師大數學

17

系主任序

本系成立於民國三十五年八月，首由張儒林教授擔任系主任，當時僅有數學系一年級及二年制專修科一年級各一班，同學三十餘人，教授三位，助教一位，嗣由管公度、潘璞、李新民、康洪元、范傳坡、常法徽各教授輪掌系務，歷經各主任與同仁之群策群力，始具今日之規模。三十四年來本系之畢業系友，已逾貳仟叁佰餘人，多各有成就；其中具博士學位者逾一百四十人，僅獲碩士學位約百叁拾人，或執教於高等學府，或繼續高深研究，餘多服務於中等教育界，平時諄諄教學，誨人不倦，敦品篤行，懷抱熱忱，此實本校優良風氣之所致。

現本系有教師四十一人，學生方面日間部有十二班，夜間部五班，共有同學六百餘人，圖書兩萬餘册，雜誌百餘種；自六十四年夏遷於現址後，環境煥新，出國學成系友或返校互相砥礪，研究風氣已大弧度地提高；今日數學系之師生孜孜不息，無不爲美好遠景而奮發。

近來科學發展甚速，對數學之需要甚切，本系之任務更日益增大，除肩負數學教育之發展及中等數學教育之輔導外，亦兼具數學學術研究之重要任務。爲增强研究風尚，本系於十六年前創辦師大數學年刊，以供師生發表教學及研究心得。切磋琢磨，提高學習及研究興趣，屢經負責同學之辛勞耕耘及師生系友之共同支持。漸茲茁壯，今後請更不吝珠璣，源源賜稿，則本刊必前程似錦，散發絢燦光芒，於此，敬表謝忱，更盼我師生系友善珍此片園地。

顏啓麟　謹識

七十二年五月

目　　錄

電算器與數學教學……數研所 金鈴 1

淺談緊緻集……三丙 費毓港 10

平面正n邊形與P邊形
所構成q面體的對稱羣的例子…二丙 游經祥 27

三度空間中的對稱羣……三丙 孫瑛瑛 36

淺介程式開關的設定……四乙 葉得祥 56

微分與積分的命名由來……數學傳播 季刊 63

電腦語言專欄：

帕司卡的榮耀
—簡介PASCAL 程式語言…四乙 鍾尚穎 66

FORTH第四代電腦語言……四乙 陳朝棋 70

CAI的TUTOR ……三乙 陳俊仁 72

衍式式的LOGO程式語言……四乙 葉得祥 74

電算器與數學教學

數研所

金 金兮

西元1965年由於一部電算器（Calculator）的誕生，帶給全世界的金融業界的工作者一個莫大的震撼，但是因爲當時它的售價過高，以致於令大家裹足不前。一直到西元1975年初，袖珍電算器（Hand-held Calculator）的售價開始急速地下降之時，因爲它攜帶方便，操作簡單，而且功效卓越，售價低廉，才在許許多多的工商企業者的心裡激起了强烈的迴響，大家都樂意將它拿來作爲替代計算的工具。例如英國的Bailey教授在科學、工商、和教育部門的支持下，領導一小組的研究人員，從西元1979年5月到西元1980年12月的一年半中，著手調查，研究有關16到18歲的青少年想進入社會工作時，就業所必需具備的數學知識，發現在英國幾乎每個行業都必需具備有基本的電算器認識和操作能力。（Bailey，1981）另外在我們國內大家都知道，當今百貨業者最熱門的宣傳促銷方式，就是所謂的「折扣戰」，每當你走進百貨公司的超級市場或者任何一個專櫃，購買東西時，收銀台的小姐最後總會給你一張記載價目的小紙條，那就是電算器的傑作，令你購物之時，省時、方便、快速、而且一目了然。其他的各行各業人士諸如：銀行從業人員在計算收入支出時，商店的店員計算貨品價值之時，學術行政單位的職員在報帳之時，各中、小學教師在計算學生成績之時，工程師、會計師、建築師以及大專學生在計算繁雜式子之時，都經常拿它來當作計算的工具。

在這種你使用，我也使用，大家都使用電算器來當作計算工具的情形之下，我們身爲教育的工作者，不禁想問：電算器在數學教育上能扮演什麼樣的角色呢？這就是接著我們所要探討的。

甲、數學教育上的問題

由於電算器所形成的震撼與迴響，對於我們當前的學校教學更有著莫大的啓示，尤其是數學教學。英國的數學總評（Mathematics Counts，1982）一書，提出了兩個大家所必須關注的問題：

(1)如何利用電算器來幫助，增進教室的數學教學？

(2)如何在電算器的被使用之下，將數學課程中的教材內容和相關的單元作適當的改變？

接著，我們就來看一看，目前英、美兩國與我國對這兩個問題的處理情形。

乙、英、美兩國與我國的比較

以下我們將從政府的政策，學術研究的資料以及教科書的編寫等三個方面來分析，比較英、美兩國和我國的處理情形與所持的態度。

一、英、美兩國的處理態度

1. 輔助教師的數學教學，幫助學生建立和發展數學概念。

例如：英國的數學總評（mathematics Counts，1982）一書對中、小學數學教學使用電算器有以下幾點看法：

(1)電算器在中、小學應該被接受使用。

(2)每個中學生上課之時，都應該攜帶電算器。

(3)小學老師不但自己要能正確操作電算器，而且必須確認它能夠幫助學生發現和研究某些課題。

(4)小學課程中使用電算器作爲輔助教學和學習的教具，以及課程要如何適當的修正，是個值得深入考慮，研究的問題。

(5)電算器應該用來幫助數學教學，並取代對數表，三角函數表的地位。

(6)建議到1985年時，會考機構應該設計出新的課程綱要和試題型態，以配合電算器的發展。

(7)並沒有證據顯示，因電算器的使用而影響學生的數學計算技巧。

同時，美國的國際數學教師學會（The National Council of Teachers of Methematics）對於數學教學中使用電算器也有以下的聲明（NCTM，1980；Moursund 1981）

(1)各級學校的課程內容，必須善加利用電算器和電腦的功能……電算器和電腦應該盡可能的被用來探討、研究、發展數學的概念，而不僅僅只是用來當作檢查對或錯的計算工具而已。

(2)數學教師應該了解電算器的潛在貢獻，用以輔助教學，在課堂之中它將用來加強學習和提高學生的學習動機。

另外，英國的一些有關電算器使用於數學教學的實驗和研究文章，也表示了以下的看法：

(1)在小學中，可以使用電算器來做遊戲、預測、檢驗、和教授學生新的數學概念，以及更正學生錯誤的概念。（ Bell，1978 ）

(2)適當的運用電算器，將不會妨礙數學的計算能力而且還有增進的趨勢。（ Bell，1980 ）

(3)適當的使用電算器，可以更快，更有效地幫助學生發展算數的能力。（ Methematical Education Rieview 1978 ～ 1980，U．K ）

(4)電算器可能是一種很好的引起學生學習動機的工具（ Mathematics In Employment，1981 ）。

(5)利用電算器可以增加學習速度，避免對數學有失敗感，而且害怕數學的心理消失了。（ Wilson，1982 ）

(6)電算器可以幫助學生學習數學基本概念，增進心算能力。（ Wilson，1982 ）。

同時，美國的一些有關電算器使用於數學教學的實驗和研究文章（ Moursund，1981 ），亦表示了以下的看法：

(1)加強數學概念和理解的發展。

(2)引起學習興趣，鼓勵好奇心。

(3)了解數學運算的意義，培養學生估計，證實的能力。

(4)檢驗答案的對錯，教授學生數學的概念，對低成就學生實施補救教學。

此外，英國的中學數學教材：新 S．M．P（The School Mathematics Project ），SMILE（ The Secondary Mathematics Individual Learning Experiment ）也重視將電算器用來幫助學生建立和發展數學的概念。

(1)新 S.M.P 11 ～ 16

①強調准許電算器的使用，並不是意味著它可以完全取代九九乘法表的地位，而是可以改變以往只重視計算的過程，技巧與結果的教學法，而著重於讓學生了解符號和運算的意義，並且能選擇適當的時機，去

處理和面對問題（S.M.P 11 ～ 16 : Sample Pack of draft booklets，1981）。

②發展一系列六册的電算器教材，幫助學生學習（S.M.P Price List，Number 22704 ～ 22709，1981）。

③在會考之中，明白規定何種試卷可以使用電算器作答，何種試卷禁止使用電算器作答（The Syllabuses for The S.M.P：G.C.E Examinations 1978）。

(2) SMILE

Consecutives

Smile 1319

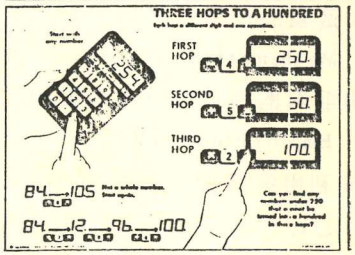
You will need a calculator.

Multiply any 3 consecutive numbers together e.g. $6 \times 7 \times 8$
Is the answer divisible by 24?

Repeat with other sets of 3 consecutive numbers until you can explain why some answers are divisible by 24 and some are not.

(There are hints on the back if you need them.)

W733 Mathematical Puzzles and Problems II (S4)



上面的左圖中，是要學生用電算器試試看任何連續三個正數的連乘積是否都能被24整除？爲什麼？，而右圖是要學生用84這個數開始，如何選擇三次適當的運算使它最後的答案是100。

2. 當作計算的工具

例如：美國一本專門談論教室中電算器角色的書一 Calculators In The Classroom（Mourund，1981）也曾表示，電算器在數學教學時，能幫助學生正確又快速地計算一些不必要的繁雜計算式子和解題。同時，英國的數學總評（Mathematics Counts，1982）也贊成在中學課程中使用電算器。

另外，英國的中學數學教科書，也將電算器當作計算的工具來使用於教學：

(1) S.M.P Book 1 (1969)，第九單元：小數，分數之第七小節：手提計算機器中，要求學生用電算器操作以下的例題：15 + 23 = ?，5.61 − 0.9 = ?，0.0145 × 3 = ?

(2) Arihmetic for Commerce (Greer，1976)，第六章：四則運算中，讓學生用電算器算一算看，下面的題目：

$$\frac{289.53 \times 6548.79 \times 900.876}{87.63 \times 587.26} = ? \qquad 6857000 \times 119000 \times 85 = ?$$

(3) C.S.E Mathematics 2 The Special Topics (Greer，1979)，第八單元：直尺與計算器中，要學生使用電算器作以下的運算：

9.632+18.564−12.768 =? 19.56 × 29.63 ÷ 11.98 = ?

(精確到小數第 2 位)

同時，美國的中學數學教科書，也將電算器當作計算的工具來使用於數學教學：

(1) Essential of Mathematics 1，(Sobel，Maletsky，& Hill，1977)，第二章第 1 節：電算器中，也要學生做以下的電算器運算練習：

23×9 = ? (6 × 5 ÷ 3) + 8 − 7 = ? 7 × 7 × 7 = ?

45 − 9 + 15 = ? 36 − 4 − 3 × 0 = ? 25 × 4 − 5 + 100 = ?

(2) Essential of Mathematics 2 (Sobel，Maletsky & Hill，1977)，第二章第 1 節：電算數學中，要學生做一做下面的練習：

3295 × 486 = ? (24 ÷ 4) + 8 = ? (7 × 6) + 4 = ?

7 × (6 + 4) = ? (5 × 8) × 3 = ? 5 × (8 × 3) = ?

從以上英、美兩國的政府政策，學術研究資料以及數學教科書的編寫中顯示出：

(1) 贊成中、小學的數學教學使用電算器。

(2) 電算器在數學教學上的角色，不僅拿它來當作計算的工具，而且更著重於用來輔助教師的數學教學，並且幫助學生建立和發展數學概念。

二我國的處理態度

在我國，電算器在數學教學之中，僅僅限於是一個計算工具而已。

例如，我國教育行政單位和學術研究人員，曾在七十二年三月間，開會討論有關數學課程的問題時，先後通過了以下兩個提案：（見國民中學數學課程標準草案和高級中學數學科課程標準，1983）

1、國民中學數學課程標準草案

其中有關教材綱要的部份，特別提到，在第二學年，第三册第3個單元：近似值與開平方根（約12節課時間）中可以編列用電算器按鍵來求平方根。

2、國民中學選修科目數學（甲）課程標準草案

其中有關教材綱要的部分，特別提到，在第二學年的方根與開方的單元（約18節課時間）中，教授有關認識電算器和利用電算器求平方根的按鍵方法。在第二學年的資料整理的單元（約10節課時間）中，准予使用電算器來操作、計算、次數分配、平均數、相對次數分配，相對累積次數分配等內容，在第三學年的數值三角及其應用的單元（約15節課時間）中，教授以電算器來求三角函數值的操作。

3、高級中學數學科課程標準

其中特別建議，在第二學年敍述統計和第三學年數值方法兩章之中，使用電算器配合教學，並且在評量時准予使用。七十二年二月底在中正幹部預備學校，實驗數值方法這一單元時，嘗試讓學生以電算器當作計算工具，來配合學習，根據實驗老師們向師範大學科學教育中心所作的實際回饋報告，由於電算器的使用，學生們不但學習興趣高昂，而且學習成就良好。

另外，我國的中學、小學數學教科書也準備將電算器的教材列入課程內容，但也只是拿它來當作計算工具，比如：

1、國民小學數學試用教材第十二册第9課：計算器械—電子計算機（約4節課的時間），這一課的教學目標，是要學生理解電算器上各按鍵的用途及置數的方法，比如：要學生在計算器上按出下列各數，並消除它：

①12345678 ②43.089 ③5000.05，理解並熟練在電算器上做加、減、乘、除的計算，以及能用它計算含「%」的問題，比如：要學生用電算器做下面的問題：

①3809+796.05=？ ②64.8−13.27=？ ③51.68×14.642=？

④ 6997÷22 = ? ⑤彩色電視機一架，定價28000元，打八五折，售價是多少？（見國民小學數學試用教材第十二冊教師手冊）。

2、國民中學數學試用教材修訂本第六冊第4章：電算器的使用，這一章的教學目標，是要介紹電算器的使用，並用來處理一些前面幾冊中學過的整數，小學混合四則運算的計算教材，例如：要學生用電算器操作下面的題目：

①35.14 − 7.00 + 12.36 = ? ② 21.75×14.543 = ?

③55.12−40.58−31.45 = ? ④(12.05+11.1)×(1.58−0.12)=?

（見國民中學數學試用教材修訂本第六冊教學指引）

3、高級中學數學課程試用教材高三理科數學下冊第一章：數值方法，這一章的教學指引中特別提及以電算器當計算工具配合教學。（見高級中學數學課程試用教材高三理科數學下冊教學指引）。

由以上這小節中，分析和比較英、美兩國和我國的處理態度中，我們發現，英、美兩國和我國對於電算器使用於數學教學所持的觀點，有顯著的差異存在，那就是：英、美兩國不但把電算器拿來當作計算的工具，而且更著重於用來輔助教師的數學教學，並且幫助學生建立和發展數學的概念。而反觀我國，目前僅僅拿它來當作計算工具而已。因此，我就想到，是不是我國也能將電算器使用於，輔助教師的數學教學，並且幫助學生建立和發展數學的概念呢？

丙、妨礙的因素

我想，是不是因爲以下兩個方面，造成妨礙我國在中學、小學數學教學中使用電算器輔助教學，並幫助學生建立和發展數學的觀念？

一、英、美兩國研究報告的忠告（Wilson，1982 U. K；Moursund，1981，U.S.A）

1、妨礙學生學習數學的基本概念。

2、妨礙學生的基本計算能力。

3、學生心理是否能夠接受。

4、學生會過份依賴而不去思考。

5、長久使用其效果會急速下降。

6、電算器可能會發生故障或計算錯誤。

7、學校是否有足夠的數量供做教學使用。

二、我國目前沒有研究人員眞正經過實驗來探討電算器使用於數學教學的價值、效果以及影響。

但是，就目前國內電算器的發展和使用的情形來看，我認爲第一大類中，第6和第7個因素已經無法構成妨礙了。因爲，第一，電算器發生計算錯誤的機會比起人們用手計算發生錯誤的機會小得很。第二，只要大家養成良好的使用習慣，那它發生錯誤的機會就更小了。第三，一般而言，電算器發生故障，大部分是由於電池用完之故，因此只需更換新的電池就可以使用了，更何況現在有太陽能電算器大量問市。第四，現在一個具有＋、－、×、÷、%、＝等基本按鍵的袖珍電算器，市價大約兩百元左右，即使是太陽能的也只不過四百元左右，例如：聲寶牌（Sharp）EL－850型一個只要一百八十元左右，EL-826型一個大約四百二十元，按照我國目前各家庭的經濟情形，應該負擔得起。

所以，目前我國面臨的問題就在於：如何去面對和克服前面敍述的五個因素？並眞正地經由實驗來探討電算器使用於數學教學的價值，效果以及影響？

丁、本文的目的

英國的數學總評（Mathematics Counts，1982）一書提出：教數學的目的，是爲了幫助人們更加了解許多的事務——了解往後可能面對的工作，了解人類思想創造的結果，了解大自然的現象。然而，我認爲在數學教學之中，學生的學習態度（Attitude）和學習動機（Motivation）是兩個直接影響學生學習成就的巨大潛在因素。例如：Hoyles所說（Hoyles，1980）：數學學習態度的形成，在小孩子的發展過程中，是個很重要的結構，而且學習態度能夠刺激學習，也能夠妨礙學習。而且對於數學的學習態度來說，我認爲，小學的數學教育是決定一個人學習數學成敗的關鍵。例如，英國數學總評所提出的證言：在小學階段結束以前，一個小孩子對數學的學習態度，常常已經固定而且將會決定他往後學習數學的方法，一旦學習態度形成之後，他們將會很固執，而且難以改變。

所以，本文的目的是，提出一個目前我國應該研究發展的方向，那就是：是不是應該眞正的經由實驗來根本探討電算器使用於數學的價值，效果以及影響？

有一個比舒瓦兹不等式更重要的不等式

有一個比算術幾何平均不等式更要緊的不等式

不管爲的是讀書或考試

F（做50道題目）＞F（看500道題目）

這裡F（・）是效用函數

而你又怎樣才了解這不等式呢？

只有一條路子，老老實實做題目。

淺談緊緻集

指導老師：王惠中
作　　者：曹銘港

我們僅在距離空間上討論，到後來還把範圍縮窄到一些特別的距離空間 —— 賦範空間上，主要的目的是看一看在這些空間上的緊緻集的簡單拓樸結構，但所用的儘量是分析的方法。一些基本的名詞，如集合，距離空間，賦範空間、開集、閉集、鄰域、聚點（ limit point ），有界、序列、開覆蓋（ open cover ）……均不再定義。

首先，我們要把緊緻集引出來，先看歐氏空間R^n這個最可愛的距離空間，Weierstrass 告訴我們它的任何一個有界的無窮子集 A 都至少有一個聚點（並不一定在A中），而 Hine 與 Borel 還嫌這種集合不夠好，他們要 A 加强爲一個閉集，這樣就可保證那些聚點落回A裏面，他們還發現如此的集合 A 有一個良好的性質 —— A 的任一個開覆蓋，都有一個有限的『子覆蓋』（ finite subcover ）。這是一個很完美的條件，我們可以只在一些事先經過挑選的簡單集合（開集）上作分析的工作 —— 極限的步驟，而只須透過有限次的拓展便可達到所要求的範圍，『有限』在每一個數學分支裏都受到歡迎，它是直觀可達的，受歸納法約束的。因此，在一般的距離空間上，我們就定義具有上面這種性質的集合爲緊緻集（ compact set ），特別當整個空間爲緊緻時，我們稱它爲緊緻空間。緊緻集在分析學上是非常重要的，尤其是它跟連續函數的關係，如它能使在其上的連續函數均勻連續，這是積分的開始，又緊緻性在連續函數作用下能保持的，極大極小的問題也由這種性質而來，此外，緊緻集也跟分析上一些大定理，像「Stone-Weierstrass 逼近定理」，「Arzela-Ascoli 定理」等拉上關係。

我們開始看看緊緻集是甚麼樣子的，不難證明緊緻集一定是有界閉集，從上面的介紹，可以知道R^n中的有界閉集也一定是緊緻集（這就是所謂的 Heine-Borel 定理）。這在一般的距離空間會成立嗎？先看下面的例子：

例 1^0 ：(R, d)　　$d(x,y) = \begin{cases} 0 & ; x = y \\ 1 & ; x \neq y \end{cases}$

R 中任一子集都是有界閉集，

而 $\mathcal{G} = \{ \{x\} \mid x \in R \}$ 一定是這個子集的開覆蓋，

但當這子集是無限集時，$\mathcal{G}$ 就沒有它的一個有限子覆蓋了。

例 2^0 ：$(Q \cap [0,1], \rho)$　　$\rho(x,y) = |x - y|$

$Q \cap [0,1]$ 爲有界閉集，

但 $Q \cap [0,1]$ 在 R 中不爲閉集，故不是緊緻。〔註 1〕

這說明 Heine-Borel 定理在一般的距離空間中不一定成立，到底甚麼時候成立，甚麼時候又不成立呢？

我們把緊緻性的一些等價條件列出來，作爲：

定理 1：(X, d) 爲距離空間，$A \subset X$，下列命題等價：

1^0　A 爲緊緻集。

2^0　若 A 中的一族閉集滿足「有限交集性質」（F.I.P：finite intersection property）ie: 若 $\{F\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 爲 A 中的閉集族〔註 2〕，且對 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n \in \Lambda$，有 $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha i} \neq \phi$ 則這整族閉集一起的交集也非空。

3^0　A 的任一個可數的開覆蓋有一個有限子覆蓋。（這叫做 Countably 緊緻）

4^0　若 A 中可數個閉集滿足 F.I.P.，則其整族交集也非空。

5^0　A 中每一無窮子集都在 A 中有一聚點。

（這稱爲 Bolzano-Weierstrass 條件）

6^0　A 中的任一序列都有在 A 中收斂的子序列。

（這稱爲 Sequential 緊緻）

證明：$1^0 \leftrightarrow 2^0$，$3^0 \leftrightarrow 4^0$　$2^0 \Rightarrow 3^0$　用 De. Morgan's 定理

（$4^0 \Rightarrow 5^0$）設 B 爲 A 中一無窮子集，

而 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ 爲 B 中一列相異點〔註 3〕定 $F_n = Cl_A \{a_m \mid m \geq n\} = Cl_X \{a_m \mid m \geq n\} \cap A$，$n \in N$

$\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲 A 中滿足 F.I.P. 的一族閉集

由 4^0，找到 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subset A$

x 爲 $\{a_n \mid n \geq 1\}$ 之聚點　（？）

$\Rightarrow x$ 爲 B 之聚點

($5^0 \Rightarrow 6^0$) 顯然

($6^0 \Rightarrow 1^0$) 這比較麻煩，我們先定義一種特別的集合：

若 $B \subset X$ 且 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $x_1, x_2, \cdots, x_n \in B$ 〔註 4〕

使 $\bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon) \supset B$

其中 $B(x_k, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x_1, x_k) < \varepsilon\}$ 是以 x_k 爲心，ε 爲半徑的開球。

則稱 B 爲「完全有界」(totally bounded)

我們先證 $6^0 \Rightarrow$ A 完全有界：

設否，則：$\exists\ \varepsilon_0 > 0$，對 $x_1 \in A$，$\exists\ x_2 \in A$

$\ni d(x_1, x_2) \geq \varepsilon_0$，

又 $\exists x_3 \in A \ni d(x_1, x_3) \geq \varepsilon_0$，$d(x_2, x_3) \geq \varepsilon_0$

這樣繼續下去，找到 $\{x_n\} \subset A$

其中 $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon_0$，$\forall\ m \neq n$

$\therefore \{x_n\}$ 不可能有收斂的子序列。 $\longrightarrow \longleftarrow$

今令 $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 爲 A 之一開覆蓋，由上面看出：對任意小的開球，只須要有限個就可把 A 蓋住。試想，當開球足夠小時，如果替它們都找到一個 G_α 來蓋住它們的其中一個就好了，事實上是有的，也就是想證明 $\varepsilon_0 > 0$ $\forall x \in A$ $G_\alpha \in \mathcal{G} \ni B(x, \varepsilon_0) \subset G_\alpha$（有沒有看出，這就是所謂的 Lebesgue 覆蓋定理），

設否，$\forall n \in N$，$\exists x_n \in A$

$\ni B(x_n, \frac{1}{n})$ 不包含在任何 $G_\alpha \in \mathcal{G}$ 中

由 6^0 找到 $\{x_{n_k}\}$ 爲 $\{x_n\}$ 之收斂子序列，

設 $x_{n_k} \to x_0 \in A$

取 $G_0 \in \mathcal{G} \ni x_0 \in G_0$

及 $\varepsilon > 0$ $\ni B(x_0, \varepsilon) \subset G_0$

不難看出，當 k 足夠大時，$B(x_k, \frac{1}{n_k}) \subset B(x_0, \varepsilon) \subset G_0$ 好了，我們已找到 $x_1\ x_2 \cdots\cdots x_n \in A$

$\ni \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon_0) \supset A$

現在又有 $\forall i \exists G_i \in \mathcal{U} \ni B(x_i, \varepsilon_0) \subset G_i$

$\therefore A \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_k$，A 爲緊緻　〔註五〕

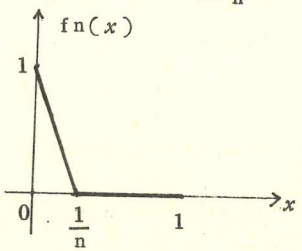
有了定理 1，我們來看下面這個例子：

例 3⁰　在 $C[0,1] = \{f \in R^{[0,1]} \mid f$ 連續$\}$ 中

定 $d(f,g) = SUP\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [0,1]\}$

$(C[0,1], d)$ 爲一距離空間

令 $A = \{f_n \in C[0,1] \mid f_n(x) = \begin{cases} 0, & \frac{1}{n} \le x \le 1 \\ 1-nx, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \end{cases} n \in N\}$

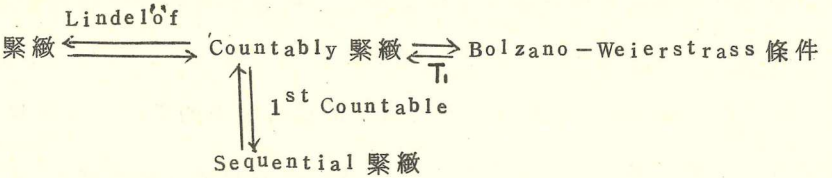


A 爲有界，

A 中沒有聚點，故爲閉集，

但由定理 1 知 A 不爲緊緻

定理 1 是非常重要的，尤其是最後一個條件，它充分表現出距離空間的特性——將任意抽象的化成可數的。可數性爲分析學者提供一個很有用的工具，它是有限的最低延拓，有些微的直觀性，甚至有時候歸納法也可達到。要注意的是類似的定理在一般的拓樸空間中不一定成立，這也是拓樸學存在的原因。一般而言，有下面的關係：



距離空間當然是 1st Countable 及 T_1，　在 $6^0 \Rightarrow 1^0$ 證明中，知道 Sequentail 緊緻⇒完全有界，不難證明：

“完全有界⇒可析（Separable）”

在距離空間中，可析是是跟 Lindelöf（及 2^{nd}Countable）等價的，這是定理 1 的由來。還有 Countably 緊緻可叫做 $\mathcal{N}_0$ 緊緻，同理可定義 $\mathcal{N}_n$ 緊緻，$n \in N$，但在距離空間中，它們都跟緊緻性等價的。

我們定義一種跟R^n中有界集相似的集合：

在距離空間（X，d）中，　$A \subset X$

定　A爲「緻密集」（relatively Compact）$\leftrightarrow Cl_X A$爲緊緻集，

下面幾件事情是明顯的。

1^0 A爲緻密集$\leftrightarrow$A中無窮子集均有聚點（在X中）。

$\leftrightarrow$A中之序列均有收斂（在X中）的子序列。

2^0 緊緻$\overset{①}{\supseteq}$緻密$\overset{②}{\supseteq}$完全有界$\overset{③}{\supseteq}$有界

（Ⅰ）當A爲閉集時，①的反方向也成立，即緊緻集爲緻密閉集

（Ⅱ）②由定理1的證明可看出。反方向不一定成立，如例2^0。

（Ⅲ）③顯然，反方向也不一定成立，如例1^0。

（Ⅳ）R^n中，②③反方向皆成立——R^n的有界集爲緻密集。

現在來看完全有界集：設A完全有界，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$

則A被包含在有限個半徑爲1的開球的聯集中，其中一個開球包含$\{x_n\}$的一個子序列$\{x_{1n}\}$，同樣，其中一個半徑爲$\frac{1}{2}$的開球包含$\{x_{1n}\}$的一個子序列$\{x_{2n}\}$，這樣造下去，得到一系列的點，運用Cantor對角線方法就可替$\{x_n\}$找到一個Cauchy子序列，當我們的距離空間是完備時，完全有界集就是緻密集了，即②的反方向成立。此外，我們知道Cauchy序列是有界的，其實它是完全有界（當然，把序列看作集合以後），而有一收斂子序列的Cauchy序列本身就會收斂，所以當X中的所有完全有界集均爲緻密時，X就完備了，（看看例2）。我們把它寫成一個定理：

定理2：　若（X，d）爲距離空間

則　X爲完備的$\leftrightarrow$X中的完全有界集爲緻密集，

所以在完備的距離空間中，緊緻集是完全有界的閉集。

現在，我們把範圍縮到佈於R的賦範空間上，它具有向量空間的良好代數結構，可以借助它裏面的一組基底把整個空間約束起來。在拓樸方面

，它具有「可遷性」，也就是說，我們只要知道某一點的局部性質，那每一點的局部性質都會一樣。先看有限維的賦範空間：

設（V，$\|\cdot\|$）爲一 n 維賦範空間，$\{e_1, e_2, \cdots e_n\}$爲一組基底，我們知道 V 與R^n有相同的代數結構，其實它們在拓樸的結構上也是相同的，而貫穿它們之間的函數同樣是這個：

$$f : R^n \to V, \quad f(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k, \quad \xi_k \in R$$

f 爲 1－1 且映成的綫性函數，

可以找到 $k_1, k_2 > 0$ ∋ $k_1 \|x\| \leq \|f(x)\| \leq k_2 \|x\|$，

$\forall x \in R^n$

也就是說 f，f^{-1}均是（均勻）連續函數，因此 f 爲一「同胚變換」（homeomorphism）。其實我們可以證明R^n與 V 間的所有綫性同構（isomorphism）均爲同胚變換。這個結果甚至在一般的拓樸向量空間（topological vector space）中仍然成立。現在 V 與R^n拓樸同構，R^n爲完備的，容易證明 V 亦爲完備的。因此 V 的完全有界集爲緻密集，那有界集呢？

設 A 爲 V 中一有界集，$\{x_n\} \subset A$，

則 $\exists K > 0$ ∋ $\|x_n\| \leq K \quad \forall n \in N$

$\therefore \|f^{-1}(x_n)\| \leq \frac{1}{k_1} \|x_n\| \leq \frac{K}{k_1}$

$\Rightarrow$ $\{f^{-1}(x_n)$ 爲 R^n 中的有界集

$\therefore$ 找到 $y \in V$ ∋ $\{x_n\}$ 的一個子序列收斂到 y。

因此，在有限維賦範空間中，有界集就是緻密集。

即 Heine-Borel 定理成立── 有界閉集爲緊緻集。

這多少提供了例 3° 那個有界閉集不爲緊緻的原因。

那有限維是不是必要條件呢？答案是肯定的。

設（V，$\|\cdot\|$）爲一無限維賦範空間，F，Riesz 替我們在單位球面 $S=\{x\in V \mid \|x\|=1\}$ 上找到一列元素 $\{x_n\}$

其中　　$\|x_m - x_n\| \leq$ 常數 >0

這個序列不可能有收斂的子序列，所以 S 不爲緊緻，但 S 爲有界閉集（當然，如果 V 爲內積空間的話那就更簡單了，只要把它的一組基底的一列元素就範直交化（orthonomalize）以後就行了）。下面的定理就明顯了：

定理 3　　若（V，$\|\cdot\|$）爲一賦範空間，下列敍述等價：

1°　V 的有界閉集爲緊緻集

2°　V 爲局部緊緻（locally compact）

3°　單位球面爲緊緻集

4°　V 爲有限維

我們稍爲作一些推廣：

在一般的拓樸向量空間（V，$\mathcal{C}$）中，我們稱 $E\subset V$ 爲 $\mathcal{C}$—有界集的意思是：對任意的開集 U，$\exists\, t>0$

$$\ni\ E\subset tU=\{tv \mid v\in U\}$$

而 V 爲局部有界（locally bounded）的意思是：

V 中的每一點均有一個 $\mathcal{C}$—有界的鄰域。

可以證明在局部有界的拓樸向量空間中，若 $\mathcal{C}$—有界的閉集均爲緊緻集，則它是有限維的。但這時候反方向就不一定成立（雖然 n 維拓樸向量空間與 R^n 拓樸同構），原因是在有限維拓樸向量空間中（一定是距離空間），兩種有界集並不一定相同（除非它是賦範空間）。

我們已經知道 n 維賦範空間與 R^n 拓樸同構，而緊緻性在連續函數作用下是不變的，所以 n 維賦範空間中的緊緻集與 R^n 中的緊緻集有個一一對應

，現在只看 R^n ：

定 $Q^n = \{ x = (x_1 , x_2 , \cdots , x_n) \in R^n \mid x_i \in Q , i = 1,2 \cdots n \}$

我們知道 R^n 上的開集可以表成可數個頂點在 Q^n 中互不重疊的閉區間的聯集（？）

而 $\text{card} \{ F \subset R^n \mid F$ 爲頂點在 Q^n 中的閉區間 $\} = \aleph_0$ 。

$\text{card} \{ G \subset R^n \mid G$ 爲開集 $\} \leq \aleph_1$ （？）

$\Rightarrow \text{card} \{ G \subset R^n \mid G$ 爲有界閉集 $\} \leq \aleph_1$

$\Rightarrow \text{card} \{ G \subset R^n \mid G$ 爲緊緻集 $\} \leq \aleph_1$

但有限集爲緊緻集，

且 $\text{card} \{ G \subset R^n \mid G$ 爲有限集 $\} = \aleph_1$ （？）

$\Rightarrow \text{card} \{ G \subset R^n \mid G$ 爲緊緻集 $\} \geq \aleph_1$

由 Schröder — Berstein 定理得：

$\text{card} \{ G \subset R^n \mid G$ 爲緊緻集 $\} = \aleph_1$

所以 R^n 中的緊緻集只佔 R^n 的子集的一小部份。

（ $\text{Card} \mathcal{P}(R^n) = 2^{\aleph_1} = \aleph_2$ ）

我們來看一些無限維賦範空間的緊緻集：

1° $C_0 = \{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mid x_n \to 0 \}$

對 $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in C_0$ ，定 $\| x \|_\infty = \text{SUP} \{ | x_n | \ n \geq 1 \}$

$(C_0 , \| \cdot \|_\infty)$ 爲一（無限維）賦範空間。

可證明 $(C_0 , \| \cdot \|_\infty)$ 爲完備的。

定理 4 ： 若 $A \subset C_0$

則 A 爲緊緻集 $\leftrightarrow$ A 爲有界閉集

且A爲等度收斂：

$$\forall \varepsilon > 0 \quad n_0 \in N$$

$$\ni \; n \geq n_0 \Rightarrow | x_n | < \varepsilon \; , \forall \; \{ x_n \}_{n=1}^{\infty} \in A$$

證明：（⇒）緊緻集當然是有界閉集，而且是完全有界，

$$\therefore \forall \varepsilon > 0 \; , \quad x^{(1)} \; , \quad x^{(2)} , \cdots , x^{(n)} \in A \; , \; x^{(k)} = \{ x_n{}^{(k)} \}_{n=1}^{\infty}$$

$$, \; 1 \leq k \leq N$$

$$\ni \text{ 若 } \quad x = \{ x_n \}_{n=1}^{\infty} \in A \text{ 則 } \exists \, k \text{ , 使 } \| x - x^{(k)} \|_{\infty} < \varepsilon/2$$

$$\text{ie: } | x_n - x_n{}^{(k)} | < \varepsilon/2 \; , \forall n$$

但 $x^{(k)} \in A$ ， 即 $x_n^{(k)} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

$\therefore \exists \, n_k \ni n \geq n_k \Rightarrow | x_n{}^{(k)} | < \varepsilon/2$

取 $n_0 = \max \{ n_1 , \cdots\cdots , n_N \}$

則 $\forall \; x = \{ x_n \}_{n=1}^{\infty} \in A \quad \exists \, k$

$$n \geq n_0 \Rightarrow | x_n | \leq | x_n - x_n^{(k)} | + | x_n^{(k)} | < \varepsilon$$

（⇐） 因爲（C_0 , $\| \cdot \|$ ）完備，只要證明A完全有界就夠了。

$$\because \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \, n_0 \in N \ni n \geq n_0 \Rightarrow | x_n | < \varepsilon/2 , \; \forall \; x = \{ x_n \} \in A$$

定 $A_0 = \{ (x_1 , x_2 , \cdots\cdots , x_{n_0}) \mid \{ x_n \}_{n=1}^{\infty} \in A \} \subset R^{n_0}$

又A在C_0有界， $\exists \, M > 0 \ni |x_n| \leq M \quad \forall \{ x_n \}_{n=1}^{\infty} \in A$

則 $\| (x_1 , x_2 , \cdots x_{n_0} \| = (\sum_{k=1}^{n_0} | x_k |^2)^{1/2} \leq n_0^{1/2} M ,$

即 A_0 在 R^{n_0} 中有界

⇒ A_0 在 R^{n_0} 中完全有界

$\Rightarrow \exists\, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(N)} \in A$, $x^{(k)} = \{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$, $1 \le k \le N$

$\ni$ 若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in A$ 則 $\exists k$ 使 $\left(\sum_{i=1}^{n_0} | x_i - x_i^{(k)} |^2\right)^{1/2} < \varepsilon$

ie: SUP $\{| x_n - x | \mid n = 1, 2, \cdots, n_0\} < \varepsilon$

$\forall\, x = \{x_n\} \in A \quad \exists\, k$

SUP $\{| x_n - x_n^{(k)} | \mid n > n_0\} \le$ SUP $\{| x_n | \mid n > n_0\}$ + SUP $\{| x_n^{(k)} | \mid n > n_0\} \le \varepsilon$

ie : $\| x - x^{(k)} \|_\infty \le \varepsilon$

我們換一個角度來看 C_0 的緊緻集，

若 $A \subset C_0$ 爲緊緻，則 $\exists M > 0 \ni \| x \|_\infty < M \ \forall\, x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in C_0$

由定理 4 ， $\forall\, k \in N \ \exists n_k$ ， $n_1 < n_2 < n_3 \cdots\cdots < n_k < \cdots\cdots$

$\ni n \ge n_k \Rightarrow | x_n | < \frac{1}{k}$, $\forall\, \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in A$

我們取 $a_1 = a_2 \cdots\cdots = a_{n_1} = M$

$a_{n_1+1} = \cdots\cdots = a_{n_2} = 1$

$a_{n_2+1} = \cdots\cdots = a_{n_3} = \frac{1}{2}$

$\vdots$

$a_{n_k+1} = \cdots\cdots = a_{n_k} = \frac{1}{k}$

$\vdots$

則 $A \subset \prod_{n=1}^{\infty} [-a_n, a_n]$ 的閉集，且 $a_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$

我們來看一下 $\prod_{n=1}^{\infty} [-a_n, a_n]$ ，這種集合，其中 $\{a_n\} \in C_0$

顯然它在 C_0 中是有界的；我們要證明它是一個閉集，

若 $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset \prod_{n=1}^{\infty} [-a_n, a_n]$, $x^{(m)} \xrightarrow{m \to \infty} x$

其中 $x^{(m)} = \{x_n^{(m)}\}_{n=1}^{\infty}$, $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

則 $\| x^{(m)} - x \|_\infty \xrightarrow{m \to \infty} 0$

$\Rightarrow | x_n^{(m)} - x_n | \xrightarrow{m \leftrightarrow \infty} 0 \quad \forall n \in N$

$\Rightarrow \quad x_n \in [-a_n , a_n] \quad \forall n \in N$

$\Rightarrow \quad x \in \prod_{n=1}^{\infty} [-a_n , a_n]$

$\therefore \prod_{n=1}^{\infty} [-a_n , a_n]$ 爲 C_0 的閉集

又 $a_n \to 0, \therefore \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N \ni n \geq n_0 \Rightarrow | a_n | < \varepsilon$

$\therefore \forall x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} [-a_n , a_n], \quad n \geq n_0 \Rightarrow | x_n | \leq |a_n| < \varepsilon$

$\prod_{n=1}^{\infty} [-a_n , a_n]$ 爲等度收斂

由定理 4 ，得 $\prod_{n=1}^{\infty} [-a_n , a_n]$ 爲 C_0 的緊緻集，

於是 $\prod_{n=1}^{\infty} [-a_n , a_n]$ 的閉子集亦爲緊緻.

定理 5 (C_0 , $\| . \|$) 中緊緻集的唯一形式 —— $\prod_{n=1}^{\infty} [-a_n , a_n]$ 的閉子集

其中 $\{ a_n \}_{n=1}^{\infty} \in C_0$

我們來看 C_0 到底有「多少」緊緻集。(無聊 ?!)

首先 $\quad \text{Card } C_0 \leq \text{card } R^N = \aleph_1^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$

而 $\quad \{ x , o , o , \cdots\cdots \} \in C_0 \quad \forall x \in R$

$\therefore \text{card } C_0 \geq \text{card } R = \aleph_1$

得到 $\text{card } C_0 = \aleph_1$

從上面證明 $\prod_{n=1}^{\infty} [-a_n , a_n]$ 爲閉集的過程中，可看出：

$A \subset \prod_{n=1}^{\infty} [-a_n , a_n]$ 閉子集 $\leftrightarrow \{ x_n \mid \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} [-a_n , a_n] \} \subset R$

閉子集 , $\forall n \in N$

$$\leftrightarrow \{x_n \mid \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} [-a_n, a_n]\} \text{ 爲 } R$$

的緊緻集，$\forall n \in N$

$$\text{card}\{G \subset [-a_n, a_n] \mid G \text{爲緊緻}\} \leq \text{card}\{G \subset R \mid G \text{爲緊緻}\} = \aleph_1$$

$$\Rightarrow \text{card}\{A \subset \prod_{n=1}^{\infty} [-a_n, a_n] \mid A \text{爲閉集}\} \leq \aleph_0 \cdot \aleph_1 = \aleph_1$$

$$\Rightarrow \aleph_1 = \text{card}\{\prod_{n=1}^{\infty} [-a_n, a_n] \mid \{a_n\} \in C_0\}$$

$$\leq \text{card}\{A \subset C_0 \mid A \text{爲緊緻}\} \leq \aleph_1 \cdot \text{card } C_0 = \aleph_1 \cdot \aleph_1 = \aleph_1$$

$$\therefore \text{card}\{A \subset C_0 \mid A \text{爲緊緻}\} = \aleph_1$$

2^0 $C = \{\{x_n\} \subset R \mid \exists a \in R \ni x_n \xrightarrow{n \to \infty} a\}$

對 $x = \{x_n\} \in C$，定 $\|x\|_\infty = \text{SUP}\{|x_n| \mid n \geq 1\}$

則 C 也是一個完備的無限維賦範空間。

定理 6 若 $A \subset (C, \|\cdot\|_\infty)$

則 A 爲緊緻 $\leftrightarrow$ A 爲有界閉集且爲等度 Cauchy

ie: $\forall \varepsilon > 0$ $n_0 \in N$

$\ni m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$ $\forall \{x_n\} \in A$

證明：($\Rightarrow$) 緊緻集爲有界閉集且爲完全有界，

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists x^{(1)}, \cdots, x^{(n)} \in A$， $x^{(k)} = \{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$

$\ni$ 若 $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in A$ 則 $\exists k \ni \|x - x^{(k)}\|_\infty < \varepsilon/3$

又 $x^{(k)} \in C \Rightarrow x^{(k)}$ 爲 R 中之 cauchy 數列

$\Rightarrow \exists n_k \ni m, n \geq n_k$ 時 $|x_m^{(k)} - x_n^{(k)}| < \varepsilon/3$

取 $n_0 = max \{ n_1, \cdots, n_N \}$

$\forall x = \{x_n\} \in A \quad \exists k$

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| \leq |x_m - x_m^{(k)}| + |x_m^{(k)} - x_n^{(k)}| + |x_n^{(k)} - x_n| < \varepsilon$$

($\Leftarrow$) 設 $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \subset A$, $x^{(k)} = \{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$

則 $\{(x_1^{(k)}, \cdots, x_{n_0}^{(k)})\}_{k=1}^{\infty}$ 爲 R^{n_0} 之有界序列

$\therefore$ 找到 $\{(x_1^{(k_\ell)}, \cdots, x_{n_0}^{(k_\ell)})\}_{\ell=1}^{\infty}$ 爲 $\{(x_1^{(k)}, \cdots, x_{n_0}^{(k)})\}$ 之收斂子序列,

ie : $\exists \ell_0 \in N \ni \ell_1, \ell_2 \geq \ell_0 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n_0} |x_i^{(k\ell_1)} - x_i^{(k\ell_2)}|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$

$$\Rightarrow |x_n^{k\ell_1} - x_n^{k\ell_2}| < \varepsilon, \quad 1 \leq n \leq n_0$$

今設 $x^{(k\ell)} \xrightarrow{n \to \infty} a_{k\ell}$ ($n \geq n_0 \Rightarrow |x^{(k\ell)} - a_{k\ell}| \leq \varepsilon$)

$\{a_{k\ell}\} \subset R$ 之有界序列

$\Rightarrow \exists \{a_{\ell m}\}_{m=1}^{\infty}$ 爲 $\{a_{k\ell}\}$ 之收斂子序列

$\Rightarrow \exists m_0 \ni m_1, m_2 \geq m_0 \Rightarrow |a_{\ell m_1} - a_{\ell m_2}| < \varepsilon$

取 $\{x^{(\ell_m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset \{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 之子序列

及 $M = max \{m_0, \ell_0\}$

當 $m_1, m_2 \geq M$ 時,

若 $1 \leq n \leq n_0$, 有 $|x_n^{(\ell_{m_1})} - x_n^{(\ell_{m_2})}| < \varepsilon$

若 $n > n_0$, 有 $|x_n^{(\ell_{m_1})} - x_n^{(\ell_{m_2})}| \leq |x_n^{(\ell_{m_1})} - a_{\ell m_1}| + |a_{\ell m_1} - a_{\ell m_2}| + |a_{\ell m_2} - x_n^{(\ell m_2)}| < \varepsilon/3$

即 $\| x^{(\ell m_1)} - x^{(\ell m_2)} \|_\infty \xrightarrow{m_1, m_2 \to \infty} 0$

$\{x^{(k)}\}$ 有一收斂之子序列。

A 爲緊緻。

由定理 6 知 $\prod_{n=1}^{\infty}[-a_n+a,\ a+a_n]$ 在 C 中爲緊緻集，其中 $a\in R$ 及 $\{a_n\}\in C_0$，而且，進一步我們有：

定理 7　　$A\subset(C,\|\cdot\|_\infty)$

A 爲緊緻 $\leftrightarrow$ $A\subset\bigcup_{a\in\Lambda}\prod_{n=1}^{\infty}[-a_n^{(a)}+a,\ a+a_n^{(a)}]$ 的閉子集

其中 $\Lambda\subset R$ 有界

$\{\{a_n^{(a)}\}_{n=1}^{\infty}\}_{a\in\Lambda}$ 爲 C_0 的完全有界集。

3° $\ell_\infty=\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset R\mid \exists M>0\ \ni\ |x_n|\le M,\ \forall n\in N\}$

在 ℓ_∞ 中，用 $\|x\|_\infty=\mathrm{SUP}\{|x_n|\mid n\ge 1\}$ 對 $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，

$(\ell_\infty,\|\cdot\|_\infty)$ 是一個完備的（無限維）賦範空間。

其實 C_0，C 都是 ℓ_∞ 的綫性子空間，而且用相同的範數

$\therefore C_0$，C 的緊緻集在 ℓ_∞ 中也是緊緻。

定理 8　$A\subset(\ell_\infty,\|\cdot\|_\infty)$

$A\subset\ell_\infty$ 緊緻 $\leftrightarrow$ A 爲有界閉集且『逐標收斂 $\Rightarrow$ 收斂』

ie：對 $\{x^{(k)}\}\subset A$　$x^{(k)}=\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$

若 $x_n^{(k)}\xrightarrow{k\to\infty}x_n\in R$，則 $x^{(k)}\xrightarrow{k\to\infty}\{x_n\}\in A$

證明：（$\Rightarrow$）　設 $x^{(k)}\nrightarrow\{x_n\}$

則 $\exists\ \{x^{(k_\ell)}\}\subset\{x^{(k)}\}\ \ni\ x^{(k_\ell)}\to\{x'_n\}\neq\{x_n\}$　(?)

$\Rightarrow$　$|x_n^{(k_\ell)}-x'_n|\longrightarrow 0$，$\forall n\in N$ $\longrightarrow\longleftarrow$

（⇐） 定 $A_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in A\}$ $n \in N$

$A_n \subset R^n$ 有界 $\forall n \in N$

A_1 有聚點，若 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 爲 A_n 之聚點

則 A_{n+1} 必有 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 這種聚點，

注意 R^n 中逐標收斂 $\leftrightarrow$ 收斂

因此可取 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell_\infty \ni (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 爲 A_n 之聚點

而且 $\exists \{z^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset A \ni \forall i \quad z_i^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} x_i$

$(z^{(n)} = \{z_i^{(n)}\}_{i=1}^{\infty})$

$\therefore \quad \{z^{(n)}\} \longrightarrow \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ，$\{x_i\}$ 爲 A 之聚點

A 爲緊緻。

其實上面這個結果在所有 perfect 的數列空間（包括 ℓp ，$1 \leq p \leq \infty$）都成立。

前面我們知道 $\prod_{n=1}^{\infty} [-a_n, a_n]$ 爲 ℓ_∞ 之緊緻集，$\{a_n\} \in C_0$

要注意這不是 Tychonoff 定理—— X_α 爲緊緻，$\alpha \in \Lambda \Rightarrow \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 緊緻的結果，先看下面例子：

ℓ_∞ 的單位閉球 $\bar{B}(0, 1) = \{x \in \ell_\infty \mid \| x \|_\infty = 1\}$

$$= \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty \mid |x_n| \leq 1 \ \forall n \in N\}$$

$$= [-1, 1]^N$$

由定理 3 知 $\bar{B}(0, 1)$ 在 ℓ_∞ 中不緊緻，這就跟 Tychonoff 定理相矛盾，這是因爲 Tychonoff 定理用的是積空間的拓樸，而 ℓ_∞ 的拓樸是由 $\|\cdot\|_\infty$ 所定的距離所衍生的，兩者並不相同。〔註 6〕

最後，我們把一些常見的賦範空間的緊緻集列出：

(A) $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p \leq \infty$

$A \subset \ell^p$ 緊緻 $\leftrightarrow$ A 爲有界閉集

且 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in N \ni \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n|^p < \varepsilon$, $\forall \{x_n\} \in A$

(B) $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset R^n$ 之開連通集

$A \subset L^p(\Omega)$ 緊緻 $\leftrightarrow$ A 爲有界閉集

且 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$

$$\ni \left\{ \begin{matrix} |h| < \delta \\ h \in R^n \end{matrix} \right. \Rightarrow \int_\Omega |f(x+h) - f(x)|^p dx < \varepsilon$$

, $\forall f \in A$

(C) $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$

$A \subset C[a, b]$, 緊緻 $\leftrightarrow$ A 爲有界閉集,

且 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$

$$\ni \left\{ \begin{matrix} |x - x'| < \delta \\ x, x' \in [a, b] \end{matrix} \right. \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

, $\forall f \in A$

(這就是我們開始說的 Arzela — Ascoli 定理。)

註 1： 距離空間的緊緻集放在較大的空間中也是緊緻的。

註 2： 這裏我們把 A 看作 X 的子(距離)空間，因此：

F 爲 A 中的閉集 $\leftrightarrow F_0 \cap A$, F_0 爲 X 的閉集,

註 3： 集合論中有個很基本的定理：$\aleph_0$ 爲最「小」的無限基數。

註 4： 有人定義完全有界集時，那有限點在 X 中取，我們定義强一點，比較好用。

註 5： ($6^0 \Rightarrow 1^0$) 有個很漂亮的證明，請參考：

Friedman 的 Foundation of Modern Analysis p. 107 - 109

註 6 ： 把〔 -1 , 1〕 看作積空間，則它裏面的拓樸是由下面這種距離衍生出來的（如果存在的話）：

$$d(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} | x_n - y_n |^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad x = \{x_n\} \; y = \{y_n\}$$

參考資料：

Edwards	Functional Analysis
John.Greever	Theory & example of point set topology
林義雄，林紹雄	理論分析 （上）
John.B.Conway	Function of one Complex variable
W.Rudin	Functional Analysis
Gottfried Köthe	Topological vector space I

平面正n 邊形與p 邊形所構成q 面體的對稱羣的例子

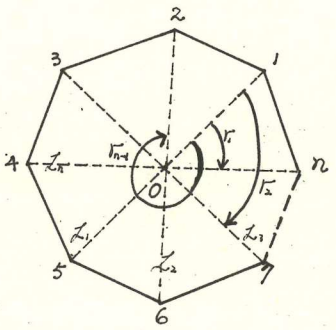
指導老師：常法徽
作　者：游經祥

甲、平面正n 邊形的討論及例子

㈠ n 爲奇數的時候：

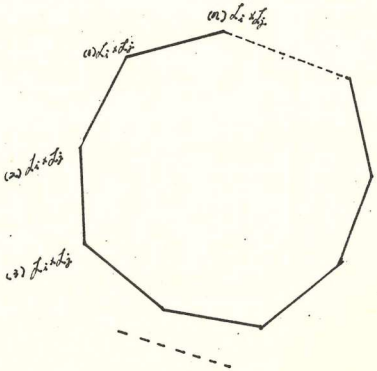
如右圖爲一正 n（奇數）邊形而其對稱中心爲 0 。

而 L_1 ，L_2 ，L_3 ，… L_n 分別爲連 0 與 1 ，2 ，… n 所成的對稱軸。而 r_1 ，r_2 … r_{n-1} 分別以 0 點爲中心旋轉 $\frac{360}{n}°$ ，$2\cdot\frac{360}{n}°$ ，…（$n-1$）$\cdot\frac{360}{n}°$ 而得者（順時針）。此時吾人定一運算如下：$L_i \times L_j$ 乃指先以 Li 爲對稱軸轉 180° 後再以 Lj 爲對稱軸轉 180° 所得之圖形不記標號亦如原狀；若記標號則如下：其中（P）$L_i \times L_j$ 即指原來標 P 者經 $L_i \times L_j$ 後所得之標號數。



同理可得 $L_i \times r_j$ ，$r_i \times r_j$ 等運算，（其中 i ，$j = 1$ ，2 ，… n ）。

又這種運算下 $A_s = \{L_1$ ，L_2



$\cdots L_n$, r_1 , $r_2 \cdots r_{n-1}$, e }（e 爲不動元素）。此集合構成一群，此群即爲正 n 邊形之對稱群。共有 $2n$ 個元素。

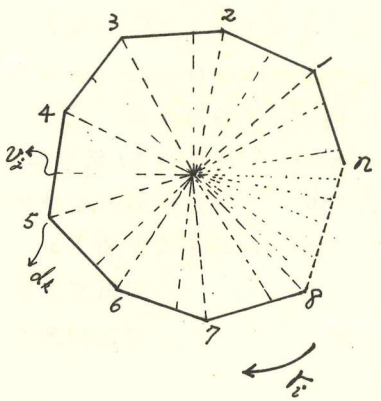
（例）：$n = 3$ 時則其中之元素有 $\{e_1 , r_1 , r_2 , L_1 , L_2 , L_3\}$

x	e	r_1	r_2	L_1	L_2	L_3
e	e	r_1	r_2	L_1	L_2	L_3
r_1	r_1	r_2	e	L_3	L_1	L_2
r_2	r_2	e	r_1	L_2	L_3	L_1
L_1	L_1	L_2	L_3	e	r_1	r_2
L_2	L_2	L_3	L_1	r_2	e	r_1
L_3	L_3	L_1	L_2	r_1	r_2	e

由左表可知其運算過程爲一群。

㈡ n 爲偶數時：

如右圖爲一正 n 邊形，其對稱中心爲 0。而 v_1 $v_2 \cdots v_{\frac{n}{2}}$ 爲過（1，$\frac{n}{2}+1$），（2，$\frac{n}{2}+2$）…（$\frac{n}{2}$，n）之邊之中點連線之對稱軸。其中（1，$\frac{n}{2}+1$）表示第一及第 $\frac{n}{2}+1$ 邊，依順序算以（1，n）爲第一邊，（1，2）爲第二邊。d_1 ，d_2 ，$\cdots d_{\frac{n}{2}}$ 爲頂點標號（i ，j）之連線（$i = 1$ ，2 ，…，$\frac{n}{2}$ ，$j = \frac{n}{2}+1, \cdots \frac{n}{2}+\frac{n}{2}$）。分別爲（1，$\frac{n}{2}+1$），（2，$\frac{n}{2}+2$）…（$\frac{n}{2}$，$n$）之連線。而 r_i ，$i = 1$ ，$2 \cdots n-1$ 表轉 i $\frac{360}{n}°$ 而



得。

討論：As $= \{ e_1 , r_1 , \cdots r_{n-1}, \upsilon_1 , \upsilon_2 \cdots \upsilon_{\frac{n}{2}} , d_1 , d_2 \cdots d_{\frac{n}{2}} \}$ 爲一群，其運算如㈠中之說明。其元素亦爲 2 n 個。

例：$n = 4$ 時得：

x	e	r_1	r_2	r_3	υ_1	υ_2	d_1	d_2
e	e	r_1	r_2	r_3	υ_1	υ_2	d_1	d_2
r_1	r_1	r_2	r_3	e	d_2	d_1	υ_1	υ_2
r_2	r_2	r_3	e	r_1	υ_2	υ_1	d_2	d_1
r_3	r_3	e	r_1	r_2	d_1	d_2	υ_2	υ_1
υ_1	υ_1	d_1	υ_2	d_2	e	r_2	r_1	r_3
υ_2	υ_2	d_2	υ_1	d_1	r_2	e	r_3	r_1
d_1	d_1	υ_2	d_2	υ_1	r_3	r_1	e	r_2
d_2	d_2	υ_1	d_1	υ_2	r_1	r_3	r_2	e

由上表可知（ As ， x ）爲一群。

㈢討論：

壹(1)研究此種對稱群之原則，必須每一轉換後所得之圖形與原來一致（依某一固定方向而定）。尤其在討論立體圖形時必須位置及透視平面圖要全等（依同一處透視之），且亦須同向。

(2)在(1)中之目的可以保證 As 之封閉性。

(3)結合性可由函數之合成得。吾人可視 L_i ， υ_i ， d_i ， r_i 等皆爲一由 A → A 之一一映成函數。其中 A $= \{ 1 , 2 , \cdots n \}$ ， $n \geq 3$ ，而 "x" 乃表其合成也。故其封閉性及結合性無疑。

(4)單位元素亦有，即 "e" 也。

(5)反元素之存在亦顯易見。因 d_i ， r_i ， υ_i ， L_i 等任何一個經 k 次運算後便會回到原位置及原標號。例 $r_1 \times r_1 \times r_1 = e$（在 $n = 3$ 時）而由其封閉性可得 $r_1 \times r_1 = P$ ， $P \in$ As 可得 P 爲

r_1 反元素，其他元素亦同理有此現象。

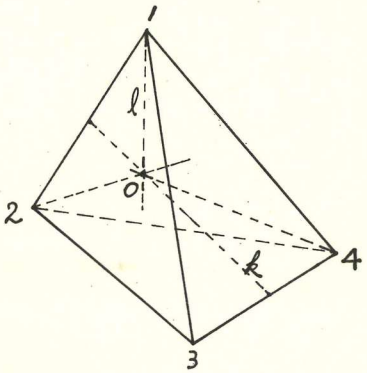
以上乃As為一群之簡要說明。

貳：透射（Reflection）作用於其中時，每一As中之元素便對應一透射元素，令其中一透射元素為C，則可知G = As + CAs為一order 4 n 的群。

乙、正P邊形所構成的q面體的討論

壹：正三角形的四面體：

在右圖中為一正四面體，吾人只討論其旋轉所得之元素。



(1) ℓ 種類之旋轉軸（即如右圖之1，0連線為軸）有8個元素。即以1，0連線為軸時，可轉$\frac{\pi}{3}$及$\frac{2\pi}{3}$而得二個相異元素；同理（2，0），（3，0），（4，0）亦有兩個旋軸元素，其中0為其對稱中心。故得 ℓ 種類8個。

令其為 ℓ_{11}，ℓ_{12}，ℓ_{21}，ℓ_{22}，ℓ_{31}，ℓ_{32}，ℓ_{41}，ℓ_{42}，其中 ℓ_{i1} 乃表（i，0）軸轉$\frac{2\pi}{3}$，ℓ_{i_2} 表（i，0）軸轉$\frac{4\pi}{3}$。

(2) k 種類有3個。k 類乃指對邊中點連線之軸有3對，故有3個。

為 k（12）（34），k（23）（14），k（13）（24）。

(3) 由 ℓ 類，k 類所得共12個元素（包括不動元素）。

貳：正四邊形六面體：

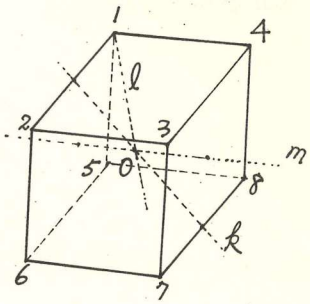
在右圖中為一正六面體，其中O為其中心。$\overline{iO}$ 表 i 與O之連線，$i = 1, 2 \cdots 8$。

(1) ℓ 類之轉換個數有 8 個。以 $\overline{10}$ 爲軸轉 $\frac{2\pi}{3}$，$\frac{4\pi}{3}$ 可得 2 個元素，而 $\overline{20}$，$\overline{30}$，$\overline{40}$ 同理亦有 2 個，故共 8 個。

(2) m 類有 9 個。如右圖之 m 軸可得轉 $\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$ 三個相異元素，故有 9 個。（因 m 類有 3 軸）。

(3) k 類有 6 個。如上圖之 k 軸可得轉 π 而已，故只有一元素。而 k 類之軸有 6 條，故其元素有 6 個。

(4) 由 k，ℓ，m 三類可得其元素共有 24 個（包括不動元素）。



參：正三邊形之八面體：

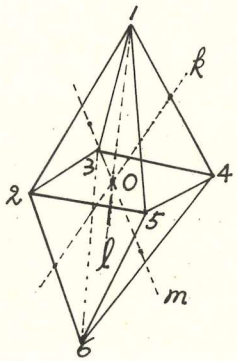
右圖爲一正八面體。其中 $\overline{13}$，$\overline{23}$，$\overline{34}$ 須爲虛線。O 爲其對稱中心。

(1) ℓ 類之元素有 9 個。以 $\overline{10}$ 爲軸可輕 $\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，而 $\overline{16}$，$\overline{24}$，$\overline{35}$ 只有 3 軸而已，故有 9 個元素。

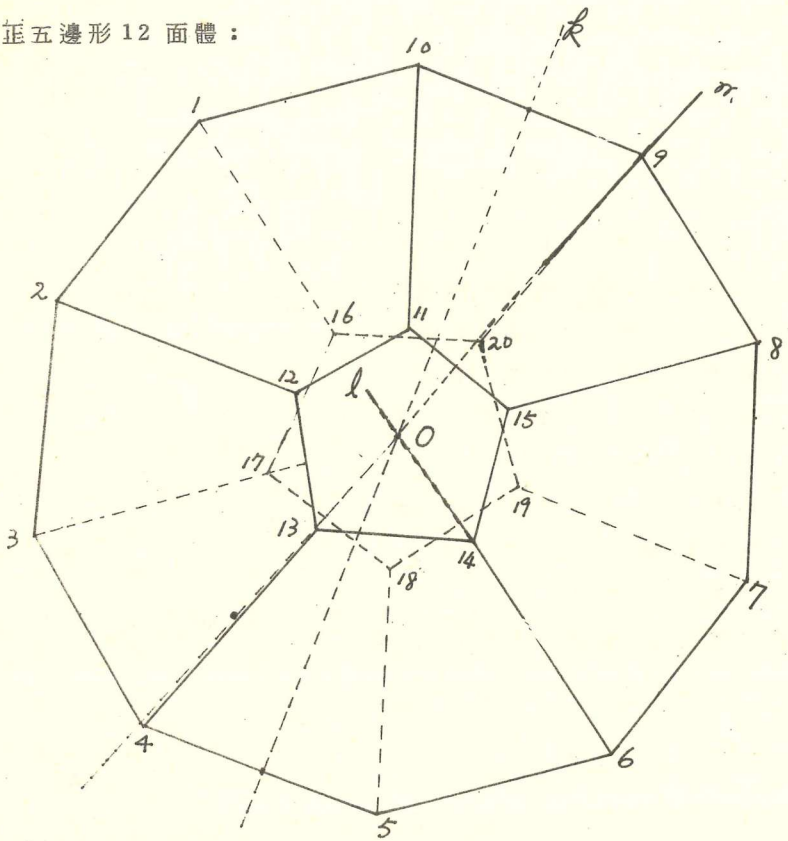
(2) m 類之元素有 8 個。以 m 軸爲軸，可轉 $\frac{2\pi}{3}$，$\frac{4\pi}{3}$，而 m 類之軸有 4 條，故共 8 個元素。

(3) k 類之元素有 6 個。以 k 爲軸得轉 π，而 k 軸有 6 條，故有 6 個元素。

(4) 由 ℓ，m，k 類之元素一共有 24 個，（包括不動元素）。



肆：正五邊形 12 面體：



上圖爲一正 12 面體，0 爲其對稱中心。

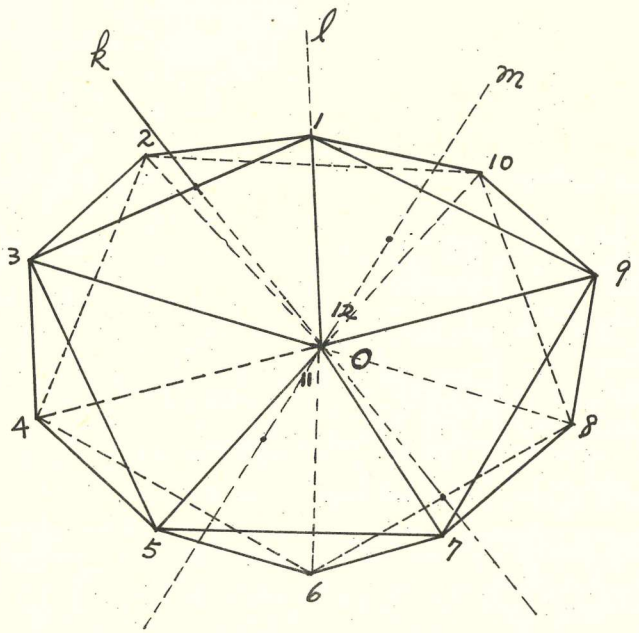
(1) ℓ 類之元素有 20 個。以 ℓ 爲軸（如上圖）可得轉 $\frac{2\pi}{3}$；$\frac{4\pi}{3}$ 而得二相異之元素。而 ℓ 種類之軸有 10 條，故有 20 個元素。

(2) m 類之元素有 24 個。以 m 爲軸（如上圖）可得到轉 $\frac{2\pi}{5}$，$\frac{4\pi}{5}$，$\frac{6\pi}{5}$，$\frac{8\pi}{5}$，四個相異之元素。而 m 種類之軸有 6 條。故有 24 個元素。

(3) k 類之元素有 15 個。以 k 爲軸（如上圖）可得其旋轉 π。而 k 類之轉軸有 15 個。故有 15 個相異元素。

(4) 由 k，ℓ，m 類所得之元素一共有 60 個（包括不動元素）。

伍：正三角形之 20 面體：



上圖爲一正二十面體，以 O 爲對稱中心。

(1) ℓ 類之元素有 24 個。以 ℓ 軸爲軸，可旋轉 $\frac{2\pi}{5}$，$\frac{4\pi}{5}$，$\frac{6\pi}{5}$，$\frac{8\pi}{5}$ 有四相異之元素。而 ℓ 類之軸有 6 條，故共可得 24 個元素。

(2) m 類之元素有 20 個。以 m 爲軸時，可旋轉 $\frac{2\pi}{3}$，$\frac{4\pi}{3}$，而得二相異之之元素。而 m 類之軸有 10 條，故共有 20 個元素。

(3) k 類之元素有 15 個。以 k 爲軸時，可施轉 π 而已。而 k 類之軸共有 15 條，故可知 k 類之元素共有 15 個。

(4) 由 k，m，ℓ 三類之元素可得，共有 60 個元素，（包括不動元素）。

陸：結論：

(1)由上述之五種正多面體，吾人可得一結論：正 P 邊形之 q 面體，其對稱群之元素有 pq 個，（若包括透射（Reflection），則有 2pq 個）。

此結論可由五種正多面體之 k ，ℓ ，m 三類分析結果得到。而正多面體恰有此五種而已，故此結論之可信性強。

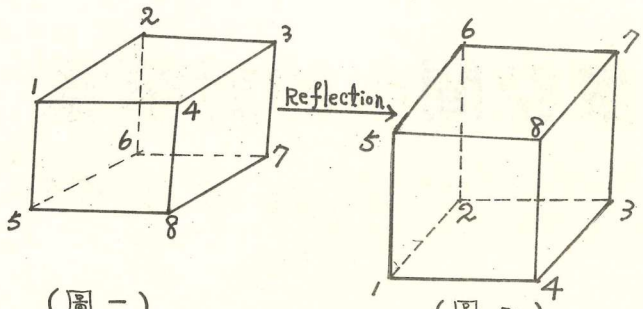
(2)五種正多面體於上述分析中，其元素所構成者乃爲一群，其簡單說明類似“甲”中之結論。

(3)上述正多面體中，吾人之所以知其要轉（$\frac{2\pi}{3}$，$\frac{4\pi}{3}$）或（$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$）或（$\frac{2\pi}{5}$，$\frac{4\pi}{5}$，$\frac{6\pi}{5}$，$\frac{8\pi}{5}$）等等者，乃由其 k ，ℓ ，m 三類推之。如討論正 20 面體之 m 類時：

在討論 m 類時乃以其對面中心連線爲軸。而 20 面體之每一面有相鄰三面，如此可知要將 2π 分成三等分可得（$\frac{2\pi}{3}$，$\frac{4\pi}{3}$）爲兩相異之轉法，而且轉後之位置、向位等皆不變而可成爲一元素。

進一步要知其 m 類之元素有多少個可由一個 m 軸所生之元素個數（相異）乘以 m 類之軸的個數，如此便可得此類之元素個數。

(4)在五種正多面體之討論中，吾人皆以旋轉（Rotation）之方式論之，而其旋轉之方式恰有 ℓ ，m ，k 等三類，故可知討論此三類足以盡其對稱群之元素個數。若欲加上鏡射（Reflection）則其元素個數與原正多面體之實際對稱群元素相等，故可得 2pq 個元素。其鏡射元素可有下列一種情形說明如下：



（圖一）　　（圖二）

上圖中在實際六面體是無法眞正轉成此如圖(二)之情形，故此爲一鏡射元素，不在吾人上述討論之中（設吾人上述所得之 pq 元素所成之集合爲 G_T），而此鏡射元素設爲 $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 以六面體爲例。則 $C\,G_T$ 之元素亦有 pq 個。

此結果可直視得之如下：正多面體經某一鏡射則變成一不在 G_T 中之變換。（設爲 C）而 C 再與 G_T 中之任一元素合成，則必與 G_T 中之任一元素相異。故 $C\,G_T$ 中亦有 pq 個元素。

(5)上述之透射（Reflection）在一般旋轉之情況下無法得到。但此透射見於物理及化學微分子結晶時。

參考資料：

(1)王惠中老師之問答。

(2)常法徽老師之問題。

(3)Marshall Hall , Jr The Theory Of groups P.20.

(5)Richard E. Johnson. University Algebra P. 178.

三度空間中的對稱羣

指導老師：呂溪木
作　者　：孫琪琪

在群論中，我們常以正三角形對稱群（ the group of Symmetries of the equivaleral triangle $S_3 = D_3$ ），正方形的二面角群（ a group of symmetries of the square D_4 ）及二面角群（ dihedral group D_n ）當例子。當時利用幾何的觀點來加以說明，它們分別是由正三角形，正四邊形，正 n 邊形在旋轉及鏡射的對稱運算下形成。所以我們可猜測到任何系統表現的像正三角形的對稱運算所形成的集合，都是一個群。本文的目的，即欲探尋到底是什麼樣的系統在怎樣的運算下會產生出什麼樣子的群呢？也就是想知道 C_n ， A_n ， D_n ， S_n ，所代表的幾何意義。

由 Cayley 定理，我們知道一個代數群皆可與某一對稱子群同構。我們只要討論對稱群（ Symmetry group ）即可。然而一個物體要在某種運算下成群，必備的要件即要不使物體變形，也就是指剛性運動或等距（ isometry ），現在我們不妨以代數的觀點來說明一下剛性運動。

§ 1 剛性運動

等距（ isometry）即線性代數上說的剛性運動（ rigid motion ），它可分爲平移及定心剛性運動。在 R^n 中，我們把所有等距所形成的群，稱爲歐幾里德群（ Euclidean group ），記爲 E（ n ），把平移形成的群

，記爲 T（n）。待會，我們卽可證明 T（n）是 E（n）中的一個正則子群，甚至可得到商群 E（n）/ T（n）與直交群 O（n）同構，也就是定心等距群與直交群同構（orthogonal group）。

（直交群卽由有交方陣在矩陣乘法下所形成的群。直交方陣具有保長，保（內）積…等性質，在線性代數中可證得有七個等價的定義。其中之一更是 $AA^T = I$ ， A^T 爲 A 的轉置矩陣）

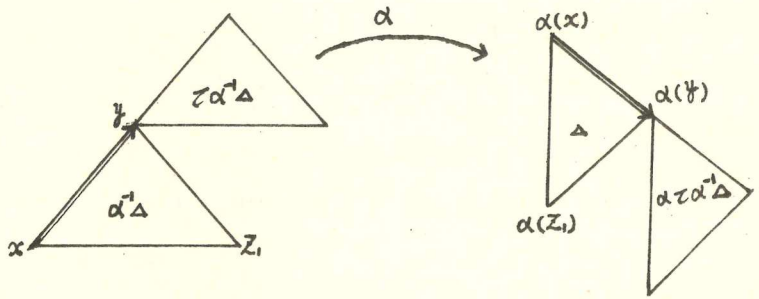
把上述的結果歸納如下：

1.01 命題：在 R^n 中，定（原點）心的等距群與直交群同構。

1.02 引理：在 R^n 中，設 τ 把 x 平移至 y ，α 是一個等距變換，則 $\alpha \circ \tau \circ \alpha^{-1}$ 仍是一個平移，把 $\alpha(x)$ 平移至 $\alpha(y)$ 。

證明：由線性代數，知一仿射變換皆可由一組線性獨立的仿射基底決定。故選 $n-1$ 個點 z_1 ，z_2 ，…… ，z_{n-1} ，使得 $y-x$ ，z_1-x ，…… ，$z_{n-1}-x$ ，在 R^n 中爲線性獨立，則任一等距變換皆可由此 $n+1$ 個點 x ，y ，z_1 ，z_2 ，…… ，z_{n-1} 的像決定。

R^n 中的情形與 R^2 中的類同，所以以 R^2 的情形證之。$\triangle \alpha(x)$ ，$\alpha(y)$ ，$\alpha(z_1)$ 如下圖所示：



$\alpha\circ\tau\circ\alpha^{-1}$ 作用在△上即爲一平移，把 $\alpha(x)$ 平移至 $\alpha(y)$.

$\because \triangle\alpha(x)$, $\alpha(y)$, $\alpha(\vec{z}_1)$ 非退化，

$\therefore \alpha\circ\tau\circ\alpha^{-1}$ 在 R^2 上仍是一個平移，把 $\alpha(x)$ 平移至 $\alpha(y)$

1 03 定理：定 $\phi : E(n)\to O(n)$, $\alpha\in E(n)$, $\phi(\alpha)=\tau\circ\alpha$,

$\tau\in T(n)$ & $\tau(\alpha(0))=0$ ，則 ϕ 是一個蓋射同態。

(surjective homomorphism) & $\mathrm{Ker}\ \phi = T(n)$

證明： $\because \tau(\alpha(0))=0 \quad \therefore \tau\circ\alpha\in O(n)$

(1)欲證 ϕ 是一 homomorphism.

取 α , $\beta\in E(n)$ & , τ , σ , $\rho\in T(n)$ ，滿足

$$\begin{cases}\tau(\alpha(0))=0\\ \sigma(\beta(0))=0\\ \rho(\alpha\circ\beta(0))=0\end{cases}\quad \text{使得}\quad \begin{cases}\phi(\alpha)=\tau\circ\alpha\\ \phi(\beta)=\sigma\circ\beta\\ \phi(\alpha\circ\beta)=\rho\circ\alpha\circ\beta\end{cases}$$

令 $\phi(\alpha)\circ\phi(\beta)=\tau\circ\alpha\circ\sigma\circ\beta=\tau\circ(\alpha\circ\sigma\circ\alpha^{-1})\circ\alpha\circ\beta$

從 1 02 引理中知 $\alpha\circ\sigma\circ\alpha^{-1}$ 把 $\alpha(\beta(0))$ 平移至 $\alpha(0)$ 。

既然 $\tau\circ(\alpha\circ\sigma\circ\alpha^{-1})$ 把 $\alpha(\beta(0))$ 平移至 0 ，則

$\tau\circ(\alpha\circ\sigma\circ\alpha^{-1})=\rho$

則 $\phi(\alpha)\circ\phi(\beta)=\rho\circ\alpha\circ\beta=\phi(\alpha\circ\beta)$

且 $O(n)\subset E(n)$ $\quad\therefore \phi$ 是蓋射

(2)驗證： $\mathrm{Ker}\ \phi = T(n)$

$\because \tau\in T(n)$, $\phi(\tau)=\tau^{-1}\circ\tau=i\Rightarrow\tau\in\mathrm{Ker}\ \phi$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}\phi\supset T(n)$

且 $\alpha\in\mathrm{Ker}\ \phi$, $\phi(\alpha)=\tau\circ\alpha=i\Rightarrow\alpha=\tau^{-1}$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}\phi\subset T(n)$

$\therefore \mathrm{Ker}\ \phi = T(n)$

1.04 命題：在R^n中，每一等距變換形成的有限子群，至少有一固定點。

顯然地，我們若把這些有限子群G的定點平移到原點，則G就是$O(n)$的一個子群。且G中的每一個元素皆可用直交方陣表之。

但，是否群內的元素皆可用方陣表之？

§2方　陣

在物理及數學上，對於群中的運算，我們希望能夠利用矩陣的運算，這樣線性代數的一些結果就可自由運用了。

例如：

$$A_k = \begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{m} & -\sin\frac{2k\pi}{m} \\ \sin\frac{2k\pi}{m} & \cos\frac{2k\pi}{m} \end{pmatrix}$$

$(\{A_0, A_1, \cdots\cdots, A_{m-1}\}, \cdot)$這實方陣群其order為$m$與$C_m$同構。

而 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

這複方陣群其order為8事實上與四元群同構。

2.01 定義：佈於體F上的$n \times n$非特異方陣所成的群，記為$(\mathcal{GL}(n, F), \cdot)$(the general linear group of dimension over F)

任一佈於F的方陣群必是$\mathcal{GL}(n, F)$的一子群

2.02 命題：有限的方陣群中的任一元素，其行列式值必是 1（ the integral root of unity ）

在實方陣 G中，G的任一元素其行列式值不是1即爲－1，然若在複方陣中，G的任一元素其行列式值可爲 $e^{\frac{2\pi}{n}i}$ 在直交群 O（ n ）。

若爲實方陣組成，則行列式值爲1或－1，我們可以得到從（ O（ n ），• ）至（ {1，－1}，• ）的一群同態— determant function，定爲：def：O（ n ）→ {1，－1}

2.03 定義：Ker det 所對應的直交方陣，稱爲 the special orthogonal group of dimension n ，記爲 S O（ n ）

ie SO（ n ）= {A ∈ O（ n ）| det A = 1}

顯然 SO（ n ）爲 O（ n ）的一個正則子群

我們把 SO（ n ）中的元素稱爲 proper rotation.

而 O（ n ）／SO（ n ）所對應異於 SO（ n ）的旁集，（ coset ）即行列式值爲－1，稱爲 improper rotation.

2.04 定義：在 C^n 中，保持內積的複方陣稱爲單式方陣（ unitary matrix ），構成的群記爲 U（ n ）.

在 U（ n ）中，其行列式值爲＋1，所形成的 the special unitary group，記爲 SU（ n ）.

2.05 命題：$\lambda \in C$，是任一直交方陣或 unitary matrix 的固有值，則 $|\lambda| = 1$

前面的例子四元群 Q，即爲 SU（ n ）的一個子群，其固有值爲 ± 1，$\pm i$ 。

我們已從 Cayley 定理知任一代數群皆可用某一排列子群表之，有種異於排列群的表示法，即利用方陣來表現。爲了使一個群可用方陣來表示，我

們可以得到下列一群同態．

$$\phi : G \to \mathcal{L}(n, F)$$

進而言之，若方陣是對某一基底表示的話，則 ϕ 是一同構。

到底什麼樣的系統在怎樣的運算下會表現出什麼樣子的群呢？看了前二節，我們不難知道，這系統不外乎一些幾何圖形，二維度的正多邊形，三維度的多面體或多邊形！而工具即前面〔§2〕提到的 proper rotation 和 improper rotation，會產生什麼樣子的群呢？我們不妨先熟悉一下二度空間的情形：

§ 3 在二度空間的有限羣

3.01 命題：R^2 中

(Ⅰ) proper rotation：$SO(2) \doteq \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in R \right\}$

(Ⅱ) improper rotation 爲 $\left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in R \right\}$

(Ⅲ) proper rotation 所對應的固有值爲 $e^{\pm i\theta}$，而 improper rotation 爲 ± 1

3.02 定理：若 G 是 SO(2) 的一個有限子群，則 G 與 C_n 同構，$n \in N$

證明：由 3.01 知 $A \in G \subset SO(2)$ 是逆時鐘轉 $\theta(A)$ 的旋轉，$0 \leq \theta(A) < 2\pi$

既然 G 是有限的，選一 $B \in G$，使得 $\theta(B)$ 是最小的正角。

$\because A \in G$，$\exists \gamma \geq 0 \ni \gamma\theta(B) \leq \theta(A) < (\gamma+1)\theta(B)$

又 $\theta(AB^{-r}) = \theta(A) - \gamma\theta(B) \Rightarrow 0 \leq \theta(AB^{-r}) < \theta(B)$

$\therefore \theta(AB^{-r}) = 0$，$AB^{-r} = I \Rightarrow A = B^r$

$G = \{ I , B , B^2 , \cdots\cdots , B^r , \cdots , B^{n-1} \}$ ，G既然爲一有限的循環群必與 C_n 同構

3.03 定理：若G爲O(2)的有限群，則G不是與 C_n 同構，即同構於 D_n 。

證明：由 2.03 知 det : $G \to \{ 1 , -1 \}$ ，Ker det 是一正則子群，記爲H。由 3.02 知H爲由B生成的循環群且 order 爲 n 。

今若G中沒有一 improper rotation ，則 $G = H \simeq C_n$

若G含有一 improper rotation A ，則

$$G = H \cup HA = \{ I , B , \cdots\cdots , B^{n-1} , A , BA , \cdots , B^{n-1} A \}$$

既然A和 B^kA 都爲鏡射。ie $A = A^{-1}$

則 $B^kA = (B^kA)^{-1} = A^{-1}B^{-k} = AB^{n-k}$

明顯地G與二面角群 D_n 同構。其中B爲一旋轉，轉角 $\frac{2\pi}{n}$ ，，而A爲一鏡射．

在自然界，如雪花的落下形成 D_6 ，五瓣花的旋轉形成 C_5 等等皆是．

有了對二度空間對稱群的認識，現在我們來看一下三度空間的情形，由於 improper rotation 需要放在四度空間討論，較爲複雜，在這兒僅限討論 proper rotation 的情形，也就是只看 SO(3) 的一些子群。

[若同學有興趣探討 improper rotation 的情形，不妨可參看：
Coxter. H . S . M : Introduction to geometry 的書（圖書館有）]

4.01 定理：每一 $A \in SO(3)$ 都有一固定軸（不動線），A即爲以此線爲軸的 rotation.

證明：令 $\lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3$ 是A的固有值

根據 2.05 ，$| \lambda_1 | = | \lambda_2 | = | \lambda_3 | = 1$ &

$$\det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 ,$$

$\Rightarrow$ (Ⅰ) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

(Ⅱ) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$

(Ⅲ) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_3} = e^{i\theta}$ ($\theta \neq n\pi$)

令 x 爲相對於固有值 1 的固有向量，則 $Ax = x$

把 A 經過座標變換可得如下之三種形式：

(Ⅰ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (Ⅱ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (Ⅲ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

(Ⅰ) 爲單位方陣

(Ⅱ) 爲半轉

(Ⅲ) 表以 x 爲軸，轉 θ 角的 rotation.

下面這定理 4.03 在後面的證明中，相當重要：

4.02 定義：$\mathrm{Stab}\, x = \{ g \in G \mid g(x) = x \}$ 是 G 的一子群稱爲 x 的穩定子。(stabilizer).

$\mathrm{Orb}(x) = \{ g(x) \mid g \in G \}$ 即 x 在 G 作用下所產生的所有像成的集合，稱爲 x 在 G 作用下的軌道 (Orbit)

4.03 定義：若 G 爲作用在 X 上的有限群，$x \in X$ (任一集合)

則 $\#G = \{ \#\mathrm{Stab}\, x \}\ (\#\mathrm{Orb}\, x)$

在射影幾何中，曾談及一多邊形的對偶 (dual) 多邊形，同樣地在三度空間的立體形也有對偶形的存在。如正四面體的對偶形爲另一正四面體，一正六面體的對偶形爲一正八面體，正12面體的對偶形爲正20.面體，多面體在對稱作用下會產生對偶形，反之亦然。所以原多面體與其對偶形

有相同的 rotation group。

4.04 定理：正四面體經 proper rotation 所生成的群與 A_4 同構。

證明：首先把正四面體的四個頂點分別標上 1，2，3，4

令 G 是作用在正四面體上的 proper rotation 群，則得一群同態 $f : G \to S_4$，根據群同態（Homomorphism Theorem）知 G 同構於 Im f 。

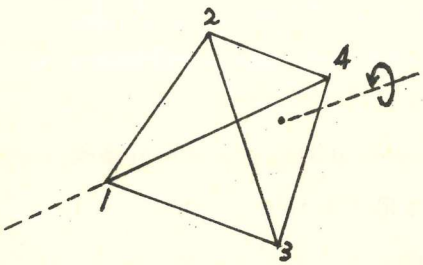
現根據 4.03 來計算一下 G 中的元素

首先對於頂點 1 的穩定子（stabilizer）有 {（1），（234），（243）}，而頂點 1 的軌道（orbit）爲 {1 2，3，4}

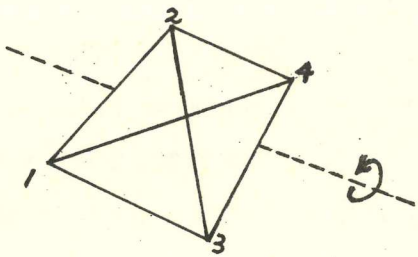
$\therefore \#G = (\#\text{Stab } 1)\cdot(\#\text{Orb } 1) = 3 \cdot 4 = 12$

取 G 中二個非么元素者（nontrivial），

如取（2 3 4），（12）。（34）



（2 3 4）



（12）。（34）

（2 3 4）的 order 爲 3，且（2 3 4）=（2 3）。（2 4）爲一偶排列，相似的看（1 2）。（3 4）的 order 爲 2，爲一偶排列，其轉軸爲連接兩邊中點的線。

同理，把上圖的各點標示更動一下，仍爲一偶排列，兩個置換（ transposition ）的乘積亦爲一偶排列。

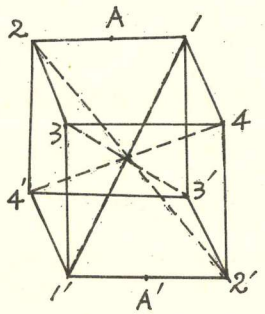
所以，I_m f 由12個偶排列的元素組成，則 Im f $\simeq A_4$

另一種證法係利用投影的方式。

於是A_4有時也稱爲正四面體群（ the telrahedral group ）

4.05 定理：正八面體與正六面體經 proper rotation 所生成的群與S_4同構。

證明：一正六面體把對頂點連接，可得四條對角綫，分別標號如下：



任何作用在正六面體的 rotation 卽作用在其四條對角綫上，故可得一群同態，f : G → S_4

把 A，A′連接，以此爲軸的 rotation，其 order 爲 2，卽（ 1 2 ）。 同理任何置換（ transposition ）皆屬於 Im f ∴ Im f = S_4

（利用定理：每一排列群中的元素，皆可變成置換的乘積，含所有置換的群，爲一排列群（ S_n ），〔 2 : P78

，P81〕　可知）

根據：群同態定理（The Hompmorphism Theorem）知

$$\frac{G}{Ker\ f} \simeq S_4 \quad \& \quad \frac{\sharp G}{\sharp Ker\ f} = \sharp S_4$$

又 $\sharp G = \sharp S_4 = 24$　$\therefore Ker\ f = i$

則 f 爲一群同構.

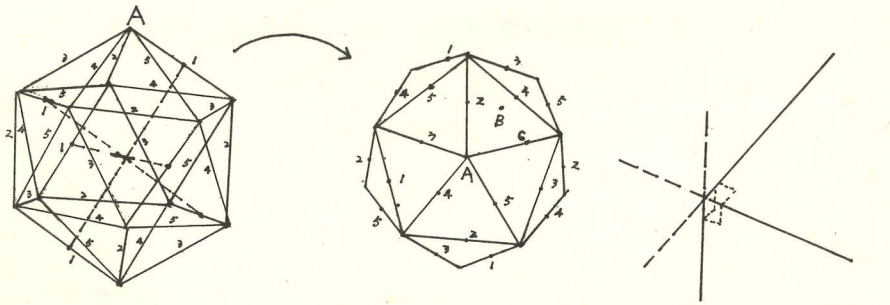
而正八面體既爲正六面體的對偶形，所以有相同的 rotation group 所以有時把 S_4 稱爲正八面體群（the ortahedral group）

4.06 定理：正12.面體與正20.面體經 proper rotation 所生成的群與 A_5 同構。

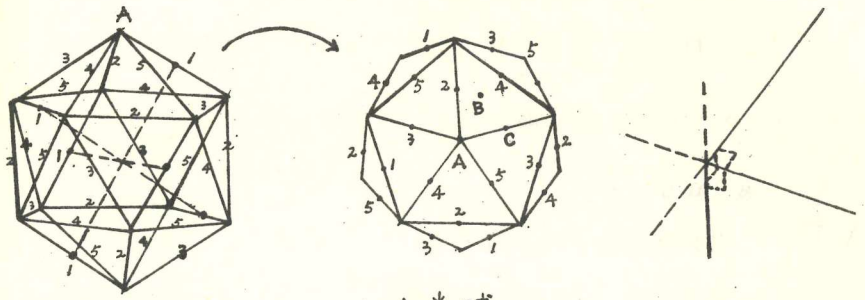
證明：正20.面體一共有30.個邊

過外接（正20.面體）球的球心建兩對邊中點（所謂對邊指過球心而互相平行的兩邊或過球心互成爲鏡射像的兩邊），如此可得15.條線，在這15.條綫中，任取一條必有二條與之相互垂直，（可視爲一三度空間的基底），稱此相互垂直的三線成爲一三角組（triad）.

15.條線可分成5個三角組（triad）分別標示如下：



（全圖）　（上半球府視圖）　一三角組 (triad)



（全圖）　（上半球俯視圖）　一三角組 (triad)

對正20.面體作 rotation ，即對此五組三角組作 rotation 。故可得一群同態， $f : G \leftrightarrow S_5$ 正20.面體的任一頂點，都有五個邊交於此，過邊中點的 rotation 有 5 個，即此頂點的穩定子有 5 個，而頂點共有 12 個，由 4.03 知 $\#G = 5 \cdot 12 = 60$ 。

G 中，取非么元素的元素，可分爲三種形式：

Case 1

以 A 爲頂點（參照上圖）的 rotation ，即（1 2 3 4 5）爲偶排列〔（1 2 3 4 5）=（12）（13）（14）（15）〕，其 order 爲 5

Case 2

order 爲 3 ，即過一面（三角形）的中心，如上圖之 B 點，得（1 4 2）。

Case 3.

order 爲 2 ，以過 C 點連接球心到對邊的線爲軸，即（23）。（4 5）爲一偶排列。

G經 f 得的像皆爲 3 — cycle 的偶排列，$\therefore Im\ f = A_5$

（利用每一偶排列皆可變成 3 — cycle 的乘積。且由所有

3 — cycle 生成的群爲 A_n.〔2 : P 81　J〕)

& $\# G = 60$

根據群同態定理 $\Rightarrow G \simeq A_5$

所以把 A_5 又稱爲正20.面體群。

4.04，4.05，4.06 都是利用群的理論，加上幾何直覺的觀察，配合群同態定理證得。但是，我們希望有一般性的定理，能涵蓋它們，也就是取其共同性，是否可得一般性的定理呢？這是辦得到的。利用下面要介紹的極（pole）的觀點來整理可得到 4.08 的結果。

單位球 $S^2 = \{x \in R^3 \mid |x| = 1\}$ 經 O（3）中的任一元素運算的結果仍爲本身。利用這個性質，由 4.01 知 SO(3) 中的任一非么元素的元素作用在 S^2 上，皆有一不動線（固定軸），在原點的位置上看，有二條相背的不動向量，令 $x \in S^2$，使 $Ax = x$ & $A(-x) = -x$，則稱 x 與 $-x$ 爲 A 的極（pole）。

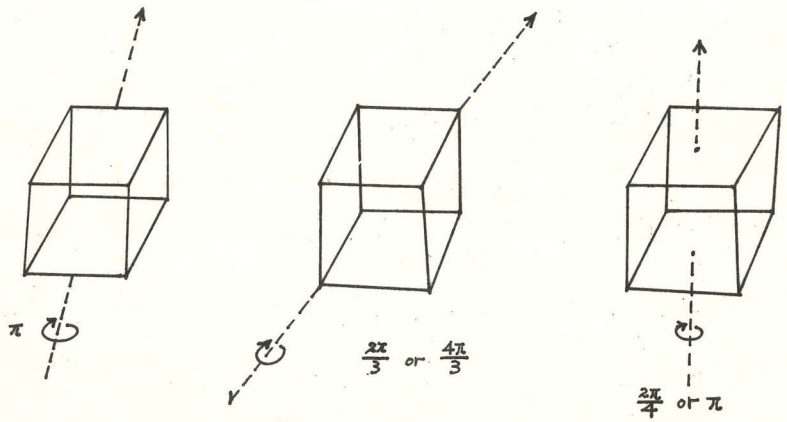
P 表 SO(3) 的有限子群中非么元素者，其 pole 所成的集合．

4.07　命題：P 經過 G 中（非么元素者）的運算後仍屬於 P。

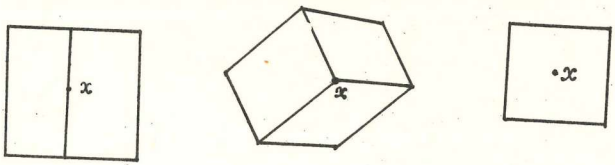
也就是說 P 在 G 運算下有不變性。

由於正多面體經 proper rotation 可形成某些群，而每一種 proper rotation 中皆有一軸，此固定的旋轉軸，即此 proper rotation 之兩個極（poles）組成。所以我們不妨先來考慮一下極（pole）的穩定子（stabilizer）和軌道（orbit）

以六面體爲例：



極（ pole ）發生的情形：



rotation 的

order: 2 3 4 or 2

再根據 4.03 ## G = (## Stab x) (## Orb x)，可以得出 G 的 order，對照上面的圖，知它有三種形式的極（ pole）和四種非么元素的 rotation，依此則可判定 G 與何種群同構。

同理，對於其他的正多面體亦然，把結果列成如下的表格：

群 G=	C_n		D_n		A_4		
$\ast G$=	n		$2n$		12		
幾何圖形	n-agonal	cone	n-agonal	cylinder	正四面體		
極發生的情形 x							
$\ast Stab_x$=	n	n	2	2	n	2	3	3
$\ast Orb_x$=	1	1	n	n	2	6	4	4

群 G=	S_4			A_5		
$\ast G$=	24			60		
幾何圖形	立方體		正八面體	正12面體		正20面體
極發生的情形 x	或	或	或	或	或	或
$\ast Stab_x$=	2	3	4	2	3	5
$\ast Orb_x$=	12	8	6	30	20	12

注意：1° C_n 當 $x = 3$，斜邊長不要取和底邊長相長，以免混淆。

2° D_n 當 $n = 4$，不要取成正立方體，以免弄混亂。

4.08 定理：SO(3)的任一有限群必與下列之一同構，C_n （$n \geq 1$）

，D_n（$n \geq 2$），A_4 ，S_4 或 A_5 。

證明：令G是SO(3)的一有限子群，

若 $P = \{x_1, x_2, \cdots\cdots, x_r\}$，令 $P_i = \#\,\mathrm{Stab}\ x_i$ 且

$q_i = \#\ \mathrm{Orb}\ x_i \Rightarrow p_i q_i = n = \#\,G$

$\forall\ e \neq g \in G$，每個g都有兩個極（pole），除了e外，G中共有$2(n-1)$個極，去掉e，每個極x_i剩有$P_i - 1$個穩定子（stabilizer），x_i經G有q_i個極與它有相同的軌道。

∴總共的極數爲：

$$2(n-1) = \sum_{i=1}^{r} q_i (p_i - 1) = \sum_{i=1}^{r} (n - q_i)$$

$$2 - \frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \quad \text{——(1)}$$

若G不是明顯群（trivial group），$n \geq 2$ & $1 \leq 2 - \frac{2}{n} < 2$

∵ x_i 爲非么元素的極 ∴ $\mathrm{Stab}\ x_i$ 包含有非么元素的元素，且 $P_i \geq 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{p_i} < 1$ 與(1)式得 γ 必爲 2 or 3

Case 1：$\gamma = 2 \Rightarrow 2 - \frac{2}{n} = 1 - \frac{1}{p_1} + 1 - \frac{1}{p_2}$

$$\Rightarrow 2 = \frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} = q_1 + q_2$$

$$\Rightarrow q_1 = q_2 = 1 \quad \& \quad p_1 = p_2 = n$$

$\therefore \quad x_1 = x_2$ ，所有得出它只有一相異的極（ pole ）

G 爲繞極 x_1 的旋轉　ie.: $G \sim C_n$

Case 2: $\gamma = 3 \quad \Rightarrow \quad 2 - \frac{2}{n} = 1 - \frac{1}{p_1} + 1 - \frac{1}{p_2} + 1 - \frac{1}{p_3}$

$$\Rightarrow \quad 1 + \frac{2}{n} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \qquad \text{——(2)}$$

設　$p_1 \leq p_2 \leq p_3$ 若 $p_1 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$

$\longrightarrow\!\leftarrow$

又 $\frac{2}{n} > 0 \quad \therefore p_1 = 2 \ \& \ q_1 = \frac{n}{2}$

令 $1 + \frac{2}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{2}{n} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}$

若 $p_2 \geq 4$ ，$\Rightarrow \quad \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ——→←

又 $\frac{2}{n} > 0 \quad \therefore p_2 = 2$ 或 3

得出下列可能的情況：

(I) $p_1 = 2$ ，$p_2 = 2$ ，$p_3 = \frac{n}{2}$ ，n 爲偶數且 $n \geq 4$

$\Rightarrow q_1 = \frac{n}{2}$ ，$q_2 = \frac{n}{2}$ ，$q_3 = 2$

(II) $p_1 = 2$ ，$p_2 = 3$ ，$p_3 = 3$ ，$n = 12$ ，$q_1 = 6$

$q_2 = 4$ 和 $q_3 = 4$

(III) $p_1 = 2$ ，$p_2 = 3$ ，$p_3 = 4$ ，$n = 4$ ，$q_1 = 12$

$q_2 = 8$ 和 $q_3 = 6$

(IV) $p_1 = 2$ ，$p_2 = 3$ ，$p_3 = 5$ ，$n = 60$ ，$q_1 = 30$

$q_2 = 20$ 和 $q_3 = 12$

若 $p_2 = 2$ ， $p_3 \geq 6$ ， $\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3} \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ $\longrightarrow\!\!\!\leftarrow$ （(2)）

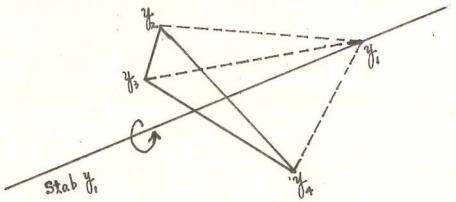
又 $\frac{2}{n} > 0$

解說：（Ⅰ）令 H = Stab x_3 爲一繞 x_3 軸的 rotation 群，即是一循環群，且 order 爲 $\frac{n}{2}$，取另一元素 A $\notin$ H

且 A 的 order 爲 2（半轉）

$\Rightarrow$ G = H ∪ HA $\therefore$ G $\simeq D_{\frac{n}{2}}$，G 的 order 爲 n

（Ⅱ）令 y_1 ， y_2 ， y_3 和 y_4 爲 Orb x_2 的 4 個極，且 $p_2 = \#$ Stab $y_i = 3$， $\therefore$ Stab y_1 和 y_2 ， y_3 ， y_4 的關係如下：



$\Rightarrow |y_2 - y_1| = |y_3 - y_1| = |y_4 - y_1|$ ， y_2 ， y_3 ， y_4 亦然

$\therefore$ G 爲正四面體形成的一對稱子群 & $\# G = 12$

$\Rightarrow G \simeq A_4$

（Ⅲ）令 y_1 ， y_2 ，… ， y_6 爲 Orb x_3 的六個極

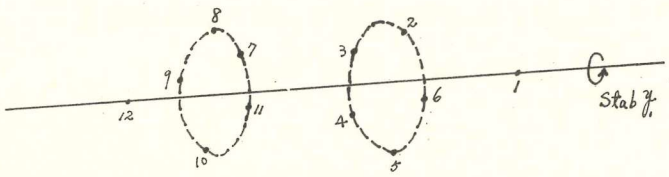
既然 $p_3 = 4$ 則 Stab y_i 中必有兩個極被固定其餘 4 個極，呈現循環的交替旋轉

又 y_1 ， $y_2 \cdots y_6$ 爲正八面體的頂點，且 $\# G = 24$

$\Rightarrow G \simeq S_4$

(Ⅳ) 令 y_1 , y_2 , $\cdots$, y_{12} 爲 Orb x_3 的 12 個極

既然 $p_3 = 5$ ，其旋轉方式，必如下圖示：



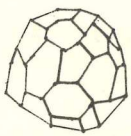
而 y_2 , y_3 , y_4 , y_5 , y_6 形成一正五邊形，與 y_1 的距離均相同，且對於其他 order 爲 5 的 pole 亦有相同的結果，我們可以看出，這些極（ poles ）爲正 20.面體的頂點

又 G 爲一 proper rotation 群 $\Rightarrow G \sim A_5$.

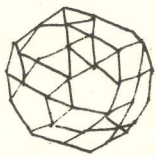
以上的討論僅限於三度空間的正多面體，在自然界中尚有多種不同的多面體，亦可試著討論一下。

如下圖者均是：

S_4



A_5



A_5

三度空間上的對稱群在應用上如對結晶學及化學上如探討 CH_3 和 H 在苯環中鍵結的可能情形，都發揮了極大的功用。有關本文的主題，請讀者參考〔 4 , Chapter 5 , PP 112 ～ 136 〕

參考資料：

〔1〕 師大數學第十四期：

12, 群與對稱 （ P. 72 ）

13, All Non-abelian group (up to isomorphism) of order less than 16 . (P. 82)

〔2〕 Herststein , I . N : Topics in Algebra 3nd-edition. 東南書報社 , 1979

〔3〕 John B. Fraleigh : A First Course In Abstract Algebra 6nd-edition.

〔4〕 William J. Gilbert : Modern Algebra with Applications 協進圖書公司 , 1977, 7.

淺介程式開關的設定

葉琇祥

當我們在寫程式的過程中，或多或少都已引用了程式開關，只是我們未能將之活化應用，至爲可惜。今日，就借師大數學一角，讓我們來共同討論程式開關的應用。

一、常用性程式順序開關之設定

例 1 ：試求某數 N 的所有因數及因數和。

〔解析〕：先令一變數 M ＝ 1 ，並控制 M 由 1 一直遞增至 N ，每當 M 遞增 1 時，便判斷 M 是否整除 N ，若是，則印出 M 並使因數和累加 M 。

〔程式〕：

```
10    INPUT  "N" , N
15    LET  S = 0
20    LET  M = 1
30    IF  INT ( N / M ) <> N / M  THEN  60
40    PRINT  M
50    LET  S = S + M
60    LET  M = M + 1
70    IF  M <= N  THEN  30
80    PRINT  S
90    END
```

程式中，行號 30 、行號 70 便是兩個典型的程式開關；行號 30 是在 M 整除 N 的情形下才打開行號 40 、行號 50 讓程式執行，否則，程式便得繞過行號 40 、行號 50 ，直接執行行號 60 。行號 70 是在 M 小於等於 N 的情況下讓程式繼續判斷（執行），否則脫離判斷工作（完成程式）。我們可以如此解釋行號 70 ：行號（ 30 ， 40 ， 50 ， 60 ）四個行號構成一個迴圈，行號 70 負責看管這個迴圈，當 M 值小於等於 N 時，行號 70 把迴圈的門

關着，並令程式回到行號 30 執行迴圈的工作。直到 M 值大於 N 時，行號 70 便把迴圈的門開啓，程式便衝出行號（ 30 ， 40 ， 50 ， 60 ）這個迴圈，執行下一個敍述。

二、常用性程式完結開關之設定

例 2 ：假設有一批學生數學成績資料，但學生人數不詳，試求這一批學生成績的平均及人數。

〔解析〕：學生人數不知，但學生成績需一筆一筆讀入，因此，可以每讀入一筆資料便使學生人數加一，直到資料讀完爲止。又成績無負分，所以在資料末加入一筆小於 0 的資料，作爲資料之結束。

〔程式〕：

```
10.   LET  N = 0
20.   LET  S = 0
30.   READ  A
40.   IF  A < 0     THEN 80
50.   LET  N = N + 1
60.   LET  S = S + A
70.   GOTO      30
80    LET  M = S / N
90    PRINT  " MEAN = " ; M
100   PRINT " MAN = " ; N
110   END
120   data  list
 ⋮
999   DATA  -1
```

很明顯的，行號 40. 是一個開關，當成績仍大於等於 0 時表示成績未讀取完畢，讓人數加 1 ，成績累加，並繼續讀取下一資料。

當然，我們也可以不在程式末加上一筆小於 0 的資料，而改以如下的程式（片斷）來執行：

(1)於 MBASIC 中

```
5.   LET  N = 0
6.   LET  S = 0
10.  ON   ERROR  GOTO  60
20.  READ   A
30.  LET  N = N + 1
40.  LET  S = S + N
50.  GOTO  20
60.  LET  M = S / N
     ⋮
```

(* : ON ERROR GOTO 見 MBASIC 有關書籍)

⑵於 FORTRAN 中

```
      ⋮
10.   READ ( 5 , 99 , END = 60 ) A
      N = N + 1
      S = S + A
      GOTO  10
60.   T = S / N
      ⋮
```

(* : END = 見 FORTRAN 有關書籍。)

以上兩個例子只是吾人最常用的程式開關類別；同學很容易了解與應用。接下來，再介紹另外幾種程式開關設定形式：

三、選擇控制開關之設定

〔例 3〕：試取出四個不同的阿拉伯數字。

〔解析〕：利用亂數函數 RND 來取，但不使數字重覆。

程式寫法一：

```
10.  LET  A = INT ( RND * 10 )
20.  LET  B = INT ( RND * 10 )
30.  IF   A = B  THEN  20
40.  LET  C = INT  ( RND * 10 )
50.  IF   A = C  OR  B = C  THEN  40
```

```
60.   LET  D = INT  ( RND * 10 )
70.   IF   A = D  OR  B = D  THEN 60
80    IF   C = D  THEN  60
90    PRINT  A ; B ; C ; D
100   END
```

行號（30.，50.，70.，80）都是用來檢驗該數是否重覆取用。然而如此的程寫法並不經濟，看如下的一個程式：

程式寫法二：

```
10.   DEM  A ( 9 )
20.   FOR  I = 1  TO 4
30.   LET  X = INT ( RND * 10 )
40.   IF  A ( X ) > 0  THEN  30
50.   PRINT  X ;
60.   LET  A ( X ) = 1
70.   NEXT  I
80    PRINT
90    END
```

如此的程式寫法是較經濟的，而且若所欲取的數目較多時也可免去如程式寫法一的冗長步驟。程式的依據是一開宣告一A陣列A（9），恰可以A（0），A（1），……，A（9）分別代表0，1，…，9各數字，又未令初值，所以A（0）＝A（1）＝……＝A（9）＝0，可以代表該數字未被取用，當該數字被取用時，便令A（X）＝1，表示已被取用，因此行號40.的開關便很顯明的成立了。

四、選擇累計控制開關之設定

例4：試寫一程式取出15.個阿拉伯數字，每一數字出現次數不得超過3次。

〔解析〕：上一程式利用A（X）大於0與否來檢驗該數是否已被取用，現在則可以以A（X）大於3與否來測試是否已出現3次，而且每出現一次即令A（X）＝A（X）＋1以累計出現次數。

〔程式〕：

```
10.  DIM  A ( 9 )
20.  FOR  I = 1  TO  15
30.  LET  X = INT ( RND * 10 )
40.  IF   A ( X ) => 3  THEN  30
50.  PRINT  X ;
60.  LET  A ( X ) = A ( X ) + 1
70.  NEXT  I
80   PRINT
90   END
```

五、分類累計開關之設定

例 5 ：投擲骰子 1000 次，試分別統計各點數之出現次數。

程式寫法一：

```
10.  FOR  I = 1 TO  1000
20.  LET  N = INT ( RND * 6 + 1 )
30.  ON  N  GOTO  40 , 50 , 60 , 70 , 80 , 90
40.  LET  T1 = T1 + 1
45.  GOTO  100
50.  LET  T2 = T2 + 1
55.  GOTO  100
60.  LET  T3 = T3 + 1
65.  GOTO  100
70.  LET  T4 = T4 + 1
75   GOTO  100
80   LET  T5 = T5 + 1
85   GOTO  100
90   LET  T6 = T6 + 1
100  NEXT  I
110  PRINT  " NUMBER  1  =" ;  T1
120  PRINT  " NUMBER  2  =" ;  T2
```

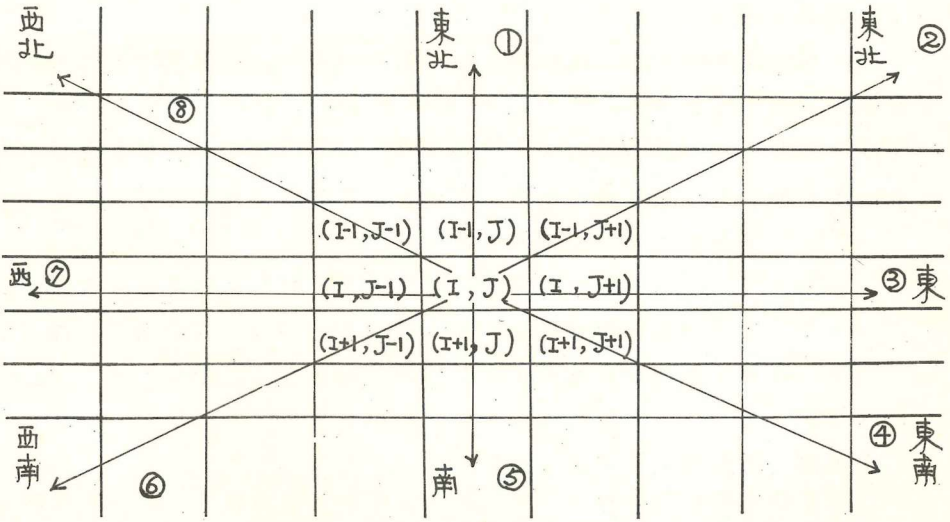
```
130   PRINT  " NUMBER  3  = " ;  T3
140   PRINT  " NUMBER  4  = " ;  T4
150   PRINT  " NUMBER  5  = " ;  T5
160   PRINT  " NUMBER  6 = "  ;  T6
170   END
```

如此的程式寫法不如利用A（N）來表示點數爲N的出現次數，當出現一次N時，則令A（N）＝A（N）＋1

程式寫法二：

```
10.   DIM  A ( 6 )
20.   FOR  I = 1  TO  1000
30.   LET  N = INT  ( RND * 6 + 1 )
40.   LET  A ( N ) = A ( N ) + 1
50.   NEXT  I
60.   FOR  I = 1  TO  6
70.   PRINT  " NUMBER " ;  I  ; " = " ; A ( I )
80    NEXT  I
90    END
```

六、方位選擇開關之設定



設某人在如上圖的座標點（ I ，J ）上，現在他想知道他的北，東北，東，東南，南，西南，西，西北這八個方向的情況時，你如何寫一程式爲他檢定？

〔解析〕：若吾人以①②③④⑤⑥⑦⑧分別代表這八個方向，則吾人不難測出：當依一定方向遠離某人所在（ I ，J ）座標若干個座標格時，都有其固定的變化：

(Ⅰ)依①方向遠離時，每離一格，則 I 值減 1 ，J 值不變。吾人可以以（ -1 ， 0 ）代表①之方向。

(Ⅱ)同(Ⅰ)，於是吾人可以以（ -1 ， 1 ）代表②之方向。

(Ⅲ)③之方向爲（ 0 ， 1 ）

(Ⅳ)④之方向爲（ 1 ， 1 ）

(Ⅴ)⑤之方向爲（ 1 ， 0 ）

(Ⅵ)⑥之方向爲（ 1 ，-1 ）

(Ⅶ)⑦之方向爲（ 0 ，-1 ）

(Ⅷ)⑧之方向爲（-1 ，-1 ）

如此，若能妥善應用(Ⅰ)～(Ⅷ)的 8 個方位變換情形，則不難判斷某人的遭遇情況。

七、性質選擇開關之設定：

一個圍棋棋盤有 19.× 19.個點位，我們可以用第三種選擇控制開關來控制該點位是否已被下過，可是你又如何來判斷該點位棋子的顏色呢？不用緊張，其實，你只要選擇黑白兩子各以那一號碼代替卽可。例如你可以 1 代表黑色棋位，2 代表白色棋位，0 代表年任何棋子卽可。當某一棋位之子被吃時，就將該位址再度宣告爲 0 。

簡單介紹上述七種程式開關設定模式，希望對大家日後寫程式能有所幫助，至於其它的各種開關模式（如：最小流程問題等）則留待以後再共同討論。下面的兩個練習是供大家作爲練習程式書寫之用：

1. 試將一副樸克牌（ 52.張 ）分別發給四個人。
2. 試寫一黑白棋（ 0 × 棋 ）程式。
3. 將 8 個后棋放到棋盤上（ 8 × 8 ）並使這 8 個后棋不在同一對角綫，同一行或同一列上。（答案不只一組）

微分與積分的命名由來

數學傳播
季刊

對於微積分學中的微分、積分，同學們一定很熟悉；可是諸位可知道爲何要定名爲微分與積分嗎？爲了使同學們於學習此科目之時，亦能了解其命名源由，我們特提供一篇文章以爲同學參考。

原文節錄如下：

我國清末興學，始於同治元年（西元 1862 年）是年八月，設立同文館於北京（現已改稱北平），期限八年，其算學課程第六年爲『微分』、『積分』。『微分』、『積分』二課程列入我國學制，誠如該文所云，由同治元年開始。但『微分』、『積分』二學語的出現，却要早三年——開始於咸豐九年（1859），我國偉大數學家李善蘭氏與美人偉烈，亞力（Alexander Wylie，1815——1887）合作，共譯羅密士（Elias Loomis，1811——1899）『代微積拾級』（Analytical Geometry and Calculus，1850）十八卷。其後光緒四年（1878），另一偉大數學家華蘅芳氏與美人傅蘭雅（Jhon Fryer，1839－？）合作，共譯華里司（美文原名不詳）『微積溯源』（英文原名亦不詳）八卷，其使用的『微分』、『積分』二學語，亦係沿用李氏的譯名。李氏爲當時博古通今的學者，光緒十二年（1886）錢塘諸可寶續著『疇人傳』三篇，其序目曾譽李氏爲『秋紈（李氏號名）集成，必則古昔。』，其將 differential 譯作『微分』，integral 譯作『積分』，當非閉門造車，憑空杜撰，而係淵源於古代文化，自可斷言。

我國小數命名，自古以來，皆係由分、厘、毫、秒（宋以後改爲絲），以迄忽、微，微以後更無再小的名稱。故對於極其細小的東西，概以『微』字名之，即數學中的無窮小，亦不例外。徵之於宋朝沈括所著的『夢溪筆談』中有『造微之術』的稱呼，可以爲證。又我國古代數學家對於推求圓周所表演的拿手好戲無窮盡法，即係無限分割。所以沈括的『夢溪筆

談』中，對於面積亦有『割會之術』的說法。『微分』這個學語，就是由『夢溪筆談』中，『造微之術』與『割會之術』兩句話中的關鍵語，『微』與『割』連合而成的，不過李氏將其中的『割』字，換了『分』字罷了。它的涵義，就成『微分』是由無限分割法得來的無窮小，你說譯得恰不恰當？

積，是積聚的意思。『微分』這個學語建立之後，對於無數個『面積微分』的和，順理成章，自應譯作『積分』。換句話說，就是『積分』爲將無數個無窮小積聚起來的和，與英文原意，再脗合沒有。但是『積』字的使用，也不是由李氏開始，最早竟可遠溯到戰國時代。『莊子』天下篇中所載惠施作出的許多逆理（ paradox ），其中之一：『無厚不可積也，其大千里。』不但用得是『積』字，而且道出了現代的積分原理，殊足驚人。因爲現代積分原理中的面積微分，就是惠施所說的無厚東西，不過這個『厚』，我們現在改爲『寬』字罷了。這種寬度狹至無窮小的面積微分，有限個積聚起來，它的和當然還是無窮小；但是無數個積聚起來的和，只要那被積分函數的值取得非常大，或上、下限間的距離隔得非常遠，它所代表的『曲線下方、x 軸上方、和兩端縱線間包圍的』面積，是可以大至一千方里或較此更大的。

英人李約瑟（ Joseph Needham，現仍健在）根據許多史實，在其所著『中國之科學與文明』（ Science and Civilization in china，全書十厚册，尚未出齊；已出者有中文譯本。）數學篇中，曾感慨地說：『有趣的問題是，現今中國數學家所用的『微分』、『積分』二學語，他們或許不知道，他們祖先思想家，早在十一世紀時，對於同一觀念，就曾使用過了。』『微分』、『積分』這個學語命名的由來，外國人對它尚能瞭如指掌，如數家珍，我們中國人自己，豈可反而漠不關心？

電腦語言專欄

前　言

葉得祥

自有第一架電腦以來，資訊科學家爲了讓電腦更容易爲人類所操縱應用，不受電腦限制，於是努力從事於電腦語言的簡化，使輸入、輸出更爲方便，使工作更爲簡單有效，於是各種新的電腦語言不斷推出，爲使同學瞭解新電腦語言的特性，乃萌意邀請鍾尙穎同學、陳俊仁同學、陳朝棋同學及本人將研習各種語言的心得及其特性寫出，以供同學參考之用。此次我們所選定的四種語言分類爲：

一、PASCAL　語言：爲1970年初推出，目前爲美國各大專院校最重視之電腦語言。

二、FORTH　語言：號稱第四代語言，特別適合工業控制之用。

三、TUTOR　語言：爲最新式語言，目前分部中正堂地下室的電腦系統即有 TUTOR 語言。特別適合電腦輔助教學之用。

四、LOGO　語言：亦爲新式語言年前才在國內發跡，特別適合於國小學生學習之用。至於工程設計、幾何作圖更是恰當。

一、帕司卡的榮耀—簡介PASCAL程式語言

鍾尚穎

最早的 PASCAL 編譯器是於 1970 年由瑞士蘇黎士艾根諾斯理工學院教授 Niklans Wirth 發展出來的，它主要是依 ALGOL語言的架構而加以演化而成的一種高階語言，兼有 FORTRAN . COBOL . BASIC 的特色，是一多用途的電腦語言，如今在美國各大學院和 FORTRAN 一樣，佔有很崇高的地位。至於 PASCAL 名稱的由來，是爲了紀念發明第一部計數器的法國數學家 Blaise Pascal 而命名的。

現在我簡單的把 PASCAL 語言和其他語言不同的部分及其特色介紹如下，作爲大家對 PASCAL 語言的基本認識，及日後學習 PASCAL 的指南。

㈠結構化嚴謹，可讀性很高。PASCAL 語言所以能夠很快的被各階層人士普遍使用，主要原因就是由於它的結構化完整而嚴謹，程式容易讓人了解，而且容易修改除錯。在今日軟體設計最重要的一點，就是在於程式的可讀性，程式必須能夠讓人一目了然，層次分明，才能廣被使用。在 PASCAL 語言如 BEGIN … END，IF … THEN … ELSE ， WHILE … DO ，FOR … TO(DOWNTO) …… DO ， REPEAT ……UNTIL ， CASE … OF 等，幾乎能一看就知其所以，正如看一篇初級的英文部告一樣。其他如主程式(PROGRAM)，副程式(PROCEDURE) ，定數(CONT) ，變數(VAR)，型態(TYPE)等的宣告，也都從字義上就可了解，只要稍懂英文就可駕輕就熟。下面我用 PASCAL 的模式，寫成一個簡單的模式，來說明吃蘋果的簡單過程。

例子：

```
PROGRAM 吃蘋果的步驟 ( INPUT , OUTPUT ); {主程式}
  VAR   {變數的宣告}
    蘋果：水果；        {前一個是變數，後一個是變數類別}

┌BEGIN
│   拿蘋果；
│   洗蘋果；
│   削蘋果；
│  ┌REPEAT       {迴路}
│  │  吃蘋果；
```

```
    └UNTIL  蘋果沒肉了
└END
```

其中大括號代表 REMARK 是註解。

㈡編譯速度快，執行效率高。PASCAL 編譯器在每單位時間的工作量是同套系統上 FORTRAN 編譯器的 1.8 倍，可見它編譯的速度多快。編譯的速度快執行所需的時間就能夠縮短，這對於時間就是金錢的今日，是非常迫切需要的。除了速度快以外，PASCAL 所提供的功能並不複雜，因而使得 PASCAL 編譯器很容易的就可以裝在現正在流行的個人微電腦上去執行，這使得 PASCAL 語言更形重要。

㈢數學集合的引進。集合論在數學算是一門很基礎的科目，而把集合論的概念引進程式語言中的高階語言 PASCAL 算是一個先趨者，舉凡集合的基本運算（如交集、聯集、差集等），都有它的規定存在。至於集合的宣告方法如下

SET OF　＜基本類別＞

其中基本類別可爲整數範圍，字串範圍，大小類或是布林值。例如：

```
TYPE
    DIGIT = SET OF  0..9
VAR
    ODD , EVEN : DIGIT
  BEGIN
    ODD := [1,3,5,7,9 ]
    EVEN:= [2,4,6,8 ]
      ⋮
      ⋮
```

此例中 DIGIT宣告爲集合型態，類別是整數 0..9 ，而變數 ODD ， EVEN 都是 DIGIT類，所以此兩變數最多只能放 0 到 9 十個字。在 PASCAL 中，大括號用作 REMARK ，所以集合是以中括號表示。至於集合的運算子分別以 "＋" 代表聯集， "＊" 代表交集，"－" 代表差集。例如

[1,3]+[2,4]→[1,2,3,4] ， [1,3,5]＊[1,4,5,7]→[1,5]

[2,4,6]－[1,4,7]→[2,6] ， ['A','C','F']－['B','E','F']=['A','C']

在 PASCAL 中字串用單引號括出。若有連續數可聯接如下：

[1,2,3,4,7 ,8,9]=[1..4,7..9]，['A','B','C','D']=['A'..'D']

另外集合的包含關係如下：

A＝B，A＞＝B （A⊇B），A＜＝B （A⊆B），

A＜＞B （A≠B），x IN A （$x \in A$）

㈣具彈性的動態式資料結構。在一般語言中所宣稱的變數或數列，在執行時都有固定的記憶體供使用，稱爲靜態式的結構。和靜態式結構相反的就叫動態式的結構，所謂動態式的結構就是一種資料結構，它在執行的過程中可能在記憶體中增大或縮小，同時其所佔的記憶體也不固定。在PASCAL語言中有此動態結構叫址標類別（Pointer Type），它的結構是由不定數的數據點在記憶體中形成，且每數據點之間由址標類變數聯繫，所佔的記憶體隨程式的發展而增大縮小。最有用的是在處理資料時可能從中加入資料而擴大記憶體，或從中刪除資料而縮減記憶體。址標類宣告格式如右：　　↑＜址標類別＞　（類別可爲整數，字串……等）

在有些鍵盤上↑可用∧代替。而記憶體位址的取得只要利用敍述函數NEW（X）即可。

㈤副程式的遞迴（Recursion）及遞迴函數的特殊功能。遞迴在數學的函數上很常用到，就是說在一個定義之中又用到本身此一定義。正如自然數可寫成：自然數＝｛1或自然數＋1｝。PASCAL語言允許我們程式設計時使用遞迴的概念，而其他的語言可能造成型態錯誤（SYNTAX ERROR）或定義錯誤（DEFIND ERROR）。在PASCAL語言中副程式可使用兩種遞迴：一是直接遞迴，一是間接遞迴。所謂直接遞迴就是在副程式P中仍可引用（或呼叫）副程式P，而間接遞迴就是在副程式P中可引用（或呼叫）副程式Q。可是在使用遞迴時，有一點要特別注意的，就是在遞迴中是否有終止的條件，切勿造成無窮盡的運算，這一點無論在學習任何語言均需牢記。下面介紹一個簡單的副程式直接遞迴求N!。

```
PROCEDURE FACTORIAL(N: INTEGER; VAR P: INTEGER);
{RECURSIVE PROCEDURE TO COMPUTE FACTORIAL OF N}
    VAR
        K: INTEGER;
```

```
BEGIN    { FACTORIAL }
  IF  N > 0  THEN
    BEGIN
      FACTORIAL ( N-1, K ) ;  { FACTORIAL OF N-1 }
      P := N * K
    END
  ELSE
    P := 1
END ;
```

在此程式中可以很清礎的看到 PASCAL 的結構化，其中第一行 FACTORIAL 括號內的 N，P 是參數，N 是要求的數，P 是 N!的積，所以由參數知 FACTORIAL (N-1,K) 就是求(N-1)!的積 3。至於遞迴函數則和副程式相當，同樣以求 N!來說明：

```
FUNCTION  FACTORIAL ( N: INTEGER ) : INTEGER ;
  BEGIN
    IF N > 0  THEN
      FACTORIAL := N * FACTORIAL ( N-1 )
    ELSE
      FACTORIAL := 1
  END ;
```

利用遞迴的最大用途就在反應定義，使人易於了解，亦即可讀性高，但若是利用指述 FOR 、 WHILE 、 REPEAT …… 等能更容易說明的話，也可以不去用它。

前面五點是 PASCAL 語言的主要特點，其他的特色很多，不能盡其詳，僅做爲 PASCAL 程式語言的介紹，以後如果能去實際的去接觸它，你必有其收穫。

二、FORTH第四代電腦語言

陳朝棋

每一種語言各有其特色，故當你看到一程式時，往往能從它的特色判斷它是何種電腦語言寫的。我們現在舉出二個用 FORTH 語言寫的語句，以及與它們相當的BASIC語言語句：

例㈠　9　8　+　.　　⇒ PRINT　9 + 8

例㈡　13　4　MIN　.　　⇒ PRINT　(13 + 4 - ABS (13-4))/2

（也就是得出兩數中之較小者）

從上二例，可看出 FORTH語言獨特而簡易的語法，多少亦可看出爲什麼 FORTH 語言被稱爲第四代語言。

FORTH 特殊的語法，全因它採用堆疊器的概念，FORTH 把無論數字或運算符號，或文字等，只要是被空格左右分開的符號，一律視爲字（word），故不妨把FORTH程式看成是一些字組合而成的「文章」。而堆疊器就如同，把每一個字寫在一張卡片上，並且根據字在「文章」出現的先後次序，把卡片由下往上累積儲存起來的地方。不過須注意，當你想取出時，只能從上往下，反次序取出。

由此觀念，我們回頭看看例㈠：

(1) 9，8均是〝靜態字〞（註），故直接被累儲存起來，其中因爲 9 先於 8，所以 9在下，而 8 在上。

(2)接著〝＋〞這是〝動態字〞（註），對應一個工作：把堆疊器頂端的二筆資料取出（因此這二筆資料便在堆疊器上消失），將其加起來，並且把答案復放回堆疊器上。

(3)〝．〞這也是動態字，其功能是把堆疊器頂端的一筆資料取出，並且印在終端機上。

最後，我們會發現此時堆疊器上不存一物，爲什麼？諸位應可推知爲何。

由以上的說明，大家應可推知：3　4　2　+　*　.其執行結果在終端器顯示爲 18，也就是（4 + 2）× 3。

另外 FORTH的一個特徵是：可以隨你希望，創造出具有特別功能的字。這個特性將從下面的事實表現出來。

許多其他電腦語言常用的指令，如 INPUT，VAL，MID$，RIGHT$，……等，一般並不是 FORTH 的字，也就是 FORTH 沒有類似功能的指令，

但你可以利用 FORTH 所已擁有的字來定義。我們舉一個例子來說明其過程。

於例㈡中 MIN 是 FORTH 的字，其功能是從堆疊器上取出二筆資料，並且把較小者放回堆疊器。由此，我們可推廣，求印出 6 ， 7 ， 12 ， -2 四數中較小者，如下：

例㈢ 6 7 12 -2 MIN MIN MIN .

其執行結果將印出 -2，但連續寫 3 個 MIN 往往不很經濟，故只要我們給一個新字，令爲 MIN4 ，並且定義如下：

: MIN4 MIN MIN MIN ;

其中〝:〞及〝;〞爲整個定義工作的起始及結束的標界，而其間第一個文字爲被定義字，其它爲定義內容。因此例㈢的語句便與下列語句等效：

6 7 12 -2 MIN4 .

FORTH的優點甚多，但最重要的因素之一就是：它提供給我們一個〝摸得到的工作場所〞——堆疊器。

〔註〕：所謂靜態字、動態字，乃依據字的處理是否激發 FORTH 運算或變化。

三、CAI的TUTOR

陳俊仁

TUTOR 是美國伊利諾大學在最近所研究發展出來的電腦語言，是針CAI（Computer Aided Instruction）而設計的高階語言。TUTOR具有良好的程式結構，而且各功能的指令非常多，是一種適合初學者的電腦語言。現在，我們就其一般特性敘述如下：

㈠螢幕可宣告爲輸入單元：

TUTOR語言中有 enable touch 之指令可螢幕宣告爲輸入單元，也就是說，經 enable touch 宣告後，螢幕可用來輸入。因此，在電腦教學時，不識的人或兒童可經由觸摸螢幕來與電腦溝通。

㈡具有多種繪圖的指令：

TUTOR所用之螢幕具有 512×512 個點，因此，較一般 256 ×256點的螢幕清楚生動，而其在定座標、旋轉、放大、縮小、標刻度……等都相當簡便，可以很容易的畫出所需的圖形；更值得一提的是TUTOR有char指令，可用於創造新的字，對於我們從事中文電腦教學有很大的方便。

㈢程式結構多變化：

TUTOR語言的每一主程式是由很多的 unit 組合而成的，且每一 unit 皆具有一般語言中主程式的功能，即每一 unit 可ERASE 畫面及CLEAR變數。而每一 unit也可做爲副程式之用，因此，在一程中，由於 unit的組合，可讓我們設計出一非常漂亮的程式網。

㈣具有多種系統變數用於輸入與輸出：

當從事CAI工作時，對於學生作答及如何教導學生學習是一個非常重要的課題。TUTOR在這方面有此特異之處，它利用各種不同的系統變數來處理這些情形，使得我們從事CAI的程式寫作時，可免去非常多的麻煩。

㈤具有完美的檔案結構：

TUTOR在 file（檔案）這方面的要求非常嚴格，其 file可分爲六類，最常使用的有 block， Source 二類，經由這些 file的組合，一套教材從章節至目錄，從正文到習題，從一頁到另一頁，都可以很容易的完成其結構。

下面我們就來看一個 TUTOR 語言的程式：

```
unit        test
 at         510
write       which animal was described in the english
            paragraph ?
write       ≮at,2015≯cat ≮at,2025 ≯ dog
arrow       1010
enable      touch
space
enable      touch
answer      cat
  or
touch       2010; 2420
write       very good
wrong       dog
  or
touch w     2030;2440
  or
exact
write       No : it wasn't a dog
            press next to try again
judge       No
endarrow
disable     touch
```

你看得懂這程式是在做什麼嗎？它的大意是問你在英文課本的最後一幅畫是什麼動物，而將其圖形畫在螢幕上，你可經由鍵盤輸入答案，也可由觸摸螢幕回答，但限於篇幅，以致於無法將畫動物的程式寫出，而改用：

```
write    ≮at,2015 ≯ cat ≮at,2025 ≯ dog
```

不知你是否有點概念？

四、衍生式的LOGO程式語言

葉得祥

LOGO 是一種電腦語言，與英文或其它電腦語言（如COBOL，FORTRAN等）比起來，它既沒有很多單字也沒有什麼文法規則。但它卻能憑一些少數的已知事實創造出更多更有趣的事實。

LOGO 是處理一些不同的運算像加法、減法、乘法、除法以及操作指令與列印指令。它的一個特性即是，您可以利用已知的指令創造出更多您自己所需要的指令。例如您需要一個畫蘋果的指令，那麼您可以建一個檔來畫蘋果，假設您將這個檔命名爲APPLE，那麼〝APPLE〞便成爲您自己擁有 LOGO 系統的一個特殊指令，您又可以利用它創造出更多更有趣的指令。

爲便於使同學了解 LOGO 語言的特性，在這一小段介紹中，我們就以APPLE Ⅱ上的LOGO 語言繪圖模式作一個簡單的介紹。

1、SHOWTURTLE （或 ST）：進入繪圖模式，此時 CRT中央有一指標指向上方。

2、FORDWARD N （或 FD）：表指標前進N個點位。

3、BACK N （或 BK）：表指標後退N個點位。

4、RIGHT A（或 RT）：表指標右轉A度。

5、LEFT A（或 LT）：表指標左轉A度。

現在，您若寫了如下的一個程式：

```
FD   30
RT   90
FD   30
RT   90
FD   30
RT   90
FD   30
RT   90
```

那麼於CRT上早已繪了一個正方形。又您很需要一個繪正方形的指令，您可以用 EDIT 建一個檔案來完成所需：

```
EDIT 〝SQUARE
TO   SQUARE
```

```
FD      30
RT      90
FD      30
RT      90
FD      30
RT      90
FD      30
RT      90
END
```

當該檔被建成後，SQUARE 即成爲您自己所擁有 LOGO 系統的一個專有指令，每當您使用 SQUARE（如同 FD， RT 等一般的使用）時，電腦便自動依動依指標方向繪一正方形。

若您繪入以下的一個指令：

```
REPEAT  60  [ RT 6 SQUARE ]
```

電腦便會在 CRT繪出您想像不到的美麗圖案。

對於 LOGO 語言學習，比 BASIC 語言更簡單，且適合於國小的學童使用。LOGO 也可作工程上的應用，如數學幾何上的應用更爲適當；主要是利用人工描點繪製設計圖往往會因誤差而導致圖形不正確，而電腦卻可在極精確、快速的情況下繪出您所需要的圖案。倘若能把LOGO 語言當作「教具輔助語言」，作爲教學上繪圖的輔助教具，實爲一大福音。最後預祝您有一套屬於您自己的 LOGO 語言系統。

編後語

看到同學的作品一篇篇地印刷、裝訂成册，內心的感受可以“百感交集”四字來形容。於此，只有一個願望，希望同學們能繼續愛護這塊供我們彼此交換心得的園地，讓它的內容更加豐富、充實。

此期，我們很謝謝金鈐學長將其研究論文的一部份提供給我們發表，以爲同學參考，也謝謝呂溪木老師、王惠中老師、常法徽老師的熱心指導及同學們的投稿，於此深表謝意，謝謝！

許文儒
詹玉玲　謹啓

發行人：顏　啓　麟

出版者：國立台灣師範大學數學學會

主　編：許　文　儒　、　詹　玉　玲

封　面：林　淑　慈

印刷者：華南打字印刷行／北市羅斯福路三段11號　341-3057

益華彩色印刷有限公司／北市詔安街50巷8弄1號　307-3873

出版字期：中華民國七十二年六月五日

師課訓刊登136號