師大數學

慶祝四十週年校慶

序　　　系主任

本系成立於民國三十五年八月，首由張儒林教授擔任系主任，當時招收數學系及四年制專修科各一班，同學三十餘人，教授三位，助教一位，嗣由管公度、潘璞、李新民、康洪元、范傳坡、常法徽各教授輪掌系務，歷經各任主任與教授們之群策群力，始具今日之規模。三十九年來本系之畢業系友，已逾貳仟陸佰餘人，多各有成就；其中獲得碩士學位叁佰餘人，具博士學位者逾一百五十人，或執教於高等學府，或繼續高深研究，餘多服務於中等教育界，平時諄諄教學，誨人不倦，敦品篤行，懷抱熱忱，此實本校優良風氣之所致。

現本系有教師四十七人，學生方面日間部有十二班，夜間部壹班，共有同學約伍百人，圖書逾兩萬册，雜誌百餘種，微型電腦四十八部，電算室二間，自六十四年夏遷於現址後，環境煥新，出國學成系友或返校互相砥勵，研究風氣已大弧度地提高；今日數學系之師生孜孜不息，無不爲美好遠景而奮發。

近來科學發展甚速，對數學之需要甚切，本系之任務更日益增大，除肩負數學教育之發展及中等數學教育之輔導外，亦兼具數學學術及數學教育研究之重要任務。爲增强研究風尚，本系於十九年前創辦師大數學年刋，以供師生發表數學及研究心得。切磋琢磨，提高學習及研究興趣，屢經負責同學之辛勞耕耘及師生系友之共同支持。漸玆茁壯，今後請更不吝珠璣，源源賜稿，則本刋必前程似錦，散發絢爛光芒，於此，表謝忱，更盼我師生系友善珍此片園地。

顏　啟　麟　謹識

七十五年五月

目　　錄

1. 一系友走過的路——

訪陳昭地 老師　　編輯部

俗語說的好：「薑是老的辣」，當你面臨抉擇，徬徨於迷惘之中，你可希望有著前人的經驗，幫助自己度過困境?! 系上的師長將是最好的對象。為此，編輯部特地走訪了五六級系友陳昭地老師，希望透過老師的談話，以解決同學們心中的一些疑慮，更希望同學們日後能主動的找老師談天，以收拋磚引玉之效。

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

問：　很感謝老師接受我們的訪問，首先想請老師談一下從大學以來到現在的經歷。

答：　很高興有這個機會，接受訪問。從大學——當然是四年——民國56年畢業之後，繼續留在系裏擔任助教的實習工作，57年8月在陸軍第二士官學校當了一年的教官，當時申請出國留學，繼續念書，在58年9月初到了美國印第安納州的普渡大學，大概念了三年半吧！在62年5月拿到了博士學位，由於我體驗到了美國環境並不適合我個人的生活，再加上我的老家都在台灣，個人對家鄉的一種情懷，及為國家服務的想法，所以在62年5月到了中央研究院數學研究所服務，當時一方面相當於國家科學委員會在延攬人才，一方面個人接受延聘，為客座副教授，在中央研究院為客座副研究員，一共作了兩年研究工作，在62年曾到本系開過兩年課，也在中央大學開了一年的實變數函數論的課程。在64年8月轉到了師大數學系服務，一直至今。

問：　那老師您沒有在國內念研究所？

答：　沒有，大概是由於本來沒有想到要繼續升學，考研究所，當時對於師大畢業，能夠當個老師已經很滿足了。那裏知道，最後一年，看到許多同學都在準備考研究所，我的底子也不壞，所以在大四就去考清華研究所（當時可以先念研究所而不必賠償公費），考上之後，必須先實習一年而保留學籍，在當助教那一年，又看到別人申請出國留學，我也就試試看，那時候，已經有了再升學的基礎，因此，便在清華研究所保留學籍，趕快當兵，恰好在當兵那一年很順利的申請到了國外大學。當時心理負擔也是很重的，一方面是由於經濟問題，一方面能力也是一項考驗。對於將來是否能很順利留學回來，心裏的確是很複雜的，不過還是硬著頭皮出去了。所以，個人並沒有眞正在國內念研究所。

問：　能否請老師比較一下：在老師那個時候的學生以及現在的學生在做人及念書方面有什麼不同的地方？

答：　就這一點而言，當然，必定有所不同的。比如說，以前的學生就比較踏實，並不是說我個人比較踏實，而是一般人都是如此。大部份的人都是比較保守的，個人的欲望也是較合理的，不會有太多的欲望而想東想西的。這大概和當時的農業社會有關。現在經過了二十多年，發展至今已經不同了。當然並不是當時的情況就是好的，例如，以前的學生由於比較保守，所以就不會積極去爭取，而使自己更快邁向目標。就像我個人一樣　如果當時有人指導的話，那就可以減少摸索的時間，進而比較順利，而使個人的學習效果更好。然而，反過來說，現今的學生，雖然懂的很多，速度也很快，自己也有個目標，但是也由於如此，一般學生想要獲得什麼知識，達到何種目標，他便可以很快地達到，所以便有了不踏實的缺點。綜合以上這些情形，我們可以發現有過和不及的現象，如果能彼此中和一些，相信所得到的成就當比現在更好

。當然，這是不可能的，我的主要用意是在這種狀況下的學生，應該要踏實一點，如此對自己而言便比較有好處。不過，我個人乃是以師大人的身份來比較，至於其它學校的情形則可能不太一樣了。

問： 請問老師，關於念數學是否需要一點天份？

答： 當然，對那些智商很低的人，要把數學學好是不太可能的事。至於涉及到大學的數學課程，就我自己看法而言，是需要一點天份，但是卻不必要很高的天份。因爲就我們所接觸的人，在國外而言，天份並不很高的人也能夠做的很好，當然無論是誰只要能夠踏實，便能將教學工作做好。我們可以發現，天份並不很高而卻能將研究工作做的很好是不乏其人的。其中最主要的是配合個人的努力與適當的環境。

問： 請老師談一下念數學的方法。

答： 從國小，甚至幼稚園便接觸到數學。當時，所謂一些非常實際，生活上所碰到的數學，可能無法發覺它就是眞正的數學。不過，我們可以發現從數學的好壞，可以察覺到學生的聰明與否。我想，念數學需要方法，大概是指一些比較需要思考的問題，以及脫離實際生活的數學。當然，完全沒有方法而能將數學學得很好，是不太可能的。以我個人的看法，沒有學好數學，大概是誤解了數學的學習方向，怎樣去學習數學。當我們遇到了一個問題，一般人錯誤的觀念，以爲求到答案是學習數學的最終目的，便馬上想得到答案。事實上不然，答案固然有意義，但它不是最重要的。因爲眞正在學習數學的過程中，這些結論都視爲已知的，最要緊的是如何找一個方法來求得結論。當然，方法不同，或許所得的結論也有所不同。當我們從各種方法來解問題，我們才可以看出思考的週密性以及廣泛性。所以，數學的學習方法，應該要特別注意，不只要得到結論而已。目前的情況會演變至此，可能是

以前國中、國小的學習習慣，受到一般考試或者聯考的影響而造成的。總之，我個人是認為過程的重要性，如何將一般的問題轉變成數學問題，再就這個問題找到必要的工具，逐步地得到結果，之後，還要考慮是否有別的方法？那一個方法最好？這種結果是正確的嗎？將這種學習方法養成習慣，經過多次的經驗，數學大概就能學好了。坡里雅（ G.Polya ）的〞怎樣解題〞（ How to Solve It ）是一本很值得大家看的書，它談到了學生應如何學習，老師應如何去教，才能有創造性的學習法及教法，我想，對我們是特別有意義的。

問： 根據老師所講的學習方法，如果拿來應用到現在系上的情況，那不就會發生時間不夠的情形嗎？

答： 我想，如果對每一個大大小小的問題都需要這麼一個複雜的過程，那無論系上課程如何安排，顯然時間是絕對不夠的。因此，事實上，絕大部分的問題都應該是一目瞭然的，不應該花費許多的時間，而是偶爾有一些問題才需要如此去處理。然而，現在之所以在你們身上會發生如此的困擾，大概在於以前高中時代，並沒有養成思考的習慣，以至於現在花的時間相當多。如果這種學習經驗有很多的話，那所花費的時間將相對的減少。當然，如果以後能達到高深的研究，顯然必須花很多時間，不過那時候已經完全是興趣的發展了，所以花這種時間也是必要的。

問： 當我們遇到某一部份不了解時，不知道是要去找資料，拼命將它弄懂，或者是知道有這種結果即可？

答： 我想有關這個問題，大概也是在於〞你有多少時間〞以及你的目的。比如有時候老師所提的一些性質是屬於欣賞性的，老師很輕鬆的帶過去，學生如果要認眞追究，可能就要花費許多時間，所以學生應該抓住老師的看法及要點，如果學生有興趣，則可以去請

教老師，當做一種課餘的工作。簡單的說，並不見得老師所講的所有東西都需要知道，老師說目前並不需要太注意的，則不必花太多時間，除非是有興趣而又有時間的，不過知道有這麼一個結果也是很有意義的。

問：　不知道系上的圖書館及期刋室同學們可否利用？

答：　根據了解，系上共有兩個資料室，一個是期刋室，一個是圖書館。相信只要同學們有需要，拿出學生證給助教看，應該可以進去查閱，甚至只要登記一下，也可以借出來。不過，圖書館的資料是比較屬於〃高段〃的，對部份同學而言，恐怕比較不適用，不過有機會進去瀏覽一下，是對數學領域的了解很有幫助的。

問：　大家都知道，老師參與了這次國中數學課程的改革，請老師談一下這次改革的內容及精神，以及將來身爲老師的我們，應該如何去適應。

答：　當然，由於社會不斷地變遷，所以有些課程及教材便不得不有所更動，而國小課程一改，國中課程就得改，高中也跟著動。其中，國中課程介於國小及高中之間，因此一方面要考慮銜接國小，一方面又要顧到日後學生或就業或升學，要能適應社會變遷，國中課程的改革便比較麻煩了。這次課程改革的要點有以下幾點：

1. 配合國小的新教材。
2. 考慮當前國民中學數學教育有何缺失。
3. 現在社會對國中數學教育的要求。
4. 配合國際上國中階段的數學教材之趨勢。

由於種種原因，諸如受聯考的影響，而使老師不以常態的教法授課；或者國中階段爲義務教育，使得同學們的學習興趣低落。另外，目前是資訊時代，因此學生們應該對此有所認識。基於以上的想法，教材當然有必要改革，但也要注意到銜接問題。我

們也注意到了高中及國中的課程有所重複，而且國中課程難度偏高，因此我們也對某些教材酌於刪減。另一方面目前世界各國大都認爲在國中階段應該增加實用性，因此在本次的課程加入了許多實用統計方面的資料。至於在另一個改革的重點，則是改進目前的教材敎法：由於目前教材已演變成以老師爲主的教材，因此，要改變成以學生爲主老師爲輔的教材敎法。所以除了課本之外，還有一本習作簿，在課本中由一些問題或操作而產生例題，接著是隨堂練習，最後再來一個練習，這些都要求在課堂上進行，使學生能夠實際參與，進而了解課程內容。至於習作簿則是屬於家庭作業，老師則在課堂上共同訂正，我們希望透過這種方式將數學學好。

簡單講起來，我們可以說，就數學教材難度而言，是比舊敎材減少很多，然而增加了一些實用的教材，以及增加一些使學生能在課堂上共同參與的活動。

至於師範生應該如何配合，我想應該沒有問題，不過有些師範生可能是〃以前老師如何敎我，我以後就如何敎別人〃，事實上，在師大四年之中，應該特別注意日後如何將國中學生敎好；那些老師的敎法不錯，他的好處在那裏？多揣摩一下，對於將來的敎學很有幫助。另外，新教材有一個特色，它特別強調利用媒體來幫助教學，這是我們在大學比較不容易看到的；再者也要注意評量學生的方法。這二點是師範生所應該特別注意的。

問：　請老師就自己本身的經驗，談一下做爲一個好的數學老師之要件，以及如何做一個好的數學老師？

答：　當一個好的數學老師的確不容易。以我個人的觀點，一個最起碼稱職的老師應該要隨時注意學生在教學中的反應，這可以從學生的聽課而發現他懂不懂，有時候，明知道某一位學生不懂，然而爲了進度，也不得不硬著頭皮敎下去，因爲這種個別差異總是存

在的。不過，在課餘之後，則應該盡量給予這些同學幫忙，甚且在指定的課業中，或者評量的方法上，在不傷害他的心理之原則下，能夠將此差異顯現出來。總而言之，「愛心」是一個很重要的條件。目前外界對於數學老師，總是認爲太注重「利」了，這實在有待於大家共同澄清的。

問：　身爲師大數學系的學生，應該以何種態度來研究數學？

答：　師大數學系和一般的數學系不同，它一方面肩負著教學的任務，一方面又要在數學上有所發展，所以給予系上以及學生雙重的壓力，因此念師大數學系要比一般數學系的學生來的辛苦，這點大概已是公認的事實。一般而言，師大數學系的學生要懂的廣，而在〃廣〃中求〃精〃便顯得比較困難了，因此，我們應該選擇一個方向；我們可以分爲純粹教育方面的工作，以及數學研究方面的工作；並不是每一方面都要專精，再者，我們也可以將數學教育的研究視爲數學應用的一類，所以也並不是一定非研究高深的理論不可。綜合起來說，對於基本的教學理論要知道之外，如果有能力從事數學的研究工作，當然是很好，如果對數學教育有興趣，便能往這一方面研究，尤其是數學教育是有地區性的，更需要，也適合於我們師大的同學去專心研究的。因此，我們希望多數的人去從事數學教育，將此工作做好，能夠發掘出具有數學能力的人來研究，其餘的人則又繼續數學教育，如此所產生的影響便很大了。

問：　請老師談一下對家教的看法？

答：　基本上我並不太反對在餘暇去兼家教，因爲師大的同學在經濟上可能稍爲有點困難，當然，能夠不兼家教，而利用這段時間，充實自己的生活，參與活動，從活動中學習領導能力及做事能力，是最好了；一旦不得不做時，一定要把時間控制好，不能夠由於

家教而影響心理，所花費的時間就不只兩個小時了。當然，也不能不負責任，毫無準備，隨便地教一教，但也不能將時間完全投注在上面。畢竟家教只是一個維持生活的手段而已，因此，家教不要兼得太多，一個星期頂多只能三次，時間也要安排好，是要把握的原則。另一方面，如果在課業、身心各方面不適合，還是不要當的好，自己的功課都趕不上了，那兼家教便是一個很大的負擔了，當一切都撞在一起，家教回來後，書也念不下，覺也睡不好，那就很糟糕了，因此，適可而止也是很重要的。

問： 現在不少的學生都認爲數學不過是空洞的邏輯推理，能否請老師談一下數學家是如何將一些抽象的理論及結構建造起來？

答： 建造抽象的結構是很困難的，不過必然有它的道理存在。例如：爲什麼我們要去求級數的Cesaro′s sum ，這可能是普通的級數求和分類的太草率了，因此，才進一步分類，將〃不好的〃級數再分成等級，因此，這種精神是必要的。然而，並不是分類完就算了，有時候倒回來，可以更清楚地看到原級數的面貌，這是很重要的。因此，數學並不是抽象的，它一定有它的動機以及目的，至於目的如何，那就只有沈迷其中的人才知道了。另一方面，雖然是有一個目標，然而在研究的過程中，又跑出了另一個目標，也就是所謂〃副產品〃，而副產品有時候是很有意思的。我們也可以發現，有時候目標在當前而言並沒有太大的價值，然而過一段時間，則好用的不得了。很簡單的例子：牛頓爲了物理上的問題，而將微分弄清楚，實際上講起來，他是微積分的創始者之一。所以〃數學理論領導實物，實物製造數學理論〃，這是循環的。

問： 在目前的考試中，似乎非常注重定理的內容及證明，而同學便拼命地記下來，似乎並未考慮到同學的了解與否，不知道用讀書報告來代替考試是否可行？

答：　我想，以報告來代替考試，是一個很好的測驗方法，尤其是一個大學生，應該要具備這一方面的能力及訓練才對。然而，有一些〃基本課程〃的目的，是要學生能將此課程中的基本資料應用出來，因此所要求的是將純熟度測試出來，譬如初等微積分、高等微積分的一些基本理論，提供分析學的基礎，如果學不好，一些分析學的學習便會受影響，尤其是微積分是一般的數學課程都要應用到。因此，在考試中便常常考一些重要定理內涵，以便了解學生在此課程的純熟度，然而考試也並非全然如此；另一方面又牽涉到學生的〃被當率〃，因此，便限制在所講授的範圍內。再者，在我以前念書時，有時候便指定一些題目，回家去做，即所謂〃Take Home〃，由於這些題目通常比較大，範圍比較廣，要自己去找資料，因此，就好比是報告一樣，而目前的數學系大概只在一些教育科目或資訊、數值計算等方面才有這種考法，所以數學系並不是完全沒有這種考法。話又說回來，這種考法有一個現象：學生反而顯得比較累，因爲他需要花更多的時間。另外，有一個頗爲嚴重的問題，由於國內的學生，中國人嘛！總是比較有感情，做完了之後難保不會流傳，你參考我的，我觀摩你的，照道理來講，這種考法是不應該如此的。所以這種報告式的考法之先決條件必須要同學們是誠實的，否則便失去了公平性了，的確，眞正好的考試是Take Home，不過老師要注意到這一點才行。另一方面，也不能考得太多，而對於一些比較高級的課目，其效果也是比較好的，尤其是研究所便常常是Take Home 的。其實目前的資訊教育便有所謂Take Home 了，就是交作業，只是不那麼明顯罷了！當然，這一方面的訓練對將來眞正從事研究工作的學生而言，是很重要的!!

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

在爲時不短的訪問裏，我們問了不少的問題，而陳老師都不厭其煩的一一爲我們提出了他的看法。從這次訪問裏，我們可以了解過去系友的奮鬥歷

程，及其對數學系、數學敎育的看法，這些都是值得我們借鏡學習，相信必然是很有助益的。

最後，除了非常感謝陳老師接受訪問外，我們更衷心地祈望系上的同學能多利用機會跟老師請教有關的問題，相信都會有滿意而有建設性的處理方案，也方不至於使老編〃含寃九泉〃，臨表涕泣，不知所云！一慟!!

2. Poincare'模型

指導老師：林福來
著　　者：蔣永延

註：本文乃取材自本系林福來教授，於六十八年所授「非歐幾何學」之講述內容。筆者給予定理證明，加以整理而成，謹請諸位不吝指正！

本文的目的是，介紹一個符合雙曲線型幾何學（hyperbolic geometry）的公理化系統之幾何空間，就是我們將要討論的Poincaré 模式（Poincare model）.

Henri Poincaré 所假想的物理空間是一個半徑爲R的球，設在這球內任一與球心距離r的點處之絕對溫度爲t，

$$t = c\,(R^2 - r^2)$$

其中c爲一比例常數。在這樣的假設下，每一個物體的體積（或容積）均隨溫度增減而增減，而且愈接近球面時，溫度將趨近於零，並且我們可利用微分幾何的方法證得，兩點間最短的路徑乃是在與球正交的一個圓上之一弧。然而考慮一個過此表現物理空間的Poincaré 球之球心的平面上的點而得一模式（model），即Poincaré 模式。任一通過此球心的平面與此球相交所得的圓，我們稱之爲這平面上的定圓（the fixed circle on the plane），而那些與這定圓正交的圓之幾何，即爲雙曲線型幾何。因此在Poincaré 模式中的點是，此定點的內點（interior point），Poincaré 模式中的直線是，那些與此定圓正交的圓上，在定圓之內部（interior）的弧。因爲圓的內部與上半平面是位相同構（homeomorphic），所以，我們將在上半平面來討論。

F.Klein 於 1872 年對幾何學下了這樣的定義：幾何學是研究幾何圖形任意移動（剛體運動）後，仍不改變的性質之科學。誠如我們已經知道的，歐氏幾何的圖形，在經過平移，旋轉，鏡射等運動後，仍不改變其性質。那麼，雙曲線型幾何學的圖形，在Poincaré 模式中，不改變其性質的運動群是什麼？那就是上半平面的保形變換群（Automorphism Group），以下便正式地談談這個問題。

令H表示上半平面，即$H=\{z : I_m z > 0\}$，且令

$$M_K=\left\{\frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d\in K, \ ad-bc\neq 0\right\}$$

$$\Gamma_K=\left\{\frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d\in K, \ ad-bc=1\right\}$$

其中$K=\boldsymbol{C}$或$\boldsymbol{R}$

1.定理：

(1) $(M_K, \circ)$，$(\Gamma_K, \circ)$均為群，其中“$\circ$”為合成運算。

(2) $M_C=\Gamma_C$。

(3) $M_R=\Gamma_R\cup(-\Gamma_R)$，其中$-\Gamma_R=\{-A(z) : A(z)\in\Gamma_R\}$。

令$\mathbb{G}(G)=\{f \mid f : G\to G$為保角映射（conformal mapping）$\}$，$\mathbb{G}(G)$稱為$G$的保形變換群。

2.定理：

(1) $\mathbb{G}(\widehat{C})=M_C$，其中$\widehat{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$

(2) $\mathbb{G}(\Delta)$為

$$\left\{\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}} : a, b\in \boldsymbol{C}, \ |a|^2-|b|^2=1\right\}$$

$$=\left\{e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z} : z_0\in\boldsymbol{C}, \ |z_0|<1, \ \alpha\in\boldsymbol{R}\right\}$$

其中$\Delta=\{z : |z|<1\}$

(3) $\mathbb{G}(H)=\Gamma_R$

(4) $\mathbb{G}(\Delta)\cong\mathbb{G}(H)$

證明：(1)我們祇需證明$\mathbf{G}(\widehat{C})\subset M_C$即可。設$A\in\mathbf{G}(\widehat{C})$，則$A$除了極點外均可解析，$A$必爲有理函數（參閱：Ahlfors, Complex Analysis，第三版，第四章，§3.2，問題4，P. 130）。也因A爲一對一函數，所以，$A\in M_C$。

(2)令

$$f(z)=\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z}\quad,\quad z_0\in\Delta$$

直接計算可得，當$|z|=1$時，$|f(z)|=1$。因爲線性變換將圓映至圓或直線，且具有保向性，又$f(z_0)=0$，所以，f爲將Δ映成Δ的保角映射，即

$f\in\mathbf{G}(\Delta)$

設$g\in\mathbf{G}(\Delta)$，且$g(z_0)=0$，則$g\circ f^{-1}$爲將Δ映成Δ的一對一可解析函數，且

$(g\circ f^{-1})(\circ)=0$

由Schwarz引理得知，存在$\alpha\in\boldsymbol{R}$使得$(g\circ f^{-})(z)=e^{i\alpha}z$，因此

$$g(z)=e^{i\alpha}f(z)=e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z}$$

(3)令

$$A(z)=\frac{az+b}{cz+d}\in\Gamma_R$$

則　$$I_mA(z)=\frac{I_mz}{|cz+d|^2}\quad(\because\ ad-bc=1)$$

所以$A\in\mathbf{G}(H)$

反之，若$A\in\mathbf{G}(H)$，欲證$A\in\Gamma_R$考慮$F:\hat{C}\to\hat{C}$定義爲

$$F(z)=\frac{z-i}{z+i}$$

$F(i)=0$，且$|F(z)|=1$，當$z\in\boldsymbol{R}$，所以F爲將H映成Δ的保角映射。因此$F\circ A\circ F^{-1}$爲將Δ映成Δ的保角映射，即$F\circ A$。

$F^{-1} \in \mathbf{G}(\Delta)$，且存在 $a, b \in C$，$|a|^2 - |b|^2 = 1$，使得

$$(F \circ A \circ F^{-1})(z) = \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$$

直接計算可得

$$A(z) = \frac{(a_1+b_1)z+(a_2-b_2)}{-(a_2+b_2)z+(a_1-b_1)} \in \Gamma_R$$

其中 $a = a_1 + i a_2$，$b = b_1 + i b_2$

前面已談過。我們所要探討的是，幾何空間H中的幾何圖形，經過Γ_R中之變換映射後不變的性質，而這些性質即是所謂的幾何基本性質，如一線段經過移動後，其長度保持不變；一三角形經過移動後，其面積保持不變等等。因此，我們必需先定義兩點間的距離，即這空間上的度量（metric），和三角形的面積。

設 γ:〔0，1〕→ H爲可微曲線（differential curve），則γ 的雙曲線型長度，以下簡稱長度，定義爲

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{I_m \gamma(t)} dt = \int_\gamma ds$$

其中 $$ds = \frac{|dz|}{I_m z}$$

在未定義度量前，我們先看看幾個引理。

3.引理：γ:〔0，1〕→H的可微曲線，$\gamma(0) = i$，$\gamma(1) = i y_0$，$y_0 > 1$，則

$$\ell(\gamma) \geq \ln y_0$$

且祇當γ爲線段〔i，iy_0〕時，等號才成立。

證明：設 $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$，則

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \geq y'(t)$$

且等號祇當 $x'(t) = 0$ 時才成立，即 $x(t)$ 爲常數函數。又 $x(t)$ 爲常數函數的充要條件爲

$x(t)=0$，$\forall t\in[0,1]$（$\because$ $x(1)=0$），

$\Longleftrightarrow$ γ 爲線段 $[i, iy_0]$

且 $\ell(\gamma)=\int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{y(t)}dt \geq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)}dt=\ln y_0$

故此引理得證

4. <u>引理</u>：若 $A(z)\in M_C$，則

$$\left(\frac{A(z_1)-A(z_2)}{z_1-z_2}\right)^2=A'(z_1)\cdot A'(z_2)$$

5. <u>引理</u>：若 $A\in\Gamma_R$，則對於任一可微曲線 $\gamma:[0,1]\to H$，

$$\ell(\gamma)=\ell(A\circ\gamma)$$

即任一可微曲線經 Γ_R 中之變換映射後，其長度保持不變。

<u>證明</u>：令 $A(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$，$a, b, c, d\in \boldsymbol{R}$，$ad-bc=1$

則 $A(\bar{z})=\overline{A(z)}$，$A'(\bar{z})=\overline{A'(z)}$

因 $\left(\dfrac{A(z_1)-A(z_2)}{z_1-z_2}\right)^2=A'(z_1)\cdot A'(z_2)$

所以 $\dfrac{A(z)-A(\bar{z})}{z-\bar{z}}=\sqrt{A'(z)\cdot A'(\bar{z})}=\sqrt{A'(z)\cdot\overline{A'(z)}}$

$$=|A'(z)|=\frac{|dA(z)|}{|dz|}$$

又 $\dfrac{A(z)-A(\bar{z})}{z-\bar{z}}=\dfrac{A(z)-\overline{A(z)}}{2i}\cdot\dfrac{2i}{z-\bar{z}}=\dfrac{I_m A(z)}{I_m z}$

因此 $\dfrac{|dA(z)|}{I_m A(z)}=\dfrac{|dz|}{I_m z}$

且 $\ell(A\circ\gamma)=\displaystyle\int_{A\circ\gamma}\frac{|dA(z)|}{I_m A(z)}=\int_\gamma\frac{|dz|}{I_m z}=\ell(\gamma)$

6. 引理：下列敍述等價

(1) $A \in \Gamma_R$

(2) $A \in M_R$，且 $I_m A(z) > 0$，$\forall\ I_m z > 0$

(3) $A \in M_R$，且 $\exists z_0$，$I_m z_0 > 0$ 使得 $I_m A(z_0) > 0$

證明：(1)⇒(2)顯然成立，因爲 $\Gamma_R = \mathbf{G}(H)$

(2)⇒(3)顯然成立

(3)⇒(1)令 $A(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$

$$I_m A(z_0) = \frac{ad-bc}{|cz_0+d|^2} I_m z_0 > 0$$

$$\Rightarrow ad-bc > 0$$

因此 $A(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{\dfrac{a}{\sqrt{ad-bc}}z + \dfrac{b}{\sqrt{ad-bc}}}{\dfrac{c}{\sqrt{ad-bc}}z + \dfrac{d}{\sqrt{ad-bc}}}$

且 $\dfrac{a}{\sqrt{ad-bc}} \cdot \dfrac{d}{\sqrt{ad-bc}} - \dfrac{b}{\sqrt{ad-bc}} \cdot \dfrac{c}{\sqrt{ad-bc}} = 1$

所以 $A \in \Gamma_R$

7. 定理：設 z_1，$z_2 \in H$，則恰有一最短雙曲線型路徑連接 z_1，z_2。

證明：作圓 C 過 z_1，z_2 且與 x 軸正交。

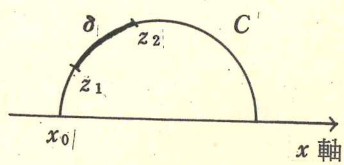
設 $x_0 \in C \cap R$ 使得

$$|z_1 - x_0| \leq |z_2 - x_0|$$

則唯一存在 $A \in M_R$ 使得

$$A(x_0) = 0 \text{，} A(z_1) = i$$

因爲 $I_m(z_1) = 1 > 0$，所以由引理 6 得知 $A \in \Gamma_R$。欲證 $A(z_2)$ 爲純虛數，即 $R_e A(z_2) = 0$。



圖(一)

因 z_1，x_0，$z_2 \in C$，且 $A(z_1)=i$，$A(\bar{z}_1)=-i$，$A(x_0)=0$ 均在 y 軸上，又線性變換將圓映成圓或直線，所以 $A(z_2)$ 亦在 y 軸上，且

$$R_e A(z_2)=0$$

設 $A(z_2)=iy$，欲證 $y>1$。

因為 $x_0-z_1-z_2$ 決定 C 之方向，且 $A(x_0)=0$，$A(z_1)=i$，$A(z_2)=iy$，且因線性變換是保向映射，所以 $0-i-iy$ 決定了 $A(C)=$（y 軸）的方向，且 $y>0$，因此 $y>1$。

欲決定 z_1 與 z_2 間的最短路徑，由引理 5，祇需決定 i 與 iy 間的最短路徑。令 γ_1 為線段〔i，iy〕，則 i 與 iy 間之任一路徑 α 與 γ_1 之間恒有下列關係

$$\ell(\alpha) \geq \ell(\gamma_1)=\ln y \quad (\text{引理 } 3)$$

所以 $A^{-1}(\gamma_1)=\gamma$ 即為 z_1 與 z_2 間的最短路徑，且事實上，γ 為 C 上以 z_1，z_2 為兩端點的弧。

在定理 7，連接 z_1，z_2 的最短路徑，我們稱之為連接 z_1，z_2 的線段，且其長以 $\rho(z_1, z_2)$ 表示，定義為

$$\rho(z_1, z_2)=\inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma:[0,1]\to H \text{ 為可微曲線，且 } \gamma(0)=z_1,\ \gamma(1)=z_2\}$$

在定理 7 中，通過 z_1，z_2 並與 x 軸正交的半圓，我們稱之為通過 z_1，z_2 的直線（或稱測地線（geodestic））。接著，我們希望了解兩個問題。

問題 1：（H，ρ）是否為一個度量空間（metric space）？

問題 2：在歐氏空間中，兩點的距離，可利用兩點的坐標直接計算，那麼，$\rho(z_1, z_2)$ 是否也能用 z_1，z_2 來表示？

我們將先討論問題 2，並利用其結果來說明問題 1 的答案是肯定的。下面的定理說明了 $\rho(z_1, z_2)$ 確實可用 z_1，z_2 直接計算。

8. 定理：若 z_1，$z_2 \in H$，則

$$\rho(z_1, z_2)=\ln\frac{1+\tau}{1-\tau} \quad \text{，其中 } \tau=\frac{|z_2-z_1|}{|z_2-\bar{z}_1|}$$

證明：我們將分兩種情形討論

情形1：若 $z_1=i$，$z_2=iy$，$y>1$，則

$$\rho(z_1, z_2)=\ln y$$

又 $\tau=\dfrac{|iy-i|}{|iy+i|}=\dfrac{y-1}{y+1}$

則 $y=\dfrac{1+\tau}{1-\tau}$

得證。

情形2：設 z_1，z_2 爲 H 上任意兩點，令 $A\in\Gamma_R$ 爲將 z_1，z_2 分別映至 i，iy，$y>1$ 的線性變換。由引理5及情形1得

$$\begin{aligned}\rho(z_1, z_2)&=\rho(A(z_1), A(z_2))\\&=\rho(i, iy)\\&=\ln\frac{1+\left|\dfrac{A(z_2)-A(z_1)}{A(z_2)-\overline{A(z_1)}}\right|}{1-\left|\dfrac{A(z_2)-A(z_1)}{A(z_2)-\overline{A(z_1)}}\right|}\end{aligned}$$

所以我們祇需證明

$$\frac{1+\left|\dfrac{z_2-z_1}{z_2-\overline{z}_1}\right|}{1-\left|\dfrac{z_2-z_1}{z_2-\overline{z}_1}\right|}=\frac{1+\left|\dfrac{A(z_2)-A(z_1)}{A(z_2)-\overline{A(z_1)}}\right|}{1-\left|\dfrac{A(z_2)-A(z_1)}{A(z_2)-\overline{A(z_1)}}\right|}$$

由引理4

$$\begin{aligned}\left|\frac{A(z_2)-A(z_1)}{z_2-z_1}\right|&=\frac{1}{|cz_1+d|\cdot|cz_2+d|}\\&=\frac{1}{|cz_1+d|\cdot|c\overline{z}_2+d|}\qquad(\because A\in\Gamma_R)\\&=\left|\frac{A(z_2)-A(\overline{z}_1)}{z_2-\overline{z}_1}\right|\end{aligned}$$

$$= \left| \frac{A(z_2)-\overline{A(z_1)}}{z_2-\overline{z}_1} \right|$$

即 $$\left| \frac{A(z_2)-A(z_1)}{z_2-z_1} \right| = \left| \frac{A(z_2)-\overline{A(z_1)}}{z_2-\overline{z}_1} \right| \Rightarrow$$

$$\left| \frac{A(z_2)-A(z_1)}{A(z_2)-\overline{A(z_1)}} \right| = \left| \frac{z_2-z_1}{z_2-\overline{z}_1} \right|$$

由定理 8 我們知道，若 (H, ρ) 是度量空間，則其與度量空間 $(H, |\cdot|)$ 必然有密切的關係。在此，我們先看看 (H, ρ) 與 $(H, \|\cdot\|)$ 中的圓有何關係，而且我們稱集合

$$\{ z\in H \mid \rho(z, z_0)=r \}$$

爲以 $z_0\in H$ 爲圓心，$r>0$ 爲半徑的圓。

9. 引理：$\{ z \mid \rho(z, i)=r \} = \{ z \mid |z-iy_r|=\rho_r \}$，其中

$$y_r=\frac{1}{2}(e^r+e^{-r}), \quad \rho_r=\frac{1}{2}(e^r-e^{-r})$$

證明：$z\in\{z \mid \rho(z, i)=r\} \Rightarrow r=\ln\dfrac{1+\tau}{1-\tau}, \quad \tau=\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right|$

$$\Rightarrow \frac{1+\tau}{1-\tau}=e^r, \quad \tau=\left|\frac{z-i}{z+i}\right|$$

令 $z=x+iy$ 直接計算可得

$$y_r=\frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}, \quad \tau^2=\frac{x^2+y^2-2y+1}{x^2+y^2+2y+1}$$

$$\rho_r=\frac{\sqrt{x^4+y^4+2x^2y^2+2x^2-2y^2+1}}{2y}$$

$$\Rightarrow \quad y_r=\frac{x^2+z^2+1}{2y}, \text{ 且}$$

$$|z-iy_r| = \left| x+i\left(y-\frac{x^2+y^2+1}{2y}\right) \right|$$

$$=\frac{\sqrt{x^4+y^4+2x^2y^2-2y^2+2x^2+1}}{2y}=\rho_r$$

$\therefore\quad \{z \mid \rho(z, i)=r\} \subset \{z \mid |z-iy_r|=\rho_r\}$

反之，若 $z\in\{z \mid |z-iy_r|=\rho_r\}$，$z\in H$（$\because \rho_r<y_r$），且令

$x+iy=z$

$$x^2+\left[y-\frac{1}{2}(e^r+e^{-r})\right]^2=\frac{1}{4}(e^r-e^{-r})^2$$

$$\Rightarrow\quad x^2+y^2-y(e^r+e^{-r})+1=0$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}(e^r+e^{-r})=\frac{x^2+y^2+1}{2y}=\frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}$$

$$\Rightarrow\quad e^{2r}-2\frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}e^r+1=0$$

$$\Rightarrow\quad \left(e^r-\frac{1+\tau}{1-\tau}\right)\left(e^r-\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)=0$$

$$\because\quad e^r>1,\quad \therefore\quad e^r=\frac{1+\tau}{1-\tau}\Rightarrow r=\ln\frac{1+\tau}{1-\tau}$$

即 $\rho(z, i)=r$，且 $\{z \mid |z-iy_r|=\rho_r\}\subset\{z \mid \rho(z,i)=r\}$

因此 $\{z \mid |z-iy_r|=\rho_r\}=\{z \mid \rho(z, i)=r\}$

10.<u>引理</u> $\{z \mid \rho(z, i)<r\}=\{z \mid |z-iy_r|<\rho_r\}$，其中 y_r，ρ_r 如<u>引理 9</u> 所定義。

<u>證明</u>：設 $z\in\{z \mid \rho(z, i)<r\}$，且令

$\rho(z, i)=s\quad,\quad 0<s<r$

欲證 $z\in\{z \mid |z-iy_r|<\rho_r\}$，祇需證明

$\{z \mid \rho(z, i)=s\}\subset\{z \mid |z-iy_r|<\rho_r\}$

即 $\{z \mid |z-iy_s|=\rho_s\}\subset\{z \mid |z-iy_r|<\rho_r\}$

因 $r\to\frac{1}{2}(e^r+e^{-r})$ 與 $r\to\frac{1}{2}(e^r-e^{-r})$ 均爲 r 的遞增函數，所以

$\rho_r>\rho_s$，$y_r>y_s$，且

$(\rho_r-\rho_s)-(y_r-y_s)=e^{-s}-e^{-r}>0$

則 $\{z \mid |z-iy_s|=\rho_s\}$ 與 $\{z \mid |z-iy_r|=\rho_r$ 這兩個圓內離。因此，$\{z \mid |z-iy_s|=\rho_s\}\subset\{z \mid |z-iy_r|<\rho_r\}$，且證得

$\{z \mid \rho(z, i)<r\}\subset\{z \mid |z-iy_r|<\rho_r\}$

反之，若 $z\in\{z \mid |z-iy_r|<\rho_r\}$，欲證

$z\in\{z \mid \rho(z, i)<r\}$

由假設得知，若 $z=x+iy$，則

$x^2+y^2-y(e^r+e^{-r})+1<0$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(e^r+e^{-r})>\frac{x^2+y^2+1}{2y}=\frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}\ ,\quad \tau=\left|\frac{z-i}{z+i}\right|$$

$$\Rightarrow \quad e^{2r}-2\,\frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}\,e^r+1>0$$

$$\Rightarrow \quad \left(e^r-\frac{1+\tau}{1-\tau}\right)\left(e^r-\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)>0$$

$$\Rightarrow \quad e^r>\frac{1+\tau}{1-\tau} \qquad \left(\because\ e^r>1>\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)$$

因此 $\quad r>\ln\dfrac{1+\tau}{1-\tau}=\rho(z, i)$

即 $\quad z\in\{z \mid \rho(z, i)<r\}$

且證得 $\quad \{z \mid |z-iy_r| \rho_r\}\subset\{z \mid \rho(z, r)<r\}$

因爲若 z_0 爲 H 上任一點，必存在 $A\in\Gamma_R$ 將 A 映到 i，且由引理 5

$$A^{-1}(\{z \mid \rho(z, i)<r\})=\{z \mid \rho(z, z_0)<r\}$$

因此，以 $\{z \mid \rho(z, z_0)<r\}$ 爲基底，可得下列定理。

11. 定理：(H, ρ) 與 $(H, |\cdot|)$ 位相同構（homeomorphic）。因此，(H, ρ) 爲完備度量空間（complete metric space）。

12. 系理：(H, ρ) 中，半徑爲 r 的圓之圓周長爲

$$2\pi\rho_r=\pi(e^r-e^{-r})$$

13.系理：（H，ρ）的高斯曲率為

$$\lim_{r\to 0}\frac{3}{\pi r^3}(2\pi r-2\pi\rho_r)=-1$$

現在，我們所要討論的是：（H，ρ）中的三角形面積。

設 $S\subset H$，S 的面積定義為

$$\iint_S \frac{dxdy}{y^2}$$

並以$\mathbf{A}(S)$表之，即

$$\mathbf{A}(S)=\iint_S \frac{dxdy}{y^2}$$

14.定理：若 $A\in\Gamma_R$，$S\subset H$，則 $\mathbf{A}(S)=\mathbf{A}(A(S))$，即$\Gamma_R$中的元素保持（$H$，$\rho$）中之幾何圖形的面積。

證明：由引理5之證明得

$$\frac{|dA(z)|}{I_mA(z)}=\frac{|dz|}{I_mz}$$

令 $x+iy=z$ ，$A(z)=u+iv$，則

$$y^2=\left(\frac{|dA(z)|^2}{|dz|^2}\frac{1}{(I_mA(z))^2}\right)^{-1}=\frac{(I_mA(z))^2}{|A'(z)|^2}$$

$$|A'(z)|^2=\frac{dudv}{dxdy}$$

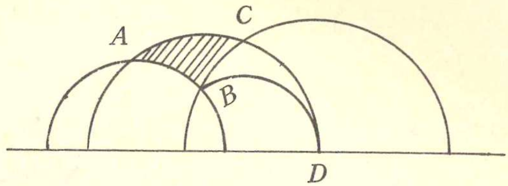
$$\Rightarrow\quad \mathbf{A}(S)=\iint_S\frac{dxdy}{y^2}=\iint_{A(S)}\frac{|A'(z)|^2}{(I_mA(z))^2}\cdot\frac{dudv}{|A'(z)|^2}$$

$$=\iint_{A(S)}\frac{dudv}{v^2}=\mathbf{A}(A(S))$$

由以上的討論，（H，ρ）的三角形之面積，在Γ_R 中之元素映射後，仍然保持不變。而雙曲線幾何學中，三角形的面積與 $\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$ 成正比，其中 α，β，γ 為此三角形的角度，然則在（H，ρ）中，三角形的面積與

$\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$的關係爲何？

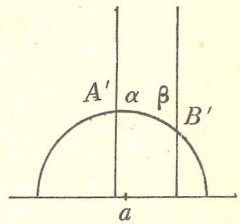
設ABC爲(H, ρ)中的一個三角形，如右圖，並設過A，C 的直線交 x 軸於 D。過B，D 作圓正交於 x 軸。我們稱如BCD 這種兩邊是平行的射線，且一邊爲線段的三角形爲極限三角形。因此ABC 的面積可由極限三角形ABD 與極限三角形BCD之面積的差求得，即



圖(二)

$$\mathbf{A}(ABC)=\mathbf{A}(ABD)-\mathbf{A}(BCD)$$

因而，我們可先求極限三角形的面積。設$T\in\Gamma_R$，且T將D映至∞，則極限三角形ABD 經T映射後，變爲圖(三)的極限三角形$A'B'\infty$，且由定理 14

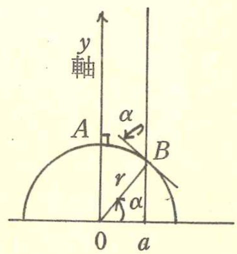


圖(三)

$$\mathbf{A}(ABD)=\mathbf{A}(A'B'\infty)$$

因此，我們想先看看形如$A'B'\infty$ 這樣的極限三角形之面積爲何。

設形如圖(三)中之極限三角形，垂直於 x 軸兩邊有一邊是 y 軸，如圖(四)，則其面積爲



圖(四)

$$\iint\frac{dx\,dy}{y^2}=\int_0^a dx\int_{\sqrt{r^2-x^2}}^{\infty}\frac{dy}{y^2}$$

$$=\int_0^a\left(-\frac{1}{y}\Bigg|_{\sqrt{r^2-x^2}}^{\infty}\right)dx$$

$$=\int_0^a\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$$

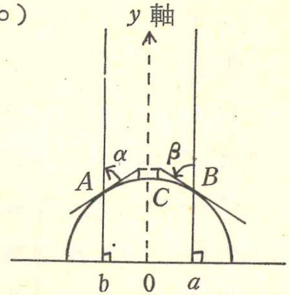
$$=\sin^{-1}\frac{a}{r}=\frac{\pi}{2}-\alpha=\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

考慮形如圖(五)之極限三角形$AB\infty$，則

$$\mathbf{A}(AB\infty)=\mathbf{A}(AC\infty)+\mathbf{A}(BC\infty)$$

$$=\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta$$

$$=\pi-(\alpha+\beta)$$



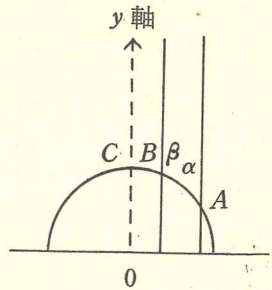
圖(五)

考慮形如圖(六)之極限三角形 $AB\infty$ ，則

$$\mathbf{A}(AB\infty)=\mathbf{A}(AC\infty)-\mathbf{A}(BC\infty)$$

$$=\frac{\pi}{2}-\alpha-\left(\frac{\pi}{2}-(\pi-\beta)\right)$$

$$=\pi-(\alpha+\beta)$$



圖(六)

因此，形如圖(三)的極限三角形 $A'B'\infty$ ，可經由 $T_a(z)=z+a$ ，$T_a\in\Gamma_R$ ，將 a 映至原點 0 ，使 $A'B'\infty$ 變為前列考慮的極限三角形，則 $\mathbf{A}(A'B'\infty)=\pi-(\alpha+\beta)$。所以圖(二)中的三角形 ABC 的面積為

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(ABC)&=\mathbf{A}(ABD)-\mathbf{A}(BCD)\\&=[\pi-(\angle DAB+\angle DBA)]-[\pi-(\angle DBC+\angle DCB)]\\&=\angle DBC+\angle DCB-\angle DAB-\angle DBA\\&=\angle DCB-\angle DAB-\angle ABC\\&=(\pi-\angle ACB)-\angle DAB-\angle ABC\\&=\pi-(\angle ACB+\angle CAB+\angle ABC)\end{aligned}$$

因此證得下列定理。

15.<u>定理</u>：設 (H,ρ) 中，三角形 ABC 的三內角為 α，β，γ ，則

$$\mathbf{A}(ABC)=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$$

16.<u>系理</u>：(H,ρ) 中，三角形內角和小於 π。

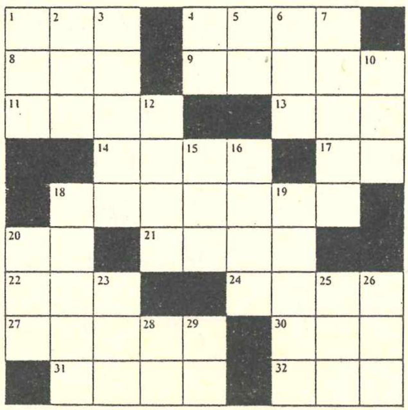
由此系理，我們就可以確定的說，(H,ρ) 上的幾何的確是雙曲線型幾何。

填填看

①每一小格請填入一個阿拉伯數字。

②請注意各號碼所代表的是直或橫的。

填填看（請填入適當的正整數），取自“Mathematics Magazine ”



橫的：

1. 一個完全平方數
4. 一個反過來讀也一樣的整數（如 1331）
8. 攝氏 265° 是華氏幾度
9. 與「直 3」合起來是一個 0 到 9 的排列
11. 形如 n^2+2^n+1，$n>0$，第二

直的：

1. 一個 11 的倍數
2. 這數字全部正的因數之乘積爲 $(202)^2$
3. 參看「橫 9」
4. 一個 Fermat 質數
5. 首三個質數的乘積
6. 一個「橫 1」的伙伴

個最小的質數

13.一籮有幾個

14.「直 19 」減去「直 18 」再加上「直 26 」

17.「二位」質數的個數

18.這數字各位數的乘積是 78125

20.這數字全部正的因數之和爲 91

21. $33^2 + 3^2$

22.這數字各位數的階乘之和就是它自己

24. 6 的一個乘冪

27.連續五個三角形數的 4 次方之和

30.一個Mersenne 質數

31. 2 的一個乘冪

32.一個 66 的倍數

7.以 2 爲底，這數字可表成 11010001110001

10.再一個完全平方數

12. 1950 後的第一個質數

15. $25\pi/6$ 是幾度

16.第 17 個 Fibona 數

18. $210^2 + 111^2$

19. 36 與 1631 的最小公倍數

20.小於 10^5 正的完全平方數的個數

23.小於 625 不能被 5 整除的正整數個數

25.這數字各位數之和爲 15 ，之積爲 84

26.一個像「橫 4 」那樣的完全平方數

28. $e^{(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\cdots\cdots)}$

29.「橫 20 」減去「直 28 」

答案請參見P.76

3. 劇變論簡介

校閱老師：王惠中
譯　　者：費毓港

作者：V. I. Arnold

出處：Catastrophe Theory（英譯本），Springer Verlag, 1984，第一至三章，pp. 1-9。

譯序：

劇變論（Catastrophe Theory）挾其驚人的想法與應用性，以奇異點理論撐腰，在七十年代初期掀起數學界一股猛烈的激盪，引起各界包括社會大衆的注意與敬佩，也招致主要來自數學界的批評與攻擊。根據 J.Guckenheimer 的說法，由於對尖點處理方法的差異，劇變論有以下三個分支：

(1)保守派：以V. I. Arnold 爲代表，重點在研究圓滑映射之奇異性。奇異點理論是當今數學主流之一，有很廣泛的應用（一個漂亮的例子，可用到宇宙論中黑洞的研究上）。

(2)哲思派：以Rene′ Thom爲代表，爲劇變論提供理論與哲學背景。Thom是劇變論的開山祖師，他的那本結構穩定性與形態學（Structal Stability and Morphogenesis）爲劇變論掀起序幕，引起各界的震驚，已經成爲這方面的經典，然而却非常難讀，不過正如唸「遍歷理論」（Ergodic Theory）不能不知道D. S. Ornstein 那篇Bernoulli Shifts with the Same Entropy are Isomorphic 一樣，這本書是必看的（看不懂又是另一回事）。可參看Guckenheimer 對「它」的 review（BAMS, vol.79, No.5, Sep.1973, pp878-890 ） 以及蕭欣忠的劇變論㈠近代數學的奇人與奇書（科學月刊 66-2, pp.21-26 ）。

⑶實際派：以 E.C.Zeeman 爲代表，將 Thom 的七種「基本劇變」應用在很廣的範圍上（包括如政治、軍事的社會科學），建構出很多不連續現象的模型。由於 Arnold 與 Thom 的工作都以理論爲依歸，加上 Zeeman 在講求應用的同時，忽略了數學的嚴密性與精確性，遂成爲批評劇變論者的主要攻擊對象。

Catastrophe Theony 是到目前爲止譯者所看到 Arnold 最淺的作品了（比那本 O.D.E.還要簡單），應該屬於一本介紹性的入門書籍，沒有嚴密的數學，但字裡行間在在顯出高手的風範，讓我們來看看有關它的一篇短評：

「眞是神奇中的神奇，竟然有一本書具有

⑴不貴，

⑵只含極少的式子，

⑶充滿了圖片，

⑷作者是當今數學界的天之驕子，

你還不趕快到書局去買一本！」

—— Advances in Mathematics 56, 192(1985)。

現在我們來介紹一下劇變論的一些入門書籍。

首先是理論與應用兼備、大部頭的

T.Poston, I.N.Stewart ：Catastrophe Theory and its Application, Pitman.

原本是寫給非數學家的科學家看的

Yung-Chen Lu：Singularity Theory and an introduction to Catastrophe Theory, Springer.

還有就是蕭欣忠教授等翻譯的 4 本小書（國立編譯館）：

P.T.Saunders：劇變論入門（ Introductcin to Catostrophe Theory）

E.C.Zeeman ：基本劇變之分類（ Classification of Elementary Catastrophes ）。

Th.Brocker：可微胚與劇變論（Dfferentiable Germs and Catastrophes）。

C.P.Bruter：劇變論的哲學與數學基礎。

以及蕭教授在科學月刊（66-2，66-3，66-4）中所發表的三篇短文等。其實，劇變論的參考資料非常多，但大都是不容易看（即使是那些登在非數學刊物中的）；對劇變論批評得最賣力的要算是美國的H.J.Sussman與R.S.Zahler，但他們的文章不易找到。倒不如去看看Arnold 所提到那幾篇較爲中肯的。

如果硬要將數學劃分爲純數學與應用數學，那劇變論的確很難找到歸宿，與其說劇變論分解成很多碎片，飄浮於數學領域中（也有很多飄到外界）；倒不如就把它想成存在於純數學與應用數學分界的「超曲面」上；無論如何，這都會使它在數學中遭受排擠，但脫離了數學，劇變論就更難找到容身的地方了。因此，有些人（大部份是數學家）根本否認劇變論的存在，或者只接受它是一套哲學思想而已。譯者對劇變論的認識還不到皮毛，不敢妄下斷語，讓我們來看看生物學家C.H.Waddington在Thom 那本結構穩定性與形態學英譯本（爲D.H.Fowler 翻譯）序言中的一段話：

>「……我們要特別强調的一點是，Thom 的工作是數學的一部份，並不直接屬於生物學，而且它是一門難的數學。……」

（譯者按：Thom 在這本書中主要談論生物的形態學，他創立劇變論開始的目的是建立一套以數學爲基礎的理論生物學。）

V.I.Arnold

Rene′ Thom

E.C.Zeeman

一　奇異點，分歧理論，與劇變論

大約在十多年前，西方的出版物中出現關於劇變論的消息；例如在「News Week」雜誌中報導這支富革命性的數學可比擬Newton發明的微積分，甚至有人主張劇變論這門新興的科學對人類的價值要比「數學分析」來得重要得多了。Newton的理論只侷限於考慮圓滑（smooth）、連續的過程，而劇變論則提供一個研究跳躍轉移、不連續點、與性質上之突然改變的一般方法。在上百篇科學性與大衆科學的文章中，將劇變論應用到很廣的範圍，例如心跳的研究、幾何與物理光學、胚胎學、語言學、實驗心理學、經濟學、流體力學、地質學、與基本粒子理論等。而在已經出版的劇變論專門刊物中，有對船穩定性的研究，爲腦部與精神失調者的活動情形、囚犯的暴動以及股票交易所調查員而分別設計的模型，也有研究酒精對駕駛者的影響和檢查官對色情文學的態度等。

在七十年代的初期，劇變論迅速地成爲流行且廣受宣揚的理論，這有別於在過去世紀中已經被接納的「準」科學理論。

劇變論的始創者是Rene′ Thom，他的數學作品已經被重印成一本袖珍的書①——自從人工智慧被引入以來，這種事情還未在數學中出現過，劇變

論就在其中推導出它那引人入勝的技巧。

劇變論得到無比的頌讚，同時也出現對其比較冷靜的批判。它們有些還以動人心弦的題目如「國王的新衣」(The Emperor has no clothes)②等出現在具有廣大讀者的刋物上。如今我們已經有對劇變論作出忠實批判的文章。(例如可參看 John Guckenheimer 在 1978 、所寫概略性的論文「劇變論的爭論 (The Catastrophe Controversy) 以及在 1979 年一篇對批評劇變論作諷刺的文章。) *

劇變論的起源可追溯到Whitney 對於圓滑映射的奇異點理論以及Poincare′ 和Andronov 對於動力系統的分歧理論 (Bifurcation of dynamical systems)。

奇異點理論 (Singularity theory) 是研究函數在極大極小點行爲的極度推廣，在Whitney 的理論中，以映射，卽多變數的函數族，代替函數。

分歧理論 (Bifurcation Theory) 的意思是討論分支，廣義來說，是對各種不同的對象，當它們所依賴的參數起了變化後，指出其定性行爲上所有可能的重排與變形。

劇變是指在具有外在條件的系統中，由圓滑改變而產生之不連續、激烈且突然之變化。要了解甚麼是劇變論，我們首先要熟悉Whitney奇異點理論的基本結果。

* Guckenheimer ,J. : The Catastrophe Controversy, The Mathematical Intelligenser,vol.1,pp. 15-21,1978.

Fussbudget H.T.,Znasber R.S.,Sagacity Theory : A Critique, loc.cit.1979,vol.2,no.1,pp.56-59.

二 Whitney 的奇異點理論

在 1955 年，美國數學家Hassler Whitney 出版了他的論文「平面間

之映射」（Mappings of the plane into the plane）③，文中他對圓滑映射之奇異性提出一種嶄新之數學理論基礎。

一個曲面到平面的映射（Mapping）將曲面上的每一點送至平面上的一點；如果曲面上的點由坐標（x_1, x_2）決定，而平面上的點為（y_1, y_2），則這個映射由一對函數

$$f_1(x_1, x_2) = y_1, \quad f_2(x_1, x_2) = y_2$$

所決定。當這些函數為圓滑時（即像多項式那樣，有足夠多次的微分。），我們也稱這個映射是圓滑的。

從圓滑曲面到平面的映射常常圍繞著我們，事實上，我們週遭的物體大部份都是接近圓滑的曲面。

物體邊緣的曲面投影到眼睛的視網膜上而產生可見的輪廓，檢視一下我們周圍的物體，如別人的臉部等，就可以探討可見輪廓的奇異性。

Whitney 發現一般而言只有兩種奇異點，其他的奇異點經過物體或投射角度的輕微轉移會分解，而這兩類奇異點却是穩定的，在映射的輕微變形下仍然持續。

第一類的奇異點稱為Whitney 摺點（fold），它是產生在投影到平面之球體上的赤度點（圖 1）。適當地選取坐標後，這個映射可表成以下的式子：

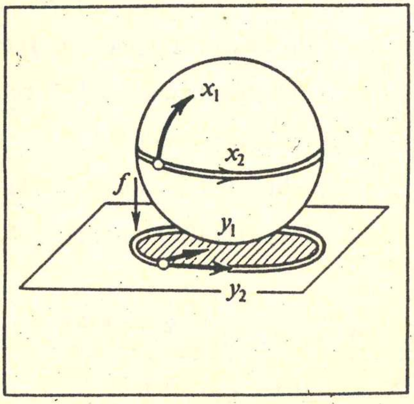


圖 1

$$y_1 = x_1^2 \text{ , } y_2 = x_2 \text{ 。}$$

圓滑物體表面在視網膜的投影常常都有此類奇異點，這是不足爲奇的，奇怪的是除了摺點外，我們只會碰到剩下一種的奇異點，這是實際上從未注意到的。

第二類的奇異點稱爲Whitney尖點（ cusp ），這是當投影像圖 2 中那種曲面到平面時而產生的。

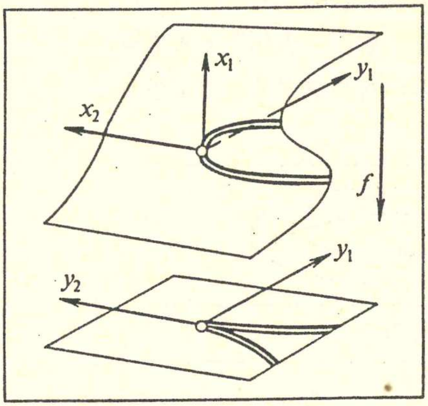


圖 2

這個曲面相對於空間坐標（ x_1, x_2, y_1 ）的方程式是

$$y_1 = x_1^3 + x_1 x_2 \text{ ,}$$

它被投影到平面（ x_2, y_1 ），這映射可用局部坐標表成

$$y_1 = x_1^3 + x_1 x_2 \text{ , } y_2 = x_2 \text{ 。}$$

在水平面上我們看到一條半三次拋物線（ Semi-cubic parabola ），且在原點上有一個尖點（釘尖）。這條曲線將平面劃分兩部份——較小的與較大的；在較小部份中的點有三個逆像（曲面上的三點投影到平面上的這點），較大部份中的點僅有一個逆像，而曲線上的點却有兩個。當從較小部份接近曲線時，（三個中的）其中兩個逆像會合併而消失（這裡的奇異點是摺點）；當接近尖點時，三個逆像都重疊了。

Whitney 證明這個尖點是穩定的，也就是每個相若的映射都在適當的

點有類似的奇異性。（即在選取合適的坐標以後，於這個適當的點某個鄰域內，一個變形／映射可以用描述原來那個映射的式子來表現，就是這種奇異性。）④

Whitney 同時也證出從曲面到平面之圓滑映射的每個奇異點，經過適當小的擾動（Perturbation）後，會分離成摺點與尖點。

因此，一般圓滑物體在視網膜的投影如果出現尖點的奇異點，則在它可見的輪廓上的這些點就是尖點。看看我們的四週，差不多每個人臉上或物體上的線都有這種尖點。譬如，讓我們來考慮圓滑的環面（torus，像一個充氣的輪胎），通常環面會被畫成像圖3那個樣子。

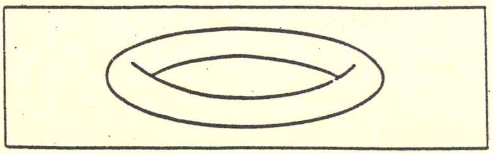
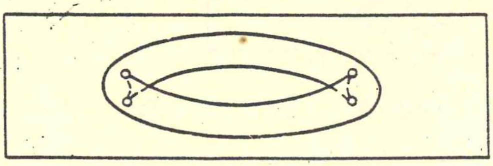


圖 3



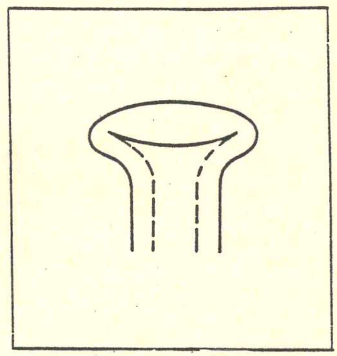


圖 4　　　圖 5

如果這個環面是透明的，我們就可以看到如圖4中所標示可見的輪廓。由環面映至平面的那個映射有四個尖點的奇異點，因此圖4可見輪廓中兩條線的端點皆爲尖點，有半三次的奇異性。

透明的環面是非常罕見的，我們來看另一種透明的物體——瓶子（牛奶瓶是滿適合的）。在圖5中可見到兩個尖點，稍爲移動一下瓶子，我們可導出這些尖點都是穩定的。所以對Whitney 定理而言，我們有使人信服之實驗性確實證據。

經過Whitney 之基礎性工作以後，奇異點理論迅速發展，如今已成爲數學範疇裡中心的一支；它將數學中最抽象的部份（微分與代數幾何、微分

與代數拓樸、反射理論、群論、交換代數、複空間理論等）與最具應用性的部份（動力系統的穩定性、平衡狀態的分歧理論、幾何與波動光學等）混爲一體。Rene′ Thom稱奇異點理論以及它的應用的混合體爲劇變論。

三　Whitney 理論的應用

既然到處都可以看到圓滑映射，那它們的奇異點也經常碰到了。由於 Whitney 的理論爲一般映射的奇異性提供了重要的訊息，我們就可以利用這些資料來研究大量科學領域裡各種不同的現象與過程，劇變論的本質卽在於此觀念。

當掌握有關映射的資料後，我們多少能將數學的奇異點理論直接應用在各種自然現象之上。事實上，這些應用引出了很有用的結果，譬如在彈性體理論及幾何光學。（還有聚焦線與波前的奇異性，容後我們會特別談論到。）

但是，大部份劇變論的工作都遭遇到極富爭論性的境況，這不僅是在於映射的資料能否掌握，而是劇變論之存在性遭到懷疑。

在這種情況下，奇異點理論就提供了理論的依據；作爲一個例子，我們來看看英國數學家Christopher Zeeman *如何將Whitney 的理論應用到「有創造能力的人物之活動」的研究上。

我們將用三種因素來衡量「有創造能力的人物」（如科學家等），那就是技術（ technique ），熱忱（ enthusiasm ）以及成就（ achievement ）。顯然這三種因素是互相關連的，所以我們在具有坐標（T,E,A）的三維空間中有一個曲面，再沿A的方向，將此曲面投影在（T，E）平面上。一般曲面上的奇異點均爲摺尖與尖點（Whitney 定理），我們可以檢視出圖6中所標示的尖點位置，與平常觀察到的現象相符。

在上面的假設之下，我們可以看到一個科學家的成就，會受到他的技術與熱忱之相互關係所影響。當他的熱忱不多時，成就要隨技術單調地增長，但相較之下，成就要緩慢多了；如果有充足多的熱忱，就產生一個不太一樣的現象，就是在技術加强之同時，成就會有一種跳躍式的增進（例如在圖6

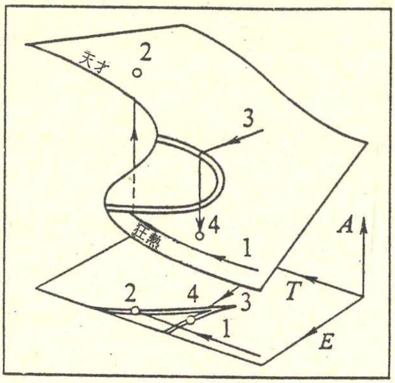


圖 6

當熱忱與技術沿著曲線 1 移動時，會在點 2 產生跳躍）。圖中標示著「天才」的地方代表能夠到達之高成就區域。

另一方面，熱忱的成長並不一定依賴著技術的一個對應的增强，這在成就產生跳躍的地方造成一個劇變（如圖 6 中曲線 3 的點 4 ），我們用「狂熱」標示所下降到的區域。可以發現從天才到狂熱以及其相反方向的跳躍均沿著各式各樣的路線，因此當熱忱充分大時，天才與狂熱者都懷有同樣的熱忱與技術，只在成就（與過往的歷史）上有所差別。

當須要詳細的討論時，很明顯可以看到這個模型以及劇變論中其他相似的考慮之不完備性。我們要特別指出的是劇變論的文章有別於其他已出版的結果，它們很鮮明地劇烈降低了對嚴密性與新鮮度的要求。雖然不難瞭解理論的劇變論學者如何跟數學中嚴密而沈悶的推演工作之傳統潮流抗衡，但對他們前輩（大部份具體結果的主人）的缺乏尊重，畢竟是很難說得過去的。這兩件事實的因素之社會性要較科學性來得重要。

* Zeeman, E. C. : Catastrophe Theory : a reply to Thom, in "Dynamical System", Werwick, 1974, Springer, Lecture Notes in Mathematics 468, p. 373.

譯註

① 這裡可能是指在 1984 年出版的

Rene′ Thom:Mathematical Models of Morphogenesis，其中收錄了Thom從 1967 到 1981 年間的部份文章，內容豐富，重要的是有部份並不太難，對初學者而言，要了解Thom的風格，這本書就最適合了。

② G.B.Kolata, Catastrophe Theory : The Emperor Has No Clothes, Rearsch News, Science,Vol.196,April(1977),p.287.

③ H.Whitney, Mappings of the plane into the plane, Annal of Math,62(1955),pp.374-470.

④ f 在 p 點穩定（stable）的意思是：

『存在p的鄰域U，

　∀p的鄰域U′⊂U，

　　∀f 的「微擾」（small pertubation）g，

　　　∃p′∈U′，

　　　　∃在 p，f(p)點的局部「可微同胚」（diffeomorphism）

　　　　　h_1,h_2,

　　　　　　使得下面的圖形可交換：

$$\begin{tikzcd}
(R^n, p) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_1"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & (R^m, f(p)) \arrow[d, "h_2"'] \\
(R^n, p') \arrow[r, "g"'] & (R^m, g(p'))
\end{tikzcd}$$

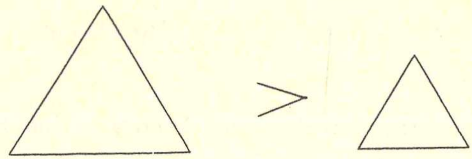
』

其中，g 爲 f 的「微擾」是指 g 與 f 各偏導數差之絕對值的總和足夠的小；而 h_1 爲 p 點的可微同胚就是說 h_1 是 1－1、映成，且 $dh_1(x_0)$ 可逆。

看圖識字

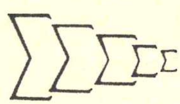
請猜猜看下列這些圖形可能代表那些數學意義（請用英文作答）：

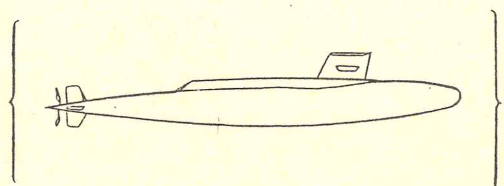
〔取自 " American Mathematics Monthly " 〕答案參看 P.76

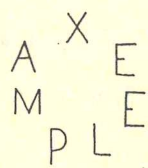
1. 

2. XIЯTAM A

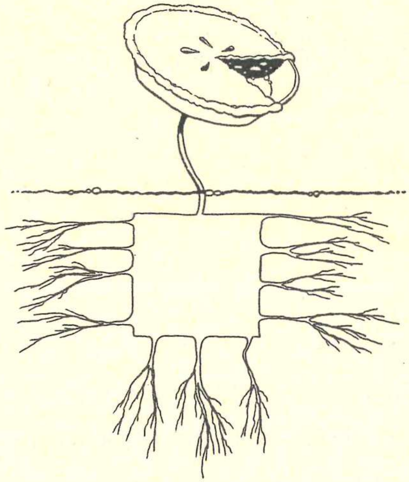
3. 

4. 

5. 

6. 

7.



8. die Ebene
el plano
le plan
mặt phẳng
samatal ti
ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ
ПЛОСКОСТЬ
平 평
面 면
المسطح
సమతలము
המישור

9. M
A
TRIX

4. 有限的馬可夫鏈"簡介"

指導老師：許乃紅
著　　者：于鴻福

隨機過程（Stochastic process）$\{X(t) \mid t \in T\}$ 是一些隨機變數（Random variable）所成的集合，i.e，對於每一個 $t \in T$，$X(t)$ 乃表示一個隨機變數。脚碼 t 有時候被看成是時間，而此時，$X(t)$ 則被當成是整個過程在時間 t 時的狀態（State）。譬如說，$X(t)$ 可以說是在一天中，至時間 t 時，進入某一家成衣店的顧客總人數；或是在時間 t 時，在此成衣店中之顧客人數；或是至時間 t 爲止，所賣出之外套總數量……等等。

集合 T 一般稱爲此過程的索引。當 T 是可數集時，此隨機過程稱爲離散型過程（Discrete-time process）；而若 T 是一段實數區間時，則此過程稱爲連續型過程。例如：$\{X_n \mid n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 是一個離散型過程；而 $\{X(t) \mid t \geqslant 0\}$ 是一個連續型隨機過程。

所謂一個隨機過程的狀態空間（State space）乃是指隨機變數 $X(t)$ 可以產生的所有可能結果所成的集合。如此，簡單地說，隨機過程乃是一個由描述一種隨著時間演進發展之過程的隨機變數所成的集合。

本篇所要敍述的是一種只產生有限種可能結果的隨機過程 $\{X_n \mid n = 1, 2, \cdots\}$，而且，其可能結果所成的集合則以集合 $\{S_1, S_2, S_3 \cdots\}$ 來表示，i.e，若 $X_n = S_i$，則表示此過程在時間 n 時，是在狀態 S_i。典型的隨機過程可用來推測某個體在一特定時間，會在某一特定狀態的機率，而此機率一般都與下列因素有著密切的關係：(1)狀態，(2)時間，(3)先前出現的所有或部份狀態，(4)其他個體現今所在或先前經過的狀態等。不過，有一

種隨機過程，個體或過程由一種狀態移至另一種狀態的機率只決定於這兩個牽涉的狀態，i.e，

$$P\{X_{n+1}=S_i \mid X_n=S_j, X_{n-1}=S_{j-1}, \cdots, X_1=S_1\}$$
$$=P\{X_{n+1}=S_i \mid X_n=S_j\}$$

像這樣的一種隨機過程就稱爲一個馬可夫鏈（Mavkov chain）。

若此馬夫可鏈之狀態空間的元素只有有限個的話，那麼這個馬可夫鏈就稱爲一個有限的馬可夫鏈。

在一個馬可夫鏈中，個體（或過程）在一段特定的時間後，由狀態 S_j 轉至狀態 S_i 的機率稱爲轉移機率（Transition probability），而以 a_{ij} 表示。

這個（i,j）位置是轉移機率 a_{ij} 的 $n\times n$ 矩陣 $A=[a_{ij}]$，被稱爲是這個馬可夫鏈的轉移矩陣（Transition matrix）。對於一個有 n 種狀態的馬可夫鏈來說，A是一個 n 階的非負實方陣。對每一個 j，因馬可夫鏈會把在狀態 S_j 之個體移至某一狀態，所以，可得到

$$a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{nj}=1$$

i.e，A的任一行之內元（entry）和是 1。

下面我們先看幾個簡單的例子：

例 1：（天氣預告）：假設隔天下雨的機會只和前一天之天氣狀況有關，而和過去之晴雨無關。且假定，若前一天是雨天，那末，隔天也是雨天之機率是 α；而若前一天是晴天，則隔天會下雨的機率是 β。

現在，我們訂說：當下雨時，這個過程是在狀態 S_1，而當是晴天時，則是在狀態 S_2。如此，上面的情況就變成了一個有兩種狀態之馬可夫鏈，而它的轉移矩陣是

$$A=\begin{bmatrix}\alpha & \beta \\ 1-\alpha & 1-\beta\end{bmatrix} \quad \#$$

例 2：（情緒預測）：在任何一個已知的日子裡，小妹不是高興（H），平平（S），不然就是憂慮（G）。假如她今天高興（H），那麼，她明天會H，S或G的機率分別是 0.5，0.4，0.1。假如，她今天感

覺平平（S），則明天H，S或G的機率就分別是0.4，0.4，0.2。倘若今天憂慮（G），則明日H，S或G的機率分別是0.2，0.4，0.4。（脾氣不錯，是個好女孩！）

令狀態$S_1=H$，狀態$S_2=S$，狀態$S_3=G$，那麼，此種情狀這是一個具有三種狀態的馬可夫鏈，且其轉移矩陣為

$$A=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \qquad \#$$

要想完全地定出一個馬可夫鏈的話，指明下列二事有其必要性：

1. 轉移矩陣。
2. 對於每一個 j，個體剛開始是在狀態S_j的機率$P_j^{(0)}$。

向量

$$P^{(0)}=\begin{pmatrix} P_1^{(0)} \\ P_2^{(0)} \\ \vdots \\ P_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

一般稱為初始或零步機率向量（Initial or O-Step probability veetor）。顯然，

$$\begin{aligned} &P_j^{(0)} \geqq 0 \qquad j=1,2,\cdots,n \\ &P_1^{(0)}+P_2^{(0)}+\cdots+P_n^{(0)}=1 \end{aligned} \qquad (1.1)$$

對於更一般化的情形，我們定義k一步機率向量（k-step·probability vector）為

$$P^{(k)}=\begin{pmatrix} P_1^{(k)} \\ P_2^{(k)} \\ \vdots \\ P_n^{(k)} \end{pmatrix} \qquad k=0,1,2,\cdots$$

式子中的$P_j^{(k)}$乃表示由初始向量$P^{(0)}$開始，經k次的馬可夫過程後，個體會出現在狀況S_j的機率。任何一個其內元（entry）滿足條件（1.1）的

行向量，都稱爲是機率向量（Probability vector）。而所有 n 維度的機率向量所成的集合，將以符號 P^n 來表示。

令 $A=[a_{ij}]$ 是爲某一個馬可夫鏈的轉移矩陣，且令 $P^{(0)}=[P_j^{(0)}]$ 是其初始機率向量。現在我們想要求出，個體在歷經一次馬可夫過程後，會出現在狀態 S_i 的機率 $P_i^{(1)}$。假定（S_i, S_j）表示個體剛開始在 S_j，而在一次的馬可夫鏈之過程後，出現在 S_i 的事件。要使得此事件（S_i, S_j）能夠發生，那個體起初就得在狀態 S_j（此發生的機率是 $P_j^{(0)}$），而且，再來就一定要移至狀態 S_i 了（此發生的機率是 a_{ij}）。因此，我們可以得知，事件（S_i, S_j）的發生機率是 $a_{ij}P_j^{(0)}$。如此，我們就不難知道，個體在一次的馬可夫鏈過程之後，會在狀態 S_i 的機率應等於

$$P_i^{(1)}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}P_j^{(0)}$$

i.e，所有事件（S_i, S_j），$j=1, 2, \cdots n$，的機率和。

歸納上述的分析結果，我們可以得到：

定理 1.2：假如 A 是一個以 $P^{(0)}$ 爲初始向量之馬可夫鏈的轉移矩陣，那麼，

$$P^{(1)}=AP^{(0)}$$

同理，我們可以得到下面的 Chapman-Kolmogrov 公式：

系理 1.3：對於任意非負整數 k, e，　$P^{(k+e)}=A^kP^{(e)}$。

下面我們再看，幾個以馬可夫鏈的概念所處理的例子：

例 3：由例 1，我們可以假設台北的天氣變化情形的轉移矩陣爲

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1-\alpha & 1-\beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}=A$$

現在假如您是數學系康樂股長，您在三月二十日時，決定在三月二十九日舉辦全系大露營，當然，露營活動最怕遇上下雨天，所以，您當然會很在意三月二十九日的天氣情況。在此，我們可以用馬可夫鏈的方法來讓您對當天的天氣先有個數。現在，我們把三月二十一日的天氣況狀當成初始狀態，由於二十一日至二十九日需經八次的轉移，所以，我們先將 $A^{(8)}$ 算出來：

$$A^{(8)}=\begin{pmatrix}0.7&0.8\\0.3&0.2\end{pmatrix}^{(8)}=\begin{pmatrix}0.7273&0.7273\\0.2727&0.2727\end{pmatrix}$$

所以，若二十一日是雨天，則初始向量$P^{(0)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$則二十九日就是

$A^{(8)}P^{(0)}=\begin{pmatrix}0.7273\\0.2727\end{pmatrix}$；若二十一日是晴天，則初始向量爲$P^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

，則$A^{(8)}P^{(0)}=\begin{pmatrix}0.7273\\0.2727\end{pmatrix}$，此既表示，不論二十一日天氣如何，二十九日下雨的機率高達72.73％，所以，若是想在三月二十九日能有個成功的活動的話，那就得多燒香拜佛了。

例4：住在某一社區的男士被分爲抽煙者（S）與不抽煙者（N）兩類，假如經調查發現，抽煙男士的兒子有$\frac{3}{5}$亦抽煙，而不抽煙的男士中，其兒子只有$\frac{1}{5}$抽煙。假若說，已知現在社區中抽煙男士之比率是$\frac{2}{3}$，那麼，試問兩代的男孩之抽煙比率各是多少？

要回答這個問題，我們要先注意說：一個男士是抽煙者的機率取決於他的父親是否抽煙。依據已知條件，我們可以把第一子代的男士分類爲：

1. SS，他和他父親都會抽煙，
2. SN，他會抽煙，但他父親不會抽煙，
3. NS，他不會抽煙，但他父親會抽煙，
4. NN，他和他父親都不會抽煙。

因爲已知社區中現在會抽煙之男士比率是$\frac{2}{3}$，所以，此社區中的第一子代中的$\frac{2}{3}$就會是SS或NS類。但是，這些子代的$\frac{3}{5}$是會抽煙（SS），因此；SS和NS之比率就各爲$\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{15}$和$\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$。同理，因爲現在社區中

有$\frac{1}{3}$之男士不抽煙，故社區的第一子代就有$\frac{1}{3}$是SN或NN類。又，這些子代之$\frac{1}{5}$會吸煙（SN），因此，SN和NN就各佔有$\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$和$\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{15}$。如此一來，在第一子代中，會抽煙的（包括SS，SN）比率就是$\frac{6}{15}+\frac{1}{15}=\frac{7}{15}$；而不抽煙的（包含NS，NN）比率則爲$\frac{4}{15}+\frac{4}{15}=\frac{8}{15}$。以此方法繼續做下去，我們可以求出任一子代之吸煙與不吸煙的比率。

現在，我們分別以$S^{(k)}$與$N^{(k)}$來表示第k子代中，抽煙與不抽煙之比率，那麼，利用上段敍述中的方法，可容易地獲得

$$S^{(k+1)}=\frac{3}{5}S^{(k)}+\frac{1}{5}N^{(k)}$$

$$N^{(k+1)}=\frac{2}{5}S^{(k)}+\frac{4}{5}N^{(k)}$$

這樣，我們就得到了一個轉移矩陣是$A=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}$的馬可夫鏈，而其初始向量則爲$P^{(0)}=\begin{pmatrix}S^{(0)}\\ N^{(0)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$。

現在，我們附帶地探討一個有趣的問題，那就是：是否可能說，第一子代抽煙之比率和原來父輩的相同呢？i.e，我們要找出一個$P^{(0)}$使得

$$P^{(1)}=P^{(0)}$$

但$P^{(1)}=AP^{(0)}$，所以，也就等於說，我們在尋找$AP^{(0)}=P^{(0)}$之解。此種機率向量，一般稱爲這個馬可夫鏈的固定向量（Stationary vector）。

以矩陣理論來說，就變成，我們要求出A之對應於特徵根＋1之特徵向量。由簡單的計算可以得知，A的特徵根是＋1和$\frac{2}{3}$，而且，對應於＋1的特徵向量則爲$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$。由系理1.3，我們更可進一步地知道，假若社區原有之吸煙男士比率是$\frac{1}{3}$的話，那麼，以後之任一子代的吸煙比率也都會維持爲$\frac{1}{3}$。

＃

在馬可夫鏈的許多應用範例中，矩陣序列的極限與矩陣級數的概念的使用，將會產生相當有趣的結果。爲此，我們要先敍述出矩陣序列之極限和矩陣級數收斂的定義，然後再列出兩個與例子的處理方法有關的定理，其完整的發展與證明可在參考書籍中找到。在此，有一點要先說明的是，下列定理所提及的乃是以複數爲內元（entry）的$m \times n$階矩陣，這些矩陣所成的集合則以$\mathbb{C}^m_n$來表示：

定義1：令$A=[a_{ij}] \in \mathbb{C}^m_n$，定義A的範數（norm）$\|A\|$如下：

$$\|A\| = \max_{\substack{i=1,2,\cdots m \\ j=1,2,\cdots n}} \{ |a_{ij}| \}$$

由上面的定義，我們不難得到：

引理1.4：令A，B是$m \times n$階矩陣，C是$n \times P$階矩陣而X是複數，那麼，

1. $\|A\|$是非負的實數且$\|A\|=0 <=> A=0$
2. $\|xA\| = |x| \|A\|$
3. $\|A+B\| \leqq \|A\| + \|B\|$
4. $\|AC\| \leqq n \|A\| \|C\|$

一般來說，矩陣的範數在處理矩陣的功用上，和處理實函數，或複數值函數的絕對值有著相當的相似性：

定義 2：令 L，A_0，A_1，A_2，… 都是 $m\times n$ 階矩陣。假如，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists K(\varepsilon)\in N \ni \| A_k - L \| < \varepsilon$ 對於每個 $k \geqslant K(\varepsilon)$，則我們稱矩陣序列 A_0，A_1，A_2，…，收斂到 L，且記爲

$$\lim_{k\to\infty} A_k = L$$

定理 1.5：令 A 是一個內元爲複數的方陣，那麼。$\lim\limits_{k\to\infty} A^k$ 存在之充分且必要條件是下列條件成立：

1. A 的特徵根之絕對值都不大於 1。
2. 絕對值是 1 的特徵根是 $+1$。
3. $(x-1)^2$ 不能整除 A 的極小多項式。

除了極限的概念外，我們尙需用到矩陣級數的觀念，所以下面的定理之目的，也就在提供一種特殊級數收歛性的一種判別方法。猶如處理數列一樣，我們也將由矩陣級數之部份和未定義級數的歛散性。

設 $\alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots\cdots$ 是方陣 A 的一個無窮級數，我們定義部份和爲

$$A_0 = \alpha_0 I$$

$$A_1 = \alpha_0 I + \alpha_1 A$$

$$A_2 = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

則當序列 A_0，A_1，A_2，……收歛到 B 時，稱無窮級數 $\alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots\cdots$ 收歛到 B。

定理 1.6：對於一個方陣 A 而言，下列條件等價：

1. $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$
2. A 之特徵根的絕對值都小於 1。
3. $I + A + A^2 + \cdots$ 收歛。

而且，當上列之條件任一項成立時，我們可以得到下列兩個結果：

(a) I －A 是一個非奇異的矩陣。

(b) $I+A+A^2+\cdots$ 收斂至 $(I-A)^{-1}$ ＃

現在我們再繼續我們的例子。

例 5：二月三十日中午，孫大姊和費×港在賭徒俱樂部，各預備了新台幣 1 元和 3 元準備豪賭一場。因為費×港他他他…怕被揍，所以他倆的賭法和一般時候不大相同。規則是這樣的：在一個匣子中放有三張牌，其中兩隻標示H，一隻標示L。當他抽中L牌時，孫大姊得給他 1 元；而當他抽中H牌時，他得給孫大姊 1 元。若有一人輸光時，則結束回家吃飯。試問他們二人將對方贏得精光的機率各是多少？需要繼續玩第十次的機率又是多少？

因為費×港和孫大姊二人賭資之消長是相對性的，所以我們只要以其中一人為標準就可以了。既然如此，我們就選孫大姊為馬可夫鏈中的個體，而設定狀態 S_1 是她有 0 元，狀態 S_2 是她有 1 元，S_3 是她有 2 元，S_4 是她有 3 元，S_5 則表示她有 4 元。這樣就導得了下面的轉移矩陣

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

為了處理上的方便，我們把狀態的次序調整為 1 元，2 元，3 元，0 元，4 元，於是，原來的矩陣就變為

$$A=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & O \\ C & I \end{bmatrix}$$

其中　$B=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

由歸納法可知：

$$A^k=\begin{bmatrix} B^k & O \\ C(I+B+B^2+\cdots+B^{k-1}) & I \end{bmatrix} \quad k=1,2,\cdots \tag{1.7}$$

爲了想要解出（1.7）式中的級數值，所以由檢驗B的特徵根發現，B之特徵根是0，$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，顯然絕對值都小於1。

因此，由定理1.11知：

$$1+B+B^2+B^3+\cdots=(I-B)^{-1}$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5}, & \frac{3}{5}, & \frac{1}{5} \\ \frac{6}{5}, & \frac{9}{5}, & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5}, & \frac{6}{5}, & \frac{7}{5} \end{bmatrix}
$$

故 $\lim\limits_{k \to \infty} C\,(I + B + B^2 + \cdots + B^{k-1}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

$$
\begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{9}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & \frac{7}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{15} & \frac{3}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{8}{15} & \frac{12}{15} & \frac{14}{15} \end{bmatrix}
$$

而且爲了求出 B^k 值，由檢驗乘方得知：$B^3 = \frac{4}{9}B$

所以

$$
B^k = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^k \times \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & k\text{ 是奇數} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^k \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, & k\text{ 是偶數} \end{cases} \qquad (1.8) \Rightarrow \lim_{k \to \infty} B^k = 0
$$

綜合上述資料，我們可以得到：

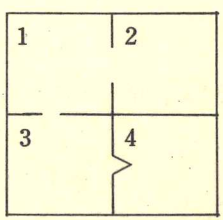
$$\lim_{k\to\infty} A^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{15} & \frac{3}{15} & \frac{1}{15} & 1 & 0 \\ \frac{8}{15} & \frac{12}{15} & \frac{14}{15} & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1.9)$$

在現在我們都還沒提到初始機率向量，不過，因爲孫大姊原有1元，所以這個馬可夫鏈的初始機率向量

$$P^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} 。$$

把$P^{(0)}$和（ 1.9 ）式的矩陣相乘，我們可以知道孫大姊輸光的機率是 $\frac{7}{15}$（S_4）；而把費×港痛宰的機率則是 $\frac{8}{15}$（S_5）。其實此式亦同時說明了賭賽永無止境地繼續下去的不可能性。

要求出第二個問題的答案，只要在（ 1.7 ）和（ 1.8 ）式中，取 $k=9$ 即可得知：在抽九次牌以後，孫大姊在狀態S_1和S_3的機率是零，而在S_2的機率是$\left(\frac{2}{3}\right)^9$。因此，需要抽第十次的機率也就是$\left(\frac{2}{3}\right)^9$了。



例6：右圖是一個放有一塊乳酪和一隻小老鼠的迷宮。在要提出問題之前，我們先做四個假設：

1. 房間1和3有兩個出口，而房間2只有1個。圖中記號“＞”的入口代表只有入不

能出，所以只要老鼠進入房間 4 ：就不能再出來。

2. 當老鼠不是在房間 4 時，它會每一鐘換一次房間。

3. 老鼠選擇它所在的房間之每一個出入口的機率相等。

4. 每當老鼠進入放有乳酪的房間時，它就可以得到一塊乳酪。

我們的問題是說：假若乳酪放在 i 房間，而老鼠放在 j 房間，則當此過程一直持續下去，這隻老鼠可得到多少塊乳酪？

由位置變換的隨機性，自然地，我們可以將其化成爲一個具下列四種狀態的馬可夫鏈：

S_j ＝老鼠在房屋 j　　$j = 1,2,3,4,$

所以可得轉移矩陣爲

$$A = [\,a_{ij}\,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

和初始機率向量 $I^{(j)}$。假若 $i = j$ ，i·e ，起初老鼠和乳酪放同一房間的話，那麼它可以立刻吃到一塊乳酪；起初老鼠和乳酪放在不同的房間，則在第一分鐘的移動後可以立刻吃到乳酪的機率則爲 $AI^{(j)}$ 的第 i 個內元。同理，對於一般的 $k \in N$，老鼠兄可以在第 k 分鐘的移動後立刻吃到乳酪的機率則爲 $A^kI^{(j)}$ 的第 i 個內元。因此，老鼠在這一直不斷的過程中可以吃到乳酪總數，可以記爲下列矩陣的第 i 個內元：

$$(I + A + A^2 + \cdots\cdots)\, I^{(j)}$$

仿照上例，我們把 A 化爲

$$A=\begin{bmatrix} B & O \\ C & I \end{bmatrix}，其中 B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, C=[0,0,\frac{1}{2}]$$

$$\Rightarrow A^k=\begin{bmatrix} B^k & O \\ C(I+B+\cdots+B^{k-1}) & L \end{bmatrix} \quad k=1,2,\cdots\cdots$$

$$\Rightarrow I+A+A^2+\cdots+A^k=$$

$$\begin{bmatrix} I+B+B^2+\cdots+B^k & O \\ C[kI+(k-1)B+(k-2)B^2+\cdots+B^{k-1}] & (k+1)I \end{bmatrix}$$

檢驗B的特徵根爲O，$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，顯然絕對值比 1 小，所以由定理 1.11 知：

$$1+B+B^2+\cdots=(I-B)^{-1}=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} 。$$

又因 $B^3=\frac{3}{4}B$，故

$$C[kI+(k-1)B+\cdots+B^{k-1}]=C\{kI+[(k-1)$$

$$+\frac{3}{4}(k-3)+(\frac{3}{4})^2(k-5)+\cdots]B+$$

$$[(k-2)+\frac{3}{4}(k-4)+\cdots]B^2\}$$

結合上面結果可得：

$$I+A+A^2+\cdots=\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} 。$$

由上面的矩陣可知，假如乳酪原本是放在第4號房間的話，那麼這隻小老鼠則可是可以吃個沒完了，而假若乳酪放在1號房間，老鼠放在第1或第2房間的話，那麼預期它將可以吃到四塊乳酪。 ♯

現在我們來談談例6中的狀態S_1,S_5和例7中的狀態S_4 。由於當個體進入這些狀態後就不能再離開，所以我們就把它們稱吸收狀態（Absorbing state）。進一步地，我們還可以知道：狀況S_q是吸收狀態 ⇒ 轉移矩陣的第q行是$I^{(q)}$ i·e，$a_{qq}=1$，$a_{pq}=0$，$p \neq q$。

令$a_{ij}^{(k)}$表示A^k（i，j）位置的內元，則

$$a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{e=1}^{n} a_{ie}^{(k)} a_{ej}^{(1)} = \sum_{m=1}^{n} a_{im}^{(1)} a_{mj}^{(k)} \quad (1.10)$$

當S_j是一個吸收狀態時，（1.10）式的第一部份變成了

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} \qquad i = 1,2,\cdots,n,$$

所以，

$$a_{ij} = a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(2)} = \cdots = 0 \qquad i \neq j$$

$$a_{jj} = a_{jj}^{(1)} = a_{jj}^{(2)} = \cdots = 1 \qquad 。$$

而且，當S_i是吸收狀況時，由（1.10）式可產生

$$a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{m=1}^{n} a_{im}^{(1)} a_{mj}^{(k)} = a_{ij}^{(k)} + \sum_{m \neq i} a_{im}^{(1)} a_{mj}^{(k)} \geqq a_{ij}^{(k)}$$

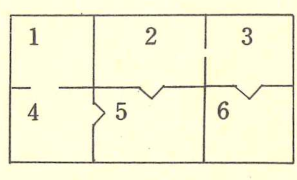
$$j = 1,2,\cdots,n,$$

也就是說，對於每一個 j，$a_{ij}^{(k)}$是k的遞增函數。但因1是它們的上界，故當S_i是一個吸收狀態時，我們可得：

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} \text{ 存在。}$$

現在，我們要用上面的觀念來解決下面的這個問題：

例7：古圖的迷宮中，有一隻老鼠在房間 j。



假設

1. 當老鼠進入房間5和6之後就不能離開。

2. 當老鼠不在 5 ，6 號房間時，它每一分鐘會變換一次房間。

3. 當老鼠要變換房間時，它選擇它所在房間的任一出入口之機率相等。

我們的問題是要去求出，這隻老鼠曾經進入房間 i 的機率 f_{ij} 是多少？

對於這個問題，我們先考慮房間 i 對應於吸收況態 S_i。注意，在這個馬可夫鏈中，吸收狀態是 S_5（房間 5 ）和 S_6（房間 6 ）。 由於當老鼠進入這兩個房間後就不能離開，所以，它在第 k 分鐘或之前進入 5 號（或 6 號）房間的機率，就等於在第 k 分鐘時，它在 5 號（或 6 號）房間的機率。因此，對於吸收況態 S_i 而言，老鼠（原本在 S_j ）在第 k 分鐘或之前有進入 S_i 的機率就是 $a_{ij}^{(k)}$，於是乎，它曾經進入 S_i 的機率就變為

$$f_{ij} = \lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} \qquad (1.11)。$$

這個馬可夫鏈的轉移矩陣是

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & O \\ C & I \end{bmatrix}$$

其中　$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　$C=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ 。

如此，　$A^k=\begin{bmatrix} B^k & O \\ C(I+B+\cdots+B^{k-1}) & I \end{bmatrix}$

因爲B的特徵根是$\pm\frac{1}{2}$，$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$（絕對值皆比1小），所以由定理1.6知，$\lim_{k\to\infty} B^k=0$　且

$$I+B+B^2+\cdots=(I-B)^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

故 $\lim_{k\to\infty} C(I+B+B^2+\cdots+B^{k-1})$

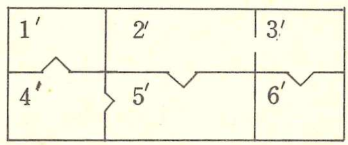
$$=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}\text{。}$$

結果，我們得到了

$$f_{51}=1 \quad f_{52}=\frac{2}{3} \quad f_{53}=\frac{1}{3} \quad f_{54}=1$$

$$f_{61}=0 \quad f_{72}=\frac{1}{3} \quad f_{63}=\frac{2}{3} \quad f_{64}=0 \quad 。$$

我們再來考慮房間 i 不是對應吸收狀態時。我們可以 f_{1j} 當做範例，其餘 f_{2j} ， f_{3j} ， f_{4j} 的情況是相同的。既然吸收狀況的情形我們可以順利地將它解決，那麼，很自然地，我們也許會想說，是否非吸收狀態的情形可以利用吸收狀態的方法來處理呢？事實上，這種想法是正確的！因爲只要我們把迷宮中的 1 號房間也改成只能進入，不能出來，那就符合吸收狀態的情形了。這時候，原來的迷宮就變成爲



不過，有一點我們必須注意的是，雖然把 1 號房間改成了只進不出，但是當它起初在 1 號房間時，老鼠在這 k 分鐘會進入 1 號房間的機率卻是兩種迷宮都相同。於是，老鼠曾經進過 1 號房間的機率在兩種迷宮中也都相同。

此情況的轉移矩陣是

$$A'=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & D' & O \\ 0 & B' & O \\ 0 & C' & I \end{bmatrix}$$

其中 $D' = [\,0 \quad 0 \quad \frac{1}{2}\,]$，$B' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$C' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad A'^{k} = \begin{bmatrix} 1 & D'(I + B' + B' + \cdots + B'^{k-1}) & 0 \\ 0 & B'^{k} & 0 \\ 0 & C'(I + B' + B'^{2} + \cdots + B'^{k-1}) & I \end{bmatrix}$$

因爲 B' 的特徵根是 0，$\frac{1}{2}$（絕對值小於 1），所以

$$1 + B' + B'^{2} + \cdots = (I - B')^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

且 $\lim_{k \to \infty} B'^{k} = 0$

$$\Rightarrow \quad D'(I + B' + B'^{2} + \cdots) = [\,0，0，\frac{1}{2}\,]，$$

$$C'(I + B' + B'^{2} + \cdots) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} A'^{k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故 $f_{12} = f_{13} = 0$，$f_{14} = \frac{1}{2}$，$f_{15} = f_{16} = 0$。

由 $f_{14} = \frac{1}{2}$ 可知：在原來的迷宮中，假若老鼠原來是放在 1 號房間，那麼，以後它還會再回到 1 號房間的機率是 $\frac{1}{2}$（因為，當它離開 1 號房間後它只能到 4 號房間去）。因此 $f_{11} = \frac{1}{2}$。

在介紹最後一個例子之前，我們藉著例子 7 的情況來介紹幾個名詞：

定義 2：假如一個 n 階方陣，可以經由行、列的相同排列化成形如

$$\begin{bmatrix} C_{e\times e} & O \\ B_{(n-e)\times e} & D_{(n-e)\times(n-e)} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

的話，就稱之為一個可約（ Reducible ）矩陣。當一個方陣不是可約時，就稱為即約（ Irreducible ）。

若一個馬可夫鏈的轉移矩陣是可約（或即約）矩陣的話，則稱此馬可夫鏈為可約（或即約）。

所以，例子 8 中的轉移矩陣就是一個可約方陣。

注意，若（ 1.12 ）是一個轉移矩陣，那麼子矩陣 D 也就會是一個運作在狀態 $S_{e+1}, S_{e+2}, \cdots, S_n$ 的轉移矩陣。每當個體是在 $S_{e+1}, \cdots, S_n$ 中

之任何一個狀態時，它就不可能再出現在S_1，…，S_e之任何一個狀態中。於是，我們就稱這樣的狀態所成的集合是一個封閉集合（Closed set）。顯然，例7中的$\{S_1, S_4, S_5\}$和$\{S_2, S_3, S_5, S_6\}$都是封閉集合。由這個定義，我們不難得知，封閉集合的交集和聯集還是封閉集合。

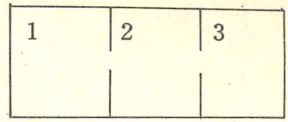
一個可約的馬可夫鏈必定包含有一個眞封閉子集（Proper closed subset）。反之，若馬可夫鏈包含有一個眞封閉子集的話，那麼，我們必可將它的轉移矩陣化為（1.12）的形式。因此，轉移矩陣是即約之充分且必要條件是唯一的封閉集合就是那全部狀態所成的集合。一個極小（minimal）的封閉(狀態)集合（i.e 不包含其他任何一個封閉集合者）一般被稱為必經集合（Ergodic set）。剛才我們舉出的封閉集合$\{S_1, S_4, S_5\}$和$\{S_2, S_3, S_5, S_6\}$都是必經集合。又因兩個封閉集合的交集還是封閉集合（或ϕ），所以，兩個相異的必經集合必互斥（Disjoint）。必經集合中的每一個狀態都稱為必經狀態（Ergodic state）。若一個狀態不是必經狀態，則稱之為暫留狀態（Transient state）。如此，我們可以推得，一個馬可夫鏈是即約$\Rightarrow$它僅包含一個由所有狀態所組成的必經集合。

由於個體不能離開必經集合，所以它不能從一個必經狀態進入暫留狀態或進入另一個必經集合。一個馬可夫鏈的所有狀態可能都是必經狀態（譬如說，當轉移矩陣是即約時），但是，不可能一個馬可夫鏈的所有狀態都是暫留狀態。

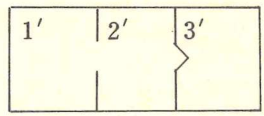
其實，假如我們繼續參考其他書籍的話，就可以進一步的得知：以例7的f_{ij}來說，（一般稱為 S_j到S_i的首訪機率（first-passage probability），當$i = j$時，f_{ii}特別稱為狀態S_i的遞回機率（Recurrence probability）。若S_i是一個必經狀態時，則$f_{ii} = 1$（i.e，當個體離開S_i後，其必定會再回到S_i）；而若S_i是一個暫留狀態時，則$f_{ii} < 1$。

上列所提出的一些名詞其有關的進一步結果，請自行參閱有關書籍。下面我們介紹最後一個例子：

例 8：右圖是一個在房間 j（$j \neq 3$）中放有一隻老鼠的迷宮。現在我們想要求出：①老鼠會進入房間 3 的機率是多少？②假如說進入 3 號房間就會死亡的話，那麼這隻老鼠我們可以期望它能活多久呢？



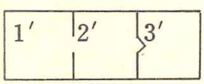
問題①的解決之道，其實就和例 8 中用過的一樣，只要把迷宮看成是房間只能進不能出即可，i.e，不過，此地我們將提供另一種解決的方法，令人驚奇的是，這個方法亦可同時解決問題②。



對於 $k = 1, 2, \cdots$，令 $f_{3j}^{(k)}$ 表示老鼠在第 k 分鐘時是第一次進入 3 號房間的機率。那麼，$f_{3j}^{(1)} + f_{3j}^{(2)} + \cdots + f_{3j}^{(3)}$ 則表示老鼠在前 k 分鐘期間，至少進入 3 號房間一次的機率。如此，它曾經進入 3 號房間的機率 f_{3j} 就可以表示爲

$$f_{3j} = f_{3j}^{(1)} + f_{3j}^{(2)} + \cdots\cdots \quad (1.13)。$$

爲了要求出 $f_{3j}^{(k)}$，我們把 3 號房間調整爲一個吸收狀況 i.e，



，那麼，這個新迷宮的轉移矩陣就變成了

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B' & 0 \\ C' & 1 \end{bmatrix} \text{ 其中 } B' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ C' = \left[0, \frac{1}{2} \right]$$

這樣一來，$f_{3j}^{(k)}$ 也就是老鼠在第 k 分鐘時會進入房間 3′ 的機率。因爲當它進入房間 3′ 後就不能再離開，所以，老鼠在第 k 分鐘時會在房間 3′ 的機率就等於，在前 k 分鐘的每一分鐘裡，老鼠是第一次進入房間 3′ 的機率總和，i.e，

$$a_{3j}'^{(k)} = f_{3j}^{(1)} + f_{3j}^{(2)} + \cdots + f_{3j}^{(k)} \quad (1.14)$$〔和（1.11）式比較看看〕

由此式，我們可得

$$a_{3j}^{\prime(k)} - a_{3j}^{\prime(k-1)} = f_{3j}^{(k)} \quad k = 2,3,\cdots$$

$\Rightarrow f_{3j}^{(k)}$是矩陣$(A')^{k}-(A')^{k-1}$在$(3,j)$位置的內元。

但是

$$(A')^{k}-(A')^{k-1} = \begin{bmatrix} (B')^{k}-(B')^{k-1} & 0 \\ C'(B')^{k-1} & 0 \end{bmatrix}\text{，於是 } f_{3j}^{(k)}$$

就是二維列向量$C'(B')^{k-1}$的第 j 個內元。由計算我們可知，

$$(B')^{2} = \frac{1}{2}I \text{。於是}\quad (B')^{k-1} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(k-1)}{2}} I & \text{當 k 是奇數，} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(k-2)}{2}} B' & \text{當 k 是偶數。} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{31}^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{當 k 是奇數} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} & \text{當 k 是偶數，} \end{cases} \qquad f_{32}^{(k)} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(k+1)}{2}} & \text{當 k 是奇數} \\ 0 & \text{當 k 是偶數} \end{cases} \tag{1.15}$$

將上式(1.15)代入式子(1.13)中可得

$f_{31} = f_{32} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots = 1$。此既意指著說，這隻老鼠絕不能長生不老！死！它會剛好活 k 分鐘的機率是 $f_{3j}^{(k)}$。

這隻老鼠的平均壽命期望值可表示爲

$$E_j = \sum_{k=1}^{\infty} k\, f_{3j}^{(k)} \tag{1.16}$$

對於 $j = 1$ 而言，把(1.20)的條件代入(1.16)中可得

$$E_1 = \sum_{\ell=1}^{\infty} 2\ell \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell} = 4\text{（分鐘）}$$ 。#

最後，我們再介紹一下有關期望壽命的一個結果：

定義3：假設 S_p，S_q 屬於同一個必經集合，我們定義從 S_q 到 S_p 的平均首訪時間（mean-first-passage tunie）為

$$m_{pq} = \sum_{s=1}^{\infty} s\, f_{pq}^{(s)} \text{。}$$

對於一個即約的馬可夫鏈，矩陣 $M = [m_{pq}] = \sum_{s=1}^{\infty} s\, F^{(s)}$ 稱為平均首訪矩陣。

例8中的 E_1（和 E_2）就是代表從 S_1 到 S_3（S_2 到 S_3）的平均首訪時間。雖然M之任一內元 m_{pq} 都有一般性的公式解法，但是，在此我們並不想列出這個式子。不過，對於M的對角線元素 m_{jj} 而言，有一個有趣的性質如下：

定理 1.17：令 $X = [x_j]$ 是一個即約馬可夫鏈的（唯一，正的）固定向量而M是平均首訪矩陣，那麼，

$$m_{jj} = \frac{1}{x_j} \qquad j = 1, 2, \cdots, n \text{。}$$

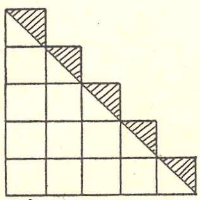
參考書籍：

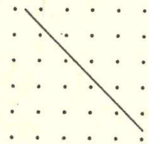
1. Martin Pearl：" MATRIX·THEORY AND FINITE MATHEMATICS." 美亞書版股份有限公司，1974。
2. Sheldon M. Ross：" INTRODUCTION TO PROBABILITY MODELS." third edition, 狀元出版社，1985。
3. Kemeny & Snell：" Finite Markov Chain." New York Heideberg Berlin，1976。

利用圖形的證明

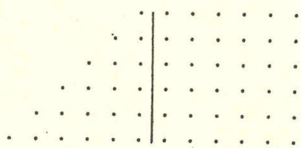
〔取自 " Mathematics Magazine " 〕

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$$





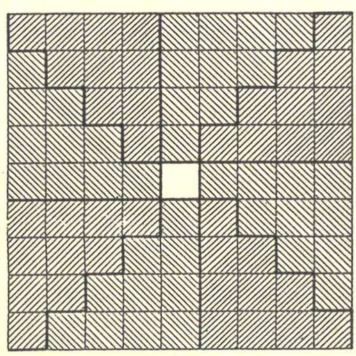
$$\sum_{k=1}^{n} k+\sum_{k=1}^{n-1} k=n^2$$



$$\sum_{k=1}^{n} k+n^2=\sum_{k=n+1}^{2n} k$$

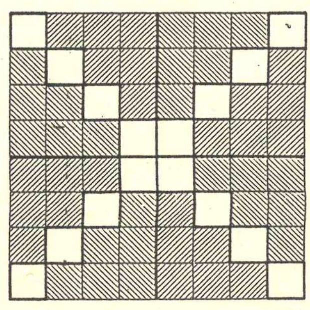
n 為奇數：

$$n^2-1=4\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)=8\sum_{i=1}^{(n-1)/2} i$$

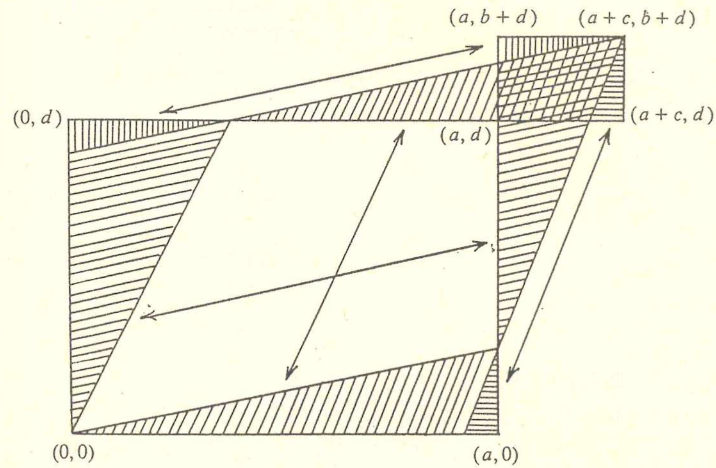


n 為偶數：

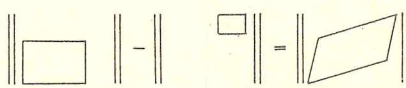
$$n^2-2n=4\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}\right)=8\sum_{i=1}^{n/2-1} i$$



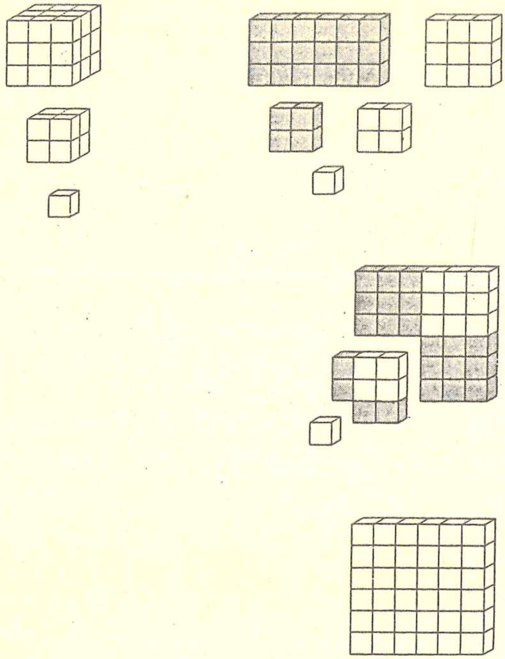
一個二階行列式是某個平行四邊形的面積：



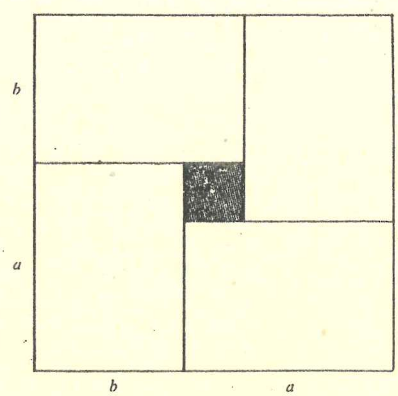
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc =$$



$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$



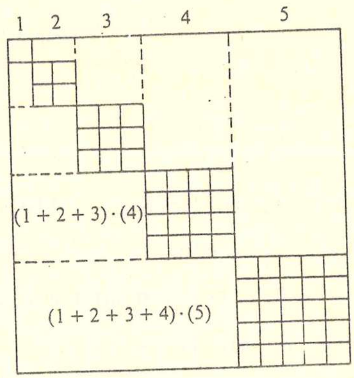
無言的證明：
算一幾不等式（算術平均≥幾何平均）



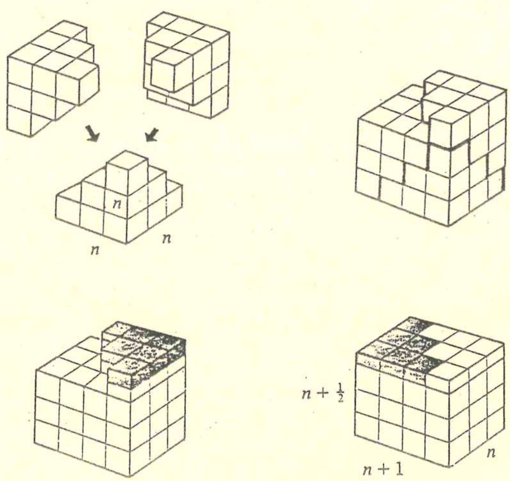
$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 - 2\sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{k} i\right)(k+1)\right].$$



$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \tfrac{1}{3}n(n+1)(n+\tfrac{1}{2})$$



5. 一個砝碼問題

指導老師：王惠中
三　　乙：許志農

法國數學家Claude Barpard Bachet de Meziriac 曾經提到過一道問題，問題是這樣的“有一塊 40 磅重的砝碼，因爲跌落地上而碎成 4 小塊，但當這四小塊砝碼可以量所有介於 1 和 40 磅中的整數重量時，這四小塊砝碼到底各多重” Bachet de meziriac 的方法所得的答案是｛ 1 ，3 ，9 ，27 ｝，初次看到這問題，或許有些人會覺得有點疑惑；懷疑僅四塊砝碼能夠組合成 40 種不同的重量嗎？這答案是肯定的，因爲我們能夠在天平的兩端同時加砝碼，使它達成平衡。例如：一塊重 8 磅的物體，我們可把此物體與 1 磅重的砝碼置於天平的左邊，而右邊放 9 磅重的砝碼，因而達成平衡，所以 8 磅重的物體便可量出，就因爲天平兩邊可置砝碼，所以才使這道問題複雜。以下將探討比這問題較一般一點的問題，並找出一組砝碼使得能量出比這組砝碼總重量還小的所有整數重量，當然砝碼數愈少愈好。

假定M爲重 $1+3+3^2+\cdots+3^n$ 磅的砝碼（ $n=3$ 時便是Bachet de meziriac 問題）試問“至少需將M分割成幾塊小砝碼，這些小砝碼才有辦法量出所有介於 1 磅與 $1+3+3^2+\cdots+3^n$ 磅中所有整數的重量，且分割方法是否唯一”解決這個問題是本篇的主要目的，解決這個問題須要用到整數的餘數定理（中國剩餘定理）及數學歸納法，爲了簡化證明起見，先作一些定義

【定義】 若m_1，m_2，…，m_k 爲大砝碼M的一組分割且能量 1 到 $1+3+3^2+\cdots+3^n$ 磅重的所有整數磅重量。（當然$m_1+m_2+\cdots+m_k=M=1+3+3^2+\cdots+3^n$ ）我們便記爲（M；m_1，m_2

，…，m_k ）且規定

$m_1 \leqslant m_2 \leqslant \cdots \leqslant m_k$ ，又若一重量N磅的物體可由這組砝碼量出，則可將N表成 $a_1m_1 + a_2m_2 + \cdots + a_km_k$ 其中a_1 ，a_2 ，… $a_k \in \{-1, 0, 1\}$ 記成（ a_1 ，a_2 ，…，a_k ）其中-1表示此小砝碼與N放置天平同一邊，0 表示此小砝碼不在平衡的天平上，1 表示置與N不同邊。因此（M；m_1，m_2，…，m_k ）這組砝碼所能稱的所有重量均可表成（ a_1 ，a_2 ，…，a_k ）其中a_1 ，a_2 ，…，$a_k \in \{-1, 0, 1\}$ 且$\sum\limits_{i=1}^{k} a_im_i > 0$。

有了上述定義及解說之後，我們將開始解決這個問題。

【定理 1】　對每組（M；m_1，m_2，m_3，…，m_k）$\Rightarrow m_1 = 1$

【證明】　$\because B + 3^2 + \cdots + 3^n \leqslant M = 1 + 3 + \cdots + 3^n = m_1 + m_2 + \cdots + m_k = M - 1$

故可由m_1 ，m_2 ，…，m_k 量得，又 $| \leqslant m_1 \leqslant m_2 \leqslant \cdots \leqslant m_k$

$\because 3 + 3^2 + \cdots + 3^n = m_2 + m_3 + \cdots + m_k$（唯一一種表示法）

$\therefore m_1 = 1$

【定理 2】　對每組（M；m_1 ，m_2 ，…，m_k），$K \geqslant n + 1$

【證明】　$\because$（M；m_1 ，m_2 ，…，m_k ）可量出來的數均可表爲（ a_1，a_2，…，a_k ）而$a_i \in \{-1, 0, 1\}$ $i = 1, 2, \cdots, k$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{k} a_im_i > 0$

但K-tuple （ a_1 ，a_2 ，…，a_k ）中，使得 $\sum\limits_{i=1}^{k} a_im_i$ 正（>0 ）與負（<0 ）的個數一樣多。（$\because$若（ a_1，a_2，…，

a_k) $\ni \sum_{i=1}^{k} a_i m_i > 0$ 則 ($-a_1$, $-a_2$, … , $-a_k$) $\ni \sum_{i=1}^{k}$

$-a_i m_i < 0$ 相反亦一樣)

又 (0 , 0 , … , 0) 爲其中之一K-tuple

$\because$ K-tuple (a_1 , a_2 , … , a_k) 中，使得 $\sum_{i=1}^{k} a_i m_i > 0$ 的個

數 $\leqslant \dfrac{3^k - 1}{2}$

所以 (M ; m_1 , m_2 , … , m_k) 所能量出的數不超過

$\dfrac{3^k - 1}{2}$ 個

但是 $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$

$\therefore \dfrac{3^k - 1}{2} \geqslant \dfrac{3^{n+1} - 1}{2} \Rightarrow K \geqslant n + 1$

【定理3】 對每個自然數 N 均可表成 $a_0 + a_1 \cdot 3^1 + a_2 \cdot 3^2 + \cdots + a_n \cdot 3^n$ ，其中 n 爲自然數 $a_i \in \{-1, 0, 1\}$ $i = 1, 2, \cdots, n$ 且表法由 a_0 , a_1 , … , a_n 唯一決定。

【證明】 設 N 爲一自然數 $N > 2$ ，由餘數定理，可得

$N = 3Q_1 + a_0$ 其中 $a_0 \in \{-1, 0, 1\}$; $0 \leqslant Q_1 < N$, 同

理 $Q_1 = 3Q_2 + a_1$ 其中 $a_1 \in \{-1, 0, 1\}$; $0 \leqslant Q_2 < Q_1$

…如此繼續下去 $\because N > Q_1 > Q_2 > Q_3 > \cdots \geqslant 0$

故 Q_1 , Q_2 , … , Q_N 中必至少有一個爲0 (其實若 $Q_k = 0$,

則 $Q_n = 0$, $\forall n \geqslant k$)

設 Q_n 表 Q_1 , Q_2 , … , Q_N 中首先出現爲0者。

$\because N = 3Q_1 + a_0$

$Q_1 = 3Q_2 + a_1$

$Q_2 = 3Q_3 + a_2$　其中 $a_1 \in \{-1, 0, 1\}$ $i = 0, 1, 2, \cdots, n$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$Q_n = 3Q_{n+1} + a_n$（注意 $Q_{n+1} = 0$）

由下往上將 Q_i 代入可得

$N = Q_{n+1} \cdot 3^{n+1} + a_n \cdot 3^n + a_{n-1} \cdot 3^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 3 + a_0$

$= a_0 + a_1 \cdot 3 + \cdots + a_n \cdot 3^n$，其中 $a_i \in \{-1, 0, 1\}$

$i = 0, 1, 2 \cdots n$

現在證明表示法唯一

令 $(N, a_i) = a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + \cdots + a_n \cdot 3^n$

$(N, b_i) = b_0 + b_1 \cdot 3 + b_2 \cdot 3^2 + \cdots + b_n \cdot 3^n$

$(a_i, b_i \in \{-1, 0, 1\}$

$i = 0, 1, 2, 3, \cdots, n)$

若 $(N, a_i) = (N, b_i)$

則 $(N, a_i) \equiv (N, b_i) \pmod 3$

$\therefore a_0 \equiv b_0 \pmod 3$

$\therefore a_0 = b_0$ $(\because a_0, b_0 \in \{-1, 0, 1\})$

同理 $\because (N, a_i) - a_0 = (N, b_i) - b_0$

$$\therefore \frac{(N, a_i) - a_0}{3} \equiv \frac{(N, b_i) - b_0}{3} \pmod 3$$

$\therefore 1 \equiv b_1 \pmod 3$

$\therefore a_1 = b_1$

如此操做 N 次便可得 $a_i = b_i$，$i = 0, 1, 2, 3, \cdots, n$

事實上，若 N 爲整數，此定理亦成立，證明與此雷同。

【定理 4】　設 $G = \{ a_1 + a_2 \cdot 3^1 + a_3 \cdot 3^2 + \cdots + a_{n+1} \cdot 3^n \mid a_i \in \{-1, 0, 1\}, i = 1, 2, \cdots, n+1 \}$

則 $G=\{X\in E \mid -(1+3+\cdots+3^n)\leq X\leq(1+3+\cdots+3^n)\}$

【證明】 由定理3的唯一性（即（a_1，a_2，…，a_{n+1}）不同，所表的數亦不同）

可得 G 的個數爲 $\underbrace{3\times 3\times\cdots\times 3}_{n+1\text{個}3}=3^{n+1}$

又若 $X\in G\Rightarrow|X|\leqslant 1+3+3^2+\cdots+3^n=\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$

$\Rightarrow X\in\{X\in E \mid -(1+3+\cdots+3^n)\leq X\leq(1+3+\cdots+3^n)\}=H$

又 H 僅 3^{n+1} 個元素

$\therefore G=\{X\in E \mid |X|\leq 1+3+\cdots+3^n\}$

【定理5】 （M：1，3，3^2，…3^n）爲 M 砝碼的一組分割，且每個表示法均唯一。

【證明】 由定理3，4便可得。

【定理6】 若（M：m_1，m_2，…，m_{n+1}）（最少個，由定理2知）爲 M 的一組分割，則每一重量 X（$1\leq X\leq M$）的表示法唯一。

【證明】 設 $X=a_1\cdot m_1+a_2m_2+\cdots+a_{n+1}\cdot m_{n+1}$，$a_i\in\{-1,0,1\}$ 至多有 $\overbrace{3\cdot 3\cdot\cdots\cdot 3}^{n+1\text{個}3}=3^{n+1}$ 個不同的值（包含正，負）

然 $|X|\leq M$ 亦共有 3^{n+1} 個值

故得證此定理。

我們由定理 5，6 知道（M：1，3，3^2，…，3^n）爲一組最少個數的分割，下面要證明它也是唯一的一組最少分割。

【定理 7】 若（M；m_0，m_1，m_2，…m_n）爲一組分割（最少）則

$m_0=3^0$，$m_1=3^1$，$m_2=3^2$，…，$m_n=3^n$

【證明】 利用數學歸納法$M=1$時顯然

設$M=1+3^1+\cdots+3^{n-1}$時亦成立

若$M=1+3^1+3^2+\cdots+3^n$時，（$M=m_0$，m_1，m_2，…，m_n）爲一組最少分割由定理 1 得$m_0=1$

設$S=\{\ 0\cdot 1+a_1\cdot m_1+a_2\cdot m_2+\cdots+a_n\cdot m_n\mid$

$a_i\in\{-1，0，1\}\}$

$\Rightarrow 0\in S$（$\because 0=0\cdot 1+0\cdot m_1+\cdots+0\cdot m_n$

若x，$y\in S$且$x<y$爲S上相鄰二元素

我們將證明$-x+y=3$

若$y=x+1$則$\because x\in S$　x可用（0，a_1，a_2，…，a_n）表示

又$y=x+1$可用（1，a_1，a_2，…，a_n）表示，由唯一性

知$x+1\notin S$　故$y-x>1$

若$y=x+2$　若$x=$（0，a_1，a_2，…，a_n），$y=$（0，

b_1，b_2，…，b_n）

$\Rightarrow x+1=$（1，a_1，a_2，…，a_n）$=$（-1，b_1，b_2，…，b_n）

由唯一性知不可能$\Rightarrow y-x\geqslant 3$

由唯一性知S的元素恰 3^n 個且知$\pm$（$1+3+3^2+\cdots+3^n$）$\notin S$ $\pm$（$3+3^2+\cdots+3^n$）$=\pm 3$（$1+3+\cdots+3^{n-1}$）$\in S$，$0\in S$ -3（$1+3+\cdots+3^{n-1}$）至 3（$1+3+\cdots+3^{n-1}$）之中 3 的倍數共 3^n　故$S=\{\ 3x\mid x\in z，|x|\leqslant 1+3+\cdots+3^{n-1}\}$由$0\in S$及相鄰二元素之差$\geqslant 3$得

故m_1，m_2，…，m_n均 3 的倍數（$\because m_1$，m_2，…，$m_n\in S$）

$\therefore \frac{m_1}{3}$，$\frac{m_2}{3}$，…，$\frac{m_n}{3}$能稱 1 到 $1+3+\cdots+3^{n-1}$ 的任何重量

由歸納得$\frac{m_i}{3}=3^{i-1} \Rightarrow m_i=3^i$ 故此題得證 ＃

由上述的討論，我們知道$M=1+3+3^2+\cdots+3^n$ 的最少個分割是唯一的即 1，3，3^2，…，3^n 且表示法亦唯一有了$M=1+3+3^2+\cdots+3^n$ 特殊情況的分割（最少分割）下面討論最一般的情形。

【定理】 若$M=1+3+3^2+\cdots+3^n+\ell$，（$1\leq\ell<3^{n+1}$），則（$M$；1，3，$3^2$，…，$3^n$，$\ell$）爲$M$的一組最少分割。

【證明】 先證（M；1，3，3^2，…，3^n，ℓ）爲M的一組分割
若 $1\leqslant x\leqslant 1+3+3^2+\cdots+3^n$ 則由前面知可表爲
$a_0+a_1\cdot 3+\cdots+a_n\cdot 3^n$
若 $1+3+\cdots+3_n<x\leq 1+3+3^2+\cdots+3^n+\ell$
$\Rightarrow \quad x-\ell\leqslant 1+3+3^2+\cdots+3^n$
$\Rightarrow \quad x-\ell=a_0+a_1\cdot 3+\cdots+a_n 3^n$
$\Rightarrow \quad x=a_0+a_1\cdot 3+\cdots+a_n\cdot 3^n+\ell$
故（M；1，3，3^2，…，3^n，ℓ）爲一分割。
又由定理 2，可知 1，3，3^2，…，3^n，ℓ（$n+2$ 個）爲M的最少個分割。

因此我們已一般地證明了一質量M磅的東西，可找到一組最少個數的分割，使它能用來秤 1 到M間所有整數磅重的物體。（全文完 1986;5.1）

歷屆Fields Medals 得主

1936	Lars V. Ahlfors
	Jesse Dougles
1950	Atle Selberg
	Laurent Schwartz
1954	小平邦彥(Kunihiko Kodaira)
	Jean-Pierre Serre
1958	Kaus Roth
	Rene′ Thom
1962	Lars Hormander
	John Milnor
1966	Michael Atiyah
	Paul J. Cohen
	Alexander Grothendieck
	Stephen Smale
1970	Alan Baker
	廣中平佑(Heisuke Hironaka)
	Sergei Novikov
	John G. Thompson
1974	Enrico Bombieri
	David Mumford
1978	Pierre Deligne
	Charles Fefferman
	Gregori Aleksandrovitch Margulis
	Daniel Quillen
1982	Alain Connes
	William P. Thurston

丘成桐（ Shing-Tung Yau ）

至於 1986 年的得主，且看今年 8 月在美國Berkeley舉行的國際數學家會議（ I C M ）便知分曉！

塡塡看的答案

[1]1	[2]2	[3]1	■	[4]1	[5]3	[6]3	[7]1	■
[8]5	0	9	■	[9]7	0	6	3	[10]8
[11]4	2	4	[12]1	■	■	[13]1	4	4
■	■	[14]2	9	[15]7	[16]1	■	[17]2	1
■	[18]5	5	5	5	5	[19]5	5	■
[20]3	6	■	[21]1	0	9	8	■	■
[22]1	4	[23]5	■	■	[24]7	7	[25]7	[26]6
[27]6	2	0	[28]0	[29]3	■	[30]1	2	7
■	[31]1	0	2	4	■	[32]6	6	6

看圖識字的答案

1. Triangle inequality.
2. The inverse of a matrix.
3. Power series.
4. Telescoping series.
5. Subset.
6. Counterexample.
7. $\sqrt{\pi}$
8. A group of translations of the plane.
9. Orthogonal matrix.

6. 連續函數的週期點

指導老師：李恭晴
一　　丙：蘇淑眞

原著：Philip D. Straffin, JR., Periodic Points of Continuous Functions.
Mathematics Magazine, Vol.51, No.2, March, 1978, PP.99-105

設 $f : R \to R$ 是一個連續函數，對於 $n > 1$ 的數，以 f^n 表示 f 的 n 次迭代 $f^1(x) = f(x)$ 且 $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$。假若 $f^k(x) = x$ 且對所有 $0 < i < k$，$f^i(x) \neq x$，則稱數 x 爲函數 f 一個週期 k 的點。假設連續函數 f 含週期 k 的點，那也必定含有其它週期 $\ell \neq k$ 的點嗎？答案似乎很顯然是否定的：爲什麼週期 ℓ 與週期 k 的點之間應該有所關連呢？然而，經過一番思考將顯示出沿著這些線索至少會產生一些結果。

例如，若連續出數 f 含一週期 $k > 1$ 的點 a，則同時必定也含有一個週期1 的固定點，爲了解這一點，假設 $f(a) > a$ 且考慮 a，$f(a)$，$f^2(a)$，$f^3(a)$，… $f^{k-1}(a)$，$f^k(a) = a$ 的序列，則在此序列中必定有一點 $b = f^i(a)$ 使得 $f(b) < b$，否則此序列將不斷增加而不會返回到 a。但是，由中間值定理（應用到 $f(x) - x$）知道必定在 a 與 b 之間存在一數 c 使得 $f(c) = c$。用一個對稱的論點可證明 $f(a) < a$ 的情形，因此我們可以知道：

對於所有的 k，週期＝週期 1

在 1975 年，Li 和 Yorke〔2〕對於這個問題提出一個驚人的定理：<u>假若連續函數 $f : R \to R$ 含週期 3 的點，則必定含任意週期的點。</u>換言之：

對於所有的 ℓ，週期 3 ⇒ 週期 ℓ

顯然一個含任意週期之點的函數其週期行為是非常複雜的，事實上，可以考慮能夠利用這種函數模擬物理和生物系統的週期行為，Li 和Yorke稱這種行為作混沌現象（ chaos ），而且他們文章的題目就叫做“週期 3 蘊含混沌現象”（Period Three Implies Chaos）。Li和 Yorke 也舉出一個反例來證明週期 5 不能蘊含週期 3 。

本文的目的在於討論利用週期 k 的點推演到其他週期點的存在之一般技巧。為了能夠推廣 Li 和 Yorke 所提出的結果，我們首先製造了一個適當的「指向圖形」（ directed graph ），在第二段中，證明連續函數 f 若含週期 k 的點，k 為奇數且 k 大於 1 ，則 f 必含週期 $\ell \geq k-1$ 的點。換言之，

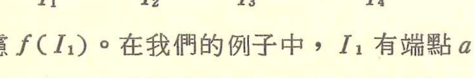
對所有的奇數 $k>1$ 且所有的 $\ell \geq k-1$

週期 $k \Rightarrow$ 週期 ℓ

1975 年時的 Li 和 Yorke ，及作者以本文的前身發表演講時並不知道俄國數學家 A.N.Sharkovsky 在 1964 年已經回答週期 k 蘊含週期 ℓ 的一般性問題了。在第三段中我們列出 Sharkovsky 的定理和說明如何利用指向圖形的方法來替他的結果作部份的證明。最後，在第四段，我們討論在族群生態學（ population ecology ）最近的研究中與前三段內容的關係。

1. 構製週期點有向圖

考慮含週期 k 與 x 的連續函數 f ，在 x 和其在 f 下之迭代像之間，令 a 是最小的數。從 a 出發，a 的迭代像沿著實線被展列在 a 的右方，且決定了 $k-1$ 個有限閉區間。從左到右，稱這些區間為 I_1，I_2，⋯ I_{k-1}。例如在圖 1 中的函數含一週期 5 的點，且產生這些區間：



現在考慮 $f(I_1)$。在我們的例子中，I_1 有端點 a 和 $f^3(a)$，會被映到 $f(a)$ 和 $f^4(a)$。因此由中間值定理，$f(I_1)$ 必定包含 $f(a)$ 含 $f^4(a)$之間的所有點。換言之，$f(I_1) \supset I_3 \cup I_4$。同樣地，我們得到了 $f(I_2) \supset I_4$，$f(I_3) \supset I_2 \cup I_3$，及 $f(I_4) \supset I_1$。

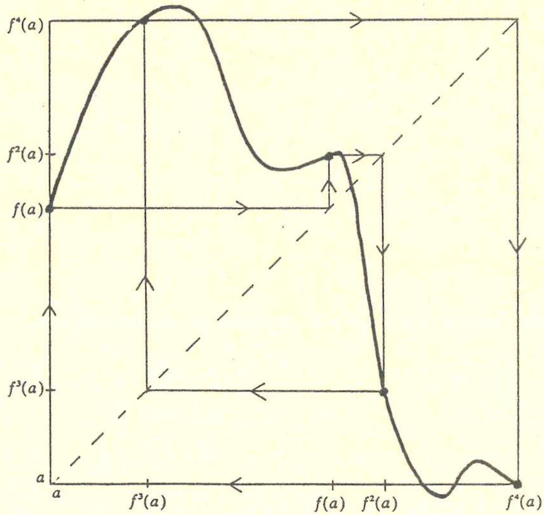


圖 1 ：含一週期 5 點的函數

將這些資料加以組織的一個簡便方法就是利用指向圖形，通常簡稱爲有向圖（digraph）。標出這個有向圖的頂點 I_1，I_2，…，I_{k-1}，如果 $f(I_i) \supset I_j$，就描繪從 I_i 到 I_j 的有向弧。（對我們的例子，我們得到一個如圖 2 中的有向圖）。這個建構過程以週期點出發而以有向圖結束是非常一般的：對於所有的 K，這適用於任何含週期 K 點的連續函數 f 。我們將稱這樣造出來的一個有向圖爲 K－週期點有向圖（K-period point digraph ）。有趣的是，我們可以從有向圖中得到關於 f 必須含有其他週期點的訊息。

定理 A：假若在對於 f 的一個 K－週期點有向圖中，含有一個長 ℓ 的「非重複」廻路（non-repetitive cycle），則 f 必定有一週期 ℓ 的點。

我們所謂的廻路，是允許使用同一個頂點或邊的；而「非重複廻路」乃僅是指它不是由一個較小的廻路完全繞了好幾次所構成的。在圖 2 的有向圖中，$I_1 I_3 I_2 I_4 I_1 I_3 I_2 I_4 I_1$ 是長度 8 的非重複週期。

定理 A 的證明是模仿 Li 和 Yorke 的證明而得的，它用到分析課程中兩個標準的引理：

引理 1 ：假設 I 和 J 是閉區間，f 爲連續函數，且 $J \subset f(I)$，則有一個閉

區間 $Q \subset I$ 使得 $f(Q)=J$。

引理 2：假設 I 是一個閉區間，f 是連續函數，且 $I \subset f(I)$，則 f 在 I 中有一個固定點。

為了證明上面的定理，假定我們給定一個「非重複」的閉區間序列 I^0，I^1，…，$I^l=I^0$（上標只表示序列中的位置）使得 $f(I^i) \supset I^{i+1}$。我們希望證明 f 含週期 ℓ 的點。考慮這個圖：

$$
\begin{array}{ccc}
I^0 & \xrightarrow{f} & f(I^0) \\
 & & \cup \\
 & & I^1
\end{array}
$$

（在這個以及後面的圖形中之箭頭表示一個「映成」函數）。由引理 1，我們可以找到閉區間 Q_1 加入這個圖中：

$$
\begin{array}{ccc}
I^0 & \xrightarrow{f} & f(I^0) \\
\cup & & \cup \\
Q_1 & \longrightarrow & I^1
\end{array}
$$

事實上，重複引用引理 1，我們可以造出下面的圖：

$$
\begin{array}{lllll}
I^0 \xrightarrow{f} f(I^0) & & & & \\
\cup \qquad\quad \cup & & & & \\
Q_1 \longrightarrow I^1 \xrightarrow{f} f(I^1) & & & & \\
\cup & & & & \\
Q_2 \longrightarrow & I^2 \longrightarrow f(I^2) & & & \\
\cup & \qquad\qquad \cup & & & \\
\cdot & & & & \\
\cdot & & & & \\
\cdot & & & & \\
\cup & & & & \\
Q_{l-1} \xrightarrow{\qquad f^{l-1} \qquad} & & I^{l-1} \xrightarrow{f} f(I^{l-1}) & & \\
\cup & & \qquad\qquad\quad \cup & & \\
Q_l \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad} & & I^l = I^0 & &
\end{array}
$$

現在來看看左邊那一行及底列，我們發現 $Q_l \subset I^0 = f^l(Q_l)$。因此，由引理 2，$f^l$ 在 Q_l 內有一個固定點 x。由於區間序列是非重複的，故可知 x 的

確爲 f 一個週期 ℓ 的點（而不是週期小於 ℓ 的點）。

2.分析週期點的有向圖

對 $k=3$，有兩種週期 3 點的可能排列：

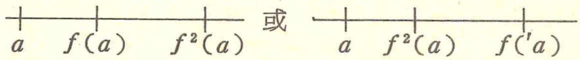


圖 3 說明了這些排列對應相同的有向圖；我們稱此爲 Li-Yorke 有向圖。因爲很明顯地，它含有任意長度的非重複廻路，我們應用定理 A 可以重新得到 Li-Yorke 的定理。

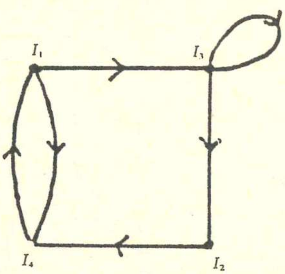
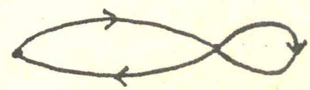


圖 1 中那個函數的週期點有向圖

圖 2



Li-Yorke 有向圖

圖 3

對 $k=5$，有 12 種可能的有向圖，都呈現在圖 4 中。除了Ⅲ和Ⅹ之外，都包含了一個像 Li-Yorke 有向圖的子圖。也因而對應著包含所有週期點的函數。你可以檢查Ⅲ亦含所有長度的非重複廻路。我們的第一個例子，Ⅹ，含有除了 3 之外所有長度的廻路，它對應到 Li 和 Yorke 爲週期 5 不能蘊含週期 3 所舉的反例。無論如何，我們的結論是：

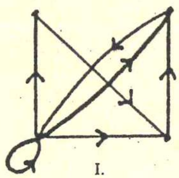
對所有 $\ell \neq 3$，週期 5 $\Rightarrow$ 週期 ℓ

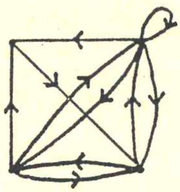
一般而言，K－週期點有向圖的數量隨著 k 階乘地增加，因此窮舉的分析方法很快地變成無法達到的，然而我們能使用歸納的技巧來證明一個一般的結果。

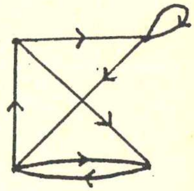
定理 B：假若連續函數 f：$\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ 含一奇週期 $k>1$ 的點，則它必定含所有

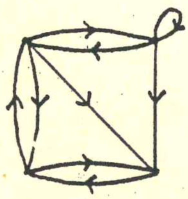
週期大於或等於 $k-1$ 的週期點。

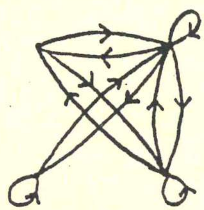
證明：我們首先證明對於所有 $k>1$，k－週期點有向圖中有長度 k 的廻路。爲此先回憶第一段的記號，令 $I^0=I_1$，其中有一端點 a。對於 $n\geq 1$，定義 I^n 爲區間 I_i，它有一端點 $f^n(a)$，且包含在 $f(I^{n-1})$ 中。這種造法給予 $I^k=I^0$，所以我們得到一個長度 k 的廻路。（例如，在第一段的例子

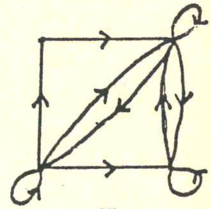

I.

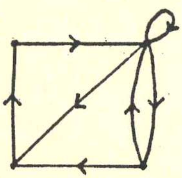

II.

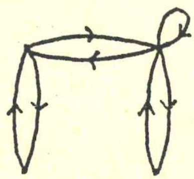

III.

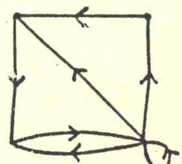

IV.

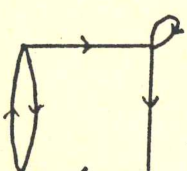

V.

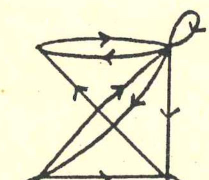

VI.

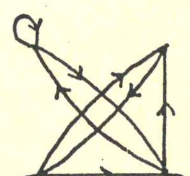

VII.


VIII.


IX.


X.


XI.


XII.

，I'將是有一端點 $f(a)$ 且被包含在 $f(I^0)=f(I_1)$的區間，這是 I_3。你可以檢查出結構中的 $I_1I_3I_3I_2I_4I_1$ 爲一長度 5 的廻路）。由於 k－週期點有向圖只有 $k-1$ 個頂點，因此某些頂點必定重複出現在這 k 廻路內，在這些頂點，k－廻路被分解成兩個較小長度的廻路。（例如，$I_1I_3I_3I_2I_4I_1$ 分解成 4－廻路 $I_1I_3I_2I_4I_1$ 及在 I_3 的閉圈（loop），因爲重複的區間只有二個端點，其在原有的 k 廻路內只能出現兩次，因此，在每個較小的廻路中，只能出現一次，且這些較小廻路都必定是非重複的。最後，當 k 爲奇數時，其中一個較小的廻路必定是奇長度的。

我們現在就可以對奇數 $k>1$ 用歸納法乘證明這個定理。我們已證得了 $k=3$ 或 $k=5$的結果。假設定理對 1 和 k 之間的所有奇數爲眞，若 f 含一週期 k 的點，則我們可以知道它的週期點有向圖含一長度 k 的廻路，且此一廻路能分解成兩個較小的廻路，其中一個是奇長度而且是非重複的。假若它的長度不是 1，我們可以由定理 A 及歸納假設得證；若其長度爲 1（亦即爲一閉圈），則視我們的需要而重複繞這個圈後，再完成剩下的 $k-1$ 廻路，這樣就能得到長度大於或等於 $k-1$ 的所有非重複廻路，再由定理 A 馬上可以得到欲求的結果。

3. Sharkovsky's 定理

在 1964 年，A.N.Sharkovsky 完整的回答了何時週期 k 蘊含週期 ℓ 的問題，他的作品〔7〕被刊登在俄國的 Ukranian Journal of Mathematics，且尚未被翻譯。他的結果是重要的，而且在西方理應獲得比當時更多的重視。

定理：對所有含週期 k 點的連續函數 $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$，它必定也含週期 ℓ 的點之充要條件是，當將所有的正整數按照下面的次序排列後，k 出現在 ℓ 之前。

$$3, 5, 7, 9, \cdots 3\cdot2, 5\cdot2, \cdots, 3\cdot2^2, 5\cdot2^2, \cdots, \cdots, \cdots, 2^3, 2^2, 2, 1$$

因此，我們所觀察到，對所有的 k，週期 k 蘊含週期，只是對應到 1 是 Sharkovsky 之次序的尾端，而 Li 和 Yorke 的結果則對應到 3 是其開端。定理 B 也顯然可由 Sharkovsky's定理得到，你也能得到其它有趣的結果，例

如連續函數 $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ 含一週期不等於 2 的冪方之點，必定含有無限個週期點。

Sharkovsky's 定理可以由三個基本結果而得：

(1)週期 $k \Rightarrow$ 週期 2，對所有 $k > 1$。

(2)任何大於 1 之奇週期⇒所有較大的奇週期。

(3)任何大於 1 的奇週期⇒所有偶週期。

或許你也能看出，正如 Sharkovsky 在他的文章中所展示的，如何透過對 f^{2^n} 的仔細考慮，結何(1)、(2)、(3)以得到一般的結果。在這三個基本的結果中，(1)是可以相當容易地直接證明的，而(2)和(3)卻並不明顯，Sharkovsky 對它們的證明是冗長且相當複雜的。他造了很多的點列及八個複雜的圖形，需要與大部份的希臘字母保持接觸。Sharkovsky 定理是數學上普遍現象的一個例子——高雅的結果起初的證明是非常不高雅的。

定理B具體地表現了(2)和(3)之大部分，幾乎可以提供對 Sharkovsky's 定理一個較高雅的證明，要完成 Sharkovsky's 定理的證明，我們只須證明任何奇週期 $k > 1$ 蘊含所有 2 和 $k-1$ 之間的偶週期，讀者能夠使用 k－週期點有向圖的方法來填補其間隙嗎？(*)

最後，我們要提出可以使用完全不同的技巧去處理這些問題。例如，John Guckenheimer〔1〕最近使用符號動力學（Symbolic dynamics）對某一類函數已成功地證明了 Sharkovsky's 定理。

4. 族群生態學

最近對連續函數週期點的性質所熱衷的「純數學」問題是由生態學家所引起的，這大概是他們受了氣象學家早期的工作所刺激的，可以在〔2〕，〔3〕，〔4〕及〔5〕中得到參考資料。這個生態學的問題是去描述各段時間的行爲，譬如：有一種昆蟲個別世代（discrete generations）的族群，遵守著下面這個方程式：

$$x_{t+1} = r x_t (1 - x_t)$$

其中 x_t 是第 t 代族群的大小，r 是其「本性的增加速度」（intrinsic rats of increase ），而（ $1-x_t$ ）是受環境所產生的限制因子。在此模型之下，函數 $f(x)=rx(1-x)$ 的週期點就對應到昆蟲族群的循環現象。

這個函數的週期點會隨著 r 的增加而慢慢地出現，當 $r>3.00$ 時，就有週期 2 的點，$r\approx 3.45$ 時週期 4 的點就來了，繼之而週期 8，16 等等的點。而當 $r\approx 3.57$ 時，所有週期形如 2^n 的點都出現了，而且其他週期的點也開始誕生，$r\approx 3.68$ 產生了第一個奇週期點，終於在 $r\approx 3.83$ 時，週期 3 的點也出來了。你會發現，當 r 從 3.00 上升至 3.83 時，各種不同週期的點都按 Sharkovsky 次序的反方向逐漸出現。雖然到目前爲止，還沒有人對於這件事提出了具體證明，但是，如果事實果眞如此，我們就獲得了一族反例，它們較 Sharkovsky 原先在〔7〕中所舉的簡單太多了，這些反例告訴我們 Sharkovsky 的次序是嚴格（ strict ）的：再也沒有其他的蘊含關係了。以生態學的看法來說，在 $r=3.57$ 時，產生無數個週期點，以及在 $r=3.83$ 時，出現所有的週期點，是表示當 r 有這麼大時，週期的行爲歸於混沌。最近在一篇優秀的文章〔6〕中作者利用生態學的觀點來討論這些結果。

參考資料：

〔1〕John Guckenheimer, On the bifurcation of maps of the interval, preprint.

〔2〕T.-Y. Li and James Yorke, Period three implies chaos, Amer. Math. Monthly, 82 (1975) 985～992.

〔3〕E.N. Lorenz, The problem of deducing the climate from the governing equations, Tellus, 16 (1964) 1～11.

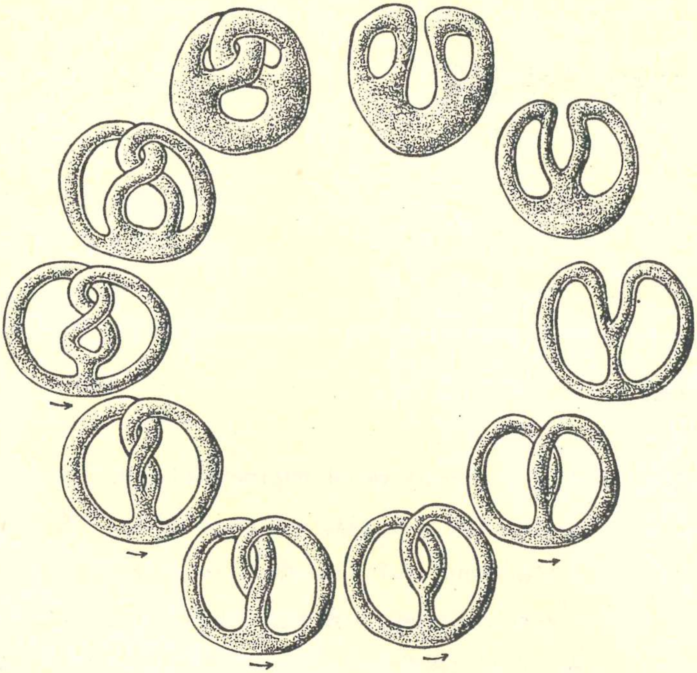
〔4〕Robert May, Biological populations with non-overlapping generations: stable points, stable cycles, and chaos, Science, 186 (1974) 645～647.

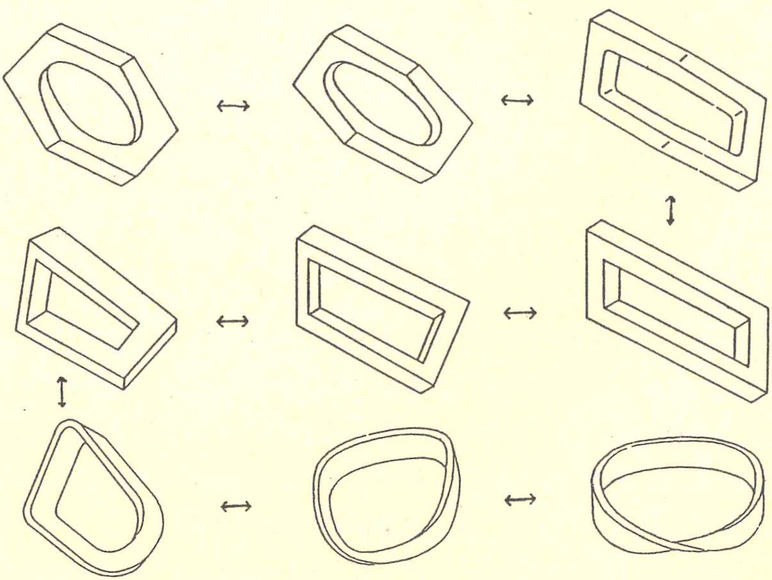
〔5〕——, Biological populations obeying difference equations: stable points, stable cycles, and chaos, J. Theoret Biol., 51 (1975) 511～524.

〔6〕——, Simple mathematical modets with very complicated dynamics, Nature, 261 (1976) 459～467.

〔7〕A.N. Sharkovsky, Co-existence of thy cycles of a continuous mapping of the line into itself, Ukranian Math. J., 16(1964) 61～71 (Russian).

(*) 譯者註: 請參考C.W. Ho, C. Morris
A Graph Theoretic Proof of Sharkovsky's Theorem on the Perivclic Points of Continus Functions. Pacific Journal of Mathematics Vol.96, No.2, 1989, PP. 361～370.





7.尤拉和無窮級數

指導老師：王建都
譯　　者：nth廢人

前　　言：

本篇文章乃是從Mathematics Magazine Vol. 56，No.5，November 1983中之Euler and Infinite Series（P307）翻譯過來的。作者即爲衆所週知“Mathemutical Thought from Ancient to Modern Times”之著者Morris Kline。譯者即是不爲人所知的nth廢人。

本文並不很難，只要你知道如何證明1＋1＝2就可以看得懂，不過我們可以發現，十八世紀的數學在這一方面似乎還不怎麼高段，也沒有要求很嚴格的證明，書寫至此，眞恨不得能回到十八世紀，搞不好還能弄點東西，名垂千古，唉！正是，恨不相逢未嫁時。（老編贊曰:不會用句就少亂用!!）。

在一個數學理論建造之前，總要有許多烈士“拋頭顱灑熱血、前仆後繼”經過了無數的挫折及失敗，方能有所成就，因此，當您題目做不出來時（考試的時候可不行），千萬別氣餒，想想數學界的諸位高手、前輩，他們也曾出了不少錯，自己的一點小挫折，那就算不得什麼了。

本廢人在此鄭重提醒讀者諸君，本文內有些作法乃是“錯誤示範”，“希望電視機前的小朋友千萬不要學習”，有興趣的讀者，當可深入研究。本篇倉促成軍，再加上所學不多，力有不逮，文中恐有謬誤，尙祈四方先進不吝賜教，更望讀者老爺您海涵，最後以Laplace的話作爲結尾!!

博學的尤拉，多能的尤拉，他是我們大家的楷模。

————拉帕拉斯（P. S. Laplace）

數學史的重要價值是可以從現在數學一些分支的漸次發展中來加以說明的。即使是去研究一些由最偉大的人們所做出來之"錯誤步驟"也是極度吸引人，並且有益的。在這種方式中，顯示出他們試著去有系統的陳述正確概念及證明，卻經常沒能達成目的，儘管如此，他們已經在成功的邊緣了。他們對自己的工作（這些我們現在可以佔著後見之明的優點來評估）所做的努力，幾乎經常是令人難以相信的。

這種歷史的特徵在尤拉（Leonhard Euler 1707-1783）的工作中尤其顯著，尤拉是十八世紀數學界的中心人物，他應該和阿基米德（Archimedes B.C. 287-212）、牛頓（Isaac Newton 1642-1727）、高斯（Carl Friedrich Gauss 1777-1855）等人並列。記載中尤拉對無窮級數所做的研究提供了一個有關這種奮鬥（成功及失敗）的基本例子，而這正是偉大數學家創造性生活的主要部分。本文所討論的一些例子說明尤拉如何克服他所遭遇到的困難。

尤拉在 1730 年左右第一次從事無窮級數的研究，當時，渥里斯（John Wallis 1616-1703）、牛頓、萊布尼茲（Gottfried Leibniz 1647-1716）、泰勒（Brook Taylor 1685-1731）及麥克勞林（Colin Maclaurin 1698-1746）已經用級數來計算常數 e 和 π 的數值，並且也用級數來表示一些函數，以對那些原來形式無法積分的函數做積分①。由此，我們可以理解尤拉會來從事這方面的課題了。尤拉在這一方面的研究和他先前的作品一樣，經常是為了特別的目的而安排的，又缺乏嚴密性而且還有錯誤，但是不管這一些，他的計算能力顯示出了一種詭異的能力，這種能力使得他能夠判斷什麼時候他的方法能引導到正確的結果。本文將不遵照尤拉在級數研究上以及他一生所做的貢獻之正確的歷史順序。

為了欣賞尤拉在級數研究上的第一個例子，我們必須先有以下的了解。

一個引起了無限爭論的級數：

$$1-1+1-1+\cdots \tag{1}$$

當它被寫成了如下的級數時

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

很明顯它的和為0，

$$1-(1-1)-(1-1)-\cdots$$

似乎一樣明顯地它的和應該為1，但是還有另外一個似乎也很合理的合。假如s表示(1)的和，那麼

$$s=1-(1-1+1-1+\cdots)=1-s$$

所以$s=\frac{1}{2}$。這個值也可以用求公比$=-1$之幾何級數之和而獲得。

葛蘭地(Guido Grandi 1671-1742)在他的小册子Quadratura circula et hyperbolae per infinitas hyperbolas geometrice exhibita 中(1703年)，用幾何級數的一種變換，二項式展開：

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$$

其中$x=1$而得到了第三個結果(他也主張，由於這個和為0及1，他便證明了這世界乃是無中生有。)萊布尼玆在一封給華爾夫(Christian Wolf 1678-1754)中(發表在Acta eruditorum 1713)，他同意葛蘭地的結果，但認為它可能可以不用訴諸於函數$\frac{1}{1+x}$就可以獲得了。他辯解由於連續的部分和是1，0，1，0，…，其中1與0的機會是均等的，所以必須取其算術平均數$\frac{1}{2}$為其和。這種說法為James、John、Daniel Berrcoulli(白努利家族)等人所接受。萊布尼玆承認他的說法之形而上學味道比數學味道更濃，但他又說：在數學裏，形上的眞理比一般的眞理還多。

尤拉參與了這場辯論。為了獲得(1)的和，他採用了和葛蘭地類似的討論法，在展開式中，令$x=-1$：

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots \tag{1'}$$

並且得到了

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+\cdots$$

在尤拉研究級數的早期，他用函數的表示法來求其它發散級數的和。例如，他在以下的展開式中，取 $x=-1$：

$$\frac{1}{(1+x)^2}=(1+x)^{-2}=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots$$

並且得到了：

$$\infty=1+2+3+\cdots \tag{2}$$

對尤拉而言，這似乎是可以理解的；他視∞爲一個數。那時候，他考慮 $\frac{1}{1-x}$ 的幾何級數（或二項級數），其中 $x=2$ 的情形，並且得到了：

$$-1=1+2+4+8+\cdots \tag{3}$$

由於級數(3)的項比(2)的對應項來的大，因此尤拉斷言 -1 比∞還大。當時尤拉一些同時期的人認爲比∞大的負數和那些比 0 小的數是不同的。但是尤拉反對，他並且主張∞正如同 0 一樣將正、負數分開。

在較 1734/35〔 7 〕的一篇論文中，尤拉開始討論如下的級數：

$$y=\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots② \tag{4}$$

並將它從新寫成：

$$1-\frac{x}{y}+\frac{x^3}{3!y}-\frac{x^5}{5!y}-\cdots=0 \tag{5}$$

那時候他將(5)式的左邊視爲一個無窮的多項式，並且討論如下（這個方法乃基於以下的事實：對多項式 $P(x)=1-a_1x+a_2x^2-a_3x^3+\cdots+(-1)^k\cdot a_kx^k$ 而言，其根的倒數和爲 a_1，其根的倒數平方和爲 $a_1^2-2a_2\cdots$ 等等）③。令 A，B，$C\cdots$ 爲(5)的解，於是多項式可被分解成一個無限乘積：

$$1-\frac{x}{y}+\frac{x^3}{3!y}-\frac{x^5}{5!y}+\cdots=\left(1-\frac{x}{A}\right)\left(1-\frac{x}{B}\right)\left(1-\frac{x}{C}\right)\cdots$$

假設使得 $\sin x=y$ 之 x 的最小正數爲 A，那其它的解 B，$C\cdots$ 爲 $\pi-A$，

$2\pi+A$，$3\pi-A$，$\cdots-\pi-A$，$-2\pi+A$，$-3\pi-A$，…因此

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{\pi-A}+\frac{1}{2\pi+A}+\cdots-\frac{1}{\pi+A}-\frac{1}{2\pi-A}-\frac{1}{3\pi+A}-\cdots$$

$$=\frac{1}{y} \tag{6}$$

$$\frac{1}{A^2}+\frac{1}{(\pi-A)^2}+\frac{1}{(2\pi+A)^2}+\cdots+\frac{1}{(\pi+A)^2}$$

$$+\frac{1}{(2\pi+A)^2}+\frac{1}{(3\pi+A)^2}+\cdots=\frac{1}{y^2} \tag{7}$$

等等。假如在 $e.q.$ (4)、(5)中，取 $y=1$，則 $A=\frac{\pi}{2}$，因此(6)變為

$$\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)=1$$

或

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4} \tag{8}$$

並且(7)變成

$$\frac{8}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\cdots\right)=1$$

或

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8} \tag{9}$$

在同樣的方法下，可以求得其它的級數和：

$$\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\cdots=\frac{\pi^3}{32}$$

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{96}$$

$$\frac{1}{1^5}-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\cdots=\frac{5\pi^5}{1536}$$

$$\frac{1}{1^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\cdots=\frac{\pi^6}{960}$$

等等。從這些級數他歸納出其它的和。例如：由

$$\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right)-\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right)$$

我們可以利用(9)而獲得

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2/8}{3/4}=\frac{\pi^2}{6}$$

並且用相似的方法，得到了

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}$$

及其它的和。R.Ayoub〔 1 〕曾經討論了尤拉在(4)式中計算如此和的方法。W.F.Eberlein〔 3 〕也研究尤拉對正弦（ sine ）函數之無限乘積的方法，及H.H.Goldstine（在〔 9 ， 3.1 ， 3.2 〕）指出尤拉對像$\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$的函數之展開，以及這些展開在計算如(9)式中和的用法。

尤拉在對求正整數冪方的倒數和之企圖並非完全沒有益處。在另外一份論文的同樣範疇〔 4 〕裏，尤拉造了一個有點詭異並且和微積分有關的用法，來求得調和級數之和與對數之間的差，這個差有效地利用了調和級數的正整數乘冪。令：

$$s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

假若我們考慮 $n\to\infty$，那 1 就可以視爲無限小，並且我們可以寫 $ds=1/n=1/n\ dn$。兩邊同時積分產生了

$$s = \log n + c$$

爲了去找 c ，我們注意到

$$\frac{1}{x} = \log\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} - \frac{1}{5x^5} + \cdots \text{④}$$

依次令 $x = 1$，2，3，…（$n-1$），並將這（$n-1$）個 $e.q.$ 相加⑤，得到

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

$$=\log n+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}\right.$$

$$-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^3}\right.$$

$$+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^4}\right.$$

....

當 $n\to\infty$，c 的極限值即爲今日稱之爲尤拉常數（Euler's constant）的 γ ⑥。

在 1740 年的一篇論文裏〔6〕，尤拉獲致了他的傑作之一，也就是：

$$s_{2n} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{2n}} = (-1)^{n-1}\frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}B_{2n},$$

其中 B_{2n} 是白努利數（Bernoulli numbers）（詳述於下）。尤拉稍後在他的 Institutiones calculi differentialis（1755）〔8〕中眞正和白努利數建立了連絡。他也在 1740 年的論文裏爲最初幾個奇數 n 計算過

$\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}(1/\nu^n)$。

在 Ars Conjectandi（1713 年）裏，詹姆士·白努利（James Bernoulli）討論機率論時引進了現在被廣泛使用的白努利數。白努利爲連續整數的正整數乘冪之和求得了公式，但並未加以證明：

$$\sum_{k=1}^{n} k^c = \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^c + \frac{c}{2} B_2 n^{c-1}$$

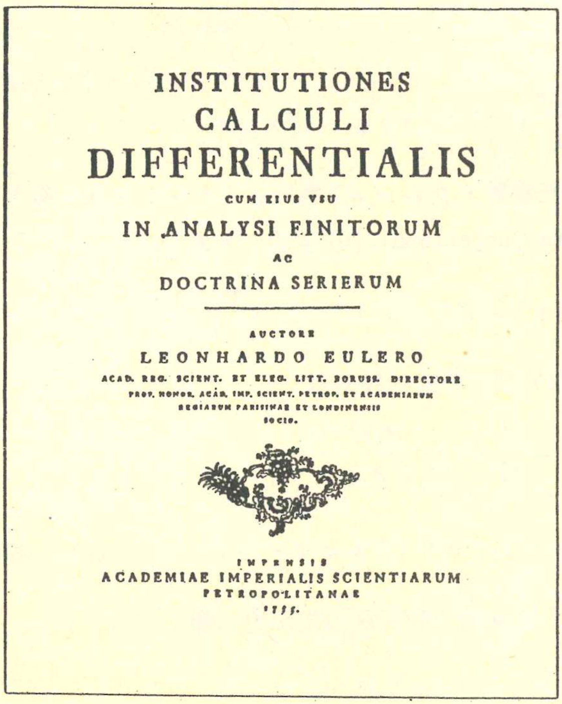
$$+ \frac{c(c-1)(c-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} B_4 n^{c-3}$$

$$+ \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} B_6 n^{c-5} + \cdots \tag{10}$$

這個級數的末項爲 n 之最後正指數項，其中的 B's …稱爲白努利數：

$$B_2 = \frac{1}{6}，B_4 = -\frac{1}{30}，B_6 = \frac{1}{42}，B_8 = -\frac{1}{30}，B_{10} = \frac{5}{66} \cdots$$

白努利也提供了一個遞迴關係式，使我們能計算這些係數。


INSTITUTIONES
CALCULI
DIFFERENTIALIS
CUM EIUS VSU
IN ANALYSI FINITORUM
AC
DOCTRINA SERIERUM

AUCTORE
LEONHARDO EULERO
ACAD. REG. SCIENT. ET ELEG. LITT. BORUSS. DIRECTORE
PROF. HONOR. ACAD. IMP. SCIENT. PETROP. ET ACADEMIARUM
REGIARUM PARISINAE ET LONDINENSIS
SOCIO.

IMPENSIS
ACADEMIAE IMPERIALIS SCIENTIARUM
PETROPOLITANAE
1755.

尤拉另一個有名的結果——尤拉一麥克勞林公式（Euler-Maclaurin summation formula）⑦——為白努利公式⑽的推廣。設$f(x)$為實變數實值函數且在區間〔0，n〕之間具有（$2k+1$）階之連續導函數。則（用現代的符號）尤拉公式為：

$$\sum_{i=0}^{n} f(i)=\int_0^n f(x)\,dx+\frac{1}{2}[f(n)+f(0)]$$
$$+\frac{B_2}{2!}[f'(n)-f'(0)]$$
$$+\frac{B_4}{4!}[f'''(n)-f'''(0)]+\cdots$$
$$+\frac{B_{2k}}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(n)-f^{(2k-1)}(0)]$$
$$+R_k \tag{11}$$

其中

$$R_k=\int_0^n f^{(2k+1)}(x)\,p_{2k+1}(x)\,dx$$

此處的n及k為正整數，$p_{2k+1}(x)$為第（$2k+1$）個白努利多項式（它也在白努利的Ars Conjectandi中出現過）。當$x\in[0, 1]$它能被表為

$$p_{2k+1}(x)=2(-1)^{k+1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi mx)}{(2m\pi)^{2k+1}}$$

白努利數B_i和白努利多項式的關係為：

$$p_k(x)=\frac{x^k}{k!}+\frac{B_1x^{k-1}}{1!(k-1)!}+\frac{B_2x^{k-2}}{2!(k-2)!}+\cdots\frac{B_k}{k!}$$

其中$B_1=-\frac{1}{2}$，$B_{2k+1}=0$（$\forall k=1, 2, \cdots$）。現在，我們用以定義白努利數的關係式通常為尤拉稍後所提出的，即：

$$t(e^t-1)^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty}B_i\frac{t^i}{i!}$$

在微積分中，我們對於尤拉在⑾式中對有限級數的推導過程感到興趣。他首先注意到假如 $s(n)=\sum_{i=0}^{n} f(i)$，則

$$f(n)=s(n)-s(n-1)=-[s(n-1)-s(n)]$$

$$=\frac{ds}{dn}-\frac{1}{2!}\frac{d^2 s}{dn^2}+\frac{1}{3!}\frac{d^3 s}{dn^3}\cdots ⑧ \qquad (12)$$

因此（求出 ds/dn 之後，積分）

$$s=\int f dn+\frac{1}{2!}\frac{ds}{dn}-\frac{1}{3!}\frac{d^2 s}{dn^2}+\cdots \qquad (13)$$

爲了用 f 表示其和 s，我們用到了遞迴。反覆微分⑿式獲致了：

$$\frac{df}{dn}=\frac{d^2 s}{dn^2}-\frac{1}{2!}\frac{d^3 s}{dn^3}+\frac{1}{3!}\frac{d^4 s}{dn^4}-\cdots, \therefore \frac{d^2 s}{dn^2}=\frac{df}{dn}+\frac{1}{2!}\frac{d^3 s}{dn^3}-\cdots$$

$$\frac{d^2 f}{dn^2}=\frac{d^3 s}{dn^3}-\frac{1}{2!}\frac{d^4 s}{dn^4}+\frac{1}{3!}\frac{d^5 s}{dn^5}-\cdots, \therefore \frac{d^3 s}{dn^3}=\frac{d^2 f}{dn^2}+\frac{1}{2!}\frac{d^4 s}{dn^4}-\cdots \qquad (14)$$

等等。將⒀⑨式中 ds/dn，$d^2 s/dn^2$，$d^3 s/dn^3$ 以⒁式替代，得到了：

$$s=\int f dn+\frac{1}{2!}\left[f+\frac{1}{2!}\left(\frac{df}{dn}+\frac{1}{2!}\left(\frac{d^2 f}{dn^2}+\cdots\right)\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3!}\left(\frac{d^2 f}{dn^2}+\cdots\right)\right]$$

$$-\frac{1}{3!}\left[\frac{df}{dn}+\frac{1}{2!}\left(\frac{d^2 f}{dn^2}+\cdots\right)+\cdots\right]$$

$$+\frac{1}{4!}\left(\frac{d^2 f}{dn^2}-\cdots\right)-\cdots$$

雖然它是很煩雜的，但是卻眞的顯示出 s 可以用這種形式來表達。尤拉寫下了：

$$s=\int f dn+\alpha f+\frac{\beta df}{dn}+\frac{\gamma d^2 f}{dn^2}+\frac{\delta d^3 f}{dn^3}+\cdots$$

並且將 s 及其導數代入⒀中獲得了 f，$\frac{df}{dn}$，$\frac{d^2f}{dn^2}$ 等係數的循環關係，最後得到了式子⑾。在〔9，3.3，3.4〕有一個對尤拉在尤拉一麥克勞林公式的推導過程之討論及一些它有趣的應用，在〔1，P 1074〕則有一個以現代的眼光對尤拉在這公式上之成就的總結。

假如在尤拉一麥克勞林公式⑾中，n 可以趨近於∞，那對大部分應用方面的 $f(x)$，這個無窮級數將會發散。儘管如此，在適度附加的假設下，餘式 R_k 將比第一個被省略的項還小，因此對這個級數以及這積分而言，彼此都是一個很好的近似，全靠何者計算較爲方便了。

除了尤拉，麥克勞林也獨力獲致了同樣的求和公式（Treatise on Fluxions 1742，P.672），但他用了一個比較可靠而且更接近於我們現在所使用的方法。第一個將餘項加入而且認眞處理的人是柏森（Siméon-Denis Poisson 1781-1840）。

尤拉也在他的 Institutions（1755）中介紹了一種級數變換，它至今仍爲我們所知且使用的〔12〕。給定一個級數 $\sum_{n=0}^{\infty} bn$，他改寫成爲 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$。然後經過一大票的代數運算，他證明了：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}} \tag{15}$$

其中 $\Delta^0 a_0=a_0$，$\Delta' a_0=a_1-a_0$，$\Delta^n a_0=\Delta^{n-1}a_1-\Delta^{n-1}a_0$

$$=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}a_i,$$

$$n\geqslant 2$$

他對⒂的推導過程如下。令 $a_n=(-1)^n b_n$，並引進了二個變數 x、y，其關係爲 $x=y/(1-y)=y+y^2+y^3+\cdots$

則 $$b_0x+b_1x^2+b_2x^3+\cdots$$
$$=a_0x-a_1x^2+a_2x^3-a_3x^4+\cdots$$

$$
\begin{aligned}
&= a_0 (y + y^2 + y^3 + \cdots) - a_1 (y^2 + 2y^3 + 3y^4 + 4y^5 + \cdots) \\
&\quad + a_2 (y^3 + 3y^4 + 6y^5 + 10y^6 + \cdots) \\
&\quad - a_3 (y^4 + 4y^5 + 10y^6 + 20y^7 + \cdots) + \cdots \\
&= a_0 y - (a_1 - a_0) y^2 + (a_2 - 2a_1 + a_0) y^3 - \cdots
\end{aligned}
$$

讓 $x = 1$，$y = \frac{1}{2}$，即得：

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} b_n &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots \\
&= \frac{a_0}{2} - \frac{\Delta a_0}{4} + \frac{\Delta^2 a_0}{8} - \cdots
\end{aligned}
$$

如同我們所需要的。

⒂式的轉換通常將收斂的級數轉變成另一個收斂更快的級數。然而，對於並不經常區分收斂及發散級數的尤拉而言，這種變換也常將發散級數轉化成收斂級數。例如；若將⒂應用到⑴：$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$，那由於 $a_0 = 1$，$\Delta^n a_0 = 0$，$\forall n > 1$ 則右式的和$=\frac{1}{2}$。同樣的，若將⒂式的轉化應用到了級數：

$$1 - 2 + 2^2 - 2^3 + 2^4 - \cdots,$$

則可得：

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n &= \frac{1}{2} (1) + \frac{1}{4} (-1) + \frac{1}{8} (1) \\
&\quad - \frac{1}{16} (-1) + \cdots = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

281

CAPUT I.

DE TRANSFORMATIONE SERIERUM.

1.

Cum nobis propositum sit vsum Calculi differentialis tam in vniuersa Analysi, quam in doctrina de seriebus ostendere; nonnulla subsidia ex Algebra communi, quae vulgo tractari non solent, hic erunt repetenda. Quae quamuis maximam partem iam in Introductione sumus complexi, tamen quaedam ibi sunt praetermissa, vel studio quod expediat ea tum demum explicari, quando necessitas id exigat, vel quia cuncta, quibus opus sit futurum, praeuideri non poterant. Huc pertinet transformatio serierum, cui hoc Caput destinauimus, qua quaeuis series in innumerabiles alias series transmutatur, quae omnes eandem habeant summam communem; ita vt, si seriei propositae summa sit cognita, reliquae series omnes simul summari queant. Hoc autem capite praemisso, eo vberius doctrinam serierum per calculum differentialem & integralem amplificare poterimus.

2. Considerabimus autem potissimum eiusmodi series, quarum singuli termini per potestates successiuas quantitatis cuiusdam indeterminatae sunt multiplicati; quoniam

Nn

290 CAPUT I.

IV. *Sit proposita haec series trigonalium numerorum.*

$S = 1 - 3 + 6 - 10 + 15 - 21 + \&c.$

Diff. 1 = 2, 3, 4, 5, 6, &c.

Diff. 2 = 1, 1, 1, 1, &c.

Hic ergo ob $a = 1$, $\Delta a = 2$, & $\Delta\Delta a = 1$; erit

$$S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{4} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{8}.$$

V. *Sit proposita series quadratorum:*

$S = 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + \&c.$

Diff. 1 = 3, 5, 7, 9, 11, &c.

Diff. 2 = 2, 2, 2, 2, &c.

Ob $a = 1$; $\Delta a = 3$; $\Delta\Delta a = 2$; erit $S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{2}{8} = 0.$

VI. *Sit proposita series biquadratorum:*

$S = 1 - 16 + 81 - 256 + 625 - 1296 + \&c.$

Diff. 1 = 15, 65, 175, 369, 671

Diff. 2 = 50, 110, 194, 302

Diff. 3 = 60, 84, 108

Diff. 4 = 24, 24

Erit ergo $S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{15}{4} + \tfrac{50}{8} - \tfrac{60}{16} + \tfrac{24}{32} = 0.$

10. Si series magis diuergant vti geometriae aliaeque similes, eae hoc modo statim in seriem magis conuergentem transmutantur, quae nisi adhuc satis conuergat, eodem modo in aliam magis conuergentem conuertetur.

I. Sit

尤拉在 Institutiones, Pars Posterio, Chap.I 中用很多的例子來證明他對級數的轉換。在這裏，尤拉對下列的級數“求和”（“ sum ”）：三角數所形成的交錯級數$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+2)/2 = 1/8$；平方數所成的交錯級數$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^2 = 0$以及四次方$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^4 = 0$。

則在右式的和$=\frac{1}{2}$。同樣的，若應用到級數

$$1-2+2^2-2^3+2^4\cdots,$$

⒂式的轉化獲得了

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^n=\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{4}(-1)+\frac{1}{8}(1)$$

$$-\frac{1}{16}(-1)+\cdots=\frac{1}{3}$$

在早先，尤拉用函數來導出級數，並且視這函數的值爲這級數的和，這個論點所得到的和上述的結果是一樣的。⑩

在 1754/55 年間，尤拉在一篇標爲“ On Divergent Series ”〔 5 〕的主要論文中，他研究了無窮級數的和，在該篇論文中，尤拉認識了收斂和發散級數之間的差異。關於前者，他說“對那些不斷地加項進去的級數而言，當這些項持續的遞減時，我們便可以隨心所欲的使這個級數趨近於一個定數，於是就稱這個級數收斂，而且這個定數就是它的和”。當級數的項不遞減甚且是遞增時，這級數就叫做發散。

對發散級數而言，尤拉說我們不應該用“和”（“ sum”）這個名詞，因爲它應用到了眞正的加法。當時尤拉陳述了一個一般的概念，這概念經由一個發散級數的明確值而解釋了他的意思。他指出一個發散級數乃是來自有限的代數式子，接著又說這個級數的值乃是級數所來自的代數式之值。尤拉更進一步的說：「當一個無窮級數是由某一個式子的拓展而獲得的時候，那即使是對那些使得這個級數發散的變數值而言，這個級數在數學上的使用仍然和原先的式子是一樣的」。他於 1755 年在 Institutiones 裏，重複了這個概念：

「因此，我們可以說，任何一個無窮級數，當它是由一個有限的式子之展開所展生的時候，則它的和即為這一個有限的式子。在這種意義下，無窮級數（$1-x+x^2-x^3+\cdots$）的和就是$1/(1+x)$，因為這個無窮級數是來自這個分式的展開（無論x用什麼值代入）。假如我們同意這種論調的話，當級數是收斂時，“和”這個字的新定義將和一般的意義相吻合，並且由於在舊有的意義之下，發散級數並沒有和，因此，這個術語將不會引起任何的不便。最後，依據這個定義，我們可以保持住發散級數的效用，並且保住他們的用法以免遭到反對者之攻許。」

我們可以相當確定的說，尤拉意圖將這個理論侷限在冪級數。

十八世紀其他的數學家也體認到了在我們現在所謂收斂及發散級數之間必須要有一個分別，雖然他們並不十分清楚應該有怎麼樣的區別。像所有的創始者一樣，當他們正在處理一個新的概念時，他們必須努力將迷霧掃清。當然，對於牛頓所提“級數不過是長的多項式，並且它屬於代數的範疇裏”，且為萊布尼玆、尤拉、拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange 1736-1813）等人所接受之級數的解釋，並不能對級數的研究提供一個嚴格的基礎。

十八世紀的研究工作中，有一個很顯著的特色，那就是數學信任符號比邏輯還更甚。由於無窮級數對變數x所有的值有相同的符號形式，因此，對於那些使得級數收斂或發的x值，似乎並沒有引起許多的注意。即使是數學家們認清了某些像$1+2+3+\cdots$的級數有無限的和，他們還是比較喜歡試著對“和”給予定義，而不去對求和的適用性提出質疑。當然，他們相當注意到一些證明的需要。我們看到了尤拉的確試著去證明他對發散級數的用法。但是這一點對完成嚴格證明的努力，並未使這個世紀的研究得到合理的說明，並且大多數的數學家都樂意去採取這種態度：不能夠糾正的，我們就必須忍受它。雖然如此，然而這些努力也是滿有意思的，因為它們顯示出了隨著時代的推進，“嚴格”標準的變換。

儘管我們只是輕輕一瞥一些尤拉的工作，不過絕大部分十八世紀偉大的數學家，對於無窮級這個主題所做的貢獻，可參閱〔13〕。我們可以很公正的說，在這個研究當中，形而上的味道凌駕了一切。由於瞭解了形而上操

縱的威力，數學家們有的無視於，有的延緩這些有關對他們方法之限制的深思熟慮，像收斂的重要性。他們的工作產生了一些有用的結果，並且實際上的支持使得他們感到滿足。雖然他們超過了他們所能證明的範圍，但是，他們在對待發散級數時，至少是很愼重的。無論如何，這些十八世紀的數學家對後來有了決定性的影響。他們對發散級數的概念是模糊地，然而可和性及漸近級數的概念則在日後爲人們接受，這些可以參閱〔 2 〕，〔 11 〕，〔 13 ，47 章〕，〔 14 〕。

譯註

① 例如對函數 $f(x)=e^{-x^2}$ 而言，無法對其做積分，但若將它用 Taylos's series 表示：

$$f(x)=e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

其在每一點都收斂

$$\therefore \int_0^1 e^{-x^2}dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{(2n+1)}x^{2n+1}\Big|_0^1$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot 2!}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\cdots$$

$$\fallingdotseq 0.766\cdots$$

② 由Taylor's series 可以推得

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\text{，在每一點都收斂}$$

③ 一般而言，對多項式 $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

$p(x)=0$ 之根為 r_1 ，r_2 ，…，r_n

則（Ⅰ）$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{r_k}=\left(\frac{a_1}{-a_0}\right)$

（Ⅱ）$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{r_k^{\,2}}=\left(\frac{a_1}{-a_0}\right)^2-2!\left(\frac{a_2}{-a_0}\right)$

（Ⅲ）$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k^{\,3}}=\left(\frac{a_1}{-a_0}\right)^3-3!\left(\frac{a_3}{-a_0}\right)-3\frac{(3a_0a_3-a_1a_2)}{(-a_0)^2}$

$$=\left(-\frac{a_3}{a_0}\right)^3-3\frac{a_3}{a_0}+3\frac{a_1a_2}{a_0^{\,2}}$$

（REM：利用根與係數的關係及以 $\frac{1}{r_1}$ ，$\frac{1}{r_2}$ ，…，$\frac{1}{r_n}$ 為根之 n 次多項式為 $q(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 即可求得上述各式）

若欲求 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{r_k^{\,4}}$ 之和，可利用：

對 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots$ 而言

若 $\sin x=0$

則其根為 0，$\pm\pi$，$\pm 2\pi$，…　（將 0 除去）

再將上述冪級數除以 x 後，得

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots=0$$

∴若以 y 代替 x^2 則 e.q.：

$$1-\frac{1}{3!}+\frac{y^2}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^ny^n}{(2n+1)!}+\cdots=0$$

且其根爲π^2 ，$(2\pi)^2$，$(3\pi)^2$，…

∴代入 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\gamma_k{}^2}=(\frac{a_1}{-a_0})^2-2!\cdot(\frac{a_2}{-a_0})$之公式，得

$$\frac{1}{\pi^4}+\frac{1}{(2\pi)^4}+\frac{1}{(3\pi)^4}+\cdots=(\frac{1}{3!})^2-2(\frac{1}{5!})=\frac{1}{90}$$

即 $$\frac{\pi^4}{90}=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots$$

對於更高的次數，讀者可以“自己”想辦法證明，不過這種作法，一般而言是不正確的。這是由於它是一個無限項的多項式，因此，係數a_n不能確定存在與否？！所以導出的式子便有問題了！！

④ 對$g(y)=ln(1+y)$而言，由Maclaurin series 得

$$ln(1+y)=0+y-\frac{y^2}{2}+\frac{y_2}{3}-\frac{y^4}{4}+\cdots$$

令$y=\frac{1}{x}$代入得

$$ln(1+\frac{1}{x})=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{4x^4}+\cdots$$

⑤ $$\frac{1}{1}=\log 2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots$$

$$\frac{1}{2}=\log\frac{3}{2}+\frac{1}{2\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 8}+\frac{1}{4\cdot 16}-\frac{1}{5\cdot 32}+\cdots$$

$$\frac{1}{3}=\log\frac{4}{3}+\frac{1}{2\cdot 9}-\frac{1}{3\cdot 27}+\frac{1}{4\cdot 81}-\frac{1}{5\cdot 243}+\cdots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{1}{n-1}=\log\frac{n}{n-1}+\frac{1}{2(n-1)^2}-\frac{1}{3(n-3)^3}$$

$$+\frac{1}{4(n-1)^4}-\frac{1}{5(n-1)^5}$$

相加，即得

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

$$=\log n+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots\frac{1}{(n-1)^2}\right)$$

$$-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots\frac{1}{(n-1)^2}\right)$$

$$+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^4}\right)$$

$$-\cdots\cdots\cdots$$

⑥ $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\log(n+1)+c$$

兩邊減去 $\log n$，即得

$$c=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n-(\log(n+1)-\log n)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore \gamma=\lim_{h\to\infty} c$$

$$=\lim_{h\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

$\gamma \fallingdotseq 0.577218$

不過，至今仍不知道 γ 是有理數或是無理數。

⑦ Colin Maclaurin 1698-1746

⑧ 對 $s(n-1)$ 而，經由變數變換，及對 n 點之 Taylor's Expansion

得 $s(n-1)=s(n)+\left.\frac{ds}{dm}\right|_{m=n}\cdot(n-1-n)$

$$+\left.\frac{d^2s}{dm^2}\right|_{m=n}\cdot\frac{(n-1-n)^2}{2!}+\cdots$$

$$\Rightarrow\quad s(n-1)=s(n)-\frac{ds}{dn}+\frac{1}{2!}\frac{d^2s}{dn^2}-\frac{1}{3!}\frac{d^3s}{dn^3}$$

$$\Rightarrow\quad -[s(n-1)-s(n)]=\frac{ds}{dn}-\frac{1}{2!}\frac{d^2s}{dn^2}+\frac{1}{3!}\frac{d^3s}{dn^3}\cdots$$

⑨ 在原文中，原爲“⑿式中…”

⑩ 如在(1′)式中，將$x=-1$及$x=-2$代入卽得。

References

〔1〕 Raymord Ayoub, Euler and the zeta function, Amen. Math Monthly, 81 (1974) 1067-1087.

〔2〕 E.J.Barbeau, Euler subdues a very obstreperous series, Amer. Math. Monthly, 86 (1979) 356-372.

〔3〕 W.F.Eberlein, On Euler's infinite product for the sine, J. Math. Anal. Appl, 58 (1977) 147-151.

〔4〕 L. Euler, De Progressionibus harmonicis observationes, Comm. acad. sci. petrop., 7 (1734/35), P.150-161 = Opera Omnia, (1) 14, 87-100.

〔5〕 ——, De seriebus divergentibus, Novi comm. acad. sci. petop., 5 (1754/55), 1760, PP.205-237 = Opera Omnia, (1) 14, 585-617. An English translation by E.J.Barbeau and P.J.Leah is in Historia Math., 3 (1976) 141-160.

〔6〕 ——De Seriebus quibusdam considerationes, Comm. acad. sci. petrop, 12 (1740), 1750, PP. 53-96 = Opera Om-

Omnia, (1) 14, 407-462.

〔 7 〕 ——, De seriebus quibusdam considerationes, comm. acad, sci. petrop., 12 (1740), 1750, PP. 53-96 = Olera Omnia, (1) 14. 73-86.

〔 8 〕 ——, Institutiones calculi differentialis cum lius in analysi finitorum ac doctrina serierum, Acad. Imp. Sci., petrop = Olera Omnia, (1) 10, 309-336.

〔 9 〕 H.H.Goldstine, A History of Numerical Analysis from the 16 th through the 19 th century, Springer-Verlag. 1977, especially Chapter 3.

〔 10 〕 J.V.Grabiner, Is mathematical truth time-dependent ? Amer. Math. Monthly, 81 (1974) 354-365.

〔 11 〕 G.H.Hardy, Divergent Series, Oxford Vniversity Press, 1949.

〔 12 〕 R. Johnsonbaugh, Summing an alternating series, Amer. Math. Monthly, 86 (1979) 637-648.

〔 13 〕 Morris Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford Vniversity Prerr, 1972. especially Chapter 20.

〔 14 〕 John Tucciarone, The development of the theory of summable divergent series, Arch. Hist. Exact Sci. 10 (1973) 1-40.

〔 15 〕 數學史——數學思想的發展（上、中、下册）（林炎全、洪萬生、楊康景松譯、九章出版社）。

〔 16 〕 談數學（作者：曹亮吉）、科學月刋社（科學月刋叢書二）。

——本文承蒙王建都老師於百忙之中，抽空指導，謹此致謝——

編　後　語

本老編冒著九死當一活當之危險所主編的師大數學廿期，終於在衆人的合力之下，出版了!!（可能嗎??）

「師數」水準之高，一直爲同學們所稱許，但仍有極少部分的同學無法領略其中的奧妙，雖然系上諸高手們極力主張看師數之文章好比「反掌折枝」，但爲了顧及到像主編長工我（這年頭老編的身分只是長工）坐公車買半票，連樹枝都構不到之流，因此，本期師數特地調適了各種口味以配合各位同學，相信當能提高收視率（我佛慈悲），以增加系上的學術氣息（上帝保佑）。

不過，由於系上同學相當含蓄、害羞，往往不肯將大作公諸於世，盼望同學們能踴躍投稿，共同灌溉這片屬於大家的園地。

非常感謝系上的老師、同學之熱心參與，使得本期師數增色不少。最後，希望

師大數學系更茁壯！
中華民國更加强大!!

柯　遜　富　　謹啓

發 行 人：顏 啓 麟
出 版 者：國立臺灣師範大學數學學會
主　　編：柯 遜 富
封　　面：林 淑 眞
印 刷 者：東鍵打字印刷品行
台北市羅斯福路五段24號
電　　話：(02)9311678
出版日期：中華民國七十五年六月一日
師大訓課刊登第136號