師大數學

18

恭　祝

第七屆總統副總統就職

師大數學系全體師生　敬賀

序

系主任

本系成立於民國三十五年八月，首由張儒林教授擔任系主任，當時招收數學系及四年制專修科各一班，同學三十餘人，教授三位，助教一位，嗣由管公度、潘璞、李新民、康洪民、范傳坡、常法徽各教授輪掌系務，歷經各任主任與教授們之群策群力，始具今日之規模。三十四年來本系之畢業系友，已逾貳仟陸佰餘人，多各有成就；其中獲得碩士學位叁佰餘人，具博士學位者逾一百五十人，或執教於高等學府，或繼續高深研究，餘多服務於中等教育界，平時諄諄教學，誨人不倦，敦品篤行，懷抱熱忱，此實本校優良風氣之所致。

現本系有教師四十七人，學生方面日間部有十二班，夜間部四班，共有同學伍百肆拾人，圖書逾兩萬册，雜誌百餘種；自六十四年夏遷於現址後，環境煥新，出國學成系友或返校互相砥礪，研究風氣已大弧度地提高；今日數學系之師生孜孜不息，無不爲美好遠景而奮發。

近來科學發展甚速，對數學之需要甚切，本系之任務更日益增大，除肩負數學教育之發展及中等數學教育之輔導外，亦兼具數學學術研究之重要任務。爲增強研究風尚，本系於十八年前創辦師大數學年刊，以供師生發表教學及研究心得。切磋琢磨，提高學習及研究興趣，屢經負責同學之辛勞耕耘及師生系友之共同支持。漸茲茁壯，今後請更不吝珠璣，源源賜稿，則本刊必前程似錦，散發絢爛光芒，於此，表謝忱，更盼我師生系友善珍此片園地。

本期正值第七任總統蔣經國先生與副總統李登輝先生就職前夕，同學們爲慶賀這極具意義的日子，特別踴躍撰文，以他們的研究成果做爲獻禮，惟編輯小組經驗所限，疏忽之處，敬請指正。

顏　啓　麟　　謹識

七十三年五月

目　錄

師大數學
第 18 期、民國 73 年

一般型式的Haar規格化正交系

指導老師　陳昭地老師

朱亮儒

㈠摘要：

在本文中，我們將推廣週期1的Haar規格正交系（Haar′s orthonormal system），在區間 I＝〔0，1〕上依次以1：P（P∈N）的比例分割而定出特殊的階梯函數系（定義6）稱爲Haar 型P規格化正交系（Haar type-Porthnpormal system）。我們已經知道Haar規格化正交系（即P＝1的特殊情形），具有良好的完備性（Completeness）、收斂性（Convergeucn）與代表性（representation)的性質；對於一般化的Haar型P規格化正交系，也會有這些性質，我們將在定理中分別探討其完備性（定理1）、收斂性（定理2）與代表性（定理3）。

㈡符號與定義：在定義1～定義3中我們給予熟悉的定義。

〔定義1〕　在 I＝〔0，1〕上的 L^2 可積分函數系 $\{\phi_n(x) : n\in N\}$，如果滿足 $m, n\in N$，

$$\int_0^1 \phi_m(x)\phi_n(x)\phi x = \begin{cases} 0, & m\neq n \\ 1, & m=n \end{cases}$$

，則稱此函數系｛$\phi_n(x)$：$n \in N$｝爲〔0，1〕上的規格化正交系（orthonormal system）。（參考Alexits〔1〕p3）

〔定義2〕 假設｛$\phi_n(x)$；$n \in N$｝爲 I ＝〔0，1〕上L^2可積分函數系，如果僅有唯一的L^2可積分函數 f(x)，使得

$$n \in N\ , \quad \int_0^1 f(x)\,\phi_n(x)\,dx = 0$$

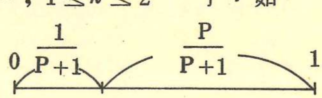
換言之，這樣的函數f是殆遍爲0（記爲$f(x)=0$，a、e、on〔0，1〕），則稱此函數系｛$\phi_n(x)$；$n \in N$｝是完備的（Complete）。（參考Alexits〔1〕p14）

〔定義3〕 我們定義 I ＝〔0，1〕上可積分函數$f(x)$對規格化實函數正交系｛$\phi_n(x)$；$n \in N$｝的富氏級數（Fourien series）展開式爲 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n\,\phi_n(x)$，其中

$$d_n = \int_0^1 f(t)\,\phi_n(t)\,dt \text{。}$$

（參考Alexits〔1〕p6）

〔定義4〕 仿照Haar規格化正交系的區間分割，我們在 I ＝〔0，1〕上依（P_H）分點的分割法，造一個區間長的有理數列｛$a_n^{(k)}$；$n=-1, 0, 1, 2\cdots\cdots$，$1 \leq k \leq 2^{n+1}$｝，如下：



$$a_{-1}^{(1)} = 1$$

$$a_0^{(1)} = \frac{1}{P+1}\ , \quad a_0^{(2)} = \frac{P}{P+1}$$

$$a_1^{(1)} = \frac{1}{(P+1)^2}\ , \quad a_1^{(2)} = \frac{P}{(P+1)^2}\ ,$$

$$a_1^{(3)}=\frac{P}{(P+1)^2},\qquad a_1^{(4)}=\frac{P^2}{(P+1)^2}$$

更一般地，$\forall\ n\in N$，m 爲正奇數，$0\leq e\leq n+1$，e 爲整數，$1\leq 2^e\cdot m\leq 2^{n+1}$，我們定義：

$$a_n^{(2^e m)}=\left(\frac{P}{P+1}\right)^e a_{n-e}^{(m)}\ ,\quad a_n^{(2^e\cdot m-1)}=\frac{P^{e-1}}{(P+1)^e}a_{n-e}^{(m)}$$

$$\cdot\ a_{n-e}^{(m)}$$

如此，對每一個 $n\in\{-1,0,1,2\cdots\cdots\}$，$0\leq e\leq n+1$，$e\in N$，我們有

$$a_n^{(1)}=\frac{1}{(P+1)^{n+1}},\quad a_n^{(2^e)}=\frac{P^e}{(P+1)^{n+1}},$$

$$a_n^{(2^{n+1})}=\frac{P^{n+1}}{(P+1)^{n+1}}$$

而且 $a_{n-1}^{(k)}=a_n^{(2k-1)}+a_n^{(2k)}$，$a_n^{(2k-1)}:a_n^{(2k)}=1:P$，$n=0,1,2,\cdots\cdots,1\leq k\leq 2^n$。

〔定義 5〕 爲了簡便符號，我們定義〔0，1〕上的三個區間序列 $\{A_n^{(k)}\}$、$\{B_n^{(k)}\}$ 與 $\{C_n^{(k)}\}$，$n=0,1,2,\cdots\cdots$，$1\leq k\leq 2^n$

$$A_n^{(k)}=\left[\sum_{i=1}^{k-1}a_{n-1}^{(i)}\ ,\sum_{i=1}^{k}a_{n-1}^{(i)}\right)=B_n^{(k)}\cup C_n^{(k)}$$

$$B_n^{(k)}=\left[\sum_{i=1}^{2k-2}a_n^{(i)}\ ,\sum_{i=1}^{2k-1}a_n^{(i)}\right)$$

$$C_n^{(k)}=\left[\sum_{i=1}^{2k-1}a_n^{(i)}\ ,\sum_{i=1}^{2k}a_n^{(i)}\right]$$

在這個定義之下，可以容易看出以下兩個等式成立。

$$|A_n^{(k)}| = |B_n^{(k)}| + |C_n^{(k)}| = a_n^{(2k-1)} + a_n^{(2k)} = a_{n-1}^{(k)}$$

且

$$|B_n^{(k)}| = \frac{1}{P}|C_n^{(k)}| = \frac{1}{P+1}|A_n^{(k)}|。$$

（其中 $|A|$ 表示區間 A 的長度）

【定義6】 對於Haar型 P 規格化正交系 $\{x_n^{(k)}\}$，我們定義如下：

$x_{-1}^{(1)}(x)=1$，　$x \in [0, 1]$　（註：在一般Haar級數中用符號 $x_0^{(0)}$ 取代 $x_{-1}^{(1)}$），依 $1:P$ 之比分割 $[0, 1)$ 成兩個子區間 $B_0^{(1)} = [0, \frac{1}{P+1})$ 與 $C_0^{(1)} = [\frac{1}{P+1}, 1)$

$$x_0^{(1)}(x) = \begin{cases} \sqrt{P}, & x \in B_0^{(1)} = [0, \frac{1}{P+1}) \\ -\sqrt{\frac{1}{P}}, & x \in C_0^{(1)} = [\frac{1}{P+1}, 1) \end{cases}$$

再依 $1:P$ 之比分別將 $B_0^{(1)}$ 與 $C_0^{(1)}$ 分割為四個子區間 $B_1^{(1)}$，$C_1^{(1)}$ 與 $B_1^{(2)}$，$C_1^{(2)}$

$$x_1^{(1)}(x) = \begin{cases} \sqrt{P(P+1)}, & x \in B_1^{(1)} = [0, \frac{1}{(P+1)^2}) \\ -\sqrt{\frac{P+1}{P}}, & x \in C_1^{(1)} = [\frac{1}{(P+1)^2}, \frac{1}{P+1}) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$x_1^{(2)}(x)=\begin{cases}\sqrt{P+1}\ ,\ x\in B_1^{(2)}=\left[\dfrac{1}{P+1},\dfrac{2P+1}{(P+1)^2}\right)\\[2ex] -\sqrt{\dfrac{P+1}{P^2}}\ ,\ x\in C_1^{(2)}=\left[\dfrac{2P+1}{(P+1)^2},1\right)\\[2ex] 0\ ,\ \text{其他}\end{cases}$$

如此下去，我們可依序定出函數 $x_2^{(1)}$，$x_2^{(2)}$，$x_2^{(3)}$，$x_2^{(4)}$，……，更一般地，$n\in N$，我們定義 2^n 個函數為

$$x_n^{(k)}(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{P}{a_{n-1}^{(k)}}}\ ,\ x\in B_n^{(k)}\\[2ex] -\sqrt{\dfrac{1}{P\,a_{n-1}^{(k)}}}\ ,\ x\in C_n^{(k)}\\[2ex] 0\ ,\ \text{其他}\\ k=1,2,3,\cdots\cdots,2^n\ 。\end{cases}$$

在引理 1 中我們將證明這個函數系 $\{x_n^{(k)}\}$ 是一個規格化正交系。

〔附註〕 Haar 規格化正交系（ $P=1$ ）

（Ⅰ） $a_{-1}^{(1)}=1$，$a_0^{(1)}=a_0^{(2)}=\dfrac{1}{2}$，

$$a_1^{(1)}=a_1^{(2)}=a_1^{(3)}=a_1^{(4)}=\frac{1}{2^2},\cdots\cdots,$$

$$a_n^{(1)}=a_n^{(2)}=\cdots\cdots=a_n^{(2^{n+1})}=\frac{1}{2^{n+1}}$$

（Ⅱ） $B_0^{(1)}=\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$，$C_0^{(1)}=\left[\dfrac{1}{2},1\right)$，$B_1^{(1)}=[0,$

$\frac{1}{4})$ ，$C_1^{(1)}=[\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ ，$B_1^{(2)}=[\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ ，$C_1^{(2)}=[\frac{3}{4},1)$ ………，$n\in N$ ，$k=1,2,3,\cdots\cdots,2^n$ ，

$$B_n^{(k)}=[\frac{2k-2}{2^{n+1}},\frac{2k-1}{2^{n+1}}) ，C_n^{(k)}=[\frac{2k-1}{2^{n+1}},\frac{2k}{2^{n+1}})$$

（Ⅲ）$X_0^{(0)}(x)=1$， $x\in[0,1)$， （此處$X_0^{(0)}$即一般$P\neq 1$情形中的$X_{-1}^{(1)}$）

$$\chi_0^{(1)}(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,\frac{1}{2})\\ -1, & x\in[\frac{1}{2},1)\end{cases}$$

$$\chi_1^{(1)}(x)=\begin{cases}\sqrt{2}, & x\in[0,\frac{1}{4})\\ -\sqrt{2}, & x\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2})\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$\chi_1^{(2)}(x)=\begin{cases}\sqrt{2}, & x\in[\frac{1}{2},\frac{3}{4})\\ -\sqrt{2}, & x\in[\frac{3}{4},1)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$n\in N$ ，$k=1,2,3,\cdots\cdots 2^n$

$$X_n^{(k)}(x)=\begin{cases}\sqrt{2^n}, & x\in B_n^{(k)}=\left[\dfrac{2k-2}{2^{n+1}},\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\right)\\ -\sqrt{2^n}, & x\in C_n^{(k)}=\left[\dfrac{2k-1}{2^{n+1}},\dfrac{2k}{2^{n+1}}\right)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（參考 Alexits〔1〕p46）

㈢兩個輔助的引理

〔引理 1〕 由定義 6 中，所定的 Haar 型 P 函數系 $\{X_n^{(k)}\}$ 是〔0，1）上的一個規格化正交系（orthonormal system）。

證明：因為

$$\int_0^1 (X_n^{(k)}(x))^2\,dx=\frac{P}{a_{n-1}^{(k)}}\cdot|B_n^{(k)}|+\frac{1}{Pa_{n-1}^{(k)}}\cdot|C_n^{(k)}|=1$$

$\forall\ n$，$1\le k\le 2^n$

$$\int_0^1 (X_{-1}^{(1)}(x))^2\,dx=1$$

$$\int_0^1 X_n^{(k)}(x)\,X_n^{(e)}(x)\,dx=0 \qquad \forall \quad k\neq e$$

對 $n>m$，

$$\int_0^1 X_n^{(k)}(x)\,X_m^{(e)}(x)\,dx$$

$$=C\int_{A_n^{(k)}} X_n^{(k)}(x)\,dx$$

$$=0$$

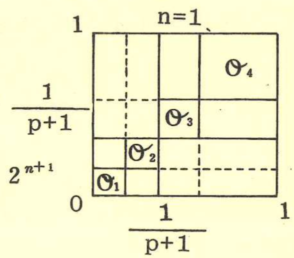
其中C 表示$\chi_m^{(e)}(x)$在$A_n^{(k)}$上的常數值

$$C=0 \text{ 或 } \sqrt{\frac{P}{a_{n-1}^{(k)}}} \text{ 或} -\sqrt{\frac{1}{P\,a_{n-1}^{(k)}}}$$

故由定義1知，$\{X_n^{(k)}\}$構成一個規格化正交系。

〔引理 2〕 若$g_n^{(k)}: I^2=[0,1]\times[0,1)\to R$，定義爲$g_n^{(k)}(t,x)=\chi_{-1}^{(1)}(t)\chi_{-1}^{(1)}(x)+\chi_0^{(1)}(t)\chi_0^{(1)}(x)+\chi_1^{(1)}(t)\chi_1^{(1)}(t)\chi_1^{(1)}(x)+\chi_1^{(2)}(t)\chi_1^{(2)}(x)+\cdots\cdots+\chi_n^{(k)}(t)\chi_n^{(k)}(x)$，　$n=-1,0,1\cdots\cdots$，$1\le k\le 2^n$，則

$$g_n^{(2^n)}(t,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a_n^{(k)}}, & (t,x)\in\theta_k \\ k=1,2,3,\cdots\cdots,2^{n+1} & \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



其中$\theta_1,\theta_2,\cdots\cdots,\theta_{2^{n+1}}$表示在$I^2$上，長寬各用$2_{-1}^{n+1}$條平行線，依次以$1:P$分割我$2^{2n+2}$個矩形中位置在對角線$t=x$上的正方形區域。

更進一步地，將首S個正方形$\theta_1,\theta_2\cdots\cdots\theta_S$每一個再分別用平行線依$1:P$之比劃分成四個矩形區域，其位在對角線$t=x$上的正方形區域設爲$\theta_k^{(1)}$與$\theta_k^{(2)}$，$k=1,2,3,\cdots\cdots,S$，則

$$g_{n+1}^{(S)}(t,x)=\begin{cases}\dfrac{P+1}{a_n^{(k)}}, & (t,x)\in\theta_k^{(1)} \\[2ex] \dfrac{P+1}{P\,a_n^{(k)}}, & (t,x)\in\theta_k^{(2)} \\[2ex] 0, & \text{其他}\end{cases}$$

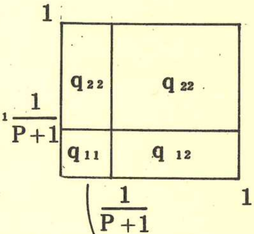
$$k = 1, 2, \cdots\cdots, S$$

（參考 Alexits〔1〕p 47 ～ 49）

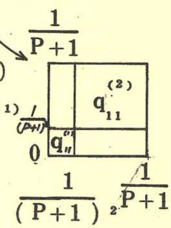
證明：$g_{-1}^{(1)}(t, x) = \chi_1^{(1)}(t)\chi_{-1}(\chi) = 1$

$\forall (t, x) \in I^2$

$g_0^{(1)}(t, x) = 1 + \chi_0^{(1)}(t)\chi_0^{(1)}(x)$



$$= \begin{cases} 1 + P, & (t, x) \in q_{11} \\ 1 + \dfrac{1}{P}, & (t, x) \in q_{22} \\ 0, & (t, x) \in q_{12} \cup q_{21} \end{cases}$$



$g_1^{(1)}(t, x) = g_0^{(1)}(t, x) + \chi_1^{(1)}(t)\chi_1^{(1)}(x)$

$$= \begin{cases} 1 + P + P(P+1), & (t, x) \in q_{11}^{(1)} \\ 1 + P + \dfrac{P+1}{P}, & (t, x) \in q_{11}^{(2)} \\ 1 + \dfrac{1}{P}, & (t, x) \in q_{22} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$g_1^{(2)}(t,x) = g_1^{(1)}(t, x) + \chi_1^{(2)}(t)\chi_1^{(2)}(x)$

$$\begin{cases} 1 + P + P(P+1) = (P+1)^2 = \dfrac{1}{a_1^{(1)}} \\ (t, x) \in q_{11}^{(1)} \\ 1 + P + \dfrac{P+1}{P} = \dfrac{(P+1)^2}{P} = \dfrac{1}{a_1^{(2)}} \\ (t, x) \in q_{11}^{(2)} \\ 1 + \dfrac{1}{P} + P + 1 = \dfrac{(P+1)^2}{P} = \dfrac{1}{a_1^{(3)}} \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
(t,x)\in q_{22}^{(1)} \\
1+\dfrac{1}{P}+\dfrac{P+1}{P^2}=\dfrac{(P+1)^2}{P^2}=\dfrac{1}{a_1^{(4)}} \\
(t,x)\in q_{22}^{(2)} \\
0 \qquad \text{其他}
\end{cases}
$$

如此繼續下去，可依次得到 $g_2^{(1)}$，$g_2^{(2)}$，$g_2^{(3)}$，$g_2^{(4)}$……之值特別地，

$$
g_n^{(2^n)}(t,x)=\begin{cases}
\dfrac{1}{a_n^{(k)}}, & (t,x)\in\theta_k,\ k=1,2,\cdots\cdots 2^{n+1} \\
0 & \text{其他}
\end{cases}
$$

更進一步地，因爲

$$
g_{n+1}^{(s)}(t,x)=g_n^{(2^n)}(t,x)+\sum_{k=1}^{S}\chi_{n+1}^{(k)}(t)\chi_{n+1}^{(k)}(x),
$$

$$
1\le S\le 2^{n+1}
$$

所以，

$$
g_{n+1}^{(s)}(t,x)=\begin{cases}
\dfrac{1}{a_n^{(k)}}+\dfrac{P}{a_n^{(k)}}=\dfrac{P+1}{a_n^{(k)}}=\dfrac{1}{|B_{n+1}^{(k)}|} \\
(t,x)\in\theta_k^{(1)} \qquad k=1,2,\cdots\cdots S \\
\dfrac{1}{a_n^{(k)}}+\dfrac{1}{Pa_n^{(k)}}=\dfrac{P+1}{Pa_n^{(k)}}=\dfrac{1}{|C_{n+1}^{(k)}|} \\
(t,x)\in\theta_k^{(2)}, \\
0 \qquad \text{其他}
\end{cases}
$$

(四)三個主要定理

對於Haar 型P規格化正交系有類似於Haar 規格化正交系的一些平

行性質，以下定理 1 可參考 Alexits〔1〕pp60～62，對 Haar規格化正交系的解說。

〔定理 1〕 （完備性）Haar 型P規格化正交系在L^2〔0，1〕上是完備的（Complete）由完備性的定義（定義 2）。

證明：假如$f \in L^2$〔0，1〕，且

$$\int_0^1 f(x)\, x_{-1}^{(1)}(x)\,dx = 0,\quad \int_0^1 f(x)\, x_n^{(k)}(x)\,dx = 0$$

（$\forall\, n = 0, 1, 2\cdots\cdots,\quad k = 1, 2, \cdots\cdots, 2^n$）

我們要證明$f = 0$ ae on〔0，1〕，令

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt,\quad 0 \leq x \leq 1$$

則F為〔0，1〕上的一個絕對連續函數，且$F'(x) = f(x)$, a.e on〔0，1〕

$$\because\quad 0 = \int_0^1 f(x)\, x_{-1}^{(1)}(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= F(1) - F(0) \qquad \therefore\quad F(1) = F(0) = 0$$

$$\because\quad 0 = \int_0^1 f(x)\, x_0^{(1)}(x)\,dx = \sqrt{P}\int_0^{\frac{1}{P+1}} f(x)\,dx$$

$$-\sqrt{\frac{1}{P}}\int_{\frac{1}{P+1}}^1 f(x)\,dx = \sqrt{P}\,F\left(\frac{1}{P+1}\right) - \sqrt{\frac{1}{P}}$$

$$\left(F(1) - F\left(\frac{1}{P+1}\right)\right) = \left(\sqrt{P} + \frac{1}{\sqrt{P}}\right) F\left(\frac{1}{P+1}\right)$$

$$\therefore\quad F\left(\frac{1}{P+1}\right) = 0$$

$$\because\ 0=\int_0^1 f(x)x_1^{(1)}(x)\,dx=\sqrt{P(P+1)}\int_0^{\frac{1}{(P+1)^2}}$$

$$f(x)\,dx-\sqrt{\frac{P+1}{P}}\int_{\frac{1}{(P+1)^2}}^{\frac{1}{P+1}} f(x)\,dx.$$

$$=\sqrt{P(P+1)}\ F\left(\frac{1}{(P+1)^2}\right)-\sqrt{\frac{P+1}{P}}\ \left(F\frac{1}{(P+1)}\right.$$

$$\left.-F\left(\frac{1}{(P+1)^2}\right)\right)$$

$$=\ \left(\sqrt{P(P+1)}+\sqrt{\frac{P+1}{P}}\right)F\left(\frac{1}{(P+1)^2}\right.$$

$$\therefore F\left(\frac{1}{(P+1)^2}\right)=0$$

$$\because\ 0=\int_0^1 f(x)x_1^{(2)}(x)\,dx=\sqrt{P+1}$$

$$\int_{\frac{1}{P+1}}^{\frac{2P+1}{(P+1)^2}} f(x)\,dx-\sqrt{\frac{P+1}{P^2}}$$

$$\int_{\frac{2P+1}{(P+1)}}^{1} f(x)\,dx$$

$$= \sqrt{P+1}\left(F\left(\frac{2P+1}{(P+1)^2}\right) - F\left(\frac{1}{P+1}\right)\right) - \sqrt{\frac{P+1}{P^2}}$$

$$\left(F(1) - F\left(\frac{2P+1}{(P+1)^2}\right)\right)$$

$$= \left(\sqrt{P+1} + \left(\frac{P+1}{(P+1)^2}\right)\right) \qquad \therefore F = \left(\frac{2P+1}{(P+1)^2}\right)$$

$$= 0$$

$$= \left(\sqrt{P+1} + \sqrt{\frac{P+1}{P^2}}\right) F\left(\frac{2P+1}{(P+1)^2}\right)$$

$$\therefore F\left(\frac{2P+1}{(P+1)^2}\right) = 0$$

如此循序下去，可得 $0 = \int_0^1 f(x) x_{n(k)}(x)\,dx = \left(\sqrt{\frac{P}{a_{n-1}(k)}}\right.$

$$\left. + \sqrt{\frac{1}{Pa_{n-1}(k)}}\right) F\left(\sum_{i=1}^{2k-1} a_n(i)\right)$$

$\therefore F\left(\sum_{i=1}^{2k-1} a_n(i)\right) = 0$（對每一個P分法有理點都會成立）

$\because$此種（P＋1）分點集 $\{\sum_{i=1}^{2k-1} a_n(i),\ n = 0, 1, 2\cdots\cdots,$

$k=1, 2\cdots\cdots 2^n\}$ 在〔0，1〕上爲一稠密集，且因爲F 在〔0，1〕上爲連續數，$\therefore F(x)=0$ a.e. on〔0, 1〕

$\therefore F(x)=f(x)$ a.e. on〔0, 1〕

$\therefore f(x)=0$ a.e. on〔0, 1〕

如此我們證明了Harr 型P規格化正交系具有完備性，以下定理2，可參考Alexrits〔1〕PP47 − 50 對Haar 規格化正交系的證明。

〔定理2〕　（收斂性）假如 $f(x)$ 是〔0，1〕上可積分函數，則 f（x）對Harr 型P規格化正交系的富氏級數展開式殆遍收斂到 f(x)

證明：令 $S_n^{(k)}(x)$爲 f(x) 對 Haar 型P規格化正交系的富氏級數展開式之部份和

$$g_n^{(k)}(t,x) = x_{-1}^{(1)}(t)x_{-1}^{(1)}(t)+x_0^{(1)}(t)x_0^{(1)}(x)+$$

$$x_1^{(1)}(t)\,x_1^{(1)}(x)+x_1^{(2)}(t)\;x_1^{(2)}(x)+\cdots\cdots\cdots+$$

$$x_n^{(k)}(t)\,x_n^{(k)}(x),\,(t,x)\in I^2$$

則由定義3,$S_n^{(k)}(x) = \left(\int_0^1 x_{-1}^{(1)}(t)\,f(t)dt\right)x_{-1}^{(1)}\;(x)$

$$+\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{l=1}^{2^m}\left(\int_0^1 x_m^{(e)}(t)f(t)dt\right)x_m^{(e)}(x)+\sum_{l=1}^{k}\left(\int_0^1 x_n^{(e)}(t)dt\right)x_n^{(e)}$$

$$=\int_0^1 f(t)g_n^{(k)}(t,x)dt\;,$$

$$\forall x\in(0,1)$$

$$\forall x \in A_n^{(k)} = B_n^{(k)} \cup C_n^{(k)}$$

情形（i）$x \in B_n^{(k)}$

由引理2，知 $S_n^{(h)}(x) = \int_0^1 f(t) g_n^{(k)}(t, x)\,dt =$

$$\frac{P+1}{a_{n-1}^{(k)}} \int_{B_n^{(k)}} f(t)\,dt = \frac{1}{|B_n^{(k)}|}\int_{B_n^{(k)}} f(t)\,dt$$

情形（ii）$x \in C_n^{(k)}$

由引理2，知 $S_n^{(k)}(x) = \frac{P+1}{Pa_{n-1}^{(k)}} \int_{C_n^{(k)}} f(t)\,dt$

$$= \frac{1}{|C_n^{(k)}|} \int_{C_n^{(k)}} f(t)\,dt$$

$\therefore \forall . \in D_n^{(k)} (= B_n^{(k)}$ 或 $C_n^{(k)})$，$S_n^{(h)}(k) = \frac{1}{|D_n^{(k)}|}$

$$\int_{D_n^{(k)}} f(t)\,dt$$

令 $n \to \infty$，則 $D_n^{(k)}$ 會濃縮聚集到點 x 上

令 $G(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad x \in [0, 1]$ 則G爲〔0，1〕

上的絕對連續函數，且 $G(x) = f(x)$ a, e. ou 〔0, 1〕

$\Rightarrow$ 殆遍所有〔0，1〕上的點 x，$\lim_{n\to\infty} S_n^{(k)} = \lim_{n\to\infty}$

$$\frac{1}{|D_n^{(k)}|}\int_{D_n^{(k)}} f(t)\,dt$$

$= \lim_{n \to \infty} \dfrac{\Delta G(D_n^{(k)})}{|D_n^{(k)}|} = G(x) = f(x)$，（其中 $\Delta G([a,b]) = G(b) - G(a)$）

到此，完成了定理 2 的證明。

注意：定理 1 是定理 2 的一個結果，因爲假如一個可積分函數 $f(x)$，對 Haar 型 P 規格化正交系的富氏係數都是 0，則其富氏級數 $S_n(x) = 0$

由定理 2，可知 $f(x) = 0$ a.e.

以下定理 3，可參考 Talaljan〔2〕PP108－111 對 Harr規格化正交系的證明過程。

〔定理 3〕 （代表性）假如 $f(x)$ 在〔0，1〕上爲測且殆遍有限值函數，則存在對應於 Haar 型 P 規格化正交系的級數殆遍收斂到 $f(x)$。

證明：因爲 $f(x)$ 是〔0，1〕上可測且殆遍有限值函數，由 Lusin 定理，存在一個連續函數 $F(x)$，使得 $F'(x) = f(x)$ a.e on $[0,1]$

定義 $\Delta F(A) = F(b) - F(a)$，此處區間 $A = [a, b)$

令 $e_n^{(k)} = \sqrt{\dfrac{P}{a_{n-1}^{(k)}}}\ \Delta F(B_n^{(k)}) - \sqrt{\dfrac{1}{Pa_{n-1}^{(k)}}}\ \Delta F(C_n^{(k)})$,

$n = 0, 1, 2 \cdots\cdots, k = 1, 2, \cdots\cdots, 2^n$

再令 $e_{-1}^{(1)} = F(1) - F(0)$

我們將證明級數 $e_{-1}^{(1)} x_{-1}^{(1)}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} e_n^{(k)} x^{(k)}(x)$

在〔0，1〕殆遍收斂到 $f(x)$，此處級數項的次序爲
$e_{-1}^{(1)}x_{-1}^{(1)}, e_0^{(1)}x_0^{(1)}, e_1^{(1)}x_1^{(1)}$,
$e_1^{(2)}x_1^{(2)}, e_2^{(1)}x_2^{(1)}\cdots\cdots$對固定的m，我們考慮上式之首m個函數，且令n爲最大的正整數字，滿足至少有一個k使得 $x_j^{(k)}$爲這首m個函數中的一個。
在〔0，1〕上我們定義一個階梯函數 $f^*(x)$ 如下：

$$f^*(x)=\begin{cases}\dfrac{\Delta F(B_n^{(k)})}{a_n^{(2k-1)}}, & \text{對 } x\in B_n^{(k)},\ k=1,2,3\cdots\cdots 2^n\\[2ex] \dfrac{\Delta F(C_n^{(k)})}{a_n^{(2k)}}, & \text{對 } x\in C_n^{(k)}\end{cases}$$

令 $S_m(x)$ 爲級數 $e_{-1}^{(1)}x_{-1}^{(1)}(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n} e_n^{(k)}x_n^{(k)}(x)$

的首m項和，且令 $S_m^*(x)$ 爲 $f^*(x)$ 對Haar型P規格化正交系之富氏級數的首m項和。
欲證 $S_m(x)=S_m^*(x)$，那只需要證明 $b_s^{(k)}=e_s^{(k)}$，
$\forall s=-1,0,1,2,\cdots\cdots n$，$k=1,2,\cdots\cdots 2^s$，其中

$b_s^{(k)}=\int_0^1 f^*(x)x_s^{(k)}(x)dx$ 爲富氏級數 $S_m^*(x)$ 的係數。

$$b^{(1)}=\int_0^1 f^*(x)x_{-1}^{(1)}(x)dx=\int_0^1 f^*(x)dx$$

$$=\sum_{k=1}^{2^n}\left(\int_{B^{(k)}} f^*(x)dx+\int_{C_n^{(k)}} f^*(x)dx\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{2^n}\left(\frac{\Delta F(B_n^{(k)})}{a^{n(2k-1)}}\cdot|B_n^{(k)}|+\frac{\Delta F(C_n^{(k)})}{a_n^{(2k)}}|C_n^{(k)}|\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{2^n}\left(\Delta F(B_n^{(k)})+\Delta F(C_n^{(k)})\right)=\sum_{k=1}^{2^n}\Delta F(A_n^{(h)})$$

$$=F(1)-F(0)=e_{-1}^{(1)}$$

若 $S=n$

$$b_n^{(h)}=\int_0^1 f^*(x)\,x_n^{(k)}(x)\,dx=\sqrt{\frac{P}{a_{n=1}^{(k)}}}\int_{B_n^{(k)}}$$

$$f^*(x)dx-\sqrt{\frac{1}{Pa_{n-1}^{(k)}}}\int_{C_n^{(k)}}f^*(x)\,dx$$

$$=\sqrt{\frac{P}{a_{n-1}^{(k)}}}\;\frac{1}{a_n^{(2k-1)}}\,\Delta F(B_n^{(k)})\cdot|B_n^{(k)}|-$$

$$-\sqrt{\frac{1}{Pa_{n-1}^{(k)}}}\cdot\frac{1}{a_{n-1}^{(k)}}\cdot\frac{1}{a_n^{(2k)}}\,\Delta F(C_n^{(k)})\cdot$$

$$\cdot\, C_n^{(k)}=\frac{P}{\sqrt{a_{n-1}^{(k)}}}\,\Delta\quad F\,(\Delta F(C_n^{(k)})\cdot|C_n^{(k)}|$$

$$=\sqrt{\frac{P}{a_{n-1}^{(k)}}}\,\Delta F(B_n^{(k)})-\sqrt{\frac{1}{Pa_{n-1}^{(k)}}}\,\Delta F(C_n^{(k)})$$

$$=e_n^{(k)}$$

若 $S<n$，

對每一個 $D_n^{(k)}=B_n^{(h)}$ 或 $C_n^{(k)}$，我們都有

$$\int_{D_n^{(k)}} f^*(x)\,dx = \Delta F(D_n^{(k)})$$

因爲 $S<n$，所以，每一 $D_s^{(k)}=B_s^{(k)}$ 或 $C_s^{(k)}$ 都是由某些區間 $D_n^{(k)}$，其中 $k\in N_n\subset\{1,2,3,\cdots\cdots 2^n\}$ 的聯集所構成

；因此得到 $\displaystyle\int_{D_s^{(k)}} f^*(x)\,dx=\int f^*(x)\,dx=\sum_{k\in N_n}\int_{D_n^{(k)}}$

$$f^*(x)\,dx=\sum_{k\in N_n}\Delta F(D_n^{(k)}\ \bigcup_{k\in N_n} D_n^{(k)}$$

$$\therefore b_s^{(k)}=\int_0^1 f^*(x)\,x_s^{(k)}(x)\,dx$$

$$=\sqrt{\frac{P}{a_{s-1}^{(k)}}}\int_{B_s^{(k)}} f^*(x)\,dx-\sqrt{\frac{1}{Pa_{s-1}^{(k)}}}$$

$$\int_{C_s^{(k)}} f^*(x)\,dx$$

$$=\sqrt{\frac{P}{a_{s-1}^{(k)}}}\Delta F(B_s^{(h)})-\sqrt{\frac{1}{Pa_{s-1}^{(k)}}}$$

$$\Delta F(C_s^{(k)})=e_s^{(k)}$$

所以 $S_m(x)=S_m^*(x)$

$\forall x\in[0,1]$，則 $x\in D_n^{(k)}=B_n^{(k)}$ 或 $C_n^{(k)}$，

對某一 $k=1,2\cdots\cdots 2^n$

由定理 2 的證明過程中，我們知道

$$S_m^*(x) = \frac{1}{|D_n^{(k)}|}\int_{D_n^{(k)}} f^*(x)d$$

且因 f^* 在每一個 $D_n^{(k)}$ 上為常數值函數，故得到

$$S_m^*(x) = \frac{1}{D_n^{(h)}} f^*(x) \; |D_n^{(h)}| = f^*(x)$$

今 x 是〔0，1〕上而不在區間 $A_n^{(k)}$（$n=0, 1, 2, \ldots\ldots, k=1, 2, \ldots\ldots 2^n$）的端點上的點，且滿足 $F(x)=F(x)$，（像這樣的點是殆遍所有〔0，1〕上的點都是），則 x 就會屬於某一區間序列

$$\left\{D_\upsilon^{(k_\upsilon)}\right\}_{\upsilon=1}^{\infty}，且 \lim_{\upsilon\to\infty} \frac{\Delta F(D_\upsilon^{(k_\upsilon)})}{|D_\upsilon^{(k_\upsilon)}|} = F(x)=F(x)$$

從 f^* 的定義知，$f^*(x) = \dfrac{\Delta F(D_n^{(k)})}{|D_n^{(k)}|}$，

$$\therefore \lim_{h\to\infty} f^*(x) = F(x) = f(x)$$

再由 n 的定義，當 $m\to\infty$ 時，$n\to\infty$

$$\therefore \lim_{m\to\infty} S_m(x) = \lim_{m\to\infty} f^*(x) = \lim_{n\to\infty} f^*(x) = f(x)$$

換句話說，殆遍所有〔0，1〕上的點 x，級數 $S_m(x)$ 都會收斂到 $f(x)$，因此完成了定理 3 的證明。

(五)參考文章：

(1) G. Alexits, convergence problems of orthogonal series, pergamon press (oxford, 1961).

(2) A.A. Talaljan, The represeutation of measurable functions by series, Russian Math surveys 15 (1960), No.5 pp.75－136 MR23 ＃2704.

本文承蒙陳昭地老師指導，謹此致謝！

談談維度

指導老師：王惠中　四丙：費毓港

(I) 線性維度（Linear Dimension）

令V為一佈於體F上的向量空間，在線性代數裏，我們知道V中有限個向量 $v_1, v_2, \cdots\cdots, v_n$ 線性獨立的意思是：如果 $\exists\ \alpha_i \in F$，$\ni \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$，則 $\alpha_i = 0$，$\forall i = 1, 2, \cdots\cdots, n$。而V中任意一組向量$B$線性獨立的意思是$B$中任何有限個向量都線性獨立。否則稱為線性相依。我們用$\ll v_1, \cdots\cdots, v_n \gg$或$\ll B \gg$表示由$\{v_1, \cdots\cdots, v_n\}$或$B$所生成的子空間，注意我們只能做有限個向量的線性組合，也就是說：

$$\ll B \gg = \{ \Sigma\ \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in F,\ v_i \in B \}$$

我們稱B為V中一組基底的意思是B線性獨立以及$\ll B \gg = V$。線性代數告訴我們如果V有那麼一組只有有限個向量的基底，則它的每一組基底的元素個數都是一樣（當然，都是有限的），這個數目被定義成V的（線性）維度，記成 dim V，而V稱為有限維向量空間。否則稱為無限維的。可以看出 dim V 是 (i) V中各線性獨立向量組中最大的向量個數；

(ii) V中各能生成V的向量組中最小的向量個數。

可是，到底V中有沒有一組基底呢？很顯然，只要有一組，透過 Steinitz 替換定理可以造出更多的基底。而只要V是有限維的，從一個非零向量出發，經過有限步以後，就可以找到一組基底，否則V就是無限維的。這好像有些邏輯上的毛病，因為在定義有限維的時候，我們已經假設有一組基底存在了。所以，不管怎麼樣，我們還有必要澄清一下：

〔定理1〕（Hamel 1905）

每個向量空間都有一組基底。

〔證明〕：我們的工具是集合論的法寶 Zorn 引理，方法是利用前面的 (i) 或 (ii)。

令 $F=\{\mathcal{B}\subset V \mid \mathcal{B}$ 線性獨立$\}$

$F\neq\phi$；$(F,\subset)$ 為一半序集，

若 $A=\{\mathcal{B}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 為F中一全序集，

且 $v_1, v_2, \cdots\cdots, v_n \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{B}_\lambda$

由全序性，$\exists\lambda_0\in\Lambda \ni v_1\cdots\cdots v_n\in\mathcal{B}_{\lambda_0}$

$\Rightarrow v_1, v_2, \cdots\cdots, v_n$ 線性獨立

因此 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{B}_\lambda$ 線性獨立

$\Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{B}_\lambda \in F$

加上 $\mathcal{B}_\lambda\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{B}_\lambda$ 得到 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{B}_\lambda$ 是A的上界

由 Zorn 引理，A有極大元素 $\mathcal{B}$

我們希望 $\langle\langle\mathcal{B}\rangle\rangle=V$

否則，$\exists v\in V \quad \mathcal{B}\cup\{v\}$ 線性獨立

$\Rightarrow\mathcal{B}\cup\{v\}\in F$

但 $\mathcal{B}\subsetneq\mathcal{B}\cup\{v\}\rightarrow\leftarrow$

$\therefore\mathcal{B}$ 是V的一個基底

我們先看些例子：

例 1 ：坐標空間 $F^n = \{ (1, 0, \cdots\cdots, 0), (0, 1, 0, \cdots\cdots, 0), \cdots\cdots, (0, \cdots\cdots, 0, 1) \}$ 是 F^n 的一組基底，$\dim F^n = n$

例 2 ：多項式向量空間 $F[t] = \{ a_0 + a_1 t + \cdots\cdots + a_n t^n \mid a_i \in F,\ n \in N \}$

$\{ 1, t, t^2, \cdots\cdots, t^n, \cdots\cdots \}$ 是它的一組基底，所以 $\dim F[t] = \chi_0$

例 3 ：他們把 R 看成佈於有理數體 Q 的向量空間 R_Q

則 R_Q 是無限維的：

否則，ヨ有限個實數 $r_1, r_2, \cdots\cdots, r_n$

$$\ni \quad R = \{ \sum_{i=1}^{n} q_i r_i \mid q_i \in Q \}$$

$$\therefore \chi_1 = \text{card } R \text{（註 1）}$$

$$= \text{card} \{ \sum_{i=1}^{n} q_i r_i \mid q_i \in Q \}$$

$$= \text{card} Q^n = \text{Card } Q = \chi_0 \rightarrow\leftarrow$$

R_Q 是無限維的，要找它的一組基底却並不容易。

例 4 ：數列空間，$R^N = \{ < a_n >_{n=1}^{\infty} \mid a_n \in R,\ n \in N \}$

令 $e_1 = (1, 0, \cdots\cdots, 0, \cdots\cdots)$

$e_2 = (0, 1, 0, \cdots\cdots, \cdots\cdots)$

$\vdots$

$e_n = (0, 0, \cdots\cdots 0, 1, 0, \cdots\cdots)$（第 n 個坐標爲 1 ）

$\vdots$

則 $e_1, e_2, \cdots\cdots, e_n, \cdots\cdots$ 在 R^N 中線性獨立， R^N 是無限維的，但 $(1, 1, \cdots\cdots) \in R^N$ 並不能表示成上述向量有限個的線性組合，所以它們並不是 R^N 的一組基底。

在無限維空間裏面，我們是否可以定義維度呢？是可以的，因爲：

〔定理 2〕若 B_1 ，B_2 爲同一向量空間的基底，

則 $\operatorname{card} B_1 = \operatorname{card} B_2$

證明：如果 r 是有限維的，用 Steinitz 替換定理。

否則，令 $B_1 = \{ v_\alpha \}$ ，$B_2 = \{ u_\beta \}$

由基底的定義，

$\forall \alpha$ ， $v_\alpha = \Sigma\, a_{\alpha\beta}\, u_\beta$

其中只有有限個 $a_{\alpha\beta} \neq 0$

對應的 $U\beta$ 爲 $u(\alpha, 1)$ $u(\alpha, 2)$ $u(\alpha, n)$

定義：$\phi : B_1 \times N \to B_2$

其中 $\phi(v_\alpha, k) = u(\alpha, k)$

$v_\alpha \in B_1$ ，$k = 1, 2, \cdots\cdots, n(\alpha)$

我們要看看是不是每個 u_β 都是某個 $u(\alpha, k)$ ，也就是要看是不是 $\forall \alpha$ ，$a_{\alpha\beta}$ 至少有一個 $\neq 0$ ，這是很顯然的！對固定的 β ， $a_{\alpha\beta}$ 是 v_α 對基底 B_2 的第 β 個坐標，如果每個 $a_{\alpha\beta} = 0$ ，則 v 中每個向量對基底 B_2 的坐標都是 0 ，這是不可能的，最少 u_β 在 B_2 的第 β 個坐標是 1 啊！（嚴格的證明留給讀者）。

$\therefore \phi$ 是映成的

$\Rightarrow \operatorname{card} B_2 \leq \operatorname{card} B_1 \times N = \operatorname{card} B_1 \cdot \chi_0 = \operatorname{card} B_1$

同理 $\operatorname{card} B_1 \leq \operatorname{card} B_2$

$\therefore \operatorname{card} B_1 = \operatorname{card} B_2$ 成立

有了定理 1 ，2 我們就可以定義一個向量空間的（線性）維度爲它的一組基底的基數，記爲 dim V。

現在設 V 爲一向量空間，$\dim V = n < \infty$

(1°) 如果 V 爲有限維的，$\dim V = n < \infty$

$$\operatorname{card} V = \operatorname{card} F^n = \begin{cases} p^n & \operatorname{card} F = p < \infty \\ \operatorname{card} F, & \operatorname{card} F \geq \chi_0 \end{cases}$$

(2°) 如果 V 爲無限維的，

令 $B = \{v\alpha\}\alpha \in S$ 爲 V 的一組基底

$V = \{\Sigma\, a_\alpha v\alpha \mid a\alpha \in F$ 只有有限個不爲 0 $\}$

由於表示法之唯一性，

有 $\operatorname{card} V = \operatorname{card} \{\Sigma\, a_\alpha v_\alpha \mid a_\alpha \in F$ 只有有限個不爲 0 $\}$

$= \operatorname{card} \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(a_\alpha) \in F^s \mid a_\alpha$ 只有 n 個不爲 0 $\}$。

$= \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{card}\{(a_\alpha) \in F^s \mid a_\alpha$ 只有 n 個不爲 0 $\}$

若 $\operatorname{card} F < \infty$

則 $\operatorname{card} V = \operatorname{card} B \cdot \chi_0 = \operatorname{card} B = \dim V$

若 $\operatorname{card} F \geq \chi_0$

則 $\operatorname{card} V = \operatorname{card} F \cdot \operatorname{card} B \cdot \chi_0$

$= \operatorname{card} F \cdot \dim V$

特別 F = R 時

$\operatorname{card} V = \chi_1 \cdot \dim V$

回來看我們前面的例子：

(i) R_Q : $\chi_1 = \operatorname{card} R = \operatorname{card} Q \cdot \dim R$

$= \chi_0 \cdot \dim R$

$\therefore \dim R = \chi_1$

(ii) R^N :

我們知道 $\dim R^n = n \quad \forall n \in N$

很直接的想法是 $\dim R^N = \operatorname{card} N = \chi_0$ 。

其實不然，我們後面可以證明即使 R^N 的一個子空間

$\ell_2 = \{ (x_n) \in R^N \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \}$ 的維度就已經

是 χ_1 ，而且 $\operatorname{card} R^N = \chi_1^{\chi_0} = (2^{\chi_0})^{\chi_0} = 2^{\chi_0}$

$= \chi_1$

加上 $\operatorname{card} R^N = \chi_1 \cdot \dim R^N$

$\therefore \dim R^N = \chi_1$

(iii) $R^N = \{ f : R \to R \}$

$\chi_2 = \operatorname{card} R^R = \chi_1 \cdot \dim R^R$

$\therefore \dim R^R = \chi_2$

(iv) 再看幾個空間：

$C[a,b] = \{ f : [a,d] \to R \mid f$ 連續 $\}$

$R[a,b] = \{ f : [a,b] \to R \mid f$ Riemann 可積 $\}$

$L[a,b] = \{ f : [a,b] \to R \mid f$ Lebesgue 可積 $\}$

$S[a,b] = \{ f : [a,b] \to R \mid f$ 爲單純函數 $\}$

$X[a,b] = \{ f : [a,b] \to R \mid f$ 爲一 Borel 集上的特徵函數 $\}$

$BV[a,b] = \{ f : [a,b] \to R \mid f$ 爲有界變差 $\}$

$I[a,b] = \{ f : [a,b] \to R \mid f$ 爲遞增函數 $\}$

$C^*[a,b] = \{ \phi : C[a,b] \to R \mid \phi$ 爲連續（有界）線性函數 $\}$

因爲 $\operatorname{card} R[t]=\aleph_1$ $\dim R[t]=\aleph_1\cdot\aleph_0=\aleph_1$

由 Stone–Weieretrass 定理：

$\operatorname{card} C[a,b]\leq\operatorname{card}\{(f_n)\mid f_n\in R[t],n=N\}$

$=\aleph_0\cdot\operatorname{card} R[t]=\aleph_1$

得到 $\operatorname{card} C[a,b]=\aleph_1$ $\Rightarrow\dim C[a,b]\leqq\aleph_1$

考慮 $f_\lambda(t)=|t|^\lambda$， $t\in[a,b]$， $\lambda>0$

則 $\{f_\lambda\mid\lambda>0\}$ $C[a,b]$ 上線性獨立，（證證看）

$\Rightarrow\dim C[a,b]=\aleph_1$

也因此 $\dim L[a,b]\geq\dim R[a,b]\geq\dim C[a,b]$

$=\aleph_1$ 。

由實變數函數論的知識知：

$\operatorname{card}\{B\mid B\subset[a,b]$ 的 Borel 集 $\}=\aleph_1$

$\Rightarrow\operatorname{card} X[a,b]=\aleph_1$

$\Rightarrow\operatorname{card} S[a,b]=\aleph_1$

$\operatorname{card} L[a,b]\leq\operatorname{card}\{(f_n)\mid f_n\in S[a,b],n\in N\}$

$=\aleph_1$

所以（其實直接用 $C[a,b]$ 也可以）得到：

$\dim L[a,b]=\dim R[a,b]=\aleph_1$

其次利用超限歸納的步驟，可以證得：

$\operatorname{card} I[a,b]=\aleph_2$

利用 C.Jordan 的一個定理，有 $\operatorname{card} BV[a,b]=\aleph_2$

$\Rightarrow\dim BV[a,b]=\aleph_2$

Riesz 表現定理告訴我們 $C^*[a,b]\cong BV[a,b]$（線性同構）。

所以 $\dim C^*[a,b]=\aleph_2$

因此 $\dim C[a,b]<\dim C^*[a,b]$

提供了一個對偶空間與原來空間有相同維度的反例。

(V) 給任意的基數 χ ，我們可以造一個向量空間使得它的維度恰是 χ ：先找一個集合 S ，其中 S 的基數為 χ （一定可找到，嚴格說，χ 本身就是）。

再定 $Free(S) = \{ f : S \to R \mid$ 只有有限個 $f(s) \neq 0 \}$

稱為 S 上的自由空間，

考慮 $f_a(s) = \begin{cases} 1, & s = a \\ 0, & s \neq a \end{cases}$

則 $\{ f_a \mid a \in s \}$ 為 Free(s) 的一組基底，

這是因為 $f \in Free(s) \Rightarrow f = \sum_s f_a(s) f_s$ ，（有限和）

而 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f a_i = 0 \Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_{a_i}(a_j) = \alpha_j$ ，

$j = 1, 2, \cdots\cdots, n$

因此 $\dim Free(s) = card\ S = \chi$

這樣可以保證向量空間有足夠多啦！

(vi)在前面，我們有：

$card\ V = \dim V\ card\ F$

現在令 $V = F^d$ ，d 為一個基數

前面的 R^N 告訴我們，$\dim F^d$ 不一定是 d

令 k 為 F 的基數

$\therefore k^d = card\ F^d = \dim F^d \cdot k$

其實，可證得：

當 $d \geq \chi_0$ 時，$k \leq \dim F^d$

因此 $\dim F^d = k^d = (card\ F)^d$

請參考 Köthe 〔7〕P.75

又當 $\dim V = d \geq \chi_0$ 時，

令 $V^* = \{ f : V \to R \mid f$ 為線性函數 $\}$

爲V的對偶空間（跟$C^*[a,b]$的意義有差別）

容易證明$V^* \cong R^d$（線性同構）

因此 $\dim V^* = \dim R^d = (card)^d = 2^d$

$\Rightarrow \dim V^* > \dim V$

所以前面$C^*[a,b]$的例子就不會太過驚奇了。

(II) 正交維度（Orthogonal Dimension）

現在開始，我們把討論的空間限制在佈於R的完備內積空間，即Hilbert空間中。而用$<\ ,\ >$表示其中的內積。

在R^n中，利用Gram-Schmidt就範直交化，可以找到R^n中的一組基底$\{v_1, \cdots\cdots, v_n\}$，其中$<v_i, v_j> = \delta_{ij}$, $\forall\, ij$

稱爲R^n的一組就範直交基（Orthonomal basis）

在無限維的Hilbert空間H中，這種步驟只能替我們找到一列就範直交的向量而已，但利用Zorn引理，跟我們前面的證明一樣，可以找到一個極大的就範直交族$\mathcal{B} = \{v_\alpha\}$這時，有Fourier展開式

$:\forall v \in H \quad v = \Sigma <v, v_\alpha> v_\alpha$

由Bessels不等式$\sum\limits_{有限個} \left| <v, v_\alpha> \right|^2 \le \|v\|^2$，知B中與v不垂直的向量$v_\alpha$頂多只有可數個，再利用「絕對收斂⇒收斂」知上面的Fourier展開式是有意義的。（其實，Σ也可以定義不可數個向量的和，參考Halmos〔4〕P.17）。

我們想定義另一種維度，首先：

〔定理3〕：若M_1, M_2爲H的兩個極大就範直交族，

則 $card\ M_1 = card\ M_2$

〔證明〕：令$M_1 = \{v_\alpha\}$，$M_2 = \{u_\beta\}$（無限）

$\forall \alpha, \quad v_\alpha = \sum\limits_{\beta} <v_\alpha, u_\beta>$

$<v_\alpha, u_\beta>$不爲0的只有可數個

令對應的 u_β 爲 $u(\alpha,1), u(\alpha,2), \cdots\cdots$

$\forall \beta$，$\because M_1$ 爲極大直交族

$\therefore u_\beta$ 不可能垂直所有的 v_α，

ie: $\exists\ \alpha \ni \langle v_\alpha, u_\beta \rangle \neq 0$

$\therefore u_\beta$ 爲某個 $u(\beta, k)$

類似定理 2 ，我們可以造一個由 $M_1 \times N$ 到 M_2 的映成函數。

$\therefore \text{card } M_2 \leq \text{card } M_1 \cdot \chi_0 = \text{card } M_1$

同理 $\text{card } M_1 \leq \text{card } M_2$

$\therefore$定理得證。

我們定義 Hilbert 空間的正交維度爲它的一組極大就範直交族的基數，記爲 Dim H 。如此的一組極大就範直交族稱爲一組就範直交基。

因爲「互相垂直$\Rightarrow$線性獨立」，所以 $\text{Dim } H \leq \dim H$，其次，線性代數告訴我們當 $\dim H < \infty$ 時，$\text{Dim } H = \dim H$。至於無限維 Hilbert 空間，則是近代分析的熱門話題，我們也想透過一些分析的步驟來了解它們的維度。首先，有下面的分類法：

(i) 兩個向量空間 V_1, V_2 線性同構 $\leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2$

(ii) 兩個 Hilbert 空間 H_1, H_2 等距同構 $\leftrightarrow \text{Dim } V_1 = \text{Dim } V_2$

其實在一般的分析領域裏面，所牽涉的極限過程大部份都是可數的步驟，當然我們不能要求整個空間只有可數個點，但如果有一個可數的稠密子集，我們就可以先把注意力集中在這個子集上，把大部份的性質利用極限的連續動作推廣到整個空間上，這樣的一個空間稱爲可析空間，是分析裏面重要的話題，它們的維度我們也很關心。（其實，後面我們所提到的拓樸維度也幾乎都建立在可析空間上）。回來看前面的 ℓ_2，記得

$$\langle \langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_n y_n$$

$B = \{ e_n = (0 . \cdots\cdots, 0, 1 . 0 \cdots\cdots) \mid n \in N \}$

B 爲 ℓ_2 的一個就範直交基．也就是說：$\text{Dim}\,\ell_2 = \chi_0$

而由 Riesz－Fisher 定理知 ℓ_2 等距同構於 $L_2 = \{ f : R \to R \mid \int |f|^2 < \infty \}$（其中所牽涉的積分是R上的Lebesgue積分），所以 $\mathrm{Dim} L_2 = \chi_0$ 那 ℓ_2 是不是可析空間呢？

考慮 $D = \{ \Sigma q_n e_n \mid q_n \in Q$ 只有有限個 $\neq 0$，$n \in N \}$

$$\forall v \in \ell_2,\ v = \sum_{n=1}^{\infty} < v,\ e_n > e_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} < v\ ,\ e_k > e_k$$

$$\forall \epsilon > 0\ ,\ \exists n_0 \in N \quad \ni \quad \| v - \sum_{k=1}^{n_0} < v_1\ e_k > e_k \|\ \epsilon/2$$

又 $\exists\, q_k,\ k=1,2,\cdots\cdots,n_0 \quad \ni \sum_{k=1}^{n_0} | < v_1, e_k > | < \epsilon/2$

令 $d = \sum_{k=1}^{n_0} q_k e_k \in D$

利用三角不等式，立即有 $\| v - d \| < \epsilon$

ie: $v \in \overline{D}$

因此 $\overline{D} = \ell_2$

ℓ_2 為一可析空間

很顯然地，證明過程根本沒有用到 ℓ_2 的甚麼特別性質，將 ℓ_2 改為任一個 $\mathrm{Dim}\ H = \chi_0$ 的Hilbert 空間，$\{ e_n \}$ 改成它的一組就範直交基，結論也成立。

ie: $\mathrm{Dim}\ H = \chi_0 \Rightarrow$ 可析

那另一個方向會成立嗎？當然不會，R^n 就是一個例子，可是在無限維的情況就成立了，我們把它列成：

〔定理 4〕：若H為一無限維Hilbert空間

則「$\mathrm{Dim}\ H = \chi_0 \leftrightarrow H$ 可析」

〔證明〕：令D為H的一個可數稠密子集，將D中線性相依的向量去掉（方法有很多種），再利用Gram-Schmidt就範直交化，得到一列向量 $\{ v_n \}$，其中 $(v_i,\ v_j) = \delta_{ij}$，若

$v \in H$ 跟所有 v_n 垂直，則 v 跟 D 中的向量都垂直，又

$\exists\ d_n \in D \ni d_n \to v$

利用範數的連續性及畢氏定理：

$\| d_n \|^2 + \| v \|^2 = \| d_n - v \|^2 \to 0$

$\therefore v = 0$

因此 $\{ v_1, \cdots\cdots, v_n, \cdots\cdots \}$ 是 H 的一組就範直交基，

$\mathrm{Dim}\ H = \chi_0$

這也可以說明 L_2 也是一個可析空間，而任何兩個無限維的可析 Hilbert 空間都是等距同構的。

我們知道 $\mathrm{Dim} L_2 = \chi_0$，那 $\dim L_2$ 是多少呢？

考慮 $B = \{ f \in L_2 \mid f$ 爲 R 上某一點的特徵函數 $\}$

所謂 f 爲 $x_0 \in R$ 的特徵函數的意思是

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases}$$

顯然 $f \in L_2$，$(\int |f|^2 = 0)$

而 B 是綫性獨立的，（但 $\ll B \gg \neq L_2$）

$\therefore \quad \dim L_2 \geqq \mathrm{card} B = \chi_1$

因此在無限維 Hilbert 空間中，DimH，dimH 並不一定相等的。

設 H 爲一無限維的 Hilbert 空間，

$B = \{ v_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$ 爲其一個就範直交基。

則 $H = \{ \Sigma a_\lambda v_\lambda \mid \langle a_\lambda \rangle \subset R^\Lambda$ 頂多可數個不爲 0 $\}$

我們先看 Λ 有多少可數子集，也就是要看 Λ^N 中有多少個是 1 對 1 的，令爲 χ

如果 $\mathrm{card}\ \Lambda = \mathrm{Dim}\ H = \chi_0$

則 $\chi = \mathrm{card}\ 2^\Lambda = 2^\chi = \chi_1$

如果 $\mathrm{card}\ \Lambda = \mathrm{Dim}\ H \geqq \chi_1$

則 $\chi \geqslant \mathrm{card}\ \{ \Lambda$ 的有限子集 $\}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \{ \Lambda 的 n 個元素的子集 \}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{card}\Lambda \cdot \chi_0 = \mathrm{card}\ \Lambda$$

顯然 $\chi \leqslant \mathrm{card}\ \Lambda^{N} = (\ \mathrm{card}\ \Lambda\ )^{\chi_0} = \mathrm{card}\ \Lambda$

$\therefore \quad \chi = \mathrm{card}\ \Lambda = \mathrm{Dim}\ H$

因此 $\mathrm{card}\ H = \mathrm{card}\ R \cdot \mathrm{card}\ \Lambda = \mathrm{card}\ \Lambda = \begin{cases} \chi_1 & ,\ \mathrm{Dim}\ H = \chi_0 \\ \mathrm{Dim}\ H & ,\ \mathrm{Dim}\ H \geqslant \chi_1 \end{cases}$

例如因爲 $\mathrm{Dim} L_2 = \chi_0$，所以 $\mathrm{card}\ L_2 = \chi_1$

把前面綫性維度與正交維度分別與 card H 的關係連結起來，有

$$\chi_1 \cdot \dim H = \mathrm{card}\ H = \begin{cases} \chi_1 & ,\ \mathrm{Dim}\ H = \chi_0 \\ \mathrm{Dim}\ H & ,\ \mathrm{Dim}\ H \geqslant \chi_1 \end{cases}$$

(i) 若 $\mathrm{card}\ H \geqslant \chi_2$，

$$\dim H = \mathrm{Dim}\ H = \mathrm{card}\ H$$

(ii) 若 $\mathrm{card}\ H = \chi_1$，

$\dim H$，$\mathrm{Dim}\ H$ 都有 χ_0，χ_1 兩種可能性，

但 $\because \quad \mathrm{Dim}\ H \leqslant \dim H$

$\therefore$ 當 $\mathrm{Dim}\ H = \chi_1$

$$\dim H = \mathrm{Dim}\ H = \mathrm{card}\ H$$

剩下，若 $\mathrm{Dim}\ H = \chi_0$，等號會成立嗎？當然不會，前面的 L_2 就是個例子。在 Halmos〔5〕Problem 5，告訴我們有這麼一回事：

定理 5：若 H 爲 Hilbert 空間，

則 $\mathrm{Dim}\ H = \chi_0 \Rightarrow \dim H = \chi_1$

證：令 $J_t = \{ q_n \mid q_n \in Q,\ t + \dfrac{1}{n+1} < q_n < t + \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \}$，$t \in R$

顯 $\mathrm{card}\ J_t = \chi_0$，$\forall t \in R$，$\mathrm{card}\ (\ J_s \cap J_t\ ) < \infty$，$\forall s \neq t$

現在將Q排成一列：q_1，q_2，……，q_n，—……

如果 Dim H $=\chi_0$，令 $\{e_{q_n}\}$ 爲其一就範直交基

令 $v \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e_{q_n} \in H$ （絕對收斂⇒收斂）

$$v_t = \sum_{q_n \in J_t} \frac{1}{n^2} e_{q_n} \in H$$

$$\text{card}\ \{v_t \mid t \in \mathbb{R}\} = \chi_1$$

我們只要證明 $\{v_t \mid t \in R\}$ 線性獨立就好啦！

如果 $0 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_{t_i} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \sum_{q_n \in J_{t_i}} \frac{1}{n^2} e_{q_n} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{q_n \in t_i} \frac{1}{n^2} \alpha_i e_{q_n}$

當 $i \neq 1$，$J_{t_1} \cap J_{t_i}$ 是有限集，而 J_{t_1}，J_{t_i} 爲無限集，

$\Rightarrow J_{t_1} - J_{t_i}$ 爲無限集，　$i = 1, 2, \cdots\cdots, k$

$\Rightarrow J_{t_1} - \bigcup_{i=2}^{k} J_{t_i} \neq \phi$

設 $q \in J_{t_1} - \bigcup_{i=2}^{k} J_{t_i}$

則 $0 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{q_n \in J_{t_i}} \frac{1}{n^2} \alpha_i e_{q_n} = \alpha_1 e_q + \sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{q_n \in J_{t_i} \\ q_n \neq q}} \cdot \frac{1}{n^2} \alpha_i e_{q_n}$

$\Rightarrow \alpha_1 = 0$

同理 $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots\cdots = \alpha_k = 0$

$\therefore \{v_t \mid t \in R\}$ 線性獨立

$\Rightarrow \dim H \geq \chi_1$

加上我們前面的討論，得 $\dim H = \chi_1$

這個定理的證明雖略爲技巧，但看它裏面對 q_t，v 的要求都是很鬆的，可以換成很多不同的形式，通常這表示可能定理的背後還隱藏著一些重要的秘密，留給讀者去發現。

現在我們把兩種維度的關係表列如下：H爲Hilbert空間

Dim H	n	χ_0	χ	, $\chi > \chi_1$
dim H	n	χ_1	χ	

也就是說，根本沒有 dim H = λ'_0 的Hilbert空間

前面說 $\mathrm{Dim}\,\ell_2 = \mathrm{Dim}\,L_2 = \chi_0$

$\therefore \mathrm{dim}\,\ell_2 = \mathrm{dim}\,L_2 = \chi_1$（還了前面的債）

還有，每個可析的Hilbert空間的線性維度都是 χ_1

前面，多項式向量空間 R〔t〕，dim(R〔t〕)= χ_0 ，所以無論怎樣定義內積，R〔t〕都不會完備的，這其實必然的，如果在R〔t〕能定一個完備的內積的話，Stone－Weierstrass定理及Taylor展開式就完蛋啦！但在Banach空間裏面，這兩個寶貝就已經成立了！

Hilbert空間裏面因爲有內積，所以有角度與垂直的觀念，能夠定義一個正交維度。那在一般的Banach 空間又怎麼辦呢？透過極限的步驟，我們有以下的定義：

若（V，‖ ‖）爲一Banach空間，$\mathcal{B} \subset V$

且 $\forall v \in V$，$(V_n) \subset \mathcal{B}$　$\alpha_n \in R$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n \text{ 有唯一的表示法}$$

則稱 $\mathcal{B}$ 爲V的一個Schauder基底

在Hilbert空間中，顯然：就範直交基⇒Schauder基底，無論如何，我們有一個較定理4一般的結果：

V有一個可數Schauder基底⇒V可析，

〔例〕：$\ell_p = \{ (x_n) \subset R \mid \Sigma \mid x_n \mid^p < \infty \}$，$1 < p < \infty$

$C = \{ (x_n) \subset R \mid x_n \text{ 收斂} \}$　$\ell_\infty = \{ (x_n) \subset R \mid x_n \text{ 有界} \}$

$C_0 = \{ (x_n) \subset R \mid x_n \to 0 \}$

它們都是R^N的向量子空間，也是Banach空間，而且

$$\ell_p \subset \ell_q \subset \ell_\infty \subset C_0 \subset C \quad , p \leq q$$

已知$\dim \ell_2 = \chi_1 = \dim R^N$

$\therefore \dim \ell_p = \dim C_0 = \dim C = \chi_1$ ，$2 \leq p \leq \infty$

它們一般向量空間的基底實在難找，除了ℓ_2外又都不是Hilbert 空間，沒有甚麼就範直交基，但很容易證明：

$(e_n)_{n=1}^{\infty}$是ℓ_p，C_0，$1 \leq p < \infty$的一個Schauder基底，而$(e_n)_{n=0}^{\infty}$是C的一個Schauder基底，

其中$e_n = (0, 0, \cdots\cdots, 0, 1, 0, \cdots\cdots)$，$n \geq 1$

$e_0 = (1, 1, \cdots\cdots, 1, \cdots\cdots)$

$\therefore \ell_p$，$1 \leq p \leq \infty$，C_0，C都是可析空間，

而ℓ_∞却沒有可數的Schauder基底，

因爲$B = \{ e_s \mid e_s = (e_s^n)_{n=1}^{\infty}, S \subset N \}$，

$$e_s^n = \begin{cases} 1, & n \in S \\ 0 & n \notin S \end{cases}$$

則$\| e_s - e_T \| = 1$，$\forall S \neq T$，$\operatorname{card} B = \chi_1$

$\therefore \ell_\infty$不可析

注意B並不是ℓ_∞的Schauder基底，

因爲$(1, 0, 0, \cdots\cdots) = e_{\{1\}} = e_{\{1,3\}} - e_{\{1\}}$

表示法不唯一

再看ℓ_1，因爲$(e_n)_{n=1}^{\infty}$是它的一個可數Schauder基底，模仿剛才我們說還有秘密的那個定理，可證得$\dim \ell_1 \geq \chi_1$

但早知道$\dim \ell_1 \leq \dim R^N = \chi_1$

$\therefore \dim \ell_1 = \chi_1$

綜合起來，$\dim \ell_p = \chi_1 \quad 1 \leq p \leq \infty$

(III) 談談其他的維度

前面我們講的都是平直的向量空間的維度，至於其他較一般的集合，我們能不能給它們一個維度呢？

先看 R^n 中單位球面 $S^{n-1} = \{ x \in R^n \mid \|x\| = 1 \}$，可以證得它的 n 維體積（Lebesgue 測度）為 0，而却具有（$n-1$）維的體積（表面積）$n\,\omega(n)$，其中 $\omega(n) = \dfrac{\Gamma(\frac{1}{2})^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \dfrac{2(\sqrt{\pi})^n}{n\,\Gamma(\frac{n}{2})}$ 為 R^n 中單位球 $\{ x \mid \|x\| < 1 \}$ 的 n 維體積，參考林義雄，林昭雄的理論分析下册 p.310。

由 Lebesgue 測度的理論，在計算這種體積時，我們是將 n 維與（$n-1$）維的正方體將球面蓋住，求出共有的體積，慢慢將正方體邊長縮短，求出這種體積的最大下界（當然是發生在正方體邊長 $\to 0$ 時）。我們把正方體的邊長看作變數，按這種步驟也可以求出 S^{n-1} 的 $n-2$，$n-3$，……維的體積，容易看出它們都是 ∞，因此如果要賦與 S^{n-1} 一個有意義的維度，很自然的定為 $n-1$，但不難想像有些 R^n 的子集可能 k 維體積為 0，而 $k-1$ 的維體積已經是 ∞（如 R^n 中的 k 維線性子空間），那怎麼辦啦？是否可以用一個介于 $k-1$ 與 k 之間的數，在某種意味著下，有非 0 有限的體積呢？有些集合的形狀很怪，所以不能再單以正方體來覆蓋了！

令 $r \geq 0$，若 $A \subset R^n$，$\delta > 0$

$$\text{定 } U_r^{\delta}(A) = \inf_{\substack{\cup A_n \supset A \\ \operatorname{diam} A \leq \delta}} \sum (\operatorname{diam} A_n)^r$$

其中用 $\operatorname{diam} A_n = \operatorname{Sup}\{ \|x-y\| \mid x, y \in A_n \}$ 代替正方體的邊長注意 $\inf \phi = \infty$，

如果 A_n 只取正方體，則 δ 改變時，$U_r^{\delta}(A)$ 沒有影響，否則可看出 δ 愈小時，$U_r^{\delta}(A)$ 愈大。

再定 $H_r(A) = \sup_{\delta} U_r^{\delta}(A) = \lim_{\delta \to 0} U_r^{\delta}(A)$

可證明 H_r為 R^n上一外測度，稱為 Hausdorff-r 外測度，又如果

$\exists r \geq 0 \ni H_r(A)$ 非 0 有限，

則這個 r 是唯一的，

而且 $H_\alpha(A) = 0 \ , \alpha > r$

$= \infty \ , 0 \leq \alpha < r$

這時，我們定義 A 的 Hausdorff 維維為 r，

記成 $H - \dim A = r$

有 $H - \dim S^{n-1} = n - 1$

$H - \dim R^n = n$

而當 $H - \dim A = n$，A的 $H - r$ 外測度與 r 維 Lebesgue 測度只差一個常數倍，如同前面所說的，此種連續型的維度賦與一些在分析上重要的集合一個非 0 有限的測度：

如令 S_3 為〔0，1〕之間的 Cantor 集，

則 $H_0(S_3) = \infty$，$H_1(S_3) = 0$

其實 Hausdorff 算出 $0 < H - \dim S_3 = \dfrac{\log 2}{\log 3} < 1$

且 $H_{\frac{\log 2}{\log 3}}(S_3) = 1$　參考〔6〕

最後，對於一般的拓樸空間（主要是可析的），又怎樣定義維度呢？當然，所定出來的維度具拓樸不變性，也希望保持諸如 $\dim R^n = n$ 等性質，（幸好，Brouwer 證明 R^m 與 R^n 並不是同胚 $m \neq n$，見 Dugundji, Topology p.359）。

我們的定義如下：（Brouwer, Menger, Urysohn）

若 X 為一拓樸空間，

(1)只有 ϕ 的維度為 −1

(2) X在p點的維度≤n ⇔ ∀ p的鄰域U，∃ p的鄰域V ⊂ U ∋ {V的邊界點}維度≤n－1

(3) X在p點的維度＝n ⇔ X在p點的維度≤n，但不≤n－1

這種由遞廻定義出來的維度竟然是局部性的維度！〔6〕

其實還可以有別的維度，如Lebesgue維度，Analytic維度等等（參考Gillman, Rings of Continuous Functions p.240起）。其次，我們前兩段討論的都集中在無限維空間上，其實有限維空間的線性維度本身就有很豐富的結果，有興趣可參考〔3〕或Curtis的Matrix Groups。

我們以Halmos的一段話來結束本文：

"For the pure mathematician, his subject is an inexhaustible source of artistic pleasure : not only the excitement of the puzzle and the satisfaction of the victory (if it ever comes!), but mostly the joy of contemplation. The challenge doesn't come from our opponent who can win only we lose, and the victory doesn't disappear as soon as it's achieved (as in tennis, say); the challenge is the breathtakingly complicated logical structure of the universe, and victory is permanent (more like recovering precious metal from a sunken ship)".

Paul R. Halmos, Applied Mathematics is bad Mathematics.
(Mathematics Tomorrow)

願我們的數學系更茁壯，更有魄力；願世界和平。

Ref：〔1〕王惠中老師的筆記（泛函）
〔2〕林義雄老師的筆記（實變）
〔3〕林義雄老師　向量，仿射空間
〔4〕P.R.Halmos　Hilbert Space
〔5〕P.R.Halmos　A Hilbert Space Problem Book
〔6〕W.Hurewicz；H.Wallman　Dimension Theory
〔7〕G.Köthe　Topological Vector Space I
〔8〕Wheeden，Zygmund　Measure and Integral

註1：在本文中假設連續量公理成立：$\chi_{n+1}=2^{\chi_n}$

本文承蒙王惠中老師指導，謹此致謝。

※Boolean Algebra, Boolean Ring, Stone's Theorem簡介

指導老師　呂溪木　三甲　羅昭強

在 1854 年，英國數學家 George Boole 在他的著作 Investigation of the Laws of Thought 中，首先提出 Boolean algebra 在邏輯學上可用來分析命題的演算，而且它在機率論中亦扮演着一個基本角色。當我們定義“布氏代數”（Boolean algebra）時，可從集合的觀點去定義，亦可透過“絡”（lattices）來定義。在這兒，我們較爲喜愛後者的定義，因爲這對以下的敍述較爲方便。

在討論“絡”之前，我們先看看偏序集合是什麼？

〔定義 1〕　偏序集合（partially ordered set）乃是一個集合 S 和它上面的一個二元關係“$\geq$”（binary relation）滿足下列條件：

（P 01）　$a \geq a$　(reflexivity)

（P 02）　若 $a \geq b$ 且 $b \geq a$，則 $a = b$　(anti-symmetry)

（P 03）　若 $a \geq b$，$b \geq c$，則 $a \geq c$　(transitivity)

〔例 1〕　設 Z_+ 表所有正整數，並在 Z_+ 上定義關係“$\geq$”如下：

$a \geq b$ 若且唯若 $a \mid b$

則（Z_+，$\geq$）爲偏序集合。

〔定義 2〕　設（S，$\geq$）爲一偏序集合

若 $u \in S$ 且 $u \geq a$，$\forall a \in S$，則稱 u 爲 S 之上界（upper bound）；

若 u 爲 S 之上界，且對所有 S 之上界 v 恆有 $v \geq u$，則稱 u 爲 S 之最小上界（least upper bound）。

若 $u \in S$ 且 $u \leq a$，$\forall a \in S$，則稱 u 爲 S 之下界（lower bound）；

若 u 爲 S 之下界，且對所有 S 之下界 v 恆有 $v \leq u$，則稱 u 爲 S 之最大下界（greatest lower bound）。

明顯地，由（P 02）可得：若 S 的最小上界 u（最大下界）存在，則 u 是唯一的。

現在，我們介紹以下的定義：

〔定義 3〕：絡——乃是一個偏序集合，其上任意兩個元素 x，y 都有最小上界和最大下界。

我們將 x，y 的最小上界記爲"$x \vee y$"；最大下界記爲"$x \wedge y$"。

我們試從 $x \vee y$ 和 $x \wedge y$ 來看絡 L 的一些基本性質：從 $x \wedge y$ 和 $x \vee y$ 的定義可知它們有對稱性，所以

（L 1）　$x \vee y = y \vee x$；　$x \wedge y = y \wedge x$　（commutative）

又　$(x \vee y) \vee z$ 乃 x，y，z 的最小上界，

$(x \wedge y) \wedge z$ 乃 x，y，z 的最大下界。

因此我們可得：

（L 2）　$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$；

$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (z \wedge z)$。　（associative）

又因爲對所有 $x \in L$，在 $\vee$，$\wedge$ 的合成運算中，x 是等冪的（idempotent），所以

（L 3）　$x \vee x = x$；　$x \wedge x = x$　（idempotent）

若 $x \geq y$，則

(L 4) $(x \vee y) \wedge x = x$; $(x \wedge y) \vee x = x$ (absorption)

反過來看，若L是一集合，其上定義兩個二元合成（binary compositions）$\vee$，$\wedge$ 滿足（L 1）——（L 4），欲證L是絡，且 $x \vee y$，$x \wedge y$ 分別爲 x，y的最小上界和最大下界。

我們首先應注意到 $x \vee y = x$ 和 $x \wedge y = y$ 是等價的。

設 $x \vee y = x$，則

$x \wedge y = (x \vee y) \wedge y$ （由假設）

$= (y \vee x) \wedge y$ （由L 1）

$= y$ （由L 4）

同理 $x \wedge y = y \Rightarrow x \vee y = x$

定義"$\geq$"如下：

$x \geq y \Rightarrow x \vee y = x$ $(x \wedge y = y)$

$\because$ $x \vee x = x$

$\therefore$ $x \geq x$ （P 01成立）

若 $x \geq y$，$y \geq x$，則 $x \vee y = x$，$y \vee x = y$

$\Rightarrow x = x \vee y = y \vee x = y$ （P 02成立）

反之亦然。

若 $x \geq y$，$y \geq z$，則 $x \vee y = x$，$y \vee z = y$

$\Rightarrow x \vee z = (x \vee y) \vee z$

$= x \vee (y \vee z)$

$= x \vee y$

$= x$

$\Rightarrow x \geq z$ （P 03成立）

因（P 01）-（P 03）成立，所以（L ; $\geq$）乃偏序集合。

由（L 4） $(x \vee y) \wedge x = x \Rightarrow x \vee y \geq x$

$(x \vee y) \wedge y = (y \vee x) \wedge y = y \Rightarrow$

$x \vee y \geq y$

設　$z \geq x$，$z \geq y$，則　$z \vee x = z$，$z \vee y = z$

因此

$$\begin{aligned} z \vee (x \vee y) &= (z \vee x) \vee y \\ &= z \vee y \\ &= z \end{aligned}$$

故　$z \geq x \vee y$

所以　$x \vee y$ 爲 x，y 的最小上界

同理　$x \wedge y$ 爲 x，y 的最大下界

因此，我們可利用（L 1）－（L 4）來定義絡。這樣的定義使絡更能接近抽象代數。接着我們來定義"補絡"（complemented lattices）。

〔定義 4〕　補絡 L 乃是一個絡，它包括兩個不同的元素 0，1，滿足下列條件：

(1)　$0 \leq x \leq 1 \quad \forall x \in L$，　即

$x \vee 0 = x$；　$x \wedge 1 = x$

(2)　$\forall x \in L$，　$\exists x' \in L \ni$

$x \wedge x' = 0$；　$x \vee x' = 1$

接着，我們向各位介紹

〔定義 5〕　布氏代數乃是一個補絡 L 而且滿足分配律：

$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$；

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

$\forall x, y, z \in L$

在布氏代數中，除了我們所熟悉的法則外，還有一個較爲陌生的法則——補律（complement law），值得我們作深入討論。

一般在群（group）中，我們知道每一個元素都有唯一的一個反元素，而在布氏代數 B 中，我們試圖探討一下是否每一個元素 x，對它的補元素 x' 也擁有群中反元素的性質？

(1) x' 之唯一性：

設存在兩個 x' ， $x'' \in B \ni$

$x \vee x' = 1 \qquad x \wedge x' = 0$

$x \vee x'' = 1 \qquad x \wedge x'' = 0$

$$\begin{aligned}\because\ x' &= x' \wedge 1 \\ &= x' \wedge (x \vee x'') \\ &= (x' \wedge x) \vee (x' \wedge x'') \\ &= 0 \vee (x' \wedge x'') \\ &= x' \wedge x''\end{aligned}$$

同理可得 $x'' = x'' \wedge x'$

$\therefore\ x' = x' \wedge x'' = x'' \wedge x' = x''$

因此，補元素有唯一性。

(2) $(x')' = x$

因為補元素有唯一性且布氏代數滿足交換律，所以

$(x')' = x$

(3) $0' = 1$ ， $1' = 0$

$\because\ 0 \vee 1 = 1$ ， $0 \wedge 1 = 0$

顯然 $0' = 1$

又因為 $0 = (0')'$

所以 $1' = 0$

(4) $\forall x$ ， $y \in B$

$(x \vee y)' = x' \wedge y'$ ； $(x \wedge y)' = x' \vee y'$

因為補元素有唯一性，所以只需證明

$(x \vee y) \vee (x' \wedge y') = 1$ ；

$(x \vee y) \wedge (x' \wedge y') = 0$ 即可

$\because\ (x \vee y) \vee (x' \wedge y')$

$= [(x \vee y) \vee x'] \wedge [(x \vee y) \vee y']$

$= [(x \vee x') \vee y] \wedge [x \vee (y \vee y')]$

$= (1 \vee y) \wedge (x \vee 1)$

$= 1 \wedge 1$

$= 1$

$\because \quad (x \vee y) \wedge (x' \wedge y')$

$= (x' \wedge y') \wedge (x \vee y)$

$= [(x' \wedge y') \wedge x] \vee [(x' \wedge y') \wedge y]$

$= [(x' \wedge x) \wedge y'] \vee [x' \wedge (y' \wedge y)]$

$= (0 \wedge y') \vee (x' \wedge 0)$

$= 0 \vee 0$

$= 0$

所以得　$(x \vee y)' = x' \wedge y'$

同理得　$(x \wedge y)' = x' \vee y'$

在這兒試舉一些例子以幫助了解：

〔例 2〕　設 X 乃非空子集且 $P(X)$ 爲 X 的冪集合，則 $(P(X), \cup, \cap)$ 乃一布氏代數

取　$0 = \phi$，　$1 = X$　即可

〔例 3〕　設　$B = \{1, 2, 5, 10\}$

定義　$a \vee b = \mathrm{lcm}(a, b)$

$a \wedge b = \gcd(a, b)$，　$\forall a, b \in B$

則

$\vee$	1	2	5	10
1	1	2	5	10
2	2	2	10	10
5	5	10	5	10
10	10	10	10	10

$\wedge$	1	2	5	10
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
5	1	1	5	5
10	1	2	5	10

明顯地，10是B中的零元素

1是B中的單位元素

且 $1' = 10$， $2' = 5$， $5' = 2$， $10' = 1$

若我們注意一下，布氏代數的定義可以更具體，而且比較簡單的表示如下：

〔定義6〕 對一個非空集合B，以及B上的兩個二元運算 $\vee$，$\wedge$，滿足

(B1) $x \vee y = y \vee x$

$x \wedge y = y \wedge x$

$\forall x, y \in B$ (commutative law)

(B2) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

$\forall x, y, z \in B$ (distributive law)

(B3) $\exists\, 0, 1 \in B$; $0 \neq 1 \ni$

$x \vee 0 = x$， $x \wedge 1 = x$ $\forall x \in B$

(B4) $\forall x \in B \quad \exists x' \in B \ni$

$x \vee x' = 1$， $x \wedge x' = 0$ (complement law)

我們稱B為布氏代數，並表之為 $(B, \vee, \forall)$

關於布氏代數的下列性質，皆可由(B1)—(B4)導衍出來：

(A1) $x \wedge x = x$， $x \vee x = x$

$\forall x \in B$ (idempotent law)

(A2) $x \vee 1 = 1$， $x \wedge 0 = 0$

$\forall x \in B$

(A3) $x \vee (x \wedge y) = x$

$x \wedge (x \vee y) = x$

$\forall x, y \in B$ (absorption law)

(A4) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

$\forall x, y, z \in B$ (associative law)

現在，我們證明如下：

(A1) $x = x \vee 0$

$= x \vee (x \wedge x')$

$= (x \vee x) \wedge (x \vee x')$

$= (x \vee x) \wedge 1$

$= x \vee x$

同理可得 $x = x \wedge x$

(A2) $1 = x \vee x'$

$= x \vee (x' \wedge 1)$

$= (x \vee x') \wedge (x \vee 1)$

$= 1 \wedge (x \vee 1)$

$= x \vee 1$

同理可得 $x \wedge 0 = 0$

(A3) $x = x \wedge 1$

$= x \wedge (y \vee 1)$

$= (x \wedge y) \vee (x \wedge 1)$

$= (x \wedge y) \vee x$

$= x \vee (x \wedge y)$

同理可得 $x \wedge (x \vee y) = x$

(A4) 欲證 $x \vee (y \vee z) = (x \vee z) \vee z$

先設 $r = x \vee (y \vee z)$, $S = (x \vee y) \vee z$

只需證明 $r = S$ 即可

$\because$ $x \wedge r = x \wedge [x \vee (y \vee z)]$

$= (x \wedge x) \vee [x \wedge (y \vee z)]$

$= x \vee [x \wedge (y \vee z)]$

$= x$

$\because \quad x \wedge S = x \wedge [(x \vee y) \vee z]$

$= [x \wedge (x \vee y)] \vee (x \wedge z)$

$= x \vee (x \wedge z)$

$= x$

故得　$x \wedge r = x \wedge S$

又　$x' \wedge r = x' \wedge [x \vee (y \vee z)]$

$= (x' \wedge x) \vee [x' \wedge (y \vee z)]$

$= 0 \vee [x' \wedge (y \vee z)]$

$= x' \wedge (y \vee z)$

$x' \wedge S = x' \, [(x \vee y) \vee z]$

$= [(x' \wedge (x \vee y)] \vee (x' \wedge z)$

$= [(x' \wedge x) \vee (x' \wedge y] \vee (x' \wedge z)$

$= [0 \vee (x' \wedge y)] \vee (x' \wedge z)$

$= (x' \wedge y) \vee (x' \wedge z)$

$= x' \wedge (y \vee z)$

故得　$x' \wedge r = x' \wedge S$

因此　$(x \wedge r) \vee (x' \wedge r)$

$= (x \wedge S) \vee (x' \wedge S)$

$\Rightarrow (x \vee x') \wedge r = (x \vee x') \wedge S$

$\Rightarrow \quad 1 \wedge r = 1 \wedge S$

$\Rightarrow \quad r = S$

同理可證　$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

由上面的證明，我們已經把布氏代數的定義從分析領域帶進抽象代數的領域。更進一步的，我們發現一個現象：布氏代數可以考慮成一種特別的環（ ring ），我們稱它爲布氏環（ Boolean ring ）。

現在，讓我們對布氏環先作如下的定義：

【定義 7】 布氏環乃是一個具有單位元素（ identity ）的環，且對其上的每一元素都滿足等冪律（ idempotent law ）。

我們先舉出一個簡單的例子，使各位有具體的明瞭：

【例 4】 設（ Z_2 ，＋，·）乃模 2 的環，$Z_2 = \{0, 1\}$

明顯地 $0 \cdot_2 0 = 0$

$1 \cdot_2 1 = 1$

（ Z_2 ，＋，·）滿足等冪律

【例 5】 設 $R = {}_{map}(X, Z_2)$， $X \neq \phi$

定義：$(f+g)(x) = f(x) +_2 g(x)$

$(fg)(x) = f(x) \cdot_2 g(x)$

$\forall \quad x \in X$

明顯地，R 乃是具有單位元素的交換環

要證明 R 是布氏環，只需再證明其滿足等冪律即可：

設 $f \in R$

若 $f(x) = 0$，

則 $(f^2)(x) = f(x) \cdot_2 f(x) = 0 \cdot_2 0 = 0$；

若 $f(x) = 1$，

則 $(f^2)(x) = f(x) \cdot_2 f(x) = 1 \cdot_2 1 = 1$。

所以，對每一 R 中的元素都滿足等冪律。

由於布氏環滿足等冪律，因此，我們可以得到兩個很重要的性質：

(1) char $R = 2$

$\forall \; a, b \in R, \quad a + b = (a+b)^2$

$= a^2 + ab + ba + b^2$

$= a + ab + ba + b$

$\Rightarrow \; ab + ba = 0$

設 $a = b$； $a^2 + a^2 = 0$

$\Rightarrow \; 2a = 0 \qquad \forall a \in R$

(2)　R滿足交換律：

因爲　$2a=0$，可得 $a=-a$　　　　$\forall\ a\in R$

又　$ab+ba=0$

$\Rightarrow$　$ab=-ba=ba$

我們討論了布氏代數和布氏環。接着，我們要仔細看看它們兩者之間的關係：

(1)每個布氏代數皆可轉變成布氏環：

設 $(\mathbb{B}, \vee, \wedge)$ 是一個布氏代數，定義加法 $(+)$，乘法 $(\cdot)$ 如下：

$$x+y=(x\wedge y')\vee(x'\wedge y)$$

$$x\cdot y=x\wedge y \qquad \forall x,\ y\in B$$

明顯地，加法運算滿足交換律

$$\begin{aligned} x+y &= (x\wedge y')\vee(x'\wedge y) \\ &= (y'\wedge x)\vee(y\wedge x') \\ &= (y\wedge x')\vee(y'\wedge x) \\ &= y+x \end{aligned}$$

而且，
$$\begin{aligned} x+0 &= (x\wedge 0')\vee(x'\wedge 0) \\ &= (x\wedge 1)\vee(x'\wedge 0) \\ &= x\vee 0 \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+x &= (x\wedge x')\vee(x'\wedge x) \\ &= 0\vee 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

因此，可知元素“0”乃是 $(\mathbb{B}, +)$ 中的單位元素，且每一元素 x 都有反元素 $-x=x$，我們再考慮其結合性：

我們先注意一下：

$$(x+y)'=[(x\wedge y')\vee(x'\wedge y)]'$$

$$= (x \wedge y')' \wedge (x' \wedge y)'$$
$$= (x' \vee y) \wedge (x \vee y')$$
$$= [(x' \vee y) \wedge x] \vee [(x' \vee y) \wedge y']$$
$$= (x \wedge y) \vee (x' \wedge y')$$

利用上式來證明結合性：

$$(x + y) + z$$
$$= [(x + y) \wedge z'] \vee [(x + y)' \wedge z]$$
$$= \{[(x \wedge y') \vee (x' \wedge y)] \wedge z'\} \vee \{[(x \wedge y) \vee (x' \wedge y')] \wedge z\}$$
$$= (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (x' \wedge y' \wedge z)$$

上式右端對 x，y，z 有對稱性，所以若變更其次序，比等式不受影響。 即

$$(x + y) + z = (z + y) + x$$
$$= x + (y + z)$$

由以上得知（IB，+）乃是一交換群。

我們再轉換目標，對乘法運算作一探討：

由乘法的定義，不難看出乘法運算符合交換律和結合律，且元素“1”乃乘法中的單位元素。

又因爲 $x^2 = x \cdot x = x \wedge x = x$

所以對每一個元素都滿足等冪律。

餘下只需證明 IB滿足分配律，即可說 IB是布氏環。

$$x(y + z)$$
$$= x \wedge [(y \wedge z') \vee (y' \wedge z)]$$
$$= (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z)$$

而 $xy + xz$

$$= (x \wedge y) + (x \wedge z)$$

$= [(x \wedge y) \wedge (x \wedge z)'] \vee [(x \wedge y)' \wedge (x \wedge z)]$

$= [(x \wedge y) \wedge (x' \vee z')] \vee [(x' \vee y') \wedge (x \wedge z)]$

$= [(x \wedge y \wedge x') \vee (x \wedge y \wedge z')] \vee [(x' \wedge x \wedge z) \vee (y' \wedge x \wedge z)]$

$= (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z)$

所以　$x(y+z) = xy + xz$

經過上述的變換，布氏代數轉變成布氏環；反過來看，布氏環是否也可轉變成布氏代數呢？

(2) 每個布氏環皆可轉變成布氏代數：

設 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ 為布氏環，定義運算 $\vee$，$\wedge$ 如下：

$a \vee b = a + b + ab$

$a \wedge b = ab$

由定義可知運算 $\vee$，$\wedge$ 都滿足交換律，我們考慮分配律

$a \wedge (b \vee c)$

$= a(b + c + bc)$

$= ab + ac + abc$

$= ab + ac + (ab)(ac)$　　$(\because \ a^2 = a \ \ \forall \ \ a \in \mathbb{R})$

$= (ab) \vee (ac)$

$= (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

又　$(a \vee b) \wedge (a \vee c)$

$= (a + b + ab)(a + c + ac)$

$= a^2 + ac + a^2c + ba + bc + abc + a^2b + abc + a^2bc$

$= a + bc + abc$

$= a \vee (b \wedge c)$

因此，分配律成立，設 0，1 分別為加法和乘法的單位元素，則

$a \vee 0 = a + 0 + a0 = a$

$a \wedge 1 = a1 = a \qquad \forall a \in \mathbb{R}$

最後 $a \vee (1+a)$

$= a + (1+a) + a(1+a$

$= 1 + 4a$

$= 1$

$a \wedge (1+a)$

$= a(1+a)$

$= a + a^2$

$= 2a$

$= 0$

所以$(1+a)$乃a的補元素(complement of a)。

透過上述的證明,我們可知布氏代數和布氏環可互相變換。最後,我們談談Stone's定理

〔定義8〕 設$\mathbb{B}$,$\mathbb{B}^*$爲布氏代數

若函數 $f: \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}^*$滿足

(1) f乃1-1映射

(2) $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$

(3) $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$

(4) $f(x') = f(x)' \qquad \forall x, y \in \mathbb{B}$

則稱f爲布氏代數(Boolean Algebra Isomophic)。

〔定義9〕 設$\mathbb{B}$,$\mathbb{B}^*$爲布氏代數,若存在布氏代數同構f

$\ni f: \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}^*$

則稱$\mathbb{B}$和$\mathbb{B}^*$爲布氏代數同構。

若$\mathbb{B}$,$\mathbb{B}^*$爲同構,那由$\mathbb{B}$,$\mathbb{B}^*$所轉換成的布氏環$\mathbb{R}$和$\mathbb{R}^*$是否也是同構的呢?

Stone's定理告訴我們:

若$\mathbb{B}$,$\mathbb{B}^*$爲同構,對每一個布氏代數同構都是$\mathbb{R}$,$\mathbb{R}^*$

的布氏環同構。

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B^* \arrow[d] \\
R \arrow[r, "f"] & R^*
\end{tikzcd}
$$

各位若有興趣，可自行證明。

參考書：

1. N.Jacobson; Basic Algebra I
2. J.Lambek; Lectures on Rings and Modules
3. G.Birkhoff and S.Mac Lane; A Survey of Modern Algebra
4. D.M.Burton; Abstract and Linear Algebra
5. G.F.Simmons; Introduction to Topology and Modern Analysis

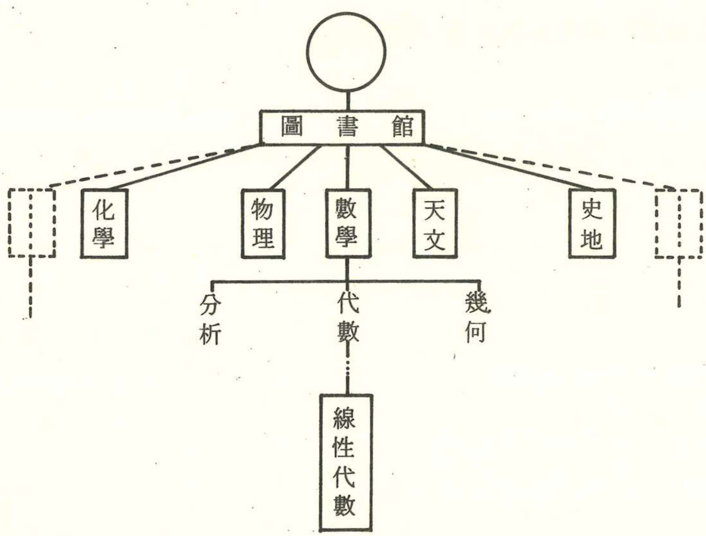
本文承蒙呂溪木老師指導，謹此致謝。

樹搜尋法的應用

指導老師：吳森源

三甲：古思明

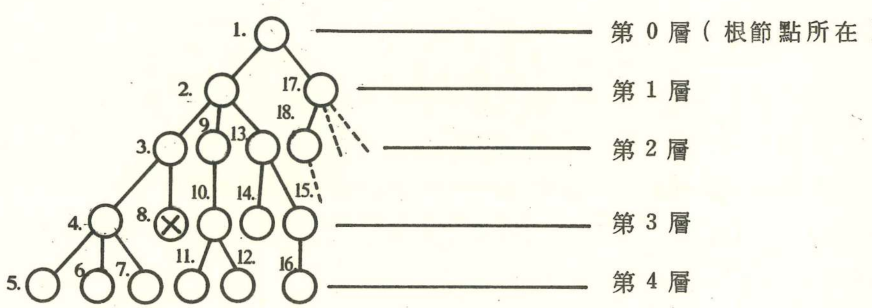
在計算機的範疇裏，樹形資料結構是非常重要的一部份，事實上，在一般日常生活中，“樹”的概念常被引用，只是它被使用的是那麼的自然，以致於我們不察覺。我們看一個例子（如圖1）：在圖書館書籍分類中，欲尋得“綫性代數”一書，必須經下列過程：



（圖一）

所以由圖書館開始→數學類→代數→……… →綫性代數，就好像由樹木的根部往上爬，到達樹枝的分叉後，再找此分叉的分枝，………，最後找到所要的結果，（可將此樹狀看成倒立），此類的例子經常發生於日常生活中，且爲大家所熟悉。

事實上，有很多龐大的樹分析問題，早已超越了人腦的運算，使我們不得不求助於計算機（稍後，將可看到此類例子）！然而因爲計算機沒有綜合分析的能力，故應用它來處理樹的問題時須檢查所有的可能狀況。現在業已發展出一種有系統的解決方法：自然順序搜尋法，其大要如下所述：



（圖二）

一、假如某一節點有多個分枝，則由左邊的分枝先掃描。

例如：現已在 3 號節點，該節點有二個分枝，所以先掃描 4 號的分枝。

二、若達到終端節點未能找到結果，則退回上一層的節點，再掃描此節點是否有分枝，若有，則回到一　，否則，再往回退一層。

三、當退後到根部節點時，且已經掃描完畢所有由根部發出的樹枝之各節點則停止。

依此大要，找尋圖 2 中的節點 8 ，其步驟路徑如下：

①→②→③→④→*⑤ ⤳ ④→*⑥ ⤳ ④→*⑦ ⤳ ④→③→*⑧ ⤳

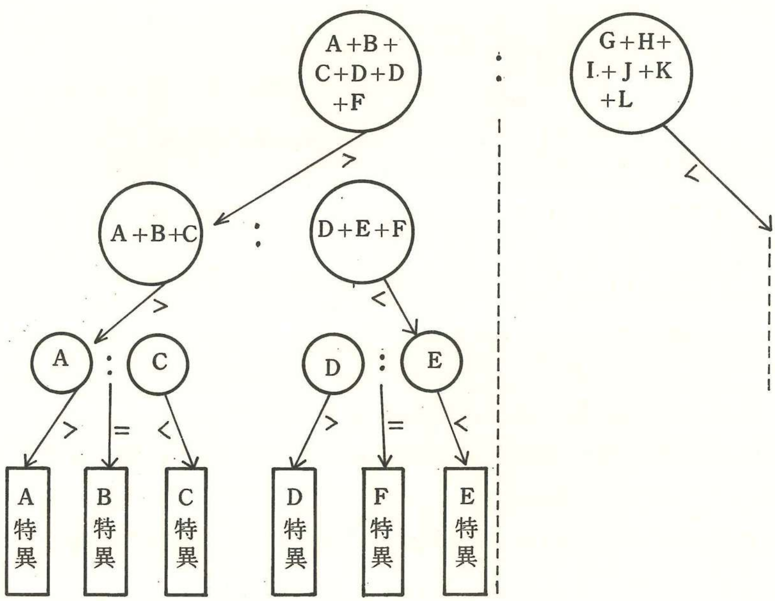
③→②→⑨→………STOP ，其中有×號的節點是終端節點。

樹狀結構也非常適宜作決策分析；且看下列：

假設我們有 12 個看起來相似的球，且其中一個球較其餘的重，除此一特異球外，其餘皆等重，則如何于三次秤重內，利用等臂天平找出此一較重者？

我們可有下面的解決方法：

將 12 球編以 A－L 號，分成二組，使得 A－F 成一組，其餘 6 球自成一組，置于等臂天平上，必有一方較重，分類如圖 3。



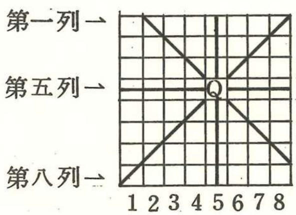
（圖三）

在圖 3 中另一邊可依左邊類推而得。

當我們上述的搜尋概念後，就可以它來幫助我們處理問題，我們介紹二個有名的問題：

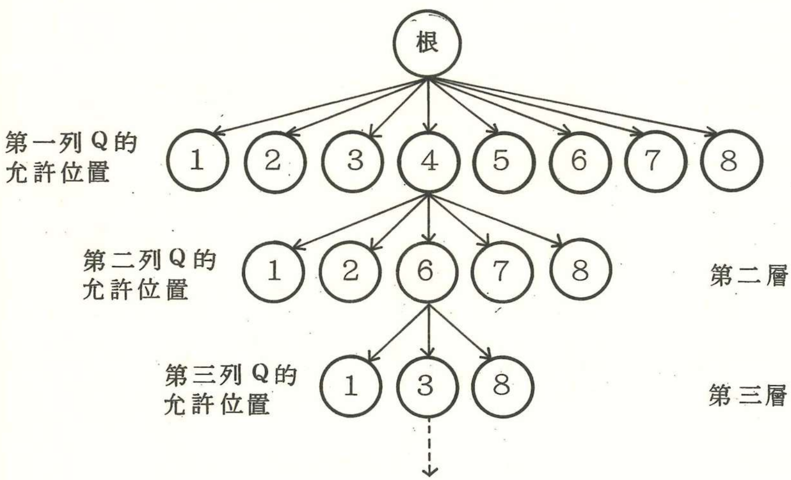
一、八后問題：

西元 1850 年，Gauss 提出：在一 8× 8 的棋盤格式中，每行各擺下一個皇后（ Q ）的方法有幾個？雖然Gauss 提出解答，但卻不完全。依據皇后（ Q ）的規則如下：與該皇后（ Q ）位置的直行，橫行及對描綫方位皆不得有任何其餘皇后，否則演出“將軍”的局面。在圖 4 中，皇后（ Q ）的威力以粗綫表出。



（圖 4 ）

很明顯的，此問題適合自然順序搜尋法：



因爲樹枝龐大，我們只列出第一列在④，第二列在⑥，第三列在③，……… 的例子。但我們不難看出，只要有一條通路從第一層到第八層，則就是我們的一種結果。用計算機解答此問題，得到 92 種（不要考慮對稱），若使用 BASIC程式在 DA-800 上 RUN ，則包括印出報表須約 90 分鐘。以 FORTRAN 程式在 PERKIN-ELMER 3220 上執行，花了 CPU 執行時間約 0.270 sec （包括印出全部結果），其程式如下：

一、使用變數說明：

1. Q（I）表示第 I 層皇后位置；$1 \leq I \leq 8$。
2. I 表示層代號。

二、程式主體：

```
FORTRAN-VIID R03-00.0
FORTRAN VIID: LICENSED RESTRICTED RIGHTS AS STATED IN
LICENSE E-0582-0076

 000000I        DIMENSION Q(8)
 000006I        INTEGER Q
 000006I        DO 1 I=1,8
 000034I      1 Q(I)=1
 000058I        I=2
 000060I      3 K=I-1
 00006EI        DO 2 J=K,1,-1
 00007AI        IF(Q(I).EQ.Q(J).OR.ABS(Q(I)-Q(J))
                .EQ.ABS(I-J)GOTO 90
 000110I      2 CONTINUE
 000128I        I=I+1
 000136I        IF(I.GT.8)GOTO 12
 00014CI        GOTO 3
 000150I     90 Q(I)=Q(I)+1
 00016AI        IF(Q(I).GT.8)GOTO 14
 000186I        GOTO 3
 00018AI     12 WRITE(6,4)(Q(K),K=1,8)
 00020EI      4 FORMAT(10X,8(I1,1X0/)
 000228I     14 Q(I)=1
 000236I        I=I-1
 000244I        Q(I)=Q(I)+1
 00025EI        IF(Q(I).GT.8)GOTO 21
 00027AI        GOTO 3
```

```
 23   00027EI       21 IF(I.EQ.1)STOP
 24   000296I          GOTO14
 25   00029AI          END

NO ERRORS: F7D  R03-00.0  MAINPROG  .MAIN  02/25/84
11:38:19  TABLE SPACE:
STATEMENT BUFFER: 20 LINES/1321 BYTES  STACK SPACE:
143 WORDS
```

三、例舉 12 種主要結果：

1.	1	5	8	6	3	7	2	4
2.	1	6	8	3	7	4	2	5
3.	1	7	4	6	8	2	5	3
4.	1	7	5	8	2	4	6	3
5.	2	4	6	8	3	1	7	5
6.	2	5	7	1	3	8	6	4
7.	2	5	7	4	1	8	6	3
8.	2	6	1	7	4	8	3	5
9.	2	6	8	3	1	4	7	5
10.	2	7	3	6	8	5	1	4
11.	2	7	5	8	1	4	6	3
12.	2	8	6	1	3	5	7	4

二、四色問題

在地圖上着色，使得相鄰國家塗以不同的顏色，以便分別每個國家的領域，則只要四種顏色即已足夠；這是大家所熟悉且已被證出的四色問題。茲考慮下列的問題：

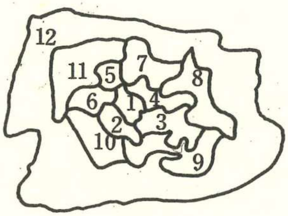


圖 5 (a)

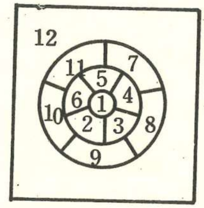
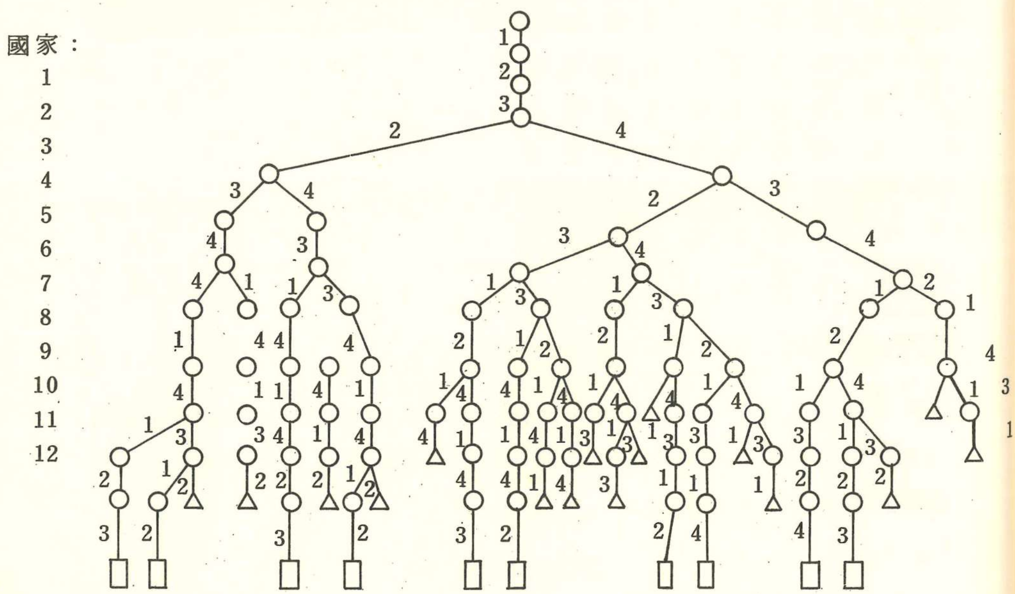


圖 5 (b)

如圖 5（a），欲以四種不同的顏色着色，可有幾種不同的方法？此種問題以樹分析是非常方便的。爲了方便起見，將圖 5(a)，改成圖 5(b)，且顏色以 1、2、3、4 代替，並固定頭 3 號國家的顏色是 1、2、3（依序），所以本題只要由第四國開始決定顏色的着法即可！其所得的搜尋樹枝如圖 6 所示：



□：成功　　△：失敗

P.S.：每一樹枝上的號碼爲顏色代號　　圖 6

關於簡單的地圖着色，可用觀察法一一列舉，但當國家數目相當大時，則要找出全部可行解，實在很花人腦搜尋時間，若將此問題以計算機搜尋，在相當短的時間內即可獲得答案！

考慮一個含有 39 個國家的地圖如（7）所示：

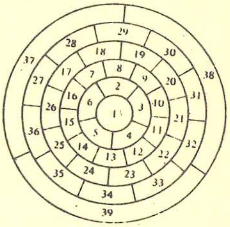


圖 7

首先我們主要的演算法是：

Algorithm：

假設現處在第 i 號國家（ $1 \leq i \leq 39$ ）：

step 一、定出其鄰國。

step 二、定出鄰國現階段的使用顏色

step 三、考慮第 j 種顏色（ $1 \leq j \leq 4$ ）

case 1. 若第 j 種顏色已在鄰國中被使用過，則換另外一種顏色。當顏色都被查完而未能找到第 i 號國的可行顏色，則退回第 $i-1$ 國的備用顏色；若第 $i-1$ 國沒有備用顏色（即沒有其他樹枝可搜尋）再退 1 號。當退到 $i=3$ 時，即可停止。

case 2. 本顏色未被鄰國使用，即第 j 色是可行的記錄之。再查是否還有其他顏色可被使用，若是，則接下一種顏色，考慮其可行性（即 step 三）；若否，則換下一屬國家（ $i \leftarrow i+1$ ），接 step 一。

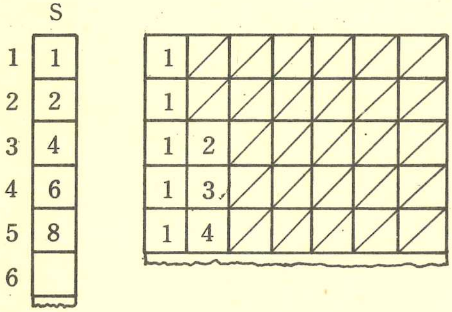
有了上述演算法的概念；即可開始着手。而從計算機的角度來看，首先遇到的問題是：如何將第 i 個國家的鄰國存入記憶體中？將此問題解決後，即已解決一主要問題！

由於我們是從第 1 國檢查到第 39 國，故可以建立如下的鄰國相關表：

國家 I	鄰國	數目	國家 I	鄰國	數目
1	1	1	21	10 11 20	3
2	1	1	22	11 12 21	3
3	1 2	2	23	12 13 22	3
4	1 3	2	24	13 14 23	3
5	1 4	2	25	14 15 24	3
6	1 2 5	3	26	15 16 17 25	4
7	2 6	2	27	17 26	2
8	2 7	2	28	17 18 27	3
9	2 3 8	3	29	18 19 28	3
10	3 9	2	30	19 20 29	3
11	3 4 10	3	31	20 21 30	3
12	4 11	2	32	21 22 31	3
13	4 5 12	3	33	22 23 32	3
14	5 13	2	34	23 24 33	3
15	5 6 14	3	35	24 25 34	3
16	6 7 15	3	36	25 26 27 35	4
17	7 16	2	37	27 28 29 36	4
18	7 8 17	3	38	29 30 31 32 37	5
19	8 9 18	3	39	32 ～ 38	7
20	9 10 19	3			

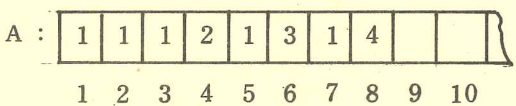
（爲方便，將第 1 國的鄰國令爲本身）

所以，我們暫時可以一個 39 × 7 的陣列來貯存它，但事實上，眞正在處理時，會有許多問題，例如像此種鋸齒陣列（ Jagged Array ）宣告成 39 × 7 則太浪費空間；我們可以下列方法解決：



（鄰國表前5列）

（劃斜綫者是浪費的空間）



（前5列的表示法，不會浪費）

在已經建立S陣列與A陣列後，我們可以發現它與原來鄰國相關表的關係：

設第k個國家的鄰國數是M（ *k* ），則在A陣列口找屬於第 *k* 國的鄰國是：A（ S（ *k* － 1 ）＋ B ），1 ≦ B ≦ M（ *k* ），其中S（ *k* － 1 ）表到第 *k* － 1 國爲上所佔用去的位置號碼。例如，欲查第4國的鄰國，則透過M（ 4 ）＝ 2 ，知第四國有二個鄰國，透過S（ 4 － 1 ）＝ S（ 3 ）＝ 4 ，故第四國的鄰國放於A中的A（ 4 ＋ 1 ），A（ 4 ＋ 2 ）中，i、e、1與3，其餘依此類推……。

（在程式中並未眞正建立S（ k ），只是以S爲多數，而載於S中的現階段值爲至第k－1國爲上A中被佔去的位置）。

程式說明：

A：表示上文說明的“ 節約 ”鄰國表。

M：表示鄰國的數目。

P：可用顏色記錄：P（ *k* ，1 ）是正使用的顏色記錄，P（ *k* ，2 ）是備用顏色。

N：總鄰國數，i 、 e M的總和。（ N ＝ 112 ）

MM：國家數，（本例MM＝39）

T：現階段試驗顏色代號

MC：全部可行解

k：現階段國家

S：（如上文說明）

LINE：控制報表每頁印60行。

準備工作：

1. 將A的內容鍵入。
2. 將M的內容鍵入。

程式主體：

```
FORTRAN-VIID R03-00.0

FORTRAN VIID: LICENSED RESTRICTED RIGHTS AS STATED IN
              LICENSE E-0582-0076    ***, SEE

000000I      DIMENSION A(200),M(50),P(50,3)
000006I      INTEGER A,P,W,S,X,B,T
000006I      DATA N,MM,MC,K,S,LINE/112,39,0,3,2,0/
000664I      DATA A/1,1,1,2,1,3,1,4,1,2,5,2,6,2,7,2,
             3,8,3,9,3,4,10,4,11,
            $4,5,12,5,13,5,6,14,6,7,15,7,16,7,8,17,8
             ,9,18,9,10,19,
            $10,11,20,11,12,21,12,13,22,13,14,23,14,
             15,24,15,16,17,25,17,26
            $,17,18,27,18,19,28,19,20,29,20,21,30,21
             ,22,31,22,23,32,
            $23,24,33,24,25,34,25,26,27,35,27,28,29,
             36,29,30,31,32,37,
            $32,33,34,35,36,37,38,88*0/
000664I      DATA M/1,1,2,2,2,3,2,2,3,2,3,2,3,2,3,3,
             2,3,3,3,3,3,3,3,3,4,2,
            $3,3,3,3,3,3,3,3,4,4,5,7,11,*0/
000664I      DO 1 I=1,3
00066CI    1 P(I,1)=I
000694I   15 X=0
00069CI      S=S+M(K)
0006AEI      K=K+1
0006B8I      IF(K.GT.MM)GOTO 31
0006CCI      T=1
0006D4I      L=1
0006DCI   21 DO 2 B=1,M(K)
0006F4I      IF(T.EQ.P(A(S+B),1))Goto 37
00071CI    2 CONTINUE
000734I      X=1
00073CI      P(K,L)=T
000758I      T=T+1
000766I      IF(T.GT.4)GOTO 15
00077AI      L=L+1
000788I      GOTO 21
00078CI   31 MC=MC+1
000796I      LINE=LINE+1
0007A0I      WRITE(6,3)(P(I,1),I=1,MM)
000830I  3   FORMAT(10X,40(I1,1X))
00084CI        IF(LINE.EQ.60)THEN
00085AI          WRITE(6,7)
000894I  7       FORMAT(1H1)
```

```
00C8A4I           LINE=0
0008AAI          END IF
0008B0I       GOTO 46
0008B6I    37 T=T+1
0008C4I       IF(T.LE.4)GOTO 21
0008D8I       IF(X.EQ.1)GOTO 15
0008ECI    46 K=K-1
0008F6I       IF(K.LT.3)THEN
000904I        WRITE(6,100)MC
000958I   100 FORMAT(//10X,'THE TOTAL IS ',I10/)
000980I       STOP
000988I       END IF
00098EI       S=S-M(K)
0009A0I       IF(P(K,2).EQ.O)GOTO 46
0009B8I       P(K,1)=P(K,2)
0009CCI       P(K,2)=0
0009D8I       GOTO 15
0009DCI       END

NO  ERRORS:F7D  R03-00.0  MAINPROG  .MAIN  02/25/84
           11:07:13  TABLE SPACE:
STATEMENT BUFFER:  20 LINES/1321 BYTES  STACK SPACE:
                   171 WORDS
```

結果：若只計算可行解的數目；則花 PERKIN-ELMER3220,CPU 執行時間 0.015sec ； 將結果全部印出則須約 27 sec 全部總數為 15,914 種。下表是可行解的一部份。

1 2 3 2 3 4 1 3 1 2 1 3 1 4 1 2 3 2 4 3 4 2 4 2 3 4 2 4 1 2 1 3 1 3 4 1 3 4 2
1 2 3 2 3 4 1 3 1 2 1 3 1 4 1 2 3 2 4 3 4 2 4 3 2 4 2 4 3 1 2 1 3 1 4 3 1 4 2
1 2 3 2 3 4 1 3 1 2 1 3 1 4 1 2 3 4 2 3 4 2 4 2 3 4 1 2 1 4 1 3 1 3 1 2 3 2 4
1 2 3 2 3 4 1 3 1 2 1 3 1 4 1 2 3 4 2 3 4 2 4 2 3 4 2 1 3 4 2 3 1 3 4 1 4 1 2
1 2 3 2 3 4 1 3 1 2 1 3 1 4 1 2 3 4 2 3 4 2 4 3 2 4 1 2 1 4 2 1 3 1 4 3 4 3 2
1 2 3 2 3 4 1 3 1 2 1 3 1 4 1 2 3 4 2 4 3 2 4 3 2 4 1 2 1 3 1 4 3 2 4 3 4 2 1
1 2 3 2 3 4 1 3 1 2 1 3 1 4 1 3 2 4 2 3 4 2 4 2 3 4 3 1 3 4 2 3 1 3 4 1 4 1 2
1 2 3 2 3 4 1 3 1 2 1 3 1 4 1 3 2 4 2 3 4 2 4 3 2 4 1 3 1 4 2 1 3 1 4 3 4 3 2
1 2 3 2 3 4 1 3 1 2 1 3 1 4 1 3 2 4 2 3 4 2 4 3 2 4 1 3 1 4 2 1 3 2 1 3 2 3 4
1 2 3 2 3 4 1 3 1 2 1 3 1 4 1 3 2 4 2 4 3 2 4 3 2 4 1 3 1 3 1 4 3 2 4 3 4 2 1
1 2 3 2 3 4 1 3 1 2 1 3 1 4 2 3 2 4 2 3 4 2 4 2 1 4 1 3 1 4 2 1 3 1 4 3 4 3 2
1 2 3 2 3 4 1 3 1 2 1 3 1 4 2 3 2 4 2 3 4 2 4 2 3 4 3 1 3 4 2 3 1 3 4 1 4 1 2
1 2 3 2 3 4 1 3 1 2 1 3 1 4 2 3 2 4 2 3 4 2 4 3 1 4 1 3 1 4 2 1 3 1 2 3 2 3 4
1 2 3 2 3 4 1 3 1 2 1 3 1 4 2 3 2 4 2 3 4 2 4 3 1 4 1 3 1 4 2 1 3 1 4 3 4 3 2
1 2 3 2 3 4 1 3 1 2 1 3 1 4 2 3 2 4 2 4 3 2 4 3 1 4 1 3 1 3 1 4 1 2 4 2 4 2 3
1 2 3 2 3 4 1 3 1 2 1 3 1 4 2 3 2 4 2 4 3 2 4 3 1 4 1 3 1 3 1 4 3 2 4 2 4 2 1
1 2 3 2 3 4 1 3 1 2 1 3 1 4 2 3 2 4 2 4 3 2 4 3 1 4 1 3 1 3 1 4 3 2 4 3 4 2 1
1 2 3 2 3 4 1 3 1 2 1 3 1 4 2 3 2 4 2 4 3 4 2 3 1 4 1 3 1 3 1 2 3 4 2 3 2 4 1
1 2 3 2 3 4 1 3 1 2 1 3 4 1 2 3 2 4 2 3 4 2 1 2 3 1 3 1 3 4 1 3 4 3 4 2 4 2 1
1 2 3 2 3 4 1 3 1 2 1 3 4 1 2 3 2 4 2 3 4 2 1 2 3 4 1 3 1 4 1 3 4 3 4 2 4 2 1
1 2 3 2 3 4 1 3 1 2 1 3 4 1 2 3 2 4 2 3 4 2 1 2 3 4 3 1 3 4 1 3 4 3 4 2 4 2 1
1 2 3 2 3 4 1 3 1 2 1 3 4 1 2 3 2 4 2 3 4 2 1 2 3 4 3 1 3 4 2 3 4 3 4 1 4 1 2
1 2 3 2 3 4 1 3 1 2 1 3 4 1 2 3 2 4 2 3 4 2 1 3 4 1 4 3 1 4 2 1 3 2 1 3 2 3 4
1 2 3 2 3 4 1 3 1 2 1 3 4 1 2 3 2 4 2 4 3 4 1 2 3 1 3 1 3 1 2 1 2 4 1 4 2 4 3
1 2 3 2 3 4 1 3 1 2 1 3 4 1 2 3 2 4 2 4 3 4 1 3 4 1 4 3 1 3 1 2 3 4 2 3 2 4 1
1 2 3 2 3 4 1 3 1 2 1 3 4 1 2 3 2 4 2 4 3 4 2 3 4 1 4 3 1 3 1 2 3 4 2 3 2 4 1
1 2 3 2 3 4 1 3 1 2 1 4 1 2 1 2 3 4 2 3 4 2 3 4 3 4 1 2 1 4 1 3 1 2 1 2 3 2 4

感謝吳森原老師熱切指導！

參考書籍：

1. 計算機科學概論上、下册＜李學養編譯＞田野出版社印行，民國 71 年。

滿足 $f(n+3)=af(n+2)+bf(n+1)+cf(n)$ 的 $f(n)$ 數列與費氏數列淺談

指導老師：屠耀華　一乙：許志農

第一節：前言

本篇主要在於淺談滿足 $f(n+3)=af(n+2)+bf(n+1)+cf(n)$ 的 $f(n)$ 數列與費氏數列，尤以對 $f(n+2)=af(n+1)+bf(n)$ 的類型，找一公式來表示 $f(n)$ 爲此篇重點。第二節簡單的探討滿足 $f(n+1)=af(n)$ 的 $f(n)$ 數列，並以一有趣的金盤問題作結尾。第三節爲本篇核心，由滿足 $f(n+2)=af(n+1)+bf(n)$ 的 $f(n)$ 公式的導出開端，進一步討論費氏數列與它的關係。本節的證明很多且證法都環繞於數學歸納法上，所以本節亦可提供讀者對數學歸納法的多一層認識。第四節則以 $f(n+3)=af(n+2)bf(n+1)+cf(n)$ 的 $f(n)$ 可用 $x^3=ax^2+bx+c$ 三根的函數來表示，作本篇的結束。這是本人首次投稿，對於文章的取材，敍述，編排若有不週詳或錯誤之處，恕請指正。

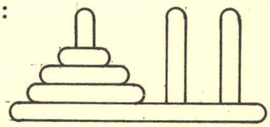
第二節：$f(n+1)=af(n)$

$f(n+3)=af(n+2)+bf(n+1)+cf(n)$ 若 $b=c=0$ 時，即爲 $f(n+1)=af(n)$ 的類型。顯然 $f(n)=a^n\cdot f(o)$。

例一：$f(n)$ 滿足 $f(n+1)=3f(n)$ 且 $f(0)=1$ 則 $f(n)=3^n\cdot 1=3^n$。

例二：$f(n)$ 滿足 $f(n+1)=3f(n)+2$ 且 $f(o)=o$ 則 $\because f(n+1)=3f(n)+2$ 可表爲 $[f(n+1)+1]=3[f(n)+1]$ $\therefore [f(n)+1]=3^n\cdot[0+1]=3^n$，即 $f(n)=3^n-1$ 。

現在談一個有名且有趣的金盤問題，並利用上述的方法去解它。問題敍述如下：如圖地上豎立A，B，C三木棒，在A木棒上有n個金盤，依大至小排列，今把金盤依下列的規定移動：



(一)每次只能移動一個金盤。

(二)只能由一木棒移至另一木棒，不能放置別處。

(三)移動過程中，較大的金盤不能放在較小的金盤上面。

如今問A木棒上n個金盤全部移動到另一木棒B（或C）上去，至少需要移動幾次？

設 $f(n)$ 表n個金盤由一木棒完全移至另一木棒上所需移動的最少次數。顯然 $f(o)=0$，$f(1)=1$，$f(2)=3$ 。當A木棒上有 $n+1$ 個金盤時，最少次數爲 $f(n+1)$ 次，現在把 $n+1$ 個金盤中，最底下的一個（最大的金盤）不動，其餘n個金盤移至B木棒上，至少需 $f(n)$ 次，然後把A木棒上最大的金盤移至C木棒上，最後再把B木棒上n個金盤移至C木棒上，這樣分三個步驟便完成金盤的搬移，所以 $f(n+1)=f(n)+1+f(n)=2f(n)+1$ 又可表爲 $f(n+1)+1=2[f(n)+1]$，所以 $f(n)+1=2^n\cdot[0+1]=2^n$，即 $f(n)=2^n-1$，故n個金盤完全移至另一木棒，至少需 2^n-1 次。

最後將從另一個角度來看滿足 $f(n+1)=af(n)$ 的 $f(n)$ 數列。將 $f(n+1)$ 以 x 代之，$f(n)$ 以 $x^0=1$ 代之，則 $f(n+1)=af(n)$ 變成 $x=a$，a爲此方程式之根，而由 $f(n)=a^n\cdot f(o)$ 可將 $f(n)$ 之式子視爲由前方程式的根所構成。

第三節：$f(n+2)=af(n+1)+bf(n)$

$f(n+3)=af(n+2)+bf(n+1)+cf(n)$ 當 $C=0$ 時，就變成了 $f(n+2)=$

$af(n+1)+bf(n)$ 的類型。

[定理一]　$f(n+2)=af(n+1)+bf(n)$，$a^2+4b\neq 0$，$a^2+4b\neq 0$，規定 $f($ $(0)=x_0$，$f(1)=x_1$，則 $f(n)=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot(x\cdot\alpha^n-y\cdot\beta^n)$，其中 $x=x_1-\beta\cdot x_0$，$y=x_1-\alpha\cdot x_0$，α,β 爲 $x^2=ax+b$ 的二根。

[證明]　設 α，β 爲方程式 $x^2=ax+b$ 之二根，則 $\alpha+\beta=a$，x $\alpha\beta=-b$，並由 $a^2+4b\neq 0$ 知 $\alpha-\beta\neq 0$。

由 $f(n+2)=af(n+1)+bf(n)=(\alpha+\beta)f(n+1)-\alpha\beta f(n)$，

可得 $f(n+2)-\alpha f(n+1)=\beta(f(n+1)-\alpha f(n))$

因此，$f(2)-\alpha f(1)=\beta(f(1)-\alpha f(0))=\beta(x_1-\alpha x_0)$

$$
\begin{array}{rl}
& f(3)-\alpha f(2)=\beta(f(2)-\alpha f(1)) \\
& \vdots \qquad\qquad \vdots \\
& f(n-1)-\alpha f(n-2)=\beta(f(n-2)-\alpha f(n-3)) \\
\times) & f(n)-\alpha f(n-1)=\beta(f(n-1)-\alpha f(n-2)) \\
\hline
& f(n)-\alpha f(n-1)=\beta^{n-1}(x_1-\alpha x_0)
\end{array}
$$

$\because$ $f(n)-\alpha f(n-1)=\beta^{n-1}(x_1-\alpha x_0)$

$$
\begin{array}{rl}
\therefore & \alpha^{n-2}[f(2)-\alpha f(1)=\beta(x_1-\alpha x_0)] \\
& \alpha^{n-3}[f(3)-\alpha f(2)=\beta^2(x_1-\alpha x_0)] \\
& \alpha^{n-4}[f(4)-\alpha f(3)=\beta^3(x_1-\alpha x_0)] \\
& \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
& \alpha^2[f(n-2)-\alpha f(n-3)=\beta^{n-3}(x_1-\alpha x_0)] \\
& \alpha[f(n-1)-\alpha f(n-2)=\beta^{n-2}(x_1-\alpha x_0)] \\
+) & [f(n)-\alpha f(n-1)=\beta^{n-1}(x_1-\alpha x_0)] \\
\hline
& f(n)-\alpha^{n-1}f(1)=(x_1-\alpha x_0)(\alpha^{n-2}\beta+\alpha^{n-3}\beta^2+\alpha^{n-4}\beta^3+ \\
& \qquad \cdots+\alpha^2\beta^{n-3}+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1})
\end{array}
$$

$$\Rightarrow f(n)=\alpha^{n-1}x_1+(x_1-\alpha x_0)(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\alpha^{n-3}\beta^2+\cdots\cdots\cdots+\alpha^2\beta^{n-3}+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1})-(x_1-\alpha x_0)\cdot\alpha^{n-1}$$

$$\Rightarrow f(n)=\alpha^n x_0+(x_1-\alpha x_0)(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\alpha^{n-3}\beta^2+\cdots\cdots\cdots+\alpha^2\beta^{n-3}+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1})$$

$$\Rightarrow f(n)=\frac{1}{\alpha-\beta}[\alpha^n x_0(\alpha-\beta)+(x_1-\alpha x_0)(\alpha-\beta)(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\alpha^{n-3}\beta^2+\cdots\cdots\cdots+\alpha^2\beta^{n-3}+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1})]$$

$$\Rightarrow f(n)=\frac{1}{\alpha-\beta}[\alpha^{n+1}x_0-\alpha^n(\beta x_0)+(x_1-\alpha x_0)(\alpha^n-\beta^n)]$$

$$\Rightarrow f(n)=\frac{1}{\alpha-\beta}[\alpha^{n+1}\alpha_0-\alpha^n(\beta x_0)+\alpha^n x_1-\beta^n x_1-\alpha^{n+1}x_0+\beta^n(\alpha x_0)]$$

$$\Rightarrow f(n)=\frac{1}{\alpha-\beta}[(x_1-\beta x_0)\alpha^n-(x_1-\alpha x_0)\beta^n]$$

$\because$ $x=x_1-\beta x_0$， $y=x_1-\alpha x_0$

$\therefore$ $f(n)=\dfrac{1}{\alpha-\beta}[x\alpha^n-y\beta^n]$ 證畢。

（定理一系） $f(n+2)=af(n+1)+bf(n)$，$a^2+4b\neq0$，規定 $f(0)x_0=0$，$f(1)=x_1=1$，則 $f(n)=\dfrac{1}{\alpha-\beta}[\alpha^n-\beta^n]$，$\alpha$，$\beta$ 爲方程式 $x^2=ax+b$ 的二根。

定理一系知，當 $f(0)=0$，$f(1)=1$ 時，滿足 $f(n+2)=af(n+1)+bf(n)$ 的 $f(n)$ 有一極規律的公式 $f(n)=\dfrac{1}{\alpha-\beta}[\alpha^n-\beta^n]$，其中 α，β 爲方程式 $x^2=ax+b$ 的二根。甚至當 $a=1$，b

$\cdots$

$= N$（自然數）時，$f(n)=\dfrac{1}{\sqrt{1+4N}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{1+4N}}{2}\right)^n\right.$

$\left.-\left(\dfrac{1-\sqrt{1+4N}}{2}\right)^n\right]$，而我們所熟知的費氏數列，就是當

$N=1$ 時的一種特例而已。

費氏數列是指滿足 $f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(n+2)=f(n+1)+f(n)$ 的數列 $f(n)$，由上述推得的公式知 $f(n)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$，關於費氏數列，曾有許多數學家對它作過研究，並有許多有趣的發現，今把費氏數列的前 31 項（$f(0)\sim f(30)$）列出如下：

0，1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，377，610，987，1597，2584，4181，6765，10946，17711，28657，46368，75025，121393，196418，317811，514229，832040

以下舉出兩個關於費氏數列有趣的發現。

第一、$f(n-1)f(n+1)-[f(n)]^2=(-1)^n$（Robert Simson 發現）

〔證明〕利用上述推得的公式

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

$$f(n-1)f(n+1)-[f(n)]^2$$

$$=\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]\right\}\cdot\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]\right\}-\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]\right\}^2$$

$$=\frac{1}{5}\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n}+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n}-(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}$$

$$(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}-(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}$$

$$-(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n}+2(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2}$$

$$(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n}\}$$

$$=\frac{1}{5}\{(-1)^{n}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2}+(-1)^{n}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2}$$

$$+2\cdot(-1)^{n}\}$$

$$=\frac{1}{5}\{3\cdot(-1)^{n}+2\cdot(-1)^{n}\}$$

$=(-1)^{n}$ 證畢

第二　$f(n)=\sum_{K=0}^{n}f(-k)\cdot C_{K}^{n}=f(0)C_{0}^{n}+f(-1)C_{1}^{n}+$

$$+f(-2)C_{2}^{n}+\cdots\cdots\cdots\cdots+f(-n)C_{n}^{n}$$

先對 $f(-n)$ 下定義：因爲費氏數列 $f(0)=0$，$f(1)=1$，而 $f(n+2)=f(n+1)+f(n)$

所以 $f(1)=f(0)+f(-1)$，$f(-1)=f(1)-f(0)=1$；同理 $f(-2)=f(0)-f(-1)=-1$ 以此類推 $f(-n)$ 便被定義了，即 $f(-n)=f(-n+2)-f(-n+1)$，甚而言之 $f(-n)=(-1)^{n+1}f(n)$。

〔定理二〕 $f(-n)=(-1)^{n+1}f(n)$

〔證明〕 (i) 當 $n=0$ 時 $f(0)=0=-f(0)$ 成立

當 $n=1$ 時 $f(-1)=1=f(1)$ 成立

(ii) 設 $n=k$ 及 $n=k-1$ 時原式成立，即

$f(-k)=(-1)^{k+1}f(k)$

$f(-k+1)=(-1)^{k}f(k-1)$

則 $f(-k-1)=f(-k+1)-f(-k)=(-1)^{k}f(k-1)$

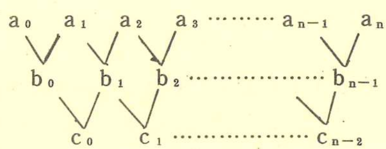
$\quad -(-1)^{k+1}f(k)$

$\quad =(-1)^{k+2}[f(k-1)+f(k)]$

$\quad =(-1)^{k+2}f(k+1)$

即 $n=k+1$ 時原式成立；由（i），（ii）得證

再介紹一種證明上述（　第二　）的預備工作，對任一數列 $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$。若 $b_0, b_1, b_2, \cdots\cdots, b_{n-1}$ 亦為一數列且滿足 $b_k=a_{k+1}-a_k$ 則 $b_0, b_1, b_2, \cdots\cdots, b_{n-1}$ 數列稱為 $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 數列的第一階差數列；同理如右圖 $c_0, c_1, \cdots\cdots, c_{n-2}$ 數列稱為 $b_0, b_1, b_2, \cdots\cdots, b_{n-1}$ 數列的第一階差數列（或 $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 數列的第二階差數列）如此繼續下去 $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ 數列的第 n 階差數列僅剩一個元素（把它記為 s）。



〔定理三〕設 $a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n$ 的第 n 階差數列的元素為 s，

$$\text{則 } s=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\cdot a_k\cdot C^n_k=(-1)^n a_0C^n_0$$

$$+(-1)^{n-1}a_1C^n_1+\cdots\cdots+(-1)a_{n-1}C^n_{n-1}$$

$$+(-1)^0a_nC^n_n$$

〔證明〕（i）當 $n=1$ 時 $s=a_1-a_0=\sum_{k=0}^{1}(-1)^{1-k}\cdot a_k\cdot C^1_k$

$=-a_0+a_1$ 成立

(ii)設 $n=\ell$ 時成立，即 $s=\sum_{k=0}^{\ell}(-1)^{\ell k}\cdot a_k\cdot c_k^{\ell}$

當 $n=\ell+1$ 時，可把 a_0，a_1，a_2，………a_ℓ 視爲 A_0，A_1，A_2，……，A_ℓ，$A_{\ell+1}$ 的

第一階差數列。

即 $s=\sum_{k=0}^{\ell}(-1)^{\ell k}\cdot a_k\cdot c_k^{\ell}=\sum_{k=0}^{\ell}(-1)^{\ell-k}$

$\cdot(A_{k+1}-A_k)\cdot c_k^{\ell}$

$=(-1)^{\ell}\cdot c_0^{\ell}\cdot(A_1-A_0)+(-1)^{\ell-1}\cdot c_1^{\ell}\cdot(A_2-A_1)+\cdots\cdots\cdots+(-1)\cdot c_{\ell-1}^{\ell}\cdot(A_\ell-A_{\ell-1})$

$+(-1)^0\cdot c_\ell^\ell\cdot(A_{\ell+1}-A_1)$

$=(-1)^{\ell+1}_1\cdot c_0^{\ell+1}\cdot A_0+(-1)^{\ell}\cdot(c_0^{\ell}+c_1^{\ell})\cdot A_1$

$+(-1)^{\ell-1}\cdot(c_1^{\ell}+c_2^{\ell})\cdot A_2+\cdots\cdots+(-1)$

$\cdot(c_{\ell-1}^{\ell}+c_\ell^\ell)\cdot A_\ell+(-1)^0-c_{\ell+1}^{\ell+1}\cdot A_{\ell+1}$

$=(-1)^{\ell+1}\cdot c_0^{\ell+1}\cdot A_0+(-1)^{\ell}\cdot c_1^{\ell+1}\cdot A_\ell$

$+(-1)^{\ell-1}\cdot c_2^{\ell+1}\cdot A_2+\cdots\cdots+(-1)\cdot c_\ell^{\ell+1}\cdot A_\ell$

$+(-1)^0\cdot c_{\ell+1}^{\ell+1}\cdot A_{\ell+1}$

$=\sum_{k=0}^{\ell+1}(-1)^{\ell+1-k}\cdot A_k\cdot c_k^{\ell+1}$

即 $n=\ell+1$ 時成立，故由(i)，(ii)得證。

有了定理三，定理二，可證明　第二

〔證明〕設 $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，……，$f(n)$ 表費氏數列

由 $f(n)=f(n+2)-f(n+1)$ 及下圖知 $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，……，$f(n)$ 數列的第 k 階差數列的首項爲 $f(-k)$，

，即知 $s=f(-n)$（第 n 階差數列的元素）

$$
\begin{array}{ccccccccc}
f(0) & f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & \cdots & f(n-1) & f(n) \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
f(-1) & f(0) & f(1) & f(2) & f(3) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \; f(n-2) \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
f(-1) & f(-1) & f(0) & f(1) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
f(-3) & f(-2) & f(-1) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
f(-4) & f(-3) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\end{array}
$$

$$
f(-5)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

∵對 $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，……，$f(n)$ 數列而言 $s=f(-n)$。

由定理三知

$$s=f(-n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\cdot f(k)\cdot c^{n}_{k}$$

$$s=(-1)^{n+1}\cdot f(n)=(-1)^{n}\cdot f(0)\cdot c^{n}_{0}+(-1)^{n-1}\cdot f(1)\cdot c^{n}_{1}+\cdots\cdots+(-1)\cdot f(n-1)\cdot c^{n}_{n-1}+(-1)^{0}\cdot f(n)\cdot c^{n}_{n}$$

$$f(n)=(-1)\cdot f(0)\cdot c^{n}_{0}+(-1)^{2}\cdot f(1)\cdot c^{n}_{1}+\cdots\cdots\cdots+(-1)^{n}\cdot f(n-1)\cdot c^{n}_{n-1}+(-1)^{n+1}\cdot f(n)\cdot c^{n}_{n}$$

$$f(n)=f(0)\cdot c^{n}_{0}+f(-1)\cdot c^{n}_{1}+\cdots\cdots\cdots+f(-n+1)\cdot c^{n}_{n-1}+f(-n)\cdot c^{n}_{n}$$ （由定理二知）

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n} f(-1)\cdot c_k^n \text{ 得證}$$

〔定理四〕若 $x^2=ax+b$ 則 $x^{n+1}=f(n+1)x+f(n)\cdot b$，其中 $f(n)$ 滿足 $f(n+2)=af(n+1)+bf(n)$ 且規定 $f(0)=0$，$f(1)=1$。

〔證明〕(i) $n=1$ 時 $x^2=f(2)x+f(1)\cdot b=ax+b$ 成立

(ii) 設 $n=k$ 時成立，即 $x^{k+1}=f(k+1)x+f(k)\cdot b$

則
$$\begin{aligned} x^{(k+1)+1} &= f(k+1)x^2+f(k)\cdot b\cdot x \\ &= f(k+1)(ax+b)+f(k)\cdot b\cdot x \\ &= (af(k+1)+bf(k))x+b\cdot f(k+1) \\ &= f(k+2)x+b\cdot f(k+1) \end{aligned}$$

即 $n=k+1$ 時成立，由 (i)，(ii) 得證

〔定理四系〕若 $x^2=x+1$ 則 $x^{n+1}=f(n+1)x+f(n)$，其中 $f(n)$ 表費氏數列，假若配合上前面的費氏數列表，則 x^{n+1} 便很容易表成 $f(n+1)x+f(n)$。

例如 $x^{30}=f(30)x+f(29)=832040x+514229$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{30}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{30}\right]x$$

$$+\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{29}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{29}\right]$$

最後值得一提的是滿足 $f(n+2)=af(n+1)+bf(n)$ 的 $f(n)$ 可用 $x^2=ax+b$ 的二根來表示，這一點便是下節討論的重點。

第四節：$f(n+3)=af(n+2)+bf(n+1)+cf(n)$

爲了讓 $x^3=ax^2+bx+c$ 的三根明顯可求，在此以 $f(n+3)=(a+b+c)f(n+2)-(ab+bc+ca)f(n+1)+abcf(n)$ 代替 $f(n+3)=af(n+2)+bf(n+1)+cf(n)$，其實此二種表示法都是一致的，不過第一種表示法，在下面定理的證明上，或許會較方便且有它的

優點。

〔定理五〕 $f(n)$ 滿足 $f(n+3)=(a+b+c)f(n+2)-(ab+bc+ca)f(n+1)+abcf(n)$，規定 $f(0)=p$，$f(1)=q$，$f(2)=r$，則 $f(n)=xa^n+yb^n+zc^n$，(x,y,z) 滿足 $x+y+z=p$，$ax+by+cz=q$，$a^2x+b^2y+c^2z=r$。

〔證明〕 (i) $n=3$ 時

$$f(3)=(a+b+c)f(2)-(ab+bc+ca)f(1)+abcf(0)$$
$$=r(a+b+c)-q(ab+bc+ca)+pabc$$

$$\begin{aligned}xa^3+yb^3+zc^3&=(a^2x+b^2y+c^2z)(a+b+c)\\&-(a^2bx+a^2cx+b^2cy+ab^2y+ac^2z+bc^2z)\\&+abc(x+y+z)-abc(x+y+z)\\&=(a^2x+b^2y+c^2z)(a+b+c)\\&-[ax(ab+bc+ca)+by(ab+bc+ca)\\&+cz(ab+bc+ca)]+abc(x+y+z)\\&=(a^2x+b^2y+c^2z)(a+b+c)\\&-(ax+by+cz)(ab+bc+ca)\\&+abc(x+y+z)\\&=r(a+b+c)-q(ab+bc+ca)+pabc\\&=f(3)\text{ 成立}\end{aligned}$$

(ii)設 $n=3，4，5，\cdots\cdots，k-2，k-1，k$ 皆成立

即 $f(n)=x\cdot a^n+y\cdot b^n+z\cdot c^n$，$n=3，4，5，\cdots\cdots，k-2，k-1，k$

則當 $n=k+1$ 時

$$\begin{aligned}f(k+1)&=(a+b+c)f(k)-(ab+bc+ca)f(k-1)\\&+abcf(k-2)\\&=(a+b+c)(xa^k+yb^k+zc^k)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-(ab+bc+ca)(xa^{k-1}+yb^{k-1}+zc^{k-1})\\
&+abc(xa^{k-2}+yb^{k-2}+zc^{k-2})\\
&=xa^{k+1}+yb^{k+1}+zc^{k+1}+yab^{k}+zac^{k}+xa^{k}c\\
&+zbc^{k}+xa^{k}c+yb^{k}c-xa^{k}b-yab^{k}-zac^{k}\\
&-xa^{k}b-zbc^{k}-xa^{k}c-yb^{k}c-xa^{k-1}bc-yab^{k-1}c\\
&-zabc^{k-1}+xa^{k-1}bc+yab^{k-1}c+zabc^{k-1}\\
&=xa^{k+1}+yb^{k+1}+zc^{k+1}\text{ 成立}
\end{aligned}
$$

故由(i)，(ii)得證

當我們看完了滿足 $f(n+2)=af(n+1)+bf(n)$ 及 $f(n+3)=(a+b+c)f(n+2)-(ab+bc+ca)f(n+1)+abcf(n)$兩者的數列 $f(n)$ 有類似的表示法時，我想我們會去懷疑 $f(n+k)=L_1f(n+k-1)+$ $+L_2(n+k-2)+L_3f(n+k-3)+\cdots\cdots+L_kf(n)$ 的 $f(n)$ 數列是否也會有像上面那種規則化的公式存在（$f(n)$ 可用方程式 $x^k=L_1x^{k-1}+L_2x^{k-2}+L_3x^{k-3}+\cdots\cdots+L_k$ 的根表出呢？這答案是肯定的，不過當 k 大一點時，用上面的方法來證明，計算式將會很複雜，況且有的連方程組的根都無法求出。這也正是本篇僅淺談至 $f(n+3)=af(n+2)+bf(n+1)+cf(n)$ 的原因了。

本文承蒙屠耀華老師指導，謹此致謝。

The Algorithm For Solving The Mixed Integer Programming problem

指導老師：吳森原　三甲　古思明(S. M. Guu)

The mixed integer programming problem can be witten as :

$$\left.\begin{aligned} \text{Max} \quad Z &= \vec{c}^{\,t}\,\vec{x} \\ A\vec{x} &= \vec{b} \\ \vec{x} &\geq \vec{0} \\ x_j \ \text{integer}, & \ j \in I \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

where $\vec{X} \in R^{m+n}$, and A is a $(m+n) \times m$ matrix. Thus, the set I consits of the subscripts corresponding to those variables reguired to be integer. 2F $I = \phi$, then (1) is caled linear programming problem. IF $I = \{1, 2, \cdots\cdots m+n\}$, then (1) is called the pure integer programming problem.

Moreover, we let B be the basic matrix of A and N be the nonbasic matrix of A ; the corresporeling basic variables and nonbasic variables are $\vec{x}_B$ and $\vec{x}_N$, respectively.

Then the objective function can be written as :

$$Z = \vec{C} + \vec{X} = [\,\vec{C}_B^t,\ \vec{C}_N^t\,]\begin{bmatrix} \vec{x}_B \\ \vec{x}_N \end{bmatrix} = \vec{C}_B^t\,\vec{X}_B + \vec{C}_N^t\,\vec{X}_N \qquad (2)$$

the explicit constraints also can be written as :

$$[\,B\ ,\ N\,]\begin{bmatrix}\vec{X}_B\\ \vec{X}_N\end{bmatrix} = \vec{b}\ ,\ \text{and}\quad \text{then}\ B\vec{X}_B + N\vec{X}_N = \vec{b} \tag{3}$$

From (3) we have :

$$\vec{X}_B + B^{-1}N\vec{X}_N = B^{-1}\vec{b}\ ,\ \text{and + hen}\ \vec{X}_B = B^{-1}\vec{b} - B^{-1}N\vec{X}_N \tag{4}$$

From (2) and (4) , we have :

$$Z = \vec{C}^t_B\ B^{-1}\vec{b} + (\ \vec{C}^t_N - \vec{C}^t_B B^{-1}N)\ \vec{X}_N \tag{5}$$

Therefore (1) can be rewritten as :

$$\begin{bmatrix}\dfrac{Z}{X_B}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{C}^t_B B^{-1}\vec{b}\\ B^{-1}\vec{b}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\vec{C}^t_B\ B^{-1}N - \vec{C}^t_N\\ B^{-1}N\end{bmatrix}\vec{X}_N \tag{6}$$

Now we let $\vec{X}_B = \begin{bmatrix}X_{B1}\\ X_{B2}\\ \vdots\\ X_{Bm}\end{bmatrix}$, $\vec{X}_N = \begin{bmatrix}X_{N1}\\ \vdots\\ X_{Nn}\end{bmatrix}$, $B^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix}y_{10}\\ y_{20}\\ \\ y_{m0}\end{bmatrix}$

$$B^{-1}N = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots\cdots y_{1n}\\ y_{21} & y_{22} & \cdots\cdots y_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots\cdots y_{mn}\end{bmatrix},\quad \vec{C}^t_B\ B^{-1}\ \vec{b} = [\ y_{00}\ ]\ ,\ \text{and}$$

$$\vec{C}^t_B\ B^{-1}N - \vec{C}^t_N = [\ y_{01}\ ,\ y_{02}\ ,\cdots\cdots,\ y_{0n}\ ]$$

Then (6) can be written as :

$$
\begin{bmatrix} z \\ X_{B1} \\ \vdots \\ X_{Bm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{00} \\ y_{10} \\ \vdots \\ y_{m0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{01} & \cdots & y_{0n} \\ y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & \cdots & y_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{N1} \\ X_{N2} \\ \vdots \\ X_{Nn} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} y_{00} \\ y_{10} \\ \vdots \\ y_{m0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{01} & y_{02} & \cdots & y_{0n} \\ y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -X_{N1} \\ -X_{N2} \\ \vdots \\ -X_{Nn} \end{bmatrix} \tag{7}
$$

(7) Can be represented in the following Simplex tableau as follows:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -X_{N1} & \cdots & -X_{Nn} \\
\hline
z & y_{00} & y_{01} & \cdots & y_{0n} \\
X_{B1} & y_{10} & y_{11} & \cdots & y_{1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
X_{Bm} & y_{m0} & y_{m1} & \cdots & y_{mn}
\end{array} \tag{8}
$$

(A) The Simplex Algorithm: (for solving linear programming problems)

Step 1. Choose a basic feasible solution and write the corresponding simplex tableau. If $y_{01}, y_{02}, \cdots\cdots, y_{0n} \geqslant 0$. Then the current solutions are optimal srlutions, and then halt. else go to step 2.

Step 2. Choose a non-basic variable and convert it into be a basic variable. The rule here is: if MIN $\{y_{01}, y_{02}, \cdots\cdots, y_{0n}\} = y_{0j}$ Convert Xnj into a basic variable.

Step 3. Choose a basic variable and convert it to be a nonbasi variable. The rule here is: if

$$\mathrm{MIN}\left\{\frac{y_{po}}{y_{pj}} \middle| y_{pj} > 0,\ p = 1, 2, \cdots\cdots, m\right\} = \frac{y_{io}}{y_{pj}}$$

the exchange Index Biand Index N_j.

Step 4. Now we have found the pivotal element y_{ij} Apply the Gauss-Jordan elimination techmigue to find another new simplex tableau. Go To step 1.

(B) The Dual Simplex Algorithm: (for solving linear programming problems)

Step 1. Find a basic feasible solution and write the corresponding simplex tableau. If $y_{01}, y_{02}, \cdots\cdots, y_{0n} \geqslant 0$ & $y_{10}, y_{20}, \cdots\cdots, y_{m0} \geqslant 0$ then the current solutions are optimal solutions and then stop else if $y_{01}, \cdots\cdots, y_{0n} \geqslant 0$ but at least one term of $y_{10}, y_{20}, \cdots\cdots, y_{m0}$ is negative, trun go to step 2.

Step 2. Choose a basic variable and convert it to be a non-basic veriable. The rule is: min

$\{ y_{10}, y_{20}, \cdots\cdots, y_{m0} \} = y_{i0}$ and then convert to be a nonbasic variable.

Step 3. Choose nonbasic variable and convert it to be a basic variable. The rule here is: If we have decided to become a nonbasic variable, then

$$\min \left\{ \left| \frac{y_{op}}{y_{ip}} \right| \;\middle|\; y_{ip} < 0 , p = 1 , \cdots\cdots , n \right\} = \left| \frac{y_{ij}}{y_{ij}} \right|$$

and we want to convert X_{Nj} to be a nonbasic variable.

Step 4. Let y_{ij} be the pivotal element and apply the Gauss-Jordan technigues to find a new simple tableau. go to step 1.

(C) Gomory's mixed integer programming algorithm.

Suppose, now, that we have solved the related LP problem and the rth basic variable is not an integer, but is reguired to be an integer, Then, by(8), we can write:

$$X_{Br} = y_{ro} -(y_{r1} x_{n1} + \cdots\cdots + y_{rn} x_{Nn}) = y_{ro} - \sum_{j=1}^{n} y_{rj} x_{Nj}$$

Let W_{ro} denote the integral part of y_{ro} and f_{ro} denote the nonnegative decimal part of y_{ro} i.e. $y_{ro} = W_{ro} + f_{ro}$, where $0 \leq f_{ro} \leq 1$,thus we have:

$$x_{Br} = w_{r0} + {}_{r0} - \sum_{j=1}^{n} y_{rj} x_{Nj}$$

$$\Rightarrow \quad x_{Br} - w_{r0} = {}_{\cdot 0} - \sum_{j=1}^{n} y_{rj} x_{Nj} \in \{ 0 , \pm 1 , \pm 2 , \cdots\cdots \}$$

Let $N^{+} = \{ j \mid y_{rj} \geqslant 0 , j = 1 , 2 , \cdots\cdots , n \}$,

$N^{-} = \{ j \mid y_{rj} < 0 , j = 1 , \cdots\cdots n \}$

(I) Suppose that $\sum_{j=1}^{n} y_{rj} x_{Nj} \geqslant 0$, then $f_{r0} - \sum_{j=1}^{n} y_{rj} x_{Nj} \leqslant 0$

thus $\quad f_{r0} \leqslant \sum_{j=1}^{n} y_{rj} x_{Nj} = \sum_{j\ N^+} y_{rj}\, x_{Nj} + \sum_{j\ N} y_{rj}\, x_{Nj}$

hence $\quad f_{r0} \leqslant \sum_{j\ N^+} y_{rj}\, x_{Nj}$

(II) Suppose that

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\, x_{Nj} < 0 \text{ , then } f_{r0} - \sum_{j=1}^{n} y_{rj} x_{Nj} \in \{\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ .\ \cdots\cdots\ \}$$

Hance $\quad f_{r0} - \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\ x_{Nj} \geqslant 1 \Rightarrow \sum_{j\ N^+} y_{rj}\ x_{Nj} + \sum_{j\ N^-} y_{rj} x_{Nj} \leqslant f_{r0} - 1$

$$\sum_{j\in N^-} y_{rj}\ x_{Nj} \leqslant f_{r0} - 1 \text{ , } -\sum_{j\in N^-} y_{rj}\, x_{Nj} \geqslant 1 - f_{r0}$$

$$\sum_{j\in N^-} |\, y_{rj}\,|\, x_{Nj} \geqslant 1 - f_{r0} \text{ , } \left(\frac{f_{r0}}{1 - f_{r0}}\right) \sum_{j\in N^-} |\, y_{rj}\,|\, x_{Nj} \geqslant f_{r0}$$

This implies

$$\sum_{j\in N^-} \left(\frac{f_{r0}}{1 - f_{r0}}\right) |\, y_{rj}\,|\, x_{Nj} \geqslant f_{r0}$$

From (I),(II) We conclude that:

$$\sum_{j\in N^+} y_{rj}\, x_{Nj} + \sum_{j\in N} - \frac{f_{ro}}{1-f_{ro}}\ y_{rj} | x_{Nj} \geq f_{ro} \qquad (9)$$

Now, we have obtained (9), called cutting plane constraints. With the help of (9), We could obtain a new optimal solution which is more near or exactly to be an intrger.

Example.

Consider the following diet problem. Suppose a housewife plans to distribute the following six kinds of vegetables in order to obtain the sufficient alimentations subject to the money in a week as fewer as possible. The elements contained in each vegetables are as fallous:

For each Person:

	Iron	phosphorus	vitamin A	vitamin C	nicotinic acid	$(Cent)
green bean	0.45	10	415	8	0.30	5
Carrot	0.45	28	9065	3	0.35	5
Cabage	1.05	50	2550	53	0.60	8
mustard	0.40	25	75	27	0.15	2
beet	0.50	22	15	5	0.25	6
potato	0.50	75	235	8	0.80	3
For each person iat least amount per week	6.00mg	325 mg	17500usp	245mg	5.00mg	

Assumed that in each week, the mustard can not be distributed more than twice and other vegetables can't be distributed more than four times. The total distribution needs 14 times in a week. Then each vegetable, should be distributed how many times in next week so that money as fewer as possible?

Let X_1 be the times of distribution for green bean.

X_2 be the times of distribution for carrot.

X_3 be the times of distribution for cabage

X_4 be the times of distribution for mustard

X_5 be the times of distribution for beet

X_6 be the toues of distribution for potato.

Then we want to find the minimum value of

$$z=5x_1+5x_2+8x_3+2x_4+6x_5+3x_6, \text{ which is restricted by}$$

$$0.45x_1+0.45x_2+1.05x_3+0.40x_4+0.50x_5+0.50x_6 \geq 6.00$$

$$10x_1+28x_2+50x_3+25x_4+22x_5+75x_6 \geq 325$$

$$415x_1+9065x_2+2550x_3+75x_4+25x_5+235x_6 \geq 17500$$

$$8x_1+3x_2+53x_3+27x_4+5x_5+8x_6 \geq 245$$

$$0.3x_1+0.35x_2+0.6x_3+0.15x_4+0.25x_5+0.8x_6 \geq 5$$

$$0.3x_1+0.35x_2+0.6x_3+0.15x_4+0.25x_5+0.8x_6 \leq 2$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_3 \leq 4$$

$$x_5 \leq 4$$

$$x_6 \leq 4$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \doteq 14$$

$$x_i \in \geqq \text{ and } x_i \geq 0 \quad i=1,2,3,4,5,6$$

The folloumg computer programming is desiged for solving the Linear programming problem in form of:

$$\min z = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i$$

$$A \vec{Z} \leq \vec{b}$$

$$\vec{Z} \geq \vec{0}$$

If we want to salve integer proframing, we should put "3" into variable" Form(3)" in computer programing.

Tableau 22 bas attended, the integer-form

From tableau 22, We know:

The minimum total money for each porson in a week is 65 cents.

Remark: The basic variable 13 in the current tableau is negative.

9t is generated by truncate-error we can accept it!

Acknowledgments are dve to my Teacher, Professor Wu.

1. Billy E. Gillett; Introduction to Operation Research----- A Computer-Oriented Algorithm Approach.

2. Hamdy A. Taha; Integer programming, (1974).

3. S. Zionts: Lineal and intrger programming, 1974.

4. S.Y. Wu; edt. Linear programming, theory and application on BASIC programming.

FORTRAN-VIID R03-00.0

FORTRAN VIID: LICENSED RESTRICTED RIGHTS AS STATED IN LICENSE E-0582-0076 ***,

```
       $BATCH
       DIMENSION XN(50),XB(50),Y(51,51),FORM(3),YO(51,51),TEST(50)
       INTEGER XN,XB,FORM,TEST
       COMMON Y,XB,XN,YO,TEST
       DATA N,NC/6,13/
C
C      INPUT--DATA--PART--
C
       DO 1 I=1,NC+1
       READ(5,9)(Y(I,J),J=1,N+1)
       DO 11 J=1,N+1
    11 YO(I,J)=Y(I,J)
     1 CONTINUE
       READ(5,6)(FORM(I),I=1,3)
       READ(5,9)M ,(TEST(I),I=1,M)
C      --------------------------------
     5 DO 3 I=1,N
     3 XN(I)=I
       DO 4 I=1,NC
     4 XB(I)=N+I
       CALL OUT(N,NC)
C      --------------------------------
       DO 8 I=2,NC+1
         IF(ABS(Y(I,N+1)-0.).LT.10.E-5)THEN
               Y(I,N+1)=0.
               GOTO 8
         END IF
         IF(Y(I,N+1).LT.0.)THEN
            CALL DUAL(N,NC)
            I=1
         END IF
     8 CONTINUE
C      --------------------------------
       DO 7 J=1,N
C
         IF(ABS(Y(1,J)-0.).LT.10.E-5)THEN
               Y(1,J)=0.
               GOTO 7
         END IF
C
         IF(Y(1,J).LT.0.)THEN
            CALL SIMPLX(N,NC)
            J=0
         END IF
     7 CONTINUE
C      --------------------------------
       IF(FORM(3).EQ.3)THEN
          CALL CUTING(N,NC,M)
          GOTO 5
       END IF
C      --------------------------------
       WRITE(6,20)
C      --------------------------------
     2 FORMAT(10F8.2)
     6 FORMAT(3I2)
     9 FORMAT(I2,20I2)
    20 FORMAT(//10X,'THE PROBLEM HAS BEEN SOLVED !'//)
C      --------------------------------
```

FORTRAN-VIID R03-00.0

FORTRAN VIID: LICENSED RESTRICTED RIGHTS AS STATED IN LICENSE E-0582-0076 **.

```
       STOP
       END
```

NO ERRORS:F70 R03-00. MAINPROG .MAIN 03/21/84 16:39:36 TABLE SPACE:
STATEMENT BUFFER: 20 LINES/1321 BYTES STACK SPACE: 143 WORDS
SINGLE PRECISION FLOATING PT SUPPORT REQUIRED FOR EXECUTION

```
FORTRAN-VIID R03-00.0

FORTRAN VIID: LICENSED RESTRICTED RIGHTS AS STATED IN LICENSE E-0582-0076    ***, SE

                     C
                     C     THE SUBROUTINE IS DESIGNED FOR SIMPLEX ALGORITHM
                     C
        000000I            SUBROUTINE SIMPLX(N,NC)
        000004I            DIMENSION Y(51,51),XB(50),XN(50),YO(51,51),TEST(50)
        000004I            INTEGER COUNT,XB,XN
        000004I            COMMON Y,XB,XN,YO,TEST
                     C
        000004I            C=Y(1,1)
        000010I            INDEX2=1
        000018I            DO 1 I=2,N
        00002CI               IF(Y(1,I).LT.C)THEN
        00004CI                  C=Y(1,I)
        00006EI                  INDEX2=I
        000072I               END IF
        000078I          1 CONTINUE
                     C
        000090I            COUNT=0
        000098I            CC=10.E10
                     C
        0000A4I            DO 2 I=2,NC+1
        0000BAI               IF(Y(I,INDEX2).GT.0.)THEN
        0000E0I                  YY=Y(I,N+1)/Y(I,INDEX2)
        00011CI                    IF(CC.GT.YY)THEN
        00012EI                       CC=YY
        00013AI                       INDEX1=I
        000146I                    END IF
        00014CI               ELSE
        000152I                  COUNT=COUNT+1
        00016EI                    IF(COUNT.GE.NC)THEN
        000172I                       WRITE(6,5)
        0001A0I                       STOP
        0001B4I                    END IF
        0001BAI               END IF
        0001BAI          2 CONTINUE
                     C
        0001D2I            WRITE(6,7)INDEX1,INDEX2+1,Y(INDEX1,INDEX2)

                     C
        00025CI            M=XB(INDEX1-1)
        000272I            XB(INDEX1-1)=XN(INDEX2)
        000290I            XN(INDEX2)=M
        0002A4I            CALL CALCU(N,NC,INDEX1,INDEX2)
        0002C8I            CALL OUT(N,NC)
                     C
        0002E4I          5 FORMAT(//,10X,'THE PROBLEM HAS NO SOLUTIONS IN SIMPLX ! '//)
        000324I          7 FORMAT(//10X,'THE PIVOTAL ELEMENT IN SIMPLEX IS :',
                          *'Y(',I2,',',I2,')=',F10.3//)
                     C
        000370I            RETURN
        00037EI            END

NO ERRORS:F7D R03-00.0   SUBROUTINE SIMPLX 03/21/84 16:39:39 TABLE SPACE: 2
STATEMENT BUFFER: 20 LINES/1321 BYTES   STACK SPACE: 132 WORDS
SINGLE PRECISION FLOATING PT SUPPORT REQUIRED FOR EXECUTION

FORTRAN-VIID R03-00.0

FORTRAN VIID: LICENSED RESTRICTED RIGHTS AS STATED IN LICENSE E-0582-0076    ***, SEE DO

        000000I            SUBROUTINE CALCU(N,NC,INDEX1,INDEX2)
        000004I            DIMENSION Y(51,51),XB(50),XN(50),YO(51,51),TEST(50)
        000004I            COMMON Y,XB,XN,YO,TEST
        000004I            PIVOT=Y(INDEX1,INDEX2)
        000024I            DO 1 I=1,NC+1
        00003AI            DO 2 J=1,N+1
        000050I              IF(I.NE.INDEX1.AND.J.NE.INDEX2)THEN
        000074I                Y(I,J)=Y(I,J)-Y(I,INDEX2)*Y(INDEX1,J)/PIVOT
        0000E4I              END IF
        0000FAI          2 CONTINUE
        000102I          1 CONTINUE
        000114I            DO 9 I=1,NC+1
        000130I          9 Y(I,INDEX2)=-Y(I,INDEX2)/PIVOT
        000184I            DO 10 J=1,N+1
        0001A0I         10 Y(INDEX1,J)=Y(INDEX1,J)/PIVOT
        0001F0I            Y(INDEX1,INDEX2)=1./PIVOT
        000218I            RETURN
        00021EI            END

NO ERRORS:F7D R03-00.0   SUBROUTINE CALCU 03/21/84 16:39:40 TABLE SPACE: 2 KB
STATEMENT BUFFER: 20 LINES/1321 BYTES   STACK SPACE: 156 WORDS
SINGLE PRECISION FLOATING PT SUPPORT REQUIRED FOR EXECUTION
```

```
FORTRAN-VIID R03-00.

FORTRAN VIID: LICENSED RESTRICTED RIGHTS AS STATED IN LICENSE E-0582-0076     ***, SE

                C
                C        THE SUBROUTINE IS DESIGNED FOR DUAL ALGORITHM
                C
 000000I                 SUBROUTINE DUAL(N,NC)
 000004I                 DIMENSION Y(51,51),XB(50),XN(50),YO(51,51),TEST(50)
 000004I                 INTEGER XN,XB,COUNT
 000004I                 COMMON Y,XB,XN,YO,TEST
 000004I                 C=Y(2,N+1)
 000028I                 M=2
 00002AI                 DO 1 I=3,NC+1
 00003EI                    IF(C.GT.Y(I,N+1))THEN
 000064I                       C=Y(I,N+1)
 000088I                       M=I
 000094I                    END IF
 00009AI               1 CONTINUE
 0000BAI                 COUNT=0
 0000BAI                 CC=10.E10
                C
 0000C6I                 DO 2 J=1,N
 0000DAI                    IF(Y(M,J).LT.0.)THEN
 000100I                       YY=ABS(Y(1,J)/Y(M,J))
 00015EI                          IF(CC.GT.YY)THEN
 000164I                             CC=YY
 000174I                             IND=J
 00017CI                          END IF
 000182I                    ELSE
 000188I                       COUNT=COUNT+1
 00019CI                          IF(COUNT.GE.N)THEN
 0001A8I                             WRITE(6,3)
 0001E4I                             STOP
 0001ECI                          END IF
 0001F0I                    END IF
 0001F2I               2 CONTINUE,
                C
 00020AI                 WRITE(6,4)M,IND+1,Y(M,IND)
                C
 000294I                 MM=XB(M-1)
 0002AAI                 XB(M-1)=XN(IND)
 0002C8I                 XN(IND)=MM
 0002DCI                 CALL CALCU(N,NC,M,IND)
 000300I                 CALL OUT(N,NC)
                C
 00031CI               3 FORMAT(//10X,'THE PROBLEM HAS NO SOLUTIONS IN DUAL
 000358I               4 FORMAT(//10X,'THE PIVOTAL ELEMENT IN DUAL IS :',
                         1'Y(',I2,',',I2,')=',F10.3//)
                C
 0003A8I                 RETURN
 0003AEI                 END

NO ERRORS:F7D R03-00.0  SUBROUTINE DUAL   03/21/84  16:39:41  TABLE SPACE:
STATEMENT BUFFER:  20 LINES/1321 BYTES    STACK SPACE: 162 WORDS
SINGLE PRECISION FLOATING PT SUPPORT REQUIRED FOR EXECUTION
```

```
FORTRAN-VIID R03-00.0

FORTRAN VIID: LICENSED RESTRICTED RIGHTS AS STATED IN LICENSE E-0582-0076     ***, SEE DOC

              C.
              C        THE SUBROUTINE IS DESIGNED FOR OUTPUT
              C
 000000I               SUBROUTINE OUT(N,NC)
 000004I               DIMENSION Y(51,51),XNX(50),XB(50),XN(50),TEST(50)
 000004I               DIMENSION YO(51,51),NNX1(20),NNX2(20)
 000004I               INTEGER XB,XN,XNX
 000004I               COMMON Y,XB,XN,YO,TEST
 000004I               DATA XNX,NNX1,NNX2/50*' -X',20*'----',20*'----'/
 000174I               WRITE(6,7)
 0001B0I               WRITE(6,1)(XNX(I),XN(I),I=1,N)
 00025CI               WRITE(6,2)(NNX1(I),NNX2(I),I=1,N)
 000308I               WRITE(6,3)Y(1,N+1),(Y(1,J),J=1,N)
 0003BCI               DO 4 I=2,NC+1
 0003F2I             4 WRITE(6,5)XB(I-1),Y(I,N+1),(Y(I,J),J=1,N)
              C
 000504I             1 FORMAT(13X,'I',11X,10(A2,I2,6(' ')))
 00052CI             2 FORMAT(7X,14('-'),10(A4,'--',A4))
 000554I             3 FORMAT(6X,'Z!',F10.3,1X,'!',10F10.3)
 00057CI             5 FORMAT(1X,'XB(',I2,')!',F10.3,1X,'!',10F10.3)
 0005B0I             7 FORMAT(1H1)
 0005C0I               RETURN
 0005C6I               END

NO ERRORS:F7D R03-00.0  SUBROUTINE OUT   03/21/84  16:39:42  TABLE SPACE:  2 KB
STATEMENT BUFFER:  20 LINES/1321 BYTES    STACK SPACE: 114 WORDS
```

```
FORTRAN-VIID R03-00.

FORTRAN VIID: LICENSED RESTRICTED RIGHTS AS STATED IN LICENSE E-0582-0076     ***, SEE

                C
                C       INTEGRAL SOLUTION FORM FOR N.P.--BY USING
                C        CUTTING PLANE ALGORITHM
                C
     000000I            SUBROUTINE CUTING(N,NC,M)
     000004I            DIMENSION XB(50),XN(50),Y(51,51),TEST(50),Y0(51,51)
     000004I            INTEGER TEST,XB,XN
     000004I            COMMON Y,XB,XN,Y0,TEST
     000004I            MM=0
     00000CI            MP=NC
                C
     000018I            DO 1 I=2,M+1
     00002EI              IF(XB(I-1).LE.N)THEN
     00004AI                D1=ABS(ABS(Y(I,N+1))-FLOAT(ABS(IFIX(Y(I,N+1)))))
     00012EI                DO 2 J=1,M
     000142I                  IF(XB(I-1).NE.TEST(J))GOTO 2
     00016CI                  IF(D1.LE.0.001.OR.(FLOAT(IFIX(D1+1.))-D1).LE.
                     *          0.001)GOTO 5
     0001DCI                  COEFF=D1/(1.-D1)
     0001F6I                  GOTO 20
     0001FCI          2     CONTINUE
                C
     000214I              GOTO 5
     00021AI         20     NC=NC+1
     000228I                Y0(NC+1,N+1)=D1
                C
     00024EI                DO 4 J=1,N
     000262I                  DECIM=ABS(ABS(Y(I,J))-FLOAT(IFIX(ABS(Y(I,J)))))
     00033EI                  IF(DECIM.GE.0.001)THEN
     000350I                    IF(XN(J).LE.N)THEN
     00036AI                      IF(Y(I,J).LT.0.)THEN
     000390I                        Y0(NC+1,J)=Y0(NC+1,J)+COEFF*DECIM
     0003D8I                      ELSE
     0003DEI                        Y0(NC+1,J)=Y0(NC+1,J)+DECIM
     000420I                      END IF
     000420I                    ELSE
     000426I                      MIN=XN(J)-N+1
     000442I                      IF(Y(I,J).GT.0.)THEN
     000468I                        DO 8 K=1,N+1
     00047EI          8             Y0(NC+1,K)=Y0(NC+1,K)+DECIM*(-Y0(MIN,K))
     0004F8I                      ELSE
     0004FEI                        DO 6 K=1,N+1
     000514I          6             Y0(NC+1,K)=Y0(NC+1,K)-COEFF*DECIM*Y0(MIN,K)
     000590I                      END IF
     000590I                    END IF

     000590I                  END IF
     000596I          4     CONTINUE
     0005AEI              ELSE
     0005B4I          5     MM=MM+1
     0005C2I                IF(MM.GE.MP)THEN
     0005D4I                  WRITE(6,3)
     000610I          3 FORMAT(//10X,'INTEGER-FORM HAS REACHED ! '//)
     000644I                  STOP 1000
     000660I                END IF
     000666I              END IF
     000666I          1 CONTINUE
                C


FORTRAN-VIID R03-00.0

FORTRAN VIID: LICENSED RESTRICTED RIGHTS AS STATED IN LICENSE E-0582-0076     ***, SEE

     00067EI            DO 7 J=1,N+1
     000694I          7 Y0(NC+1,J)=-Y0(NC+1,J)
                C
     0006EEI            DO 12 I=1,NC+1
     000704I            DO 13 J=1,N+1
     00071AI         13 Y(I,J)=Y0(I,J)
     000766I         12 CONTINUE
                C
     00077EI            RETURN
     000784I            END

NO ERRORS:F7D R03-00.    SUBROUTINE CUTING 03/21/84 16:39:44 TABLE SPACE:   3
STATEMENT BUFFER:  20 LINES/1321 BYTES    STACK SPACE: 266 WORDS
SINGLE PRECISION FLOATING PT SUPPORT REQUIRED FOR EXECUTION
```

```
FORTRAN-VIID R0[illegible]-[illegible].

FORTRAN VIID: LICENSED RESTRICTED RIGHTS AS STATED IN LICENSE [illegible]

   1          $DEND
CP731[illegible]END OF TASK CODE=          CPUTIME=[illegible]
PERKIN-ELMER OS/32 LINKAGE EDITOR R[illegible]-[illegible]
CP731[illegible]END OF TASK CODE=          CPUTIME=3.[illegible]/[illegible].517
<<<<< YOUR RESULTS ARE LIST AS FOLLOWS >>>>>
```

first tableau:

tableau 1

	1	-X 1	-X 2	-X 3	-X 4	-X 5	-X 6
Z!	0. !	1.000	5.[illegible]	9.[illegible]	2.[illegible]	6.[illegible]	7.
XB(7)!	-600.000 !	-45.000	-45.[illegible]	-105.[illegible]	-40.000	-5[illegible]	-5[illegible].
XB(8)!	-325.000 !	-1[illegible]	-78.[illegible]	-[illegible]	-2[illegible]	-[illegible]	-7[illegible].
XB(9)!	-17500.000 !	-15.000	-9[illegible]	-2550.000	-75.[illegible]	-15.000	-75.
XB(10)!	-245.000 !	-[illegible].000	-3.[illegible]	-53.000	-27.[illegible]	-[illegible]	-[illegible].
XB(11)!	-590.000 !	-3[illegible].000	-35.[illegible]	-60.000	-15.[illegible]	-25.000	-80.
XB(12)!	2.000 !	.	0.	.	1.[illegible]	.	.
XB(13)!	4.000 !	1.000	0.	0.	0.	.	0.
XB(14)!	4.000 !	.	1.000	.	0.	.	.
XB(15)!	4.000 !	.	0.	1.000	0.	.	.
XB(16)!	4.000 !	.	0.	.	.	1.000	.
XB(17)!	4.000 !	.	0.	0.	0.	.	1.
XB(18)!	14.000 !	1.000	1.000	1.000	1.	1.[illegible]	1.
XB(19)!	-14.000 !	-1.000	-1.000	-1.000	-1.	-1.[illegible]	-1.

THE PIVOTAL ELEMENT IN DUAL IS :Y(4, 3)= -[illegible]

2

	1	-X 1	-X 2	-X 3	-X 4	-X 5	-X
Z!	-7.653 !	4.992	0.[illegible]	6.59[illegible]	1.[illegible]	[illegible]	2.[illegible]
XB(7)!	-513.127 !	-44.926	-0.[illegible]5	-9[illegible].341	-39.6[illegible]	-49.9[illegible]	-49.[illegible]
XB(8)!	-27[illegible].946 !	-[illegible].954	-[illegible]	-4[illegible].1[illegible]	-[illegible].7[illegible]	-[illegible]	-74.[illegible]
XB(9)!	1.931 !	.0[illegible]	-[illegible]	.231	[illegible]	[illegible]	[illegible]
XB(10)!	-23[illegible].2[illegible] !	-7.995	-0.[illegible]	-5[illegible].15[illegible]	-26.[illegible]75	-4.99[illegible]	-7.[illegible]
XB(11)!	-432.432 !	-29.942	-0.[illegible]4	-[illegible].154	-14.710	-24.[illegible]	-79.[illegible]
XB(12)!	2.000 !	[illegible].	0.	.	1.[illegible]	.	[illegible].
XB(13)!	4.000 !	1.000	[illegible].	.	0.	.	.
XB(14)!	2.069 !	-[illegible].0[illegible]	.	-[illegible].231	-0.[illegible]	-[illegible]	-[illegible].
XB(15)!	4.000 !	.	0.	1.000	0.	[illegible].	0.
XB(16)!	4.000 !	[illegible].	0.	[illegible].	0.	1.00[illegible]	[illegible].
XB(17)!	4.000 !	[illegible].	0.	[illegible].	0.	[illegible].	1.[illegible]
XB(18)!	12.069 !	[illegible].998	0.[illegible]	[illegible].71[illegible]	[illegible].9[illegible]	[illegible].998	[illegible].274
XB(19)!	-12.069 !	-[illegible].998	-0.[illegible]	-[illegible].71[illegible]	-[illegible].9[illegible]	-[illegible].998	-[illegible].274

THE PIVOTAL ELEMENT IN DUAL IS :Y([illegible], 5)= -39.62[illegible]

3

	1	-X 1	-X 2	-X 3	-X 7	-X 5	-X 6
Z!	-3[illegible].014 !	[illegible].771	0.[illegible]	[illegible].02[illegible]	0.04[illegible]	[illegible].[illegible]24	[illegible].4[illegible]7
XB(4)!	12.949 !	1.134	0.[illegible]	2.33[illegible]	-0.025	1.26[illegible]	1.[illegible]32
XB(8)!	4[illegible].77[illegible] !	1[illegible].12[illegible]	0.[illegible]	1[illegible].59[illegible]	-0.[illegible]	[illegible].2[illegible]	-43.7[illegible]2
XB(9)!	1.823 !	-[illegible].008	-0.000	0.262	0.00[illegible]	-0.0[illegible]9	0.[illegible]16
XB(10)!	11[illegible].08[illegible] !	2[illegible].58[illegible]	0.[illegible]03	1[illegible].7[illegible]	-0.[illegible]91	2[illegible].99[illegible]	2[illegible].51[illegible]
XB(11)!	-241.951 !	-1[illegible].265	-0.[illegible]2	-15.876	-0.371	-6.409	-6[illegible].[illegible]55
XB(12)!	-10.949 !	-1.134	-0.[illegible]	-2.33[illegible]	0.025	-1.26[illegible]	-1.[illegible]
XB(13)!	4.000 !	1.000	0.	0.	0.	0.	0.
XB(14)!	[illegible].177 !	.0[illegible]	[illegible]	-[illegible].26[illegible]	-0.0[illegible]	0.00[illegible]	-[illegible].
XB(15)!	4.000 !	[illegible].	0.	1.000	0.	0.	[illegible].
XB(16)!	4.000 !	[illegible].	0.	.	0.	1.000	0.
XB(17)!	4.000 !	.	0.	[illegible].	0.	[illegible].	1.[illegible]
XB(18)!	-0.772 !	-[illegible].126	-0.[illegible]	-1.59[illegible]	0.025	-0.251	-[illegible].[illegible]
XB(19)!	0.772 !	[illegible].126	0.[illegible]	1.59[illegible]	-0.025	0.251	0.[illegible]

THE PIVOTAL ELEMENT IN DUAL IS :Y(6, 7)= -60.[illegible]65

4

	1	-X 1	-X 9	-X 3	-X 7	-X 5	-X11
Z!	-36.827 !	.577	0.[illegible]	1.91[illegible]	0.[illegible]97	3.476	0.[illegible]27
XB(4)!	8.058 !	.866	0.[illegible]	[illegible].009	-0.133	1.130	0.[illegible]
XB(8)!	22[illegible].410 !	27.646	0.[illegible]01	25.985	-0.3[illegible]	13.8[illegible]1	-0.71[illegible]
XB([illegible])!	1.761 !	-0.011	-0.[illegible]00	0.252	0.[illegible]	-0.010	0.[illegible]
XB(10)!	[illegible].600 !	17.077	0.[illegible]02	4.107	-0.835	26.32[illegible]	0.41[illegible]
XB(6)!	3.969 !	.218	0.[illegible]	0.263	0.0[illegible]6	0.105	-0.[illegible]15
XB(12)!	-8.058 !	-0.866	-0.[illegible]	-[illegible].009	0.133	-1.130	-0.[illegible]
XB(13)!	4.000 !	1.000	0.	0.	0.	0.	0.
XB(14)!	[illegible].23[illegible] !	.011	0.[illegible]	-[illegible].252	-0.[illegible]	.010	-0.[illegible]
XB(15)!	4.000 !	0.	0.	1.000	0.	0.	0.
XB(16)!	4.000 !	0.	0.	0.	0.	1.000	0.
XB(17)!	0.031 !	-0.218	-0.[illegible]	-0.263	-0.006	-0.105	0.[illegible]16
XB(18)!	0.212 !	-[illegible].079	-0.[illegible]	-1.52[illegible]	0.027	-0.225	-0.[illegible]04
XB(19)!	-0.212 !	0.079	0.[illegible]	1.52[illegible]	-0.027	0.225	0.[illegible]04

THE PIVOTAL ELEMENT IN DUAL IS :Y(7, 7)= -0.[illegible]

5

	1	-X 1	-X 9	-X 3	-X 7	-X 5	-X12
Z!	-39.072 !	.351	0.[illegible]00	1.166	0.059	3.057	0.371
XB(4)!	2.000 !	.000	0.	0.	0.	0.	1.000
XB(8)!	433.497 !	5[illegible].377	0.[illegible]04	93.529	-1.[illegible]21	5[illegible].982	-35.504
XB(2)!	1.684 !	-0.029	-0.[illegible]	0.232	0.001	-0.025	0.[illegible]13
XB(10)!	-114.871 !	-[illegible].767	0.[illegible]00	-37.176	-0.162	[illegible].104	20.545
XB(6)!	8.885 !	.920	0.[illegible]00	1.891	-0.020	1.022	-0.811
XB(11)!	299.7[illegible]6 !	4[illegible].821	0.[illegible]4	93.405	-1.6[illegible]	5[illegible].919	-49.472
XB(13)!	4.000 !	1.000	0.	0.	0.	0.	0.
XB(14)!	2.31[illegible] !	.022	0.[illegible]	-[illegible].232	-0.001	0.025	-0.[illegible]13
XB(15)!	4.000 !	0.	0.	1.000	0.	0.	0.
XB(16)!	4.000 !	0.	0.	0.	0.	1.000	0.
XB(17)!	-4.885 !	-0.920	-0.[illegible]00	-1.891	0.020	-1.022	0.811
XB(18)!	1.432 !	.109	0.[illegible]	-1.123	0.028	0.002	-0.201
XB(19)!	-1.432 !	-0.109	-0.[illegible]00	1.123	-0.028	-0.002	0.201

THE PIVOTAL ELEMENT IN DUAL IS :Y(5, 4)= -37.176

6

	1	-X 1	-X 9	-X10	-X 7	-X 5	-X12
Z!	-42.674 !	0.329	0.[illegible]00	0.031	0.054	3.155	1.[illegible]15
XB(4)!	2.000 !	0.000	0.	0.	0.	0.	1.000
XB(8)!	134.676 !	55.507	0.005	[illegible].645	-1.750	62.192	18.33[illegible]
XB(2)!	0.966 !	-0.027	-0.[illegible]00	0.006	-0.000	-0.005	0.141
XB(3)!	3.090 !	0.019	-0.000	-0.027	0.004	-0.084	-0.5[illegible]3
XB(6)!	3.042 !	0.884	0.000	0.051	-0.029	1.180	0.234
XB(11)!	-7.454 !	4[illegible].951	0.005	2.674	-2.053	64.220	5.468
XB(13)!	4.000 !	1.000	0.	0.	0.	0.	0.
XB(14)!	3.034 !	0.027	0.[illegible]	-0.006	0.000	0.005	-0.141
XB(15)!	0.910 !	-0.019	0.[illegible]00	0.027	-0.004	0.084	0.553
XB(16)!	4.000 !	0.	0.	0.	0.	1.000	0.
XB(17)!	[illegible]0.958 !	-0.884	-0.000	-0.051	0.029	-1.180	-0.234
XB(18)!	4.902 !	0.124	-0.000	-0.030	0.025	-0.091	-0.922
XB(19)!	-4.902 !	-0.124	0.000	0.030	-0.025	0.091	0.922

THE PIVOTAL ELEMENT IN DUAL IS :Y(7, 5)= -2.053

7

	1	-X 1	[illegible]	-X10	-X11	-X 5	-X12
Z!	[illegible] !	3.399	[illegible]	[illegible].101	[illegible].025	4.334	1.[illegible]
XP(4)!	[illegible] !	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.	[illegible]	1.[illegible]
XP([illegible])!	141.7[illegible] !	17.[illegible]	[illegible]	[illegible].10[illegible]	[illegible]	1.20[illegible]	15.[illegible]
XP(2)!	[illegible].968 !	-[illegible].03[illegible]	[illegible]	[illegible].00[illegible]	-0.[illegible]	-0.021	0.14[illegible]
XP([illegible])!	[illegible].074 !	[illegible].10[illegible]	[illegible]	-[illegible].021	[illegible]	[illegible]	-[illegible].[illegible]41
XP([illegible])!	[illegible].14[illegible] !	.311	[illegible]	[illegible].013	-0.014	[illegible].282	0.1[illegible]7
XP(7)!	[illegible] !	-1[illegible]	[illegible]	-1.30[illegible]	[illegible]	-31.275	-2.[illegible]
XP(1[illegible])!	4.[illegible] !	1.00[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.	[illegible]	[illegible]
XP(14)!	[illegible] !	[illegible]	[illegible]	[illegible].00[illegible]	[illegible]	[illegible].021	[illegible]
XP(15)!	[illegible].926 !	-[illegible].10[illegible]	[illegible]	[illegible].021	-0.[illegible]	-[illegible].053	[illegible].[illegible]41
XP(16)!	[illegible] !	.	[illegible]	.	0.	1.[illegible]	[illegible]
XP(17)!	[illegible].8[illegible]4 !	- .71[illegible]	[illegible]	-[illegible].013	0.014	-[illegible].282	-[illegible]
XP(1[illegible])!	[illegible] !	.61[illegible]	[illegible]	[illegible].00[illegible]	[illegible].01[illegible]	[illegible].686	-[illegible]
XP(1[illegible])!	-4.[illegible]1[illegible] !	-[illegible].61[illegible]	-0.[illegible]00	-[illegible].002	-0.012	-[illegible].686	[illegible].75[illegible]

THE PIVOTAL ELEMENT IN DUAL IS :Y(14, 5)= -0.[illegible]12

8

	1	[illegible] 1	-X [illegible]	-X10	-X19	-X 5	-X12
Z!	-5[illegible].267 !	[illegible].06[illegible]	[illegible]	[illegible].[illegible]97	2.161	3.35[illegible]	2.[illegible]
XP(4)!	2.0[illegible] !	.00[illegible]	0.	0.	0.	0.	1.[illegible]
XP([illegible])!	51[illegible].4[illegible]1 !	[illegible].20[illegible]	[illegible]	[illegible].274	-78.477	5[illegible].025	-45.[illegible]
XP([illegible])!	1.061 !	- .024	-0.[illegible]00	0.006	-0.019	-0.007	0.1[illegible]
XP([illegible])!	[illegible].2[illegible] !	[illegible]	[illegible]	-[illegible].022	[illegible].176	-[illegible].067	-[illegible].4[illegible]
XP([illegible])!	8.71[illegible] !	[illegible].027	[illegible].[illegible]00	0.016	-1.156	1.075	-0.717
XP(7)!	1[illegible]7.[illegible] !	[illegible].97[illegible]	-0.[illegible]	-1.21[illegible]	-40.244	-3.675	-33.[illegible]
XP(13)!	4.[illegible] !	1.00[illegible]	0.	[illegible]	0.	[illegible]	[illegible]
XP(1[illegible])!	[illegible] !	[illegible]	[illegible]	-[illegible].006	[illegible].01[illegible]	[illegible]	[illegible]
XP(15)!	1.77[illegible] !	[illegible].003	[illegible]	[illegible].022	-0.176	0.067	[illegible]
XP(16)!	4.0[illegible] !	.	[illegible]	[illegible]	0.	1.000	[illegible]
XP(17)!	-4.71[illegible] !	-1.027	-[illegible].[illegible]00	-0.016	1.156	-1.075	0.717
XP(1[illegible])!	[illegible] !	-[illegible].00[illegible]	0.	-0.000	1.000	-[illegible].000	-0.[illegible]
XP(11)!	387.66[illegible] !	5[illegible].143	[illegible].[illegible]5	[illegible].177	-82.638	56.675	-62.[illegible]

THE PIVOTAL ELEMENT IN DUAL IS :Y(12, 2)= -1.027

9

	1	-X17	-X [illegible]	-X10	-X1[illegible]	-X 5	-X12
Z!	-[illegible].724 !	[illegible].00[illegible]	[illegible]	[illegible].[illegible]6[illegible]	4.43[illegible]	1.194	4.[illegible]1
XP(4)!	2.0[illegible] !	[illegible].00[illegible]	-[illegible]	-[illegible]	[illegible]	-[illegible].00[illegible]	1.[illegible]
XP([illegible])!	21[illegible] !	[illegible].47[illegible]	[illegible]	- .75[illegible]	-[illegible]	-1[illegible].[illegible]6[illegible]	[illegible]
XP([illegible])!	1.172 !	- .024	-[illegible]	[illegible].006	-0.[illegible]47	[illegible].018	0.1[illegible]
XP([illegible])!	[illegible].2[illegible] !	- .[illegible]	[illegible]	- .[illegible]	[illegible].173	-[illegible].06[illegible]	-[illegible].[illegible]10
XP([illegible])!	4.0[illegible] !	1.00[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.	[illegible]	[illegible]
XP(7)!	174.4[illegible]1 !	[illegible]	-0.[illegible]	-1.[illegible]	-34.[illegible]	-[illegible].87[illegible]	-2[illegible].51[illegible]
XP(13)!	-[illegible].5[illegible]6 !	.[illegible]74	-[illegible]	-[illegible].[illegible]16	1.[illegible]26	-1.[illegible]47	[illegible]
XP(14)!	[illegible] !	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]47	-[illegible].[illegible]1[illegible]	-[illegible]
XP(15)!	1.75[illegible] !	.003	[illegible]	[illegible].02[illegible]	-[illegible].173	[illegible].[illegible]6[illegible]	[illegible]
XP(16)!	4.0[illegible] !	.	[illegible]	.	.	1.00[illegible]	[illegible]
XP([illegible])!	4.5[illegible]6 !	- .974	[illegible]	.016	-1.1[illegible]	1.[illegible]47	-[illegible]
XP(1[illegible])!	[illegible].06[illegible] !	- .0[illegible]	[illegible]	[illegible].00[illegible]	1.[illegible]	[illegible]	-[illegible]
XP(11)!	16[illegible].1[illegible]2 !	4[illegible].3[illegible]4	- .[illegible]1	-[illegible].61[illegible]	-2[illegible]	[illegible].1[illegible]1	-2[illegible].7[illegible]4

THE PIVOTAL ELEMENT IN DUAL IS :Y([illegible], [illegible])= -[illegible]

10

	1	-X17	-X[illegible]	-X1[illegible]	-X1[illegible]	-X[illegible]	-X1[illegible]
Z	[illegible]	.3[illegible]	[illegible]	[illegible]	4.8[illegible]	[illegible].887	4.44[illegible]
XB([illegible])	[illegible]	- .6[illegible]	- .	.	0.	.	1.[illegible]
XB([illegible])	[illegible]	4[illegible]	[illegible]	- .44	-[illegible]	[illegible]	-13.[illegible]
XB([illegible])	1.7[illegible]	- .96[illegible]	-[illegible]	.6[illegible]	-1.[illegible]	[illegible].960	-0.3[illegible]
XB([illegible])	2.3[illegible]	-[illegible].1[illegible]	-[illegible]	- .3[illegible]	0.[illegible]	0.040	-0.4[illegible]
XB([illegible])	4.0[illegible]	[illegible].00	[illegible].	.	0.	.	0.
XB(7)	17[illegible].0[illegible]	-[illegible]	-[illegible]	-1.[illegible]	-41.4[illegible]	-[illegible].60[illegible]	-33.[illegible]
XB([illegible])	49[illegible].496	-[illegible]17[illegible].5[illegible]	-[illegible]98.4[illegible]6	13[illegible].5[illegible]	-[illegible]455.[illegible]12	8789.395	-5862.7[illegible]7
XB(1[illegible])	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-[illegible].92	1.[illegible]	-[illegible]	0.[illegible]
XB(1[illegible])	1.7[illegible]	[illegible].10[illegible]	[illegible]	.[illegible]	-[illegible]	-[illegible].040	0.1[illegible]
XB(16)	4.0[illegible]	.	.	.	0.	1.000	0.
XB(1[illegible])	4.0[illegible]	[illegible]	1.[illegible]	.	0.	.	0.
XB(1[illegible])	[illegible]	.00	[illegible]	-1.000	1.000	-0.000	-0.[illegible]
XB(1[illegible])	1[illegible]7.5[illegible]	4[illegible].500	-7.[illegible]	-[illegible].500	-33.500	11.000	-32.[illegible]

Tableau 10 has reached in the stoge of optimality. But variabe 2,3 are not integer. Thus we have to generate 2 new constraints by usıg cutting plane subroutine.

11

	1	-X 1	-X [illegible]	-X 3	-X 4	-X 5	-X 6
Z	1.	[illegible].000	[illegible].	[illegible].000	2.000	5.000	3.000
XB(7)	-600.000	-45.000	-45.[illegible]	-105.000	-40.000	-50.000	-50.000
XB(8)	-32[illegible].00[illegible]	-1[illegible].000	-2[illegible].	-[illegible].000	-25.000	-22.000	-75.000
XB(9)	-17500.000	-15.000	-9565.[illegible]	-2550.000	-75.000	-15.000	-235.000
XB(10)	-245.000	-[illegible].000	-3.[illegible]	-53.000	-27.000	-5.000	-8.000
XB(11)	-500.000	-30.000	-35.[illegible]	-6[illegible].000	-15.000	-25.000	-80.000
XB(12)	2.000	.	.	.	1.000	0.	0.
XB(13)	4.000	1.000	0.	.	0.	0.	0.
XB(14)	4.000	.	1.000	.	0.	.	0.
XB(15)	4.000	.	0.	1.000	0.	0.	0.
XB(16)	4.000	.	0.	0.	0.	1.000	0.
XB(17)	4.000	0.	0.	0.	0.	0.	1.000
XB(18)	14.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
XB(19)	-14.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
XB(20)	-11.667	-1.80[illegible]	[illegible]	1.[illegible]	-[illegible]	1.[illegible]	-1.3[illegible]
XB(21)	-2.486	-0.086	-0.[illegible]86	-[illegible].514	-0.086	-[illegible].143	-0.[illegible]86

THE PIVOTAL ELEMENT IN DUAL IS :Y(4, 3)= -9565.000

12

	1	-X 1	-X 9	-X 3	-X 4	-X 5	-X 6
Z	-9.653	4.992	0.001	5.593	1.959	5.992	2.870
XB(7)	-513.137	-44.926	-0.005	-92.341	-39.628	-49.926	-48.833
XB(8)	-270.946	-9.954	-0.003	-42.124	-24.768	-21.954	-74.274
XB(2)	1.931	0.002	-0.000	0.281	0.038	0.002	0.026
XB(10)	-239.208	-7.995	-0.000	-52.156	-25.975	-4.995	-7.922
XB(11)	-432.432	-29.942	-0.004	-50.154	-14.710	-24.942	-79.093
XB(12)	2.000	0.	0.	0.	1.000	0.	0.
XB(13)	4.000	1.000	0.	0.	0.	0.	0.
XB(14)	2.069	-0.002	0.000	-0.281	-0.008	-0.002	-0.026
XB(15)	4.000	0.	0.	1.000	0.	0.	0.
XB(16)	4.000	0.	0.	0.	0.	1.000	0.
XB(17)	4.000	0.	0.	0.	0.	0.	1.000
XB(18)	12.069	0.998	0.000	0.719	0.992	0.998	0.974
XB(19)	-12.069	-0.998	-0.000	-0.719	-0.992	-0.998	-0.974
XB(20)	-12.053	-1.800	0.000	1.144	-0.535	1.200	-1.805
XB(21)	-2.320	- .086	-0.000	-0.490	-0.085	-0.143	-0.083

THE PIVOTAL ELEMENT IN DUAL IS :Y(2, 5)= -39.628

13

	1	-X 1	-X 9	-X 3	-X 7	-X 5	-X 6
7!	-3[illegible].014 !	[illegible].771	0.000	2.029	0.049	3.524	0.457
XB(4)!	12.949 !	1.134	0.000	2.330	-0.025	1.260	1.232
XB(8)!	4[illegible].77[illegible] !	1[illegible].12[illegible]	0.[illegible]00	13.59[illegible]	-0.625	[illegible].251	-43.[illegible]
XB(2)!	1.823 !	-[illegible].00[illegible]	-0.[illegible]00	0.262	0.000	-0.009	0.016
XB(10)!	11[illegible].1[illegible] !	[illegible].5[illegible]6	0.[illegible]03	10.70[illegible]	-0.681	28.990	25.319
XB(11)!	-241.951 !	-1[illegible].265	-0.[illegible]02	-15.876	-0.371	-6.409	-60.965
XB(12)!	-1[illegible].949 !	-1.134	-0.[illegible]00	-2.33[illegible]	0.025	-1.260	-1.232
XB(13)!	4.00[illegible] !	1.00[illegible]	0.	0.	0.	0.	0.
XB(14)!	[illegible].177 !	.00[illegible]	0.[illegible]00	-0.262	-0.000	0.009	-0.016
XB(15)!	4.00[illegible] !	.	0.	1.000	0.	0.	0.
XB(16)!	4.00[illegible] !	.	0.	0.	0.	1.000	0.
XB(17)!	4.00[illegible] !	.	0.	0.	0.	0.	1.000
XB(18)!	-0.772 !	-.126	-0.[illegible]00	-1.592	0.025	-0.251	-0.249
XB(19)!	0.772 !	.126	0.000	1.592	-0.025	0.251	0.24[illegible]
XB(20)!	-0.12[illegible] !	-1.134	0.000	2.3[illegible]	-0.014	1.874	-1.14[illegible]
XB(21)!	-1.32[illegible] !	.011	0.000	-0.292	-0.002	-0.036	0.[illegible]21

THE PIVOTAL ELEMENT IN DUAL IS :Y(6, 7)= -60.965

14

	1	-X 1	-X 9	-X 3	-X 7	-X 5	-X11
7!	-36.8[illegible]7 !	[illegible].672	0.[illegible]00	1.91[illegible]	0.047	3.475	0.[illegible]7
XB(4)!	8.058 !	0.866	0.000	2.003	-0.033	1.130	0.020
XB(8)!	2[illegible]5.41[illegible] !	27.64[illegible]	0.[illegible]01	25.[illegible]	-0.559	13.851	-0.71[illegible]
XB(2)!	1.761 !	-[illegible].011	-0.000	0.258	0.000	-0.010	0.0[illegible]
XB(10)!	[illegible].60 !	17.077	0.[illegible]02	4.109	-0.835	26.328	0.419
XB(6)!	3.969 !	[illegible].218	0.000	0.260	0.006	0.105	-0.016
XB(12)!	-6.058 !	-[illegible].866	-0.000	-2.00[illegible]	0.033	-1.130	-0.[illegible]
XB(13)!	4.00[illegible] !	1.00[illegible]	0.	0.	0.	0.	0.
XB(14)!	2.2[illegible] !	[illegible].011	0.[illegible]	-0.258	-0.[illegible]	0.010	-0.[illegible]
XB(15)!	4.00[illegible] !	0.	0.	1.000	0.	0.	0.
XB(16)!	4.00[illegible] !	0.	0.	0.	0.	1.000	0.
XB(17)!	0.071 !	-[illegible].218	-0.[illegible]00	-0.260	-0.006	-0.105	0.016
XB(18)!	0.212 !	-0.072	-0.[illegible]	-1.528	0.027	-0.225	-0.004
XB(19)!	-0.212 !	0.072	0.000	1.528	-0.027	0.225	0.004
XB(20)!	-0.578 !	-[illegible].944	0.000	2.6[illegible]	-0.007	1.994	-0.01[illegible]
XB(21)!	-1.304 !	[illegible].006	0.000	-0.298	-0.002	-0.038	0.00[illegible]

THE PIVOTAL ELEMENT IN DUAL IS :Y(7, 7)= -0.020

15

	1	-X 1	-X 9	-X 3	-X 7	-X 5	-X12
7!	-39.072 !	2.351	0.[illegible]	1.166	0.059	3.057	0.371
XB(4)!	2.000 !	0.000	0.	0.	0.	0.	1.000
XB(8)!	43[illegible].4[illegible]7 !	5[illegible].377	0.[illegible]04	9[illegible].52[illegible]	-1.521	53.982	-35.[illegible]4
XB(2)!	1.684 !	-[illegible].022	-0.[illegible]0	[illegible].232	0.001	-0.025	0.[illegible]13
XB(10)!	-114.871 !	-[illegible].787	0.[illegible]0	-37.176	-0.162	3.104	20.545
XB(6)!	8.885 !	[illegible].920	0.000	1.891	-0.020	1.022	-0.811
XB(11)!	2[illegible].705 !	42.821	0.004	9[illegible].405	-1.620	55.91[illegible]	-49.472
XB(13)!	4.000 !	1.000	0.	0.	0.	0.	0.
XB(14)!	2.316 !	[illegible].022	0.[illegible]	-0.232	-0.001	0.025	-0.013
XB(15)!	4.000 !	.	0.	1.000	0.	0.	0.
XB(16)!	4.000 !	0.	0.	0.	0.	1.000	0.
XB(17)!	-4.885 !	-0.920	-0.000	-1.891	0.020	-1.022	0.811
XB(18)!	1.432 !	[illegible].102	0.[illegible]0	-1.123	0.020	0.002	-0.201
XB(19)!	-1.432 !	-[illegible].102	-0.[illegible]0	1.123	-0.020	-0.002	0.201
XB(20)!	5.056 !	-[illegible].140	0.[illegible]	4.557	-0.037	3.045	-0.[illegible]30
XB(21)!	-1.408 !	-[illegible].009	-0.000	-0.332	-0.002	-0.057	0.017

THE PIVOTAL ELEMENT IN DUAL IS :Y(5, 4)= -37.176

16

	1		-X 1	-X 9	-X10	-X 7	-X 5	-X12
Z!	-42.674	!	.32[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.159	1.[illegible]
YP(4)!	2.[illegible]	!	.00[illegible]	0.	0.	0.	0.	1.[illegible]
YP([illegible])!	1[illegible]4.675	!	[illegible].507	[illegible]	2.645	-1.[illegible]	52.19[illegible]	18.8[illegible]
YP([illegible])!	[illegible]	!	-[illegible].0[illegible]	-0.[illegible]	0.004	-0.000	[illegible]	0.141
YP([illegible])!	3.[illegible]	!	.01[illegible]	[illegible]	-[illegible].027	0.004	-[illegible].084	-0.3[illegible]
YP([illegible])!	3.042	!	.8[illegible]4	[illegible]	[illegible].051	-0.[illegible]29	1.180	0.234
YP(11)!	-7.4[illegible]4	!	4[illegible].9[illegible]	[illegible]	2.674	-2.053	54.22[illegible]	5.463
YP(13)!	4.0[illegible]	!	1.00[illegible]	0.	0.	0.	0.	0.
YP(14)!	3.2[illegible]4	!	.02[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-0.141
YP(15)!	[illegible].913	!	-[illegible].019	0.[illegible]	[illegible].027	-0.[illegible]04	[illegible].084	0.553
YP(16)!	4.0[illegible]	!	.	0.	0.	0.	1.000	0.
YP(17)!	[illegible].958	!	-.884	-0.[illegible]	-0.051	0.029	-1.180	-0.234
YP(18)!	4.9[illegible]	!	.124	[illegible]	[illegible]	0.025	[illegible].091	-0.[illegible]22
YP(19)!	-4.9[illegible]	!	-.124	[illegible]	[illegible].031	-0.025	[illegible].091	0.822
YP(20)!	[illegible]	!	.22[illegible]	[illegible]	[illegible].123	-0.[illegible]57	[illegible].426	1.[illegible]89
YP(21)!	-[illegible].3[illegible]	!	-[illegible].002	-0.[illegible]	-[illegible].007	-0.0[illegible]	-[illegible].085	-0.166

THE PIVOTAL ELEMENT IN DUAL IS :Y(15, 5)= -0.057

17

	1		-X 1	-X 9	-X10	-X20	-X 5	-X12
Z!	-51.19[illegible]	!	[illegible].119	[illegible]	[illegible].147	3.944	6.39[illegible]	2.51[illegible]
YP(4)!	2.0[illegible]	!	.00[illegible]	0.	0.	0.	0.	1.[illegible]
YP([illegible])!	444.2[illegible]	!	5[illegible].26[illegible]	[illegible]	-1.[illegible]	-34.30[illegible]	-[illegible].311	-35.[illegible]7
YP([illegible])!	1.04[illegible]	!	-.02[illegible]	-0.[illegible]	0.005	-0.008	-[illegible].035	0.12[illegible]
YP(7)!	[illegible].397	!	.00[illegible]	[illegible]	-[illegible].017	0.077	[illegible].179	-0.431
YP([illegible])!	7.613	!	.998	-0.[illegible]	-0.011	-0.505	-0.551	-0.569
YP(11)!	31[illegible].54[illegible]	!	4[illegible].10[illegible]	[illegible]	-1.754	-35.118	-59.512	-51.9[illegible]8
YP(13)!	4.00[illegible]	!	1.00[illegible]	0.	0.	0.	0.	0.
YP(14)!	[illegible].[illegible]57	!	[illegible].025	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible].035	-0.128
YP(15)!	1.6[illegible]3	!	-[illegible].99[illegible]	-0.[illegible]	[illegible].017	-0.077	-0.179	0.431
YP(16)!	4.[illegible]	!	.	0.	0.	0.	1.000	0.
YP(17)!	-3.6[illegible]3	!	-.998	0.[illegible]	0.011	0.505	0.551	0.569
YP(18)!	[illegible].957	!	[illegible].025	[illegible]	[illegible].023	[illegible].437	1.406	-0.128
YP(19)!	-[illegible].957	!	-[illegible].025	-[illegible]	-[illegible].023	-0.437	-1.406	0.128
YP(20)!	1[illegible].7[illegible]	!	[illegible].07[illegible]	[illegible]	-[illegible].13[illegible]	-17.53[illegible]	-50.256	-27.[illegible]45
YP(21)!	-[illegible].34[illegible]	!	-.001	-0.[illegible]	-0.009	-0.005	-0.101	-0.174

THE PIVOTAL ELEMENT IN DUAL IS :Y(1[illegible], 2)= -0.998

18

	1		-X17	-X 9	-X10	-X20	-X 5	-X12
Z!	-5[illegible].35[illegible]	!	[illegible].119	[illegible]1	[illegible].171	2.01[illegible]	7.557	3.[illegible]
YP(4)!	2.00[illegible]	!	.00[illegible]	0.[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.00[illegible]	1.[illegible]
YP([illegible])!	21[illegible].374	!	54.37[illegible]	[illegible]	-[illegible].345	-1.77[illegible]	-19.849	0.9[illegible]
YP([illegible])!	1.132	!	-[illegible].025	-0.[illegible]	0.005	-0.021	-[illegible].048	0.114
YP(7)!	[illegible].341	!	[illegible].00[illegible]	[illegible]	-[illegible].017	0.07[illegible]	[illegible].180	-0.430
YP([illegible])!	4.0[illegible]	!	1.00[illegible]	0.	0.	0.	0.	0.
YP(11)!	141.344	!	4[illegible].1[illegible]4	[illegible]	-1.[illegible]	-11.254	-3[illegible].418	-23.91[illegible]
YP(13)!	[illegible].3[illegible]1	!	1.002	[illegible]	[illegible].011	0.506	[illegible].552	0.570
YP(14)!	[illegible].8[illegible]	!	.02[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.021	[illegible].[illegible]48	-0.114
YP(15)!	1.6[illegible]	!	-.00[illegible]	-0.[illegible]	[illegible].017	-0.078	-[illegible].180	0.430
YP(16)!	4.00[illegible]	!	.	0.	0.	0.	1.000	0.
YP(1)!	3.6[illegible]	!	-1.00[illegible]	-0.[illegible]	-[illegible].011	-0.506	-0.552	-0.570
YP(18)!	1.86[illegible]	!	.02[illegible]	[illegible]	[illegible].024	0.450	1.420	-0.114
YP(19)!	-[illegible].86[illegible]	!	-[illegible].025	-0.[illegible]	-[illegible].024	-0.450	-1.420	0.114
YP(20)!	144.[illegible]97	!	[illegible].78[illegible]	[illegible]	-[illegible].11	-15.57[illegible]	-5[illegible].061	-25.[illegible]77
YP(21)!	-0.37[illegible]	!	-.00[illegible]	-0.[illegible]	-[illegible].01[illegible]	-0.005	-0.102	-0.174

THE PIVOTAL ELEMENT IN DUAL IS :Y(14, 5)= -0.450

19

	1		-X17	-X 3	-X10	-X19	-X 5	-X12
Z!	-52.724	!	0.018	0.000	0.065	4.482	1.194	4.271
XB(4)!	2.000	!	0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	1.000
XB(5)!	215.753	!	56.471	[illegible]	-0.753	-5.937	-14.260	0.941
XB(2)!	1.179	!	-0.004	[illegible]	0.006	-0.047	0.018	0.108
XB(3)!	2.241	!	-0.065	[illegible]	-0.122	0.175	-0.065	-0.410
XB(6)!	4.000	!	0.000	0.	0.	0.	0.	0.
XB(11)!	163.161	!	47.804	[illegible]	-0.616	-25.335	7.151	-26.764
XB(13)!	-0.586	!	.974	-0.500	-0.016	1.126	-1.047	0.698
XB(14)!	2.820	!	0.024	[illegible]	-0.006	0.047	-0.018	[illegible]
XB(15)!	1.759	!	0.035	0.006	0.020	-0.173	0.065	0.410
XB(16)!	4.000	!	0.	0.	0.	0.	1.000	0.
XB(1)!	4.586	!	-0.974	0.000	0.021	-1.126	1.047	-0.698
XB(18)!	0.	!	0.	0.	0.	1.000	0.	0.
XB(20)!	1.932	!	0.055	0.010	0.037	-0.224	3.158	-0.253
XB(7)!	174.441	!	4.843	[illegible]	-1.270	-34.645	-8.870	-27.510
XB(21)!	-0.325	!	-0.001	[illegible]	-0.300	-0.012	-0.085	-0.176

THE PIVOTAL ELEMENT IN DUAL IS :Y(9, 3)= -0.000

20

	1		-X17	-X 3	-X10	-X19	-X 5	-X12
Z!	-62.900	!	0.300	0.100	0.060	4.320	0.880	4.440
XB(4)!	2.000	!	0.	-0.000	-0.000	0.	0.	1.000
XB(5)!	227.500	!	44.800	-20.000	-1.440	-5.630	6.880	-15.500
XB(2)!	1.700	!	-0.900	-0.000	0.020	-1.060	0.960	-0.920
XB(3)!	2.300	!	-0.100	-0.100	-0.020	0.060	0.040	-0.430
XB(6)!	4.000	!	1.000	0.	0.	0.	0.	0.
XB(11)!	167.500	!	42.500	-7.000	-0.500	-33.500	11.000	-32.000
XB(9)!	4925.496	!	-8179.496	-8798.492	130.300	-9455.898	8789.395	-5362.747
XB(14)!	2.300	!	.900	[illegible]	-0.020	1.050	-0.950	0.920
XB(15)!	1.700	!	0.100	0.100	0.020	-0.060	-0.040	0.430
XB(16)!	4.000	!	0.	0.	0.	0.	1.000	0.
XB(1)!	4.000	!	0.	1.000	0.000	0.	0.	0.
XB(18)!	0.	!	0.	0.	0.	1.000	0.	0.
XB(20)!	0.700	!	2.100	2.100	0.020	0.140	0.960	1.213
XB(7)!	178.000	!	-1.000	-6.000	-1.200	-41.400	-2.600	-33.800
XB(21)!	-0.300	!	-0.043	-0.043	-0.200	-0.060	-0.040	-0.256

THE PIVOTAL ELEMENT IN DUAL IS :Y(16, 3)= -0.043

21

	1		-X17	-X11	-X10	-X19	-X 5	-X12
Z!	-65.000	!	0.000	7.000	0.000	4.400	0.600	3.000
XB(4)!	2.000	!	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	1.000
XB(8)!	369.000	!	60.000	-471.336	3.500	1.500	25.733	83.400
XB(2)!	8.000	!	-0.000	-21.000	0.200	0.200	1.800	3.900
XB(3)!	3.000	!	0.000	-2.333	-0.000	0.200	0.133	[illegible]
XB(6)!	4.000	!	1.000	0.	0.	0.	0.	0.
XB(11)!	220.001	!	50.000	-175.002	1.000	-23.000	18.000	4.000
XB(9)!	63715.273	!	219.988	***********	1803.900	2302.055	16627.988	34447.313
XB(14)!	-4.000	!	0.000	21.000	-0.200	-0.200	-1.800	-3.900
XB(15)!	1.000	!	-0.000	2.333	0.000	-0.200	-0.133	0.000
XB(16)!	4.000	!	0.	0.	0.	0.	1.000	0.
XB(1)!	-3.000	!	-1.000	23.333	-0.200	-1.400	-0.933	-4.800
XB(18)!	0.	!	0.	0.	0.	1.000	0.	0.
XB(20)!	-14.000	!	0.000	49.000	-0.40	-2.800	-1.000	-8.867
XB(7)!	220.000	!	5.000	-140.000	-1.000	-33.000	3.000	-5.000
XB(13)!	7.000	!	1.000	-23.333	0.20	1.400	0.933	4.800

THE PIVOTAL ELEMENT IN DUAL IS :Y(14, 4)= -0.400

22	1	!	-X17	-X21	-X20	-X19	-X 5	-X1[illegible]
Z!	-65.000	!	2.000	7.[illegible]	0.000	4.4[illegible]	[illegible].500	3.[illegible]
XP(4)!	2.000	!	0.000	[illegible]	0.000	0.	0.000	1.[illegible]
XP([illegible])!	243.000	!	6[illegible].000	-3[illegible].333	[illegible].000	-23.[illegible]	15.73[illegible]	3.[illegible]
XP([illegible])!	1.000	!	-0.000	3.500	[illegible].500	-1.2[illegible]	1.300	-0.[illegible]33
XP(3)!	3.000	!	[illegible].000	-2.333	[illegible]	[illegible].2[illegible]	[illegible].133	0.[illegible]
XB(6)!	4.000	!	1.000	0.	0.	0.	0.	0.
XP(11)!	185.000	!	5[illegible].000	-[illegible]2.[illegible]1	2.500	-30.[illegible]	1[illegible].500	-18.[illegible]67
XB(9)!	364.957	!	21[illegible].993	257[illegible]0.[illegible]13	452[illegible].[illegible]04	-10368.000	1210[illegible].00[illegible]	-5[illegible]71.66[illegible]
XP(14)!	3.000	!	[illegible].000	-[illegible]	-[illegible].5[illegible]	1.[illegible]	-1.50[illegible]	[illegible].[illegible]33
XB(15)!	1.000	!	-[illegible].000	2.333	[illegible].000	-[illegible].2[illegible]	-0.133	-0.[illegible]
XP(16)!	4.000	!	0.	0.	0.	0.	1.000	0.
XP(1)!	4.000	!	-1.000	-1.167	-[illegible].500	0.	-[illegible].433	-0.367
XP(1[illegible])!	0.	!	0.	0.	0.	1.000	0.	0.
XP(1[illegible])!	35.000	!	-[illegible].0[illegible]	-112.[illegible]1	-[illegible].50[illegible]	7.500	[illegible].500	2[illegible].167
XP(7)!	220.000	!	[illegible].000	-14[illegible].[illegible]1	-[illegible]	-55.000	[illegible]	-[illegible]
XP(13)!	-0.000	!	1.000	1.167	[illegible].500	0.	[illegible].433	[illegible].367

INTEGER-FORM HAS REACHED :

STOP 100

CP731019-END OF TASK CODE= 0 CPUTIME=4.476/ .431

<<<<< YOUR TASK IS NORMALY ENDED ! >>>>>

Tableau 22 has attended, the integer-form.

From tableau 22, We know:

The minimum total money for each person in a week is 65 cents.

Remark: The basic variable 13 in the current tableau is negative,

9t is generated by truncate-error. We can accept it!

Acknowledgments are due to my Teacher, Professer Wu.

1. Billy E. Gillett; Introduction to Operation Regearch----- A Computer-Oriented Algorithm Approach.
2. Hamdy A. Taha; Integer programming, (1974).
3. S. Zionts: Linear and integer programming, 1974.
4. S. Y. Wu; edt. Linear programming, theory and application on BASIC programming.

編後語

第18期「師大數學」終於在各位同學的愛護和師表的指導下順利地與各位同學見面，幾日來的匆忙，終於輕鬆了下來。於此，希望同學們繼續灌溉此一屬於大家的園地，使它更加豐富、茁壯。

此期，很感謝呂溪木老師、王惠中老師、吳森原老師、陳昭地老師和屠耀華老師的熱心指導及同學們的投稿，另外，也謝謝吳森原老師對此期印刷編排的建議與思明同學的幫助。

吳土城
游經祥　謹　啓
于鴻福

發行人：顏　啓　麟
出版者：國立台灣師範大學數學學會
主　編：吳土城、游經祥、于鴻福
封　面：林　紅　淑
印刷者：裕樺打字印刷有限公司
和平東路三段391巷37號3樓
704-0252
出版日期：中華民國七十三年六月五日
師大訓課刊登第136號