{45}-\pi_6=6-\pi_6\\ \pi_1+\pi_5=d_{15}=8\end{cases}$$

由前3式解之得 $2\pi_3=(\pi_1+\pi_3)-(\pi_1+\pi_2)+(\pi_2+\pi_3)=3$

$\pi_3=3$， $\pi_2=2$， $\pi_1=3$ 代入後3式解之得

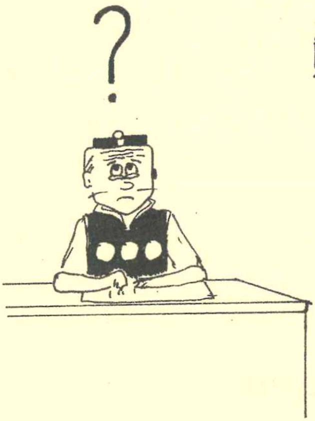
$\pi_4=5$， $\pi_5=5$， $\pi_6=-4$

此時所有 $\delta_{ij}\leq 0$，故（1 2 3 4 5）爲最佳路線

參考資料：

G. Dantzig, R. Fulkerson and S. Jhbnson:

Solution of a large-scale Traneling - saleman problem, Operations Research, 1955, 393-405.



資源分配

指導老師　吳森原

數二甲　張宗榮

在這科學突飛猛進的時代，一系列關於資源分配問題的方法已經被發現了。雖然資源分配問題的範圍很廣，但是其基本問題是相同的。我們現在就將這些資源分配問題的方法大略的談談。

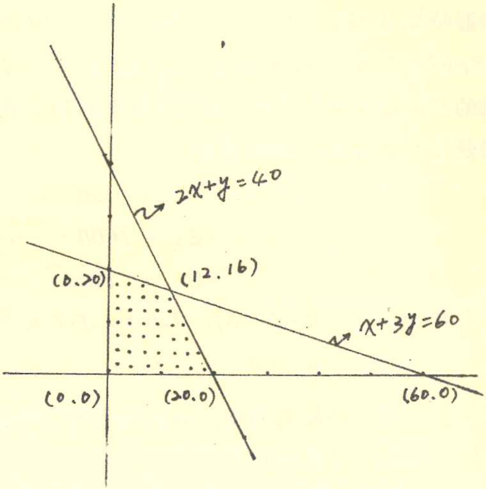
幾何圖解法（Geometric method）

現在有一資源分配問題就是某工廠製造A產品每噸需M原料 1 噸N原料 2 噸；而製造B產品每噸需M原料 3 噸N原料 1 噸，但是此工廠每月的原料分配爲M原料 60 噸，N原料 40 噸。若產品A每噸可獲利 10 萬元，產品B每噸可獲利 6 萬元。若欲獲得最大利潤，則A，B每月要生產多少噸？

像這種問題的解法，我們當然先將其化成綫型規劃的型式，設A產品每月生產 x 噸，B產品每月生產 y 噸。

則
$$\begin{cases} x + 3y \leqq 60 \\ 2x + y \leqq 40 \\ \text{求 } \max P(\text{利潤}) = 10x + 6y \\ \quad x, y \geqq 0 \end{cases}$$

由右圖我們就可看出，當 $x=12$ $y=16$ 時 $P=216$ 最大，故 A產品每月生產12 噸，B產品每月生產16噸時可獲得最大利潤為 $P=216$ 萬元。



幾何圖解法我們看過了，它雖然很簡單，但是其使用範圍也只限於二維度空間。如果超過二維度以上的問題，則其難免會有英雄無用武之地之感嘆。因此，我們再來討論下面這種方法，我們稱為疊代漸近法（itera-method）。

疊代漸近法（iterative method）

我們就舉一資源問題來說明疊代漸近法。例如現在有一家製造擲箭遊戲用之木板的公司，這家公司將木板又分成高中低三種品質。製造高品質的木板需 2 小時的機器時間和 2 個軟木圓盤；製造中品質的木板需 1 小時的機器時間和 2 個軟木圓盤；製造低品質的木板需 1 小時的機器時間和 1 個軟木圓盤。不過現在這家公司每星期只有 1000 小時的機器時間和 1600 個軟木圓盤，而這些高、中、低品質木板之邊緣利潤（marginal profits）分別是 \$2.00，\$1.60，\$1.20。另外一個限制是高品質本板之製造，每星期最多只能生產 400 組。現在這家公司要如何生產才能得到最大利潤呢？

我們要解這個問題，首先將其化成線型規劃的型式：令高，中，低品質木板分別是 x_1，x_2，x_3，利潤為 P，
故我們得到：

（機器時間）　$2x_1 + x_2 + x_3 \leqq 1000$ 小時

（軟木圓盤）　$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leqq 1600$ 個

（高品質木板）　$x_1 \leqq 400$ 組

$$\text{求 Max}\quad P = 2.0x_1 + 1.6x_2 + 1.2x_3$$

當然　$x_1 \geqq 0$，$x_2 \geqq 0$，$x_3 \geqq 0$

現在我們就登堂入室來看一看疊代漸近法之奧妙了！首先我們看機器時間的限

制是 $2x_1+x_2+x_3 \leqq 1000$ ，因爲機器時間的總和是$\leqq 1000$，所以有一些多餘的機器時間 S_1 使得 $2x_1+x_2+x_3+S_1=1000$ 。同理，其它兩個限制亦可被寫成爲 $2x_1+2x_2+x_3+S_2=1600$ 和 $x_1+S_3=400$。其中 S_2 表多餘的軟木圓盤，S_3表多餘的高品質木板。（S_1，S_2，S_3稱爲鬆弛變數（slack variable））

於是，現在整個問題就成爲：

$$2x_1+x_2+x_3+S_1=1000 \qquad (1)$$

$$2x_1+2x_2+x_3+S_2=1600 \qquad (2)$$

$$x_1+S_3=400 \qquad (3)$$

求 Max P，$P-2.0x_1-1.6x_2-1.2x_3=0$ (4)

$$x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0,\ x_3\geqq 0,\ s_1\geqq 0,\ s_2\geqq 0,\ s_3\geqq 0$$

因爲我們要得到最大利潤，故我們當然先考慮 x_1。而當 x_1改變時；其它變數也隨之改變。不過，我們暫時不要想那麼多，我們就單刀直入一直往 x_1 看下去。而 x_1 每增一個，利潤就增加 \$ 2.00 。但 x_1 最大可以爲 400 ，又我們爲了要將 x_1 取爲 400 故我們就讓 x_1 只在一個方程式內，而將其它方程式內有 x_1 項的全消掉。於是我們當然保留方程式(3)，而消掉(1)，(2)，(4)中之 x_1 項。於是我們得到新的方程組爲：

$$x_2+x_3+{}_1 \quad -2S_3=200 \qquad (1)$$

$$2x_2+x_3 \quad +{}_2-2S_3=800 \qquad (2)$$

$$x_1 \quad +S_3=400 \qquad (3)$$

$$P-1.6x_2-1.2x_3 \quad +2S_3=\boxed{800} \qquad (4)$$

由方程式(4)我們就可以看出，當 $P=\boxed{\$\ 800}$ 時 $s_3=0$，$x_2=0$，$x_3=0$ 於是產生

$P=\boxed{\$\ 800}$ 的解就是 $x_1=400$，$x_2=0$，$x_3=0$，$S_1=200$，$S_2=800$，$S_3=0$

當然這時還不是最佳解釋，因爲尚未考慮 x_2 和 x_3 。於是我們再來考慮 x_2 。由方程式(1)我們看出，當 $x_2=200$ 時，$x_3=0$，$S_3=0$，$S_1=0$ 於是我們保留方程式(1)，而將其它方程式內有 x_2項的消掉。

故又得到新的方程組爲：

$$x_2+x_3+s_1 \quad -2s_3=200 \qquad (1)$$

$$-x_3-2s_1+s_2+2s_3=400 \qquad (2)$$

$$x_1 \quad +s_3=400 \qquad (3)$$

$$P \quad +0.4x_3+1.6s_1 \quad -1.2s_3=\boxed{1120} \qquad (4)$$

我們現在再來考慮 x_3。但是，我們從方程式(2)發覺，如果我們使 $s_2=0$ 時，x_3將是 -400！這是否就暗示了最大利潤是$\boxed{\$1120}$ 呢？當然不是。因爲我們從方程式 (4)

中發現有一負項存，這時我們一定可以看出，如果將 s_3 從 0 開始一直增加則利潤還會再增加。而 s_3 最大爲 200（由方程式(2)看出的）

於是我們保留方程式(2)而將其它方程式有 s_3 項的消去，結果又得到了新的方程組爲：

$$
\begin{aligned}
x_2 \qquad -s_1 + s_2 \qquad &= 600 \\
-0.5x_3 - s_1 + 0.5s_2 + s_3 &= 200 \\
x_1 + 0.5x_3 + s_1 - 0.5s_2 \qquad &= 200 \\
P - 0.2x_3 + 0.4s_1 + 0.6s_2 \qquad &= \boxed{1360}
\end{aligned}
$$

這時候的解變爲 $s_3 = 200$，$s_1 = 0$，$s_2 = 0$，$x_3 = 0$，$x_2 = 600$，$x_1 = 200$

當然此時也不是最佳解，因爲從方程式(4)看出，如果增加 x_3 的話，利潤還會再增加。於是，我們保留方程式(3)，而將其它方程式中有 x_3 項消去， 果得：

$$
\begin{aligned}
x_2 \qquad -s_1 + s_2 \qquad &= 600 \\
x_1 \qquad\qquad + s_3 &= 400 \\
2x_1 + x_3 + 2s_1 - s_2 \qquad &= 400 \\
P + 0.4x_1 + 0.8s_1 + 0.4s_2 &= \boxed{1440}
\end{aligned}
$$

這時我們當然可以斷定此爲最佳解了，因爲利潤方程式(4)沒有一個是負項了，而這時的最佳解是 $x_3 = 400$，$x_2 = 600$，$x_1 = 0$，$s_1 = 0$，$s_2 = 0$，$s_3 = 400$，最大利潤當然是 $600 \times \$1 \cdot 6 + 400 \times \$1.2 = \$1440$ 了。疊代漸近法也討論完了，那我們就再來討論別的了。

使用電腦（Using the computer）

我們已經看過一些簡單的資源問題了，那只要使用線型規劃的方法就可迎双而解。但那也只有在變數少的時候可以自己計算出來。萬一現在變數有 1000 個甚至於 10000 個，那時我們怎麼辦？當然我們只好另尋方法了；使用電腦就是最好的方法，不但省時又省力。而談到電腦，那我們也只有將一個問題公式化以後再輸入電腦，請其替我們執行任務。而要一個問題公式化，那我們又要牽涉到另外一種線性規劃的方法，那就是我們衆所皆知的單體法（Simplex method）我們就以上一個資源問題來談單體法；而單體法的計算規則和上一個的計算過程，我們分別以表一和表二來表示。

表一 單體法的計算規則

(1)找一個原始之基本可行解。

⑵畫出單體表，若目標函數列（Objective row）中元素全爲正，則此時就是最佳解。

⑶若沒有最佳解，則再從目標函數列中找出負的最大元素，此元素所在的行就稱爲進入變數行（Centering variable column）

⑷把單體表中最右手邊的那行元素與進入變數行中的元素每每相除，所得的值以 θ 表示，然後再找 θ 之 min ，其所對之列就稱爲脫離變數列（departing variable row）而脫離變數列與進入變數行所交的元素就稱爲驅軸元素（Pivot element）

⑸重新劃一單體表，將原單體表之基本變數轉換爲非基本變數。

⑹而新單體表中元素之計算如下：

①樞軸元素改爲 $\dfrac{1}{\text{樞軸元素}}$

②樞軸元素行中之元素，每一元素均以樞軸元素除之再變號

③樞軸列中之元素，每一元素均以樞軸元素除之。

④其它元素的係數：

$$\text{新值} = \text{舊值} - \frac{\left(\begin{array}{c}\text{與舊元素同列而在樞}\\\text{軸行中之元素其係數}\end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c}\text{與舊元素同行而在樞}\\\text{軸列中之元素其係數}\end{array}\right)}{\text{樞 軸 元 素}}$$

⑺重回步驟⑵

表二　計算過程

非基本變數

樞軸元素

		LHS	x_1	x_2	x_3	RHS	θ	
單體表A	基本變數	S_1	2	1	1	1000	1000/2 = 500	
		S_2	2	2	1	1600	1600/2 = 800	
		S_3	①	0	0	400	400/1 = 400	min→ *Departing variable
	objective P		−2	−1.6	−1.2			

$\boxed{0}$ — Current solution value

↑ Entering variable

單體表B

	S_3	x_2	x_3	RHS	θ
S_1	−2	1	1	200	$200/1=200^*$ min→Departing variable
S_2	−2	2	1	800	$800/2=400$
x_1	1	0	0	400	$400/0=\infty$
P	2	−1.6	−1.2	$\boxed{800}$	
		↑			

單體表C

	S_3	S_1	x_3	RHS	θ
x_2	−2	1	1	200	不被承認
S_2	2	−2	−1	400	$400/2=200^*$ min→Departing variable
x_1	1	0	0	400	$400/1=400$
P	−1.2	1.6	0.4	$\boxed{1120}$	
	↑				

單體表D

	S_2	S_1	x_3	RHS	θ
x_2	1	−1	0	600	$600/0=\infty$
S_3	½	−1	−½	200	不被承認
x_1	−½	1	½	200	$200/\frac{1}{2}=400^*$ min→Departing variable
P	0.6	0.4	−0.2	$\boxed{1360}$	
			↑		

單體表E

	S_2	S_1	x_1	RHS
x_2	1	−1	0	600
S_3	0	0	1	400
x_3	−1	2	2	400
P	0.4	0.8	0.4	$\boxed{1440}$

我們將上面的單體表大致說明如下：

在表中最左手邊（LHS）是基本變數而最右手邊（RHS）是基本變數的值。在表中最上面的是非基本變數，當然值均爲零。而其它元素之係數就與原方程式對照一下就可以得到。

還有，在單體法的運算規則中；比較麻煩的一項就是：

$$\text{新值}=\text{舊值}-\frac{\left(\begin{array}{c}\text{與舊元素同列而在}\\\text{樞軸行中元素其係數}\end{array}\right)\times\left(\begin{array}{c}\text{與舊元素同行而在樞}\\\text{軸列中之元素其係數}\end{array}\right)}{\text{樞軸元素}}$$

我們就舉一個例子來說明它的意思；例如，我們就拿單體表A來看，我們取x_2和S_2相交之元素亦就是2 → 舊值；而S_2與x_1相交之元素是2 →與舊元素同列而在樞軸行中之元素之係數，而x_2與s_3相交之元素是0 →與舊元素同行而在樞軸列中之元素之係數，於是在單體表B中之新值$=2-\frac{2\times0}{1}=2$

單體法，我們也大略的談完了；當然，最困難的地方還是如何設計一程式而將其輸入電腦，然後請電腦替我們執行任務了。

電腦的使用，可以說替我們解決了大部分的資源問題；根據一項資料，它是這樣寫著：在歐洲有一家石油公司，其有一個資源問題，而這個問題有*6000*個條件限制，和有*10000*個變數，而電腦不費吹毛之力就把它解出來了。由此我們就可以知道，電腦的好處是不容懷疑的。

其它資源問題的方法。

最後，我們來討論下面的一運輸問題：

現在有一家機器公司，其有三個供應站和四個需求站而其供需之關係，以及不同的供應站到需求站之運費成本，我們分別以下列來表示：

供應站	機器	需求站	需求量
A	6	1	3
B	6	2	7
C	5	3	3
		4	4
	Total 17		Total 17

（運費成本矩陣）

$$\begin{array}{cc} & \text{需求站} \\ & \begin{array}{cccc}1 & 2 & 3 & 4\end{array} \\ \text{供應站}\begin{array}{c}A\\B\\C\end{array} & \left[\begin{array}{cccc}6 & 7 & 8 & 5\\8 & 5 & 6 & 5\\9 & 8 & 6 & 8\end{array}\right]\end{array}$$

則應如何分配方使總運費達到最少？

像這種運輸問題的算法，我們就以下面的規則來說明。

步驟：

①上面的問題，我們先將其劃成像右方的表。表中之 x_{ij} 爲變數而其含意爲由第 i 個供應站實際運到第 j 個需求站的數量。而 C_{ij} 表運費成本。a_i 表供應站，b_j 表需求站。

$i=1, 2 \cdots\cdots m$

$j=1, 2 \cdots\cdots n$

x_{11} / C_{11}	x_{12} / C_{12}	x_{13} / C_{13}	x_{14} / C_{14}	a_1
x_{21} / C_{21}	x_{22} / C_{22}	x_{23} / C_{23}	x_{24} / C_{24}	a_2
x_{23} / C_{31}	x_{24} / C_{32}	x_{25} / C_{33}	x_{26} / C_{34}	a_3
b_1	b_2	b_3	b_4	

表三

②在表三中選出 $m+n-1$ 個變數來當做基本變數，而這些變數所在方格不包含任何迴路；而其餘的變數我們就稱爲非基本變數，而非基本變數所在方格之任何一個，必包含一個迴路。

③基本變數選出後，再將非基本變數 x_{ij} 改爲 y_{ij}。如右表所示。表中有加圓圈之變數表基本變數。

x_{11} / C_{11}	y_{12} / C_{12}	y_{13} / C_{13}	y_{14} / C_{14}	a_1
x_{21} / C_{21}	x_{22} / C_{22}	x_{23} / C_{23}	y_{24} / C_{24}	a_2
y_{31} / C_{31}	y_{32} / C_{32}	x_{33} / C_{33}	x_{34} / C_{34}	a_3
b_1	b_2	b_3	b_4	

表四

非基本變數 $x_{ij}=0$

基本變數 $x_{ij} \geqq 0$

然後再依下列之規則來計算 y_{ij} 之值：

(1)觀察方格（i，j）與某些基本變數方格所形成之迴路。在此迴路之基本變數方格中依次取＋，－，＋，－，……之符號。設對應之運費分別是 C_{i1j}，C_{i1j1}，C_{i2j1}……則 $y_{ij}=-C_{ij}+C_{i1j}-C_{i1j1}\cdots\cdots$

(2)在表四中，若全部之 y_{ij} 均 $\leqq 0$，則目前卽有最佳解，否則在 $y_{ij}>0$ 中選一個最大的將其改爲 y_{pq}

(3)在方格（p q）所形成迴路中，選標號爲十之格中，其基本變數之值最小的，將其設爲 x_{st} 則將變數 x_{st} 化成非基本變數，而將變數變成基本變數。

(4)在方格（p，q） 所形成迴路中，將標號爲正之方格，將其實際運輸量減去 x_{st}，而將標號爲負之方格，將其實際運輸量加上 x_{st}。然後接步驟③。

至於選取$m+n-1$個變數的方法有很多，就以最容易的西北角法（North-West－corner）來說，由方格（1.1）開始，再依猶如梯狀一樣一直下來。於是方格（1.1）塡入3（因爲需求站1的最大需求量是3），而方格（1.2）塡入3（因爲供應站A只剩餘3能配給需求站2）；繼續下去，於是我們得到了最初的分配，如表五所示。而再將表五中之y_{ij}求出來。

如$y_{13}=-8+6-5+7=0$（因爲方格｛（1.3），（2.3），（2,2），（1,2）｝形成迴路）；繼續下去，於是我們又得到了如表六所示的。

表五

3 / 6	3 / 7	y_{13} / 8	y_{14} / 5	6
y_{21} / 8	4 / 5	2 / 6	y_{24} / 5	6
y_{31} / 9	y_{32} / 8	1 / 6	4 / 8	5
3	7	3	4	

表六

3 / 6	3 / 7	0 / 8	5 / 5	6
-4 / 8	4 / 5	2 / 6	3 / 5	6
-5 / 9	-3 / 8	1 / 6	4 / 8	5
3	7	3	4	

但表六中之y_{ij}並非均$\leqq 0$，於是再依運算規則；我們又得到一系列的計算結果，如表七和表八所示。

表七

3 / 6	1 / 7	-5 / 8	2 / 5	6
-4 / 8	6 / 5	-5 / 6	-2 / 5	6
-1 / 9	2 / 8	3 / 6	2 / 8	5
3	7	3	4	

表八

3 / 6	-2 / 7	-5 / 8	3 / 5	6
-2 / 8	6 / 5	-3 / 6	0 / 5	6
0 / 9	1 / 8	3 / 6	1 / 8	5
3	7	3	4	

由表八我們發現了所有的y_{ij}均$\leqq 0$，於是我們斷定有最佳解產生，而其分配如下：供應站A供應3給需求站1；且供應3給需求站4

供應站B供應6給需求站2

供應站C供應1給需求站2；供應3給需求站3；且供應1給需求站4

而最小運費爲$3\times6+3\times5+6\times5+1\times8+3\times6+1\times8=\$97$

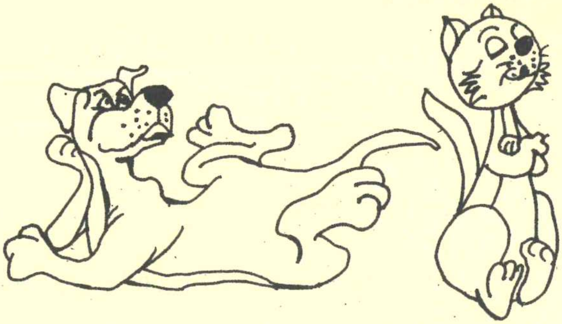
以上是我們參考了有關於資源問題分配的資料，而將資源問題之分配方法作一個大體上的歸納。至於不足的地方，就尚請見諒了。

參考資料：

W.E. Duckworth, A.E. Gear and A.G. Lockett; A Guide to Operational Research, John Wiley and Sons, New York, 1977, Chapter 7.

倒數計算及其應用

指導老師 楊壬孝
數二甲 李玉珠



壹、引言

自然數A的倒數$\frac{1}{A}$若非有限小數即爲循環小數，A若不是質數即可質因數分解成爲$A=P_1\ P_2\cdots\cdots P_n$ 故可先求$\frac{1}{P_1}, \frac{1}{P_2}, \cdots\cdots\frac{1}{P_n}$，再求其積$\frac{1}{P_1}\cdots\cdots\frac{1}{P_n}$即爲$\frac{1}{A}$，可知若能求得質數倒數便可求得所有自然數倒數。

設P：質數

p：P的位數

γ：$\frac{1}{P}$的循環節位數

循環率$=\frac{\gamma}{P-1}$

完全倒數：循環率爲1的倒數

則我們有以下的結論：

(1) $p\leq\gamma\leq P-1$

(2)完全倒數悉爲質數倒數

∵令$\frac{1}{A}=\frac{1}{P_1\ P_2}$ 爲完全倒數。則γ_1，γ_2 爲$\frac{1}{P_1}, \frac{1}{P_2}$之循環節位數，則$P_1\cdot P_2$的循環節位數（小於等於1＋2）應爲$A-1=P_1\cdot P_2-1$

但$\gamma_1 \le P_1 - 1$，$\gamma_2 \le P_2 - 1$，$\gamma_1 + \gamma_2$ 不能等於 $P_1 \cdot P_2 - 1$（$P_1 = P_2 = 1$ 除外）

(3) $\dfrac{\gamma}{10^p - 2} \le$ 循環率 ≤ 1

$\because P \le 10^p - 1$　　　　$\therefore P - 1 \le 10^p - 2$

(4)除2，5外質數的倒數均為純循環小數

令 $A = 0.\alpha_1 \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n b_1 \cdots\cdots b_m = \dfrac{(10^{m+n} - 10^n) A}{10^{m+n} - 10^n}$

$$= \frac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n b_1 \cdots b_m - \alpha_1 \cdots \alpha_n}{10^n (10^m - 1)}$$

惟有 10^n 分子，即 $\alpha_1 \cdots \alpha_n = b_1 \cdots b_m$ 且 $\alpha_1 \cdots \alpha_m \mid 10^n - 1$ 才有可能成為

$\dfrac{1}{質數}$ 型，除純循環小數外無此可能。

因質數（2，5除外）倒數均為純循環小數，故祇求其第一循環節即可求其全值，若用普通的除法則很容易發生錯誤，稍長的循環節就極難一次順利到底，如 $\frac{1}{41}$，$\frac{1}{101}$，$\frac{1}{271}$，算來不很難，因其γ只有5，4，5位甚短，反之$\frac{1}{7}$，$\frac{1}{17}$，$\frac{1}{23}$，則需要相當的耐心，因此三數皆為完全倒數，其γ分別為6，16，22位，於下說明另一種計算程序「倒算法」。

倒算法：

設P為不是2或5的質數

$\dfrac{1}{P} = 0.\alpha_1 \cdots \alpha_r$　　　　$P \times \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\gamma = 9_1 9_2 \cdots 9_\gamma$

故得演算：

$$\begin{array}{rl} \underline{\quad P \quad} & \\ \alpha_1\ \cancel{9} & b_1 \\ \underline{+\alpha_2\ \beta_2} & b_2 \\ W_2\ \cancel{9} & \\ \underline{+\alpha_3\ \beta_3} & b_3 \\ W_3\ \cancel{9} & \end{array}$$

b_1為1位自然數且使 $P \times b_1 = \alpha_1\ 9$ 成立

b_2為1位自然數且使 $P \times b_2 = \alpha_2\ \beta_2$

$\alpha_1 + \alpha_2\ \beta_2 = W_2\ \ 9$

$$\begin{array}{r l}
 & W_{r-1}\ \cancel{9} \\
+ & \alpha_r\ \ \beta_r \qquad b_r \\
\hline
 & 0\ \ \cancel{9}
\end{array}$$

繼續計算至 $W_\gamma 9 = 0\,9$ 即 $W_r = 0$ 止

得 $\frac{1}{P} = b_r\ b_{r-1} \cdots\cdots b_2 b_1$ 即為所求

$$\begin{array}{r l}
\underline{7} & \\
4\,\cancel{9} & 7 \\
\underline{3\,5} & 5 \\
3\,\cancel{9} & \\
\underline{5\,6} & 8 \\
5\,\cancel{9} & \\
\underline{1\,4} & 2 \\
1\,\cancel{9} & \\
\underline{2\,8} & 4 \\
2\,\cancel{9} & \\
\underline{7} & 1 \\
\cancel{9} &
\end{array}
\qquad \therefore \frac{1}{7} = .\dot{1}4285\dot{7}$$

(2)

$$\begin{array}{r l}
\underline{9} & \\
\cancel{9} & 1
\end{array}
\qquad \therefore \frac{1}{9} = .\dot{1}$$

(3)

$$\begin{array}{r l}
\underline{11} & \\
9\cancel{9} & 9 \\
\underline{0} & 0 \\
\cancel{9} &
\end{array}
\qquad \therefore \frac{1}{11} = .\dot{0}\dot{9}$$

(4)

$$\begin{array}{r l}
\underline{111} & \\
99\cancel{9} & 9 \\
\underline{0} & 0 \\
9\cancel{9} & \\
\underline{0} & 0 \\
\cancel{9} &
\end{array}
\qquad \therefore \frac{1}{111} = .\dot{0}0\dot{9}$$

(5)

$$\begin{array}{r l}
\underline{27} & \\
18\cancel{9} & 7 \\
\underline{81} & 3 \\
9\cancel{9} & \\
\underline{0} & 0 \\
\cancel{9} &
\end{array}
\qquad \therefore \frac{1}{27} = .\dot{0}3\dot{7}$$

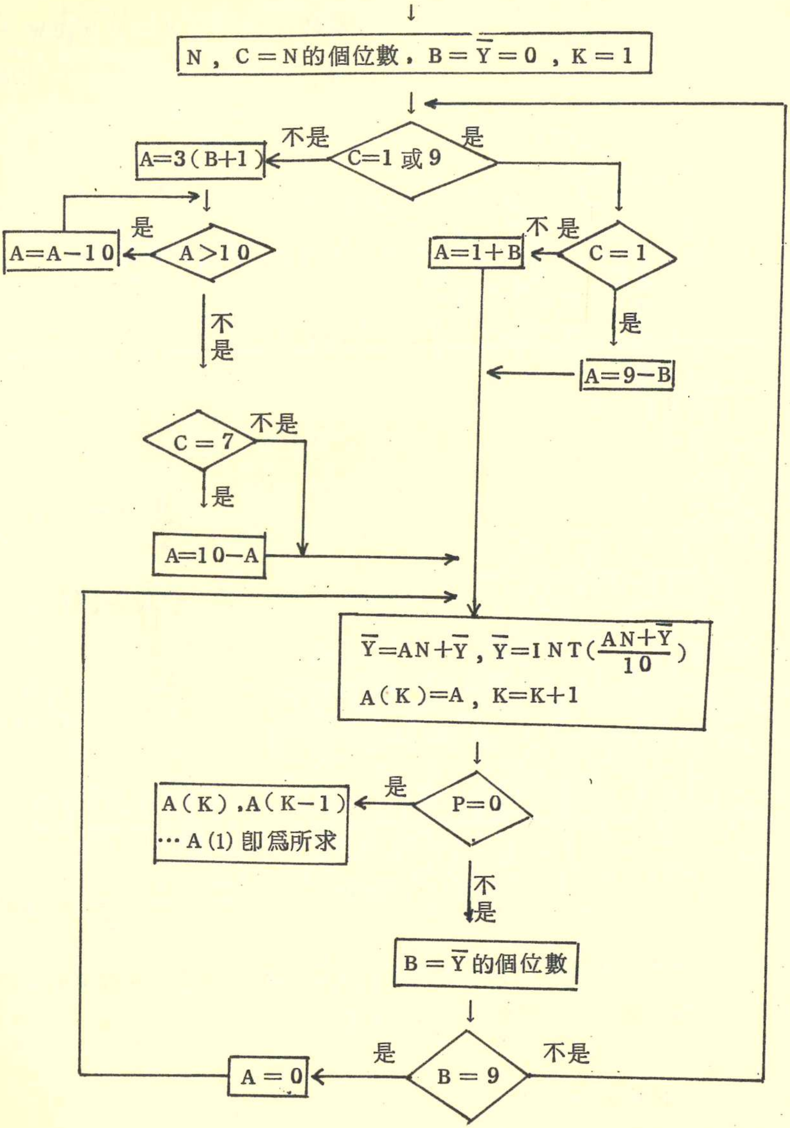
依次把末位和湊成 9 隨即消去至 0 爲止，全部計算只有加、乘沒有減、除，所以在計算次數上雖不佔什麼便宜但總覺輕鬆省力。

貳、倒數計算

利用計算機求倒數的多位值當然不能期待於計算機內現成的除法，應另想辦法設計程式，上面所說倒算法即爲一可行良法。

一、倒算法

（見下頁）


N，C＝N的個位數，B＝$\overline{Y}$＝0，K＝1
C=1或9
不是
是
A=3（B+1）
A>10
是
A=A−10
不是
C=7
不是
是
A=10−A
C=1
不是
是
A=1+B
A=9−B
$\overline{Y}$=AN+$\overline{Y}$，$\overline{Y}$=INT($\frac{AN+\overline{Y}}{10}$)
A(K)=A，K=K+1
P=0
是
A(K)，A(K−1)
… A(1)即爲所求
不是
B＝$\overline{Y}$的個位數
B＝9
是
不是
A＝0

湊末位數成 9 的表

B \ C	1	3	7	9
0	9	3	7	1
1	8	6	4	2
2	7	9	1	3
3	6	2	8	4
4	5	5	5	5
5	4	8	2	6
6	3	1	9	7
7	2	4	6	8
8	1	7	3	9
9	0	0	0	0

例：$\frac{1}{N} = \frac{1}{31} = .\dot{0}3225\ 80645\ 1612\dot{9}$

$\frac{N=31}{0}$ $\qquad C=1$

$Y_1 = B_1 = 0$ $\qquad \frac{279}{279}$

$\overline{Y}_2 = 27,\ B_2 = 7$ $\qquad 9 = A_1$

$\overline{Y}_3 = B_3 = 8$ $\qquad \frac{62}{89}$ $\qquad 2 = A_2$

……………………

79

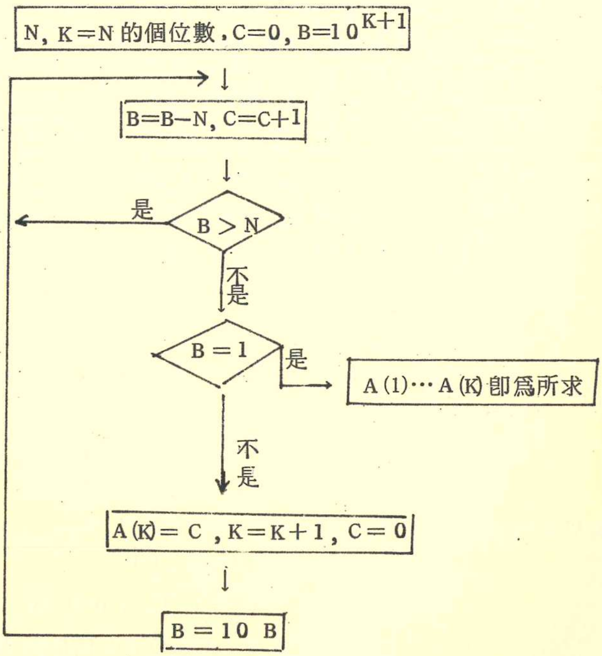
$\overline{Y}_{14} = B_{14} = 6$ $\qquad \frac{62}{69}$ $\qquad 2 = A_{13}$

$3 = A_{14}$

$Y_{15} = B_{15} = 9$ $\qquad \frac{93}{99}$ $\qquad 0 = A_{15}$

$\frac{0}{9}$

二、遞減法：這是比較普通的一種方法



以上二法表面上看來似乎遞減法要簡便得多，其實倒算法要稍快一些，若是N的位數大幅度的增加，相信倒算法的優越性將更顯彰。

叁、應用

一、階乘倒數 $\frac{1}{n!}$ 的計算

$\frac{1}{n}$ 收斂奇速，用普通除法很快就會使所有有效位數消失為0，若用本法先求 $\frac{1}{n}$ 再相乘便可求得所欲位數，因 $\frac{1}{n!}=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{n}$ 為兩長位數的相乘，故應設計長乘法程式以求之。

長乘法：

聚裝：每一個記憶裡裝5位數留一位為進位用（本文每一記憶最多可裝6位數）

散裝：每一個記憶裡裝1位數

例如：1 2 3 4 5 6 7 8 9　　聚裝則 | |1|2|3|4|5|　| |6|7|8|9| |　祗有2個記憶

散裝則 | | | | | |1| | | | | | |2|……| | | | | |9|

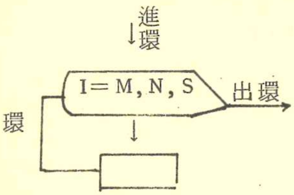
共有9個記憶

流程圖的循環表示　　I：循環變數

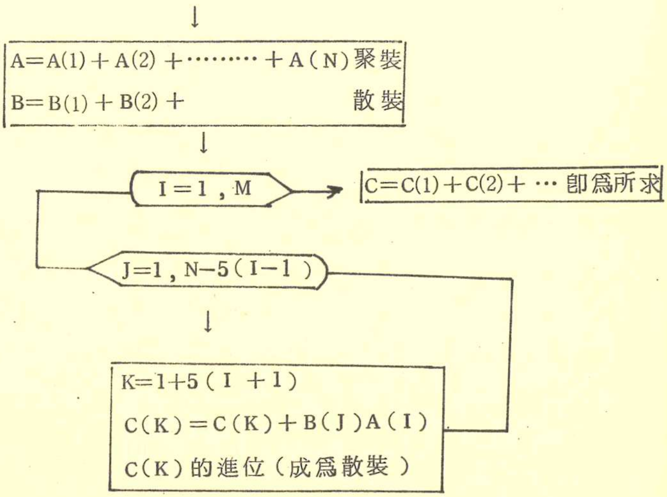
M：起點

N：終點

S：變數間隔（S＝1時可免寫）



長程法流程圖



二、自然底數 e 的計算

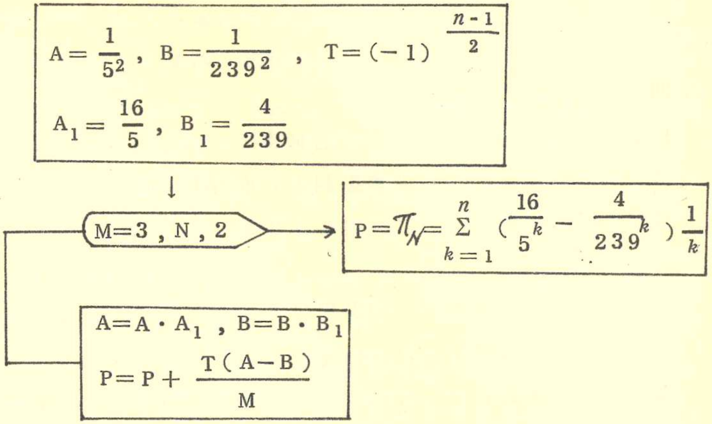
$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$ 把 $\frac{1}{n!}$ 表累加卽可

三、圓周率 π 的計算

$$\pi=16\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}-\frac{1}{7\cdot 5^7}+\cdots\cdots\right)-4\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{239^3}+\frac{1}{5\cdot 239^5}-\frac{1}{7\cdot 239^7}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\left(\frac{16}{5}-\frac{4}{239}\right)-\left(\frac{16}{5^3}-\frac{4}{239^3}\right)\frac{1}{3}+\left(\frac{16}{5^5}-\frac{4}{239^5}\right)\frac{1}{5}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

流程圖



本計算爲上述倒數，階數，長乘，進位調整等的綜合計算，如果將本法適用於大型計算機當亦可獲得相若結果，是時倒數倒算法因參與位數長至10餘萬位，相信將更能發揮其特點。

參考資料：

(1)初等整數論講義：高木貞治著。共立出版株式會社印行。

(2)微分積分學：井上正雄、佐藤三郎、柴恒和三雄、高橋進一合著。學術圖書出版社。

(3)電子計算機數値計算法Ⅳ：山田二郎、宇野利雄、一松信、東京培風館合著。

附錄：

師大數學系各年級修課內容及選課注意事項

一年級：

上學期：

必修科目：國父思想(2)，國文(4)，英文(4)，中國通史(2)，教育概論(2)，微積分(5)，線型代數(2)，普通物理(4)，普通物理實驗(0)，四書(0)，國音(0)，軍訓(1)，體育(1)。

選修科目：無。

下學期：

與上學期相同。

二年級：

上學期：

必修科目：中等教育(2)，教育心理學(2)，高等微積分(5)，射影幾何(4)，代數(一)(3)，線型規劃(3)，軍訓(1)，體育(1)。

選修科目：整數論(2)，計算機語言(3)。

下學期：

必修科目：教學原理(2)，中國現代史(2)，高等微積分(5)，代數(一)(3)，微分方程(4)，教育心理學(2)，體育(1)，軍訓(1)。

選修科目：整數論(2)，程式設計(3)，優選導論(3)，數學基礎(3)。

三年級：

上學期：

必修科目：理則學(2)，視聽教育(2)，代數(二)(3)，複變數函數論(3)，級數論(3)，拓樸學導論(2)，機率與統計(3)，體育(1)。

選修科目：測度論(3)，德文(3)。

下學期：

必修科目：教育與職業輔導(2)，代數(二)(3)，複變數函數論(2)，拓樸學導論(3)，機率與統計(3)，體育(1)。

選修科目：泛函導論(3)，數理統計(3)，德文(3)。

四年級：

上學期：

必修科目：教學實習(2)，數學教材教法(2)，微分幾何(3)，實變數函數論(3)

，心理與教育測驗(2)，數學教育研究(2)，體育(1)。

選修科目：環論(3)，數理統計(3)，數學史(2)，圖形導論(3)，代數拓樸學(一)(3)。

下學期：

必修科目：教學實習(2)，數學教材教法(2)，微分幾何(3)，機率論(3)，數學教育研究(2)，體育(1)。

選修科目：組合導論(3)，數值分析(3)，數學史(2)，代數拓樸學(二)(3)。

註：1.以上在每一學科後面括弧之數字代表此一科目之學期學分數。

2.二年級選修科目中若計算機語言沒有選則不能選程式設計。

選課注意事項：

1.除體育、軍訓學分外，第一學年每學期不得少於１６學分，不得多於２５學分。第二、三學年每學期不得少於１６學分，不得多於２４學分。第四學年每學期不得少於９學分，不得多於２２學分

應屆畢（結）業生，因轉系、轉學受補修學分影響等特殊情形者，另准加修一科目。

2.每學期選修外系之學分數不得超過總學分數之四分之一。

3.不得越班選課。

4.本系所開共同必修科目，應在規定年度內修完，不得藉故延期補修；應屆結業生應自行注意是否必修科目都修過。

5.應屆結業生應自行注意所修學分總數是否達到結業標準。

學分總數除體育、軍訓不計外，包括本系所開科目及外系所開的「相關科目」，７０級（含）以後，至少154學分。如屬全年修習科目，而只修一學期或只有一學期成績均不給學分。

6.下列為本系所定外系所開之相關科目：

(1)日語　(2)法文　(3)俄文　(4)英語會話　(5)科學教育　(6)德育原理

(7)教育社會學　(8)教育哲學　(9)人生哲學　(10)哲學導論

(11)自然科學概論　(12)特殊兒童診斷　(13)理論力學　(14)流體力學

(15)熱力學　(16)天文學　(17)經濟學　(18)教育統計學。

7.選課時須攜帶上學期成績單。

8.下列相關科目如有前項不及格者，不得修習後項科目，如須補考，應於補考及格後，再行加選。

甲：微積分→高等微積分→複變數函數論。

乙：代數(一)→代數(二)。

七十學年度數學學會組織概況

理事長：賴榮孝（三丙）

副理事長：高金福（夜四）

理　　事：吳安振（四甲）　呂欽文（四乙）

劉明修（四丙）　施嘉玲（三甲）

方順震（三乙）　巫慶銘（二甲）

張光明（二乙）　吳同光（二丙）

文教股長：楊鎭守（二乙）

師大數學組長：葉國忠、程麗娟（三丙）

數靈組長：王建元（三丙）

海報宣傳組長：李文龍（二乙）

快報小組組長：陳俊仁（二乙）、陳榮堃（二甲）

總務股長：謝金龍（三丙）

會計：林大偉（二甲）

經理：余益彰（三丙）

體育股長：蔡光國（三乙）

康樂股長：施嘉玲（三甲）、馬榮喜（三乙）

衛生股長：陳秋蓉（三甲）

服務股長：林明碧（三甲）

協助秘書：楊鴻翔（二乙）

常務監事：蘇華國（三丙）

監　　事：李憲東（四甲）、馮志民（二丙）

編　後　語

第16期「師大數學」終於與各位見面了，一年來戰戰兢兢的心情，終於可以放鬆了。對於每一位參與編輯工作的同學，深表謝意。

本期主要有幾點特色：

1. 稿件主要仍以同學的作品爲主，每一篇作品都是作者精心之作，它都是作者將所學全盤瞭解，加以吸收，然後用自己的話加以表達出來，每一件作品都代表著作者的學習心得，希望同學們仔細的去品味它，分享作者的研究心得。
2. 除了同學的作品外，編輯小組另外訪問了系主任及呂溪木老師。分別談到了數學系的種種和以呂溪木老師對代數的學習心得來作爲同學們學代數的方針，另外林義雄老師爲我們分析了實變數函數與複變函數微分的異同。請同學們能好好的閱讀，這對同學將會有所帮助的。
3. 在作品編排方面，將所有的作品分成“師長作品”，“四年級作品”，“三年級作品”，“二年級作品”四部份，並且爲了讓同學們明瞭每篇作品的大要，在每一部份的前面將每篇作品的內容，作大略的說明。

在此，我們願意加以强調一點，「師大數學」這園地是屬於每一位同學的，希望同學們能多參與，使它更加成長、茁壯。

最後，謝謝系主任、呂溪木及林義雄老師們的鼓勵，趙文敏、常法徽、邱日盛、吳森原、黃登源、楊壬孝及鄭芳枝等諸位老師的熱心指導及系上其他老師的鼎力帮助。

同學們！讓我們同爲「師大數學」携手邁進！

葉國忠
程麗娟　謹啓　七十一年六月

師大數學 第十六期

發 行 人：顏啓麟

出 版 者：國立台灣師範大學數學學會

主　　編：葉國忠、程麗娟

編　　輯：張宗榮、鄭金塗、蔡俊傑、
李玉珠、許玉華、詹玉玲。

美　　工：吳勝賢、陳漪屏、蔡芸芸、
夏紹琴、謝秋菊

印 刷 者：華南打字印刷行
台北市羅斯福路三段11號 TEL：3413057

出版日期：中華民國七十一年　六　月　五　日
師大訓課刊登第 136 號