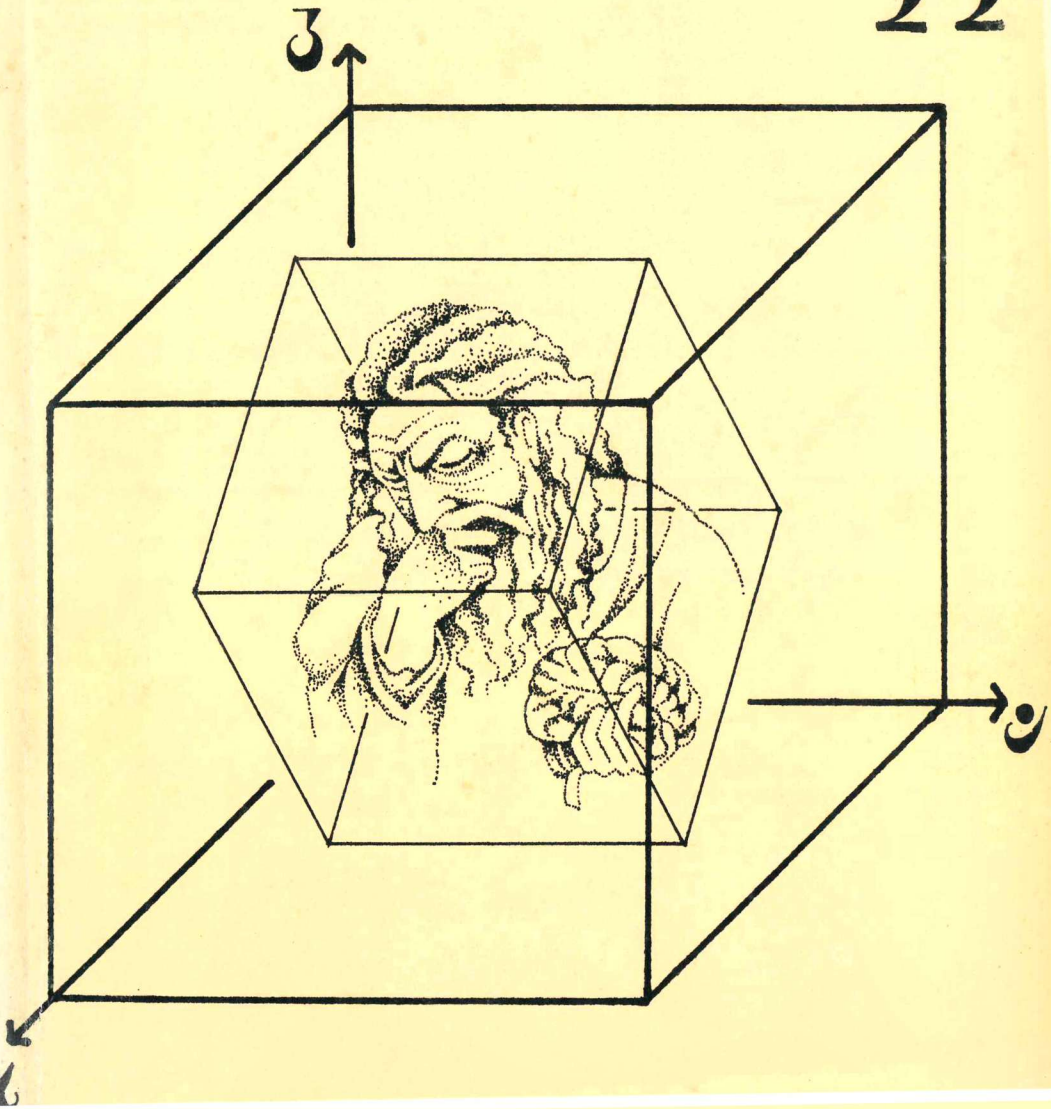
師大數學

22



序

系主任

本系成立於民國三十五年八月，首由張儒林教授擔任系主任，當時招收數學系及四年制專修科各一班，同學三十餘人，教授三位，助教一位，到民國四十五年爲配合原來擴校計劃在頭份設三年制專修科，民國四十七年又增設夜間部專修科，民國四十八年停止招日間部專修科，而又將夜間部專修科改制爲五年制數學系，爲了要培育更高級之數學教育研究人員，於民國五十九年，成立了研究所；三十五年來經歷了各任系主任管公度、潘璞、李新民、康洪元、范傳坡、常法徽、顏啓麟及各任所長李新民、林義雄、呂溪木、李恭晴、顏啓麟之辛勞籌劃與系、所各位教授之苦心經營下，數學系、所，日益茁壯，已由原來每屆僅有十餘位同學，發展至每屆約一百二十名新生入學；歷年來畢業人數已達三千二百七十七人，多各有成就；其中獲得碩士學位叁佰餘人，具博士學位者超過一百五十人，或執教於高等學府，或繼續高深學術研究，餘則多服務於中等學校，都能秉持誠正勤樸之校訓，平時諄諄教學、熱誠服務、堅守崗位，頗獲好評。

現本系共有專兼任教師四十六人，學生十二班共有三百九十九名同學，圖書逾兩萬册，雜誌百餘種，個人電腦六十部，電算室一大間。六十四年夏由本部遷於現址，環境煥然一新，出國學成系友相繼返校，互相砥勵，奠定良好的研究風氣，並擴展了研究領域；今日數學系之師生，更能孜孜不息，爲美好遠景奮發努力。

近年來國內外科學發展甚速，對數學之需要更切，本系之任務更日益增大，除肩負數學教育之發展及中等數學教育之輔導外，亦兼具數學學術及數學教育研究之重任。爲增強研究風尚，本系二十一年前創辦師大數學年刊，以供師生發表教學及研究心得，切磋琢磨，提高學習及研究興趣。本刊屢經負責同學之精心策劃及全體師生系友之共同支持，漸茲茁壯，除至表感謝外，今後請更不吝珠璣，源源賜稿，善珍此片園地，使本刊前程更能散發絢爛光芒。

陳昭地　　七十七年五日

目　錄

序……系主任

1. 談選修……編輯組…… 1

2. Cesaro 極限的探討……朱亮儒…… 7

3. 一維變換的分歧理論……費毓港…… 31

4. 反射原理……于鴻福…… 44

5. Georg Canto 的傳奇……鄭英豪…… 59

6. 簡單連分數與 Pell 方程式……陳彩媚、楊環蜜…… 64

7. 波阿松過程的探討……陳美卿…… 84

8. 畫廊定理……王彩蓮…… 97

1. 談 選 修

編輯組

相信有很多同學面對選修課程時，經常會感覺茫然，而且對系上選修制度並十分了解，爲此我們訪問系上數名老師，希望能藉他們多年教學經驗，能對同學在選修課程時，有所幫助。我們還特地訪問系主任，讓同學對現今系上選修制度能有更深一層的認識。

所以，我們主題分爲二部份，一是系上選修課程，其二是系上選修制度。前者我們分成分析學、機率和統計、數學教育、數學和電腦四部分。

㈠分析學：我們訪問了王惠中、王建都、趙文敏三位老師：

這學期系上將大四的實變數函數論和大三的測度論選修課程對調，主因是因此兩課程內容重疊相似之處太多，若依以往，老師在上實變函數此必修課程時，發現有無選修測度論，使得同學程度有所不同，造成老師教學和同學學習的困擾，故這學年大三上實變數函數，大四再依同學興趣、能力選修測度論，就可免除上述麻煩。如此，同學一定會有疑問，認爲實變和測度既然差異不大，那大四即無選修測度論的必要，兩位王老師認爲測度論是近代分析的基礎，對有志於鑽研更高深數學領域的同學，它是一個不可忽視的工具，實變仍大部侷限於實數的探討，測度論則以推廣至一般集合，抽象概念的測度了，例如：它就能將我們大一所學的里曼積分，推至一般定義的測度空間。由此，測度論值得我們一窺其究。當然，其必備修習基礎是大一的微積分和大二的高等微積分。

而其他的分析學課程如：集合論、整數論、數學基礎、離散數學、級數論、拓樸學、泛函導論、微分幾何……等，都是同學耳熟能詳的課程，趙老師倒認爲級數論中很多觀念如級數收斂性的檢驗法，函數級數的收斂性、冪級數的收斂範圍……等都是大家在微積分或高微中就該理解清楚的。趙老師還特別強調拓樸學，只因同學在經過三上拓樸學導論的“折磨”之後，對三

下選修拓樸學望而卻步。他認爲身爲數學系中之一份子，沒有唸完完整的拓樸學是一大損失，因爲拓樸學是數學領域中不可或缺的工具科目，研究所中還很重視學生在這方面的基礎。對於即將升上大三的大二同學，他希望同學不要對它患有先天恐懼症，在高微中有些名詞、概念都是拓樸學之領域，只要肯接受它，就能克服它。

而最值得一提的是大一中的三個選修科目—集合論、整數論、數學基礎，這三個科目都是數學中的一些基本知識和基礎，對同學未來研習高深的數學知識有某種程度的影響，趙老師認爲同學應有這種基礎，但他也強調物理和數學關係密切，他說：他的博士論文有好些參考知識有引據物理期刊中。普通物理和這三科如何取捨？就不是從現實利害中就可決定的，這就得依同學的興趣去做決定了。

機率和統計方面，我們請教了黃登源老師。

大四有兩門乙類的選修課程—機率論和數理統計，在修習此兩門課程之前，同學必須具備大三機率與統計的基礎，因爲必須具備一些機率與統計的基本概念及其應用，才能進一步修習機率論和數理論計，黃老師認爲在現今生活中，機率和統計和生活息息相關，況且國中也有些許此門課程，修習這些課程應該說是當然的，而此兩科內容也是相關的。如由機率論中導出機率的分配、模型，進而用各種統計去推測問題，使同學能融會貫通並靈活運用之。當提到選修課程時，黃老師認爲大學所唸的課程都是最基本的，如果有志於去開拓數學領域，每個課程都可嘗試去唸，到了研究所，才依個人志願而分門別類。

在電腦和數學方面，楊壬孝老師給了我們很精闢之意見。

大一、大二上學期，同學都修習過資訊教育，也許很多同學認爲並沒有獲得什麼，楊老師認爲短短的一個學期很難令老師掌握到該往那個方向走，也許有的人認爲語言很重要，在大二下開有程式設計這門課，以培養學生程式設計的能力，主要是介紹FORTRAN 語言，但同學也不用過於去強鑽研多種語言，楊老師認爲只要精通一兩樣語言就行了，而系上的電腦課程都經過規劃的，同學只要按步就班的選修，至大三選修數值分析、數位邏輯就應

該沒問題。數值分析是利用電腦來做數學，不僅需要電腦基礎，更需要良好的的數學知識，如微積分、線性代數，這種訓練對有志教育工作的同學有很大的幫助，可以讓國中學生利用電腦處理問題，當然，有志進修的同學就更受用無窮了，楊老師甚且認爲這門課程應該是必修課程，但他仍希望同學能體認電腦在現今所有一切事情所佔的份量。至於數位邏輯，它和數值分析就沒有多大關係，它只是純以邏輯做基礎，加以布氏代數之性質來探討計算機的結構和控制方法，而另一電腦演算法之分析與設計課程，其以嚴密之數學結構敍述電腦之數學模式，如果同學選修此門課程時，有了大二下離散數學的基礎，那就更能應付裕如了。楊老師也認爲並不是所有的這些課程都要修，只是電腦是時勢所趨，修習它，不僅對自己未來在教育上有幫助，在生活上也能造成不少方便。

同學唸數學系，常把數學歸數學，教育歸教育，無法把它們串連起來，而數學教育之功能亦在此，數學教育研究這門課程雖因科學教育之必修而改爲選修，但身爲Σ人應該知道，它對我們很重要，此門課程內容涵蓋數學教育研究法，我國數學教育研究現況及其他有關數學教育之專題，屠耀華老師認爲“數學教育研究”就是上課中觀察學生反應、觀念及學生常見的一些錯誤，而修正自己的教學方法及運用教學讓學生知道如何運用思考去處理數學問題，所以上此科，老師上法並不固定，也讓同學去觀摩學習，這些無非都是想讓同學未來成爲好的教育者。

在第二個主題上—選修制度，我們訪問了系主任，爲了讓同學清楚了解，我們把我們的問題附上，採問答方法讓同學能更明瞭，我們現今存在的問題及如何解決：

(1)問：我們常在註册時，茫茫然而不知該如何去選擇最好的課程，如果於每學期末，讓同學了解老師的空閒時間，然後，讓老師提供意見與同學，主任，你覺得這計劃是否可行？

答：其實學生在事先就該關切自己下學期該選的課，這點我也常常請求導師，在這方面給學生觀念，不要在最後關頭才選課，但同學常認爲這是不必要的。在系務會議上，我也經常提及加強與學生溝通，

雖然，我們無法確定那個老師任教何科，但我相信過去開課的老師都能給同學幫助。去年，我們就曾經發表給同學，讓他們試填課程，好做爲我們開課之依歸，但有些同學沒有填，後來，我們就沒做了，而且老師的研究範圍很廣，並不能保證那位老師教那科，我們只能取其最大效益，讓同學獲得最大好處。不過，在基本上，你的建議是值得考慮的。

(2)問：是否在開課時，能不嚴格劃分開課班級？

答：我想這有問題，如果學生想上我的課，一班有七、八十人的話，我並不喜歡，恐會影響教學品質，降低學習效果，學生不想上我的課，一班只有四、五個人，我也不喜歡。給學生充份的選擇，這並不是單獨一科，在整體上就必須考慮很多事情，選修限制較少，但在必修，除非是有特別原因的同學，否則是做不來的。

(3)問：因爲必修科目很多，及同學對通識教育選課認識不夠，使得到大二爲止，我們並沒有選修到什麼課程，那是否能減少必修課程，及宣導通識選修問題，使大二選修學分增多？

答：去年，怕大一對通識教育選修情形認識不夠，我還特地請助教去跟同學講，通識教育可以慢點選，大概，你們還不敢確定，只有少數同學抽回來，通識教育，其實也並不是我們數學系的事情。而大一必修科目，文史科佔極大部份，主要是顧慮到轉系同學問題。當然，這屆大一，我們就排了資訊教育下去，且一下多排電腦概論的選修課，至於大二，因爲教育部學分嚴格規定，未來，我想會有突破的，但你們看，大一大二的必修課程那些可以刪掉的。但是未來兩三年內，會有課程、學分、結構調整的。

(4)問：據了解，大四學長預官考選率低，分析原因是物理吃了虧，那是否能考慮，將普物調至大三選修？

答：我想，你只是想到考預官問題，大三選普物，那高中的物理都忘光了，怎麼辦？還有，數學和物理，其實不分家，基於學分考慮，我們把物理改成選修，是不得已的，現在，其他普通大學的數學系，

物理都還是必修的。

而普通物理是否能改在大三，現在，我不能答覆，但還是得考慮：女同學之情形，及想考預官的有多少，眞正因物理沒上預官又有幾個這些問題。

(5)問：據我們經驗，我們是因物理高標才修普物的，系上這作法合理嗎？

答：我們訂高標，這是有原則的，有些同學高中物理很差，我們就不勉強他，至於物理上高標，可見高中物理並不是很差，所以，我們鼓勵你們選，也可去了解師大物理在國內數一數二的實驗設備。還有我要特別強調的是，並不是物理上高標就非選不可，當他有正當理由時，還是可以不選的。況且選物理在國中可能也會用到。當然，系上，以後會儘量和新生溝通，讓他們了解這些。

(6)問：可否請主任談跨系選修的問題？

答：跨系選修，假如課程跟我們有關，系上有開，還是在我們系上選比較好，對那些大一就想轉系的同學，我們也會提供意見與他們，讓他們知道怎麼選課才最好。假如同學想依自己興趣選修外系課程，在不妨礙系上課程及學分上、下限的話，同學都可去選，只是最後算總學分時，沒辦法算進去。總不能說同學修什麼俄文、法文，都要算進去，我們是數學系。當然，同學要選，我們不反對，我們也可提供管道給同學。

(7)問：數學教育，是否能提早於三年級實施？

答：這點，我們已決定在下學年實施，甚至我們也研究提前，預定也至二年級實施的可能性。

(8)問：據我們了解，台大數學系學生，只要成績到一定程度，就可“搶修”，主任，你覺得可以不可以用於我們系上？

答：這個問題，不是系上問題，這是學校整體的問題，對於個案我認爲是可嚐試，但此制度，也怕因此影響同學成績，所以，學校目前並沒有這樣的措施。

(9)問：依你感想，現今同學選課方向正確與否？

答：依我感覺，選修制度使同學有避重就輕，使同學失去自己更需要的課程，只因同學怕這些課程太累，我們設計課程都有理念，而同學到底會不會跟我們理念走，這是有疑問的。總之，同學還是要專注自己的課業，不要被太多的雜事影響。

非常感謝系上諸位老師及主任於百忙中，接受我們訪問，使我們的理想，不致付之東流，但我們還是做得不夠好，只希望這些能帶給同學些許幫助，則我們也當能含笑九泉了。

2. Cesaro極限的探討

指導老師：陳昭地
作　　者：朱亮儒

摘要：本文主要在探討一些函數序列的Cesaro 極限之斂散問題：

第一部份處理L^2〔0，1）上的正交級數之 Cesaro 求和法，獲得的結果是：

(1)若 $\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|$ （C，1）可和，則L^2〔0，1） 上的任一正交級數 $\sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k(x)$ 殆遍（C，1）可和

(2)若三角級數、Haar 正交級數、Walsh 正交級數或Rademacher正交級數的係數C_k 滿足 $\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 < \infty$時，級數殆遍（C，1）可和

(3)任一Haar 正交級數、Walsh 正交級數或Rademacher 正交級數都不可能在一正測度集合上（C，1）可和於$+\infty$。

第二部份探討L^2〔0，1）上的正交系統之Cesaro 極限：

(1)任一L^2〔0，1）上的正交系統之（C，1）極限殆遍存在

(2)三角系統、Haar 正交系統、Walsh 正交系統 及Rademacher正交系統的（C，1）極限殆遍收斂於 0

(3)殆遍〔0，1）上的實數以 2 爲底是正規的（Normal）

第三部份引用 Von Nenmann 提出的隨機Ergodic 理論之相關 Cesaro 極限的結果導出：

(1)殆遍〔0，1）上的實數以 p 爲底是正規的

(2)殆遍〔0，1）上的實數之偏商（Partial Quotient）中，出現

p的相對頻數爲 $\log_2 \dfrac{(p+1)^2}{p(p+2)}$

第一節　定義及預備知識

<u>定義1</u>：設序列 $\{\sigma_n(x)\}$ 爲函數序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 的算術平均序列，即

$$\sigma_n(x)=\frac{\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)}{n}$$，$n=1,2,3,\cdots\cdots$，如果極限

$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x)$ 存在，我們稱其極限值函數爲序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 的 Cesaro 極限，簡記爲（C，1）極限，而當函數級數序列的 Cesaro 極限存在時，我們稱該級數是 Cesaro 可求和（Summable），簡記爲（C，1）可和。

下面的定理A說明了（C，1）極限具有正則性（Regularity）：

<u>定理A</u>：若序列 $\{\varphi_n(n)\}$ 收斂於 $\alpha(x)$，則其算術平均序列 $\{\sigma_n(x)\}$ 也會收斂於 $\alpha(x)$（事實上，此正則性是完備的）（參考Bary〔1〕）

在機率理論中，我們也可發現很多類似Cesaro 極限的型態，著名的 Kolmogrov 強大數法則就是一個例子：

<u>定理B</u>：（Strong Law of Large Numbers）

設 $\{x_k\}$ 爲恆等分配的獨立隨機變數序列，且期望值 $E(x_1)$ 存在，則其算術平均序列 $\dfrac{\sum_{k=1}^{n}x_k}{n}$ 機率殆遍收斂於 $E(x_1)$（參考Milton & Tsokos〔6〕）

<u>定義2</u>：設 $\{\varphi_n(x)\}$ 爲 $L^2[0,1)$ 上的可測函數，且滿足：

$$\int_{(0,1)}\varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ 1, & m=n\end{cases}$$

則稱函數序列$\{\varphi_n(x)\}$爲$L^2[0,1)$上的正交系統(Orthonormal System)。

<u>定義3</u>：Haar 系統$\{x_m(x)\}$定義如下：

$$x_1(x)=x_0^{(0)}(x)=1,\ x\in[0,1)$$

$$x_2(x)=x_0^{(1)}(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,\frac{1}{2})\\ -1, & x\in[\frac{1}{2},1)\end{cases}$$

若$m=2^n+k$，則定義

$$x_m(x)=x_n^{(k)}(x)=\begin{cases}\sqrt{2^n}, & x\in[\frac{2k-2}{2^{n+1}},\frac{2k-1}{2^{n+1}})\\ -\sqrt{2^n}, & x\in[\frac{2k-1}{2^{n+1}},\frac{2k}{2^{n+1}})\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$k=1,2,3,\cdots\cdots,2^n$

<u>定義4</u>：Rademacher 系統$\{r_n(x)\}$定義如下

$$r_0(x)=1,\ x\in[0,1)$$

$$r_1(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,\frac{1}{2})\\ -1, & x\in[\frac{1}{2},1)\end{cases}$$

$$r_2(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,\frac{1}{4})\\ -1, & x\in[\frac{1}{4},\frac{2}{4})\\ 1, & x\in[\frac{2}{4},\frac{3}{4})\\ -1, & x\in[\frac{3}{4},1)\end{cases}$$

$$r_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}), 1 \le k < 2^n \\ -1, & x \in [\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}), 1 \le k < 2^n \end{cases}$$

<u>定義5</u>：Walsh 系統 $\{ w_m(x) \}$ 定義如下

$$w_0(x) = 1, \ x \in [0, 1)$$

$$w_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1, & x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

$$w_2(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{4}) \\ -1, & x \in [\frac{1}{4}, \frac{2}{4}) \\ 1, & x \in [\frac{2}{4}, \frac{3}{4}) \\ -1, & x \in [\frac{3}{4}, 1) \end{cases}$$

若 $m = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots\cdots + 2^{k_n}$, $k_1 > k_2 > \cdots\cdots k_n \ge 0$

則定義

$$w_m(x) = r_{k_1+1}(x)\, r_{k_2+1}(x) \cdots\cdots r_{k_n+1}(x)$$

<u>定義6</u>：三角系統 $\{ e^{2k\pi x i} \}$, $k = 0, 1, 2, \cdots\cdots$

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y$$

註1：三角系統，Haar 系統及Walsh 系統都是 $L^2[0, 1)$ 上的完備正交系統（complete），但是 Rademacher 正交系統不是完備的。（參考師大數學第18期，民國73年）

<u>定義7</u>：設 $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{p^k}$ 爲 p 進位表示式，$x \in [0, 1)$，且 $a \in \{$

0，1，2，……，p－1 }，$N_a(n)$ 表示在有序集合 { $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ } 中出現 a 值的次數，如果對每一個 a，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_a(n)}{n} = \frac{1}{p}$$

，則稱 x 以 p 爲底是正規的（Normal）

註 2：殆遍所有實數都能唯一表成 p 進位有限表示式

註 3：若 $x = \Sigma \frac{a_k(x)}{2^k}$ 爲二進位表示式，$x \in [0, 1)$，$a_k(x) = 0$ 或 1，則 Rademacher 函數 $r_n(x) = 1 - 2a_n(x)$，n = 0，1，2，……

<u>定義 8</u>：設 { $\varphi_n(x)$ } 爲 $L^2[0, 1)$ 上的正交系統，且 $f \in L^2[0, 1)$ 定義 $C_k = \int_{(0,1)} f(x)\varphi_k(x)\,dx$ 爲 f 對正交系統 { $\varphi_n(x)$ } 的富氏係數（Fourier Coefficient），級數 $\Sigma C_k \varphi_k(x)$ 稱爲 f 的富氏級數（Fourier Series），以 $\sigma(f)$ 表示

<u>定理 C</u>：（Fejer-Lebesgue Theorem）

任一 Lebesgue 可積分函數 f，對三角系統的富氏級數 $\sigma(f)$ 殆遍（C，1）可和

（參考 Bary〔1〕或 Zygmund〔10〕）

<u>定理 D</u>：（Riesz-Fischer Theorem）

設 { $\varphi_n(x)$ } 爲 $L^2[0, 1)$ 上的正交系統，且 $\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 < \infty$，則存在函數 $f \in L^2[0, 1)$，使得 $\sigma(f) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k(x)$

（參考 Zygmund〔10〕）

<u>定理 E</u>：（N. K. Bary）

設可測函數 f 在〔0，1）上殆遍有限，則存在一 Haar 正交級數 $\sum_{k=1}^{\infty} C_k x_k(x)$ 殆遍收斂於 f(x)，且 $\sigma(f) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k x_k(x)$

（參考Talaljan〔7〕）

註4： 雖然下列的 Walsh 級數都可表成Haar 級數的形式

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k w_k(x) = a_0 w_0(x) + a_1 w_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k w_k(x)$$

$$= a_0 x_0^{(0)}(x) + a_1 x_0^{(1)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} C_n^{(k)} x_n^{(k)}(x)$$

其中 $C_n^{(k)} = \pm \frac{a_{2^n+k-1}}{\sqrt{2^n}}$ ，$1 \leq k \leq 2^n$ ，$n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$

但是截至目前尚不知是否存在一Walsh 正交級數 $\sum_{k=0}^{\infty} C_k w_k(x)$ 殆遍收斂於〔0，1）上殆遍有限可測函數 f

註5：每一Rademacher 級數均可表成Haar 級數的形式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r_n(x) = a_0 r_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(x)$$

$$= a_0 x_0^{(0)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{\sqrt{2^n}}$$

$$(x_{2^{n-1}+1}(x) + x_{2^{n-1}+2}(x) + \cdots\cdots + x_{2^n}(x))$$

$$= a_0 x_0^{(0)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} C_n^{(k)} x_{n-1}^{(k)}(x)$$

其中 $C_n^{(k)} = \frac{a_n}{\sqrt{2^n}}$ ，$1 \leq k \leq 2^{n-1}$ ，$n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$

<u>定理F</u>：設可測函數 f 在〔0，1）上殆遍有限，則存在一Rademacher 正交級數 $\sum_{k=0}^{\infty} C_k r_k(x)$ 殆遍收斂於 f(x)

（利用定理E及註5）

<u>定理G</u>：（D. E. Menshov）

設可測函數 f 在〔0，1）上殆遍有限，則存在一三角級數殆遍

收斂於 f(x)

（參考Bary〔1〕）

定義9：設{ω(n)}爲一正項遞增數列，{$\varphi_n(x)$}爲L^2〔0，1）上的正交系統，如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2\,\omega(n)<\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\varphi_n(x) \text{ 殆遍收斂}$$

則稱ω(n)爲正交系統{$\varphi_n(x)$}的Weyl 乘子（Multiplier）

註6：Carleson 證明三角系統的Weyl 乘子ω(n)＝$\mathbf{O}$(1)

註7：Rademacher 證明Rademacher 系統的Weyl 乘子ω(n)＝$\mathbf{O}$(1)

註8：由定理D及定理E知Haar 系統的Weyl 乘子ω(n)＝$\mathbf{O}$(1)

註9：Hunt 證明Walsh 系統的Weyl 乘子ω(n)＝$\mathbf{O}$(1)

註10：Rademacher 及Menshov 證明一般L^2〔0，1）上的正交系統之Weyl 乘子ω(n)＝$\log^2 n$

註11：Khintchine 及Kolmogorov 更證明了條件 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n^2<\infty$ 是Rademacher 級數 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n r_n(x)$ 殆遍收斂的充分必要條件

定義10：設X爲一緊緻拓撲群（Compact Topological Group）

β(x)表示所有X的Borel子集所成的集合，若存在唯一的測度M滿足：

(1)M是一正測度（Positive Measure）

(2)M(x)＝1

(3)M(B＋x)＝M(B)，　x∈X，B∈β(x)

則稱M爲X的一個Haar 測度

定理H：設X爲一緊緻拓撲群，則存在一機率測度M定義於β(x)，滿足

(1)M(xB)＝M(B)，x∈X，B∈β(x)

(2)M是X上唯一的正規旋轉不變測度

（參考Rudin〔 9 〕）

<u>定義11</u>：設（ X , β(x) , M） 爲一機率空間，若變換T：X→X滿足

(1)T是可測的（ $T^{-1}(B) \in \beta(x)$, $\forall B \in \beta(x)$ ）

(2) $M(T^{-1}(B)) = M(B)$, $B \in \beta(x)$

則稱T爲一保測變換（Measure-Preserving Transformation）

<u>定義12</u>：設T：X→X爲一保測變換，且滿足：

$T^{-1}(B) = B$, $B \in \beta(x) \Rightarrow M(B) = 0$ 或 $M(B) = 1$

則稱T爲Ergodic 變換

（參考師大數學第 19 期，民國 74 年）

註12：若T：X→X爲一保測變換，$B \in \beta(x)$，則

$T^k(x) \in B \Longleftrightarrow x_B(T^k(x)) = 1$, $k = 0, 1, 2, \cdots\cdots$

故首n位有序集 $\{x, T(x), T^2(x), \cdots\cdots, T^{n-1}(x)\}$ 在集合B中出現的相對次數爲 $\dfrac{\sum_{k=0}^{n-1} x_B(T^k(x))}{n}$

註13：若T：X→X爲一Ergodic 變換，則殆遍X中的點x之軌道（Orbit）在集合B中出現的相對頻數（Relative Frequency）爲M(B)，即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} x_B(T^k(x))}{n} = M(B)$$

<u>定理 I</u>：（Birkhoff Ergodic Theorem）

設T：X→X爲一保測變換，且 $f \in L'(x)$，則

$\dfrac{\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x))}{n}$ 殆遍收斂於某一 $f^* \in L'(x)$，且 f^* 滿足

(1) $f^* \circ T = f^*$ 殆遍成立

(2) $\int f^* = \int f$

（參考Dold & Eckmann〔2〕）

註14：在Hilbert 空間H中，若T爲單式變換（Unitary），即$TT^* = T^*T$＝恆等變換，或T爲縮距變換（Contraction），即$\| T \| < 1$，則Birkhoff 理論依然成立，即$\forall f \in H$，

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} T^k f}{n} \text{ 殆遍收斂}$$

（參考Halmos〔4〕）

定理J：（Von Neumann L^P Ergodic Theorem）

設T爲機率空間（X，$\beta(x)$，M）上的保測變換，且$f \in L^P(x)$，$1 \leq P < \infty$，則存在$f^* \in L^P(x)$，滿足

(1) $f^* \circ T = f^*$ 殆遍成立

(2) $\dfrac{\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x))}{n}$ L^P 收斂於 f^*

（參考Dold & Eckmann〔2〕）

註15：在1958年，Dunford-Schwartz 證明：

設$f \in L^P(x)$，且T同時是所有$L^P(x)$上的縮距變換，則

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} T^k f}{n} \text{ 殆遍收斂}$$

註16：在1964年，Bellow 證明：

設$f \in L^P(x)$，且T爲$L^P(x)$上的單式變換，$1 < P < \infty$，$P \neq 2$，則

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} T^k f}{n} \text{ 殆遍收斂}$$

當 $P=2$ 時，Burkholder 在 1962 年引用Menshov的例子舉出一個Bellow定理的反例。

<u>定理K</u>：設 $T: X \to X$ 爲一綫性算子（Linear Operator）滿足

(1) $f \geq 0$ a.e. $\Rightarrow$ $Tf \geq 0$ a.e.

(2) $\int_x |Tf| \leq \int_x |f|$

(3) $|f| \leq C$ a.e。 $\Rightarrow$ $|Tf| \leq C$ a.e.

則存在一算子 T^* 滿足

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} T^k f}{n} \; L^P \text{ 收斂於 } T^* f$$

（參考Garsia〔3〕）

註17：在定理K中，若 $P=2$，在Hilbert 空間中，該定理稱爲Mean Ergodic Theorem

<u>定義13</u>：設 $x \in (0, 1)$ 且 $\frac{1}{x} = q_0 + r_1$，$q_0 \in N$，$0 \leq r_1 < 1$

若 $1 = r_1 q_1 + r_2$，$0 \leq r_2 < r_1$，$q_1 \in N$

$r_1 = r_2 q_2 + r_3$，$0 \leq r_3 < r_2$，$q_2 \in N$

$r_2 = r_3 q_3 + r_4$，$0 \leq r_4 < r_3$，$q_3 \in N$

……

$r_{n-1} = r_n q_n + r_{n+1}$，$0 \leq r_{n+1} < r_n$，$q_n \in N$

則稱 q_n 爲 x 的第 n 階偏商（Partial Quotient）

<u>定義14</u>：$g: (0, 1) \to N$ 定義爲 $g(x) = [\frac{1}{x}]$ 表示 $\frac{1}{x}$ 的整數部份。

$T: (0, 1) \to [0, 1)$ 定義爲 $T(x) = \langle \frac{1}{x} \rangle$ 表示 $\frac{1}{x}$ 的小數部份。

註18：若 $x \in (0, 1)$ 且 x 爲一無理數，則

(1) $\dfrac{1}{T^n(x)} = g(T^n(x)) + T^{n+1}(x)$, $n \in N$

(2) $q_n = g\,T^n(x)$, $n \in N$

<u>定義15</u>：在〔0，1）上定義一測度 $G(A) = \dfrac{1}{\log_2}\displaystyle\int_A \dfrac{1}{1+x}\,dx$

稱G爲高斯測度（Gauss Measure）

註19：高斯測度與Lebesque 測度具有相同的零測度集（Null Set）

註20：定義 14 中的T函數對高斯測度是保測的。

第二節　主要定理

第一部份：正交級數

<u>定理 1</u>：設 $\{\varphi_n(x)\}$ 爲 L^2〔0，1）上的正交系統，如果 $\Sigma C_k^2 \log^2 k$ 收斂，則級數 $\Sigma C_k \varphi_k(x)$ 殆遍（C，1）可和

證明：由註 10 知 $\omega(k) = \log^2 k$ 爲一般 L^2〔0；1）上正交系統的 Weyl 乘子，故知級數 $\Sigma C_k \varphi_k(x)$ 殆遍收斂

由正則性（定理A）知：級數 $\Sigma C_k \varphi_k(x)$ 殆遍（C，1）可和

定理 2：設 $\{\varphi_n(x)\}$ 爲 L^2〔0，1）上的正交系統，如果 $\Sigma |C_k|$ 收斂，則級數 $\Sigma C_k \varphi_k(x)$ 殆遍（C，1）可和

證明：$\because \displaystyle\int_{[0,1)} \Sigma |C_k \varphi_k(x)| = \Sigma |C_k| \int_{[0,1)} |\varphi_k(x)|$

$$\leq \Sigma |C_k| \left(\int_{[0,1)} |\varphi_k(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{[0,1)} dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \Sigma |C_k| < \infty$$

$\therefore \Sigma |C_k \varphi_k(x)|$ 殆遍有限

$\therefore \Sigma C_k \varphi_k(x)$ 殆遍收斂

由正則性知：級數 $\Sigma C_k \varphi_k(x)$ 殆遍（C，1）可和

<u>定理 3</u>：設 $\{\varphi_n(x)\}$ 爲 L^2〔0，1）上的正交系統，若級數 $\Sigma |C_k|$

（C，1）可和，則正交級數 $\sum C_k\varphi_k(x)$ 殆遍（C，1）可和

證明：令 $S_k(x) = \sum_{j=1}^{k} C_j\varphi_j(x)$ ， $S_k = \sum_{j=1}^{k} |C_j|$

再令 $\sigma_n(x) = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} S_k(x)}{n}$ ， $\sigma_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} S_k}{n}$

則有：(1) $\lim_{n\to\infty} \sigma_n < \infty$

(2) $\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n-k+1}{n} C_k\varphi_k(x)$

(3) $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n-k+1}{n} |C_k|$

$$\because \int_{[0,1)} |\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x)|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1)} \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{n-k+1}{n} C_k\varphi_k(x)\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{n} |C_k| \int_{[0,1)} |\varphi_k(x)|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{n} |C_k| \left(\int_{[0,1)} |\varphi_k(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\int_{[0,1)} dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{n} |C_k|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sigma_n < \infty$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \sigma_n(x)$ 殆遍有限

即級數 $\Sigma C_k \varphi(x)$ 殆遍（C，1）可和

定理 4：若級數 ΣC_k^2 收斂，則三角級數 $\Sigma C_k e^{2k\pi xi}$ 殆遍（C，1）可和

證明：由註 6 Carleson 定理知 $\omega(k) = \bullet(1)$ 爲三角系統的Weyl 乘子

$\therefore$ 三角級數 $\Sigma C_k e^{2k\pi xi}$ 殆遍收斂

由正則性（定理A）知：級數 $\Sigma C_k e^{2k\pi xi}$ 殆遍（C，1）可和

定理 5：若級數 ΣC_k^2 收斂，則Haar 級數 $\Sigma C_k x_k(x)$ 殆遍（C，1）可和

證明：$\because \Sigma C_k^2 < \infty$

由Riesz-Fischer 定理（定理D）知：級數 $\Sigma C_k x_k(x)$ 爲某一 L^2〔0，1）上可積函數 f 的富氏級數

由 Bary 定理（定理E）知：級數 $\Sigma C_k x_k(x)$ 殆遍收斂

由正則性知：Haar 級數 $\Sigma C_k x_k(x)$ 殆遍（C，1）可和

（或由註 8 及定理A得證）

定理 6：若級數 ΣC_k^2 收斂，則Walsh 級數 $\Sigma C_k W_k(x)$ 殆遍（C，1）可和

證明：$\because \Sigma C_k^2 < \infty$

由Hunt 定理（註 9）知 $W(k) = \bullet(1)$ 爲 Walsh 系統的Weyl 乘子

$\therefore$ 級數 $\Sigma C_k W_k(x)$ 殆遍收斂

由正則性知：Walsh 級數 $\Sigma C_k W_k(x)$ 殆遍（C，1）可知

定理 7：若級數 ΣC_k^2 收斂，則Rademacher 級數 $\Sigma C_k r_k(x)$ 殆遍（C，1）可和

證明：$\because \sum C_k^2 < \infty$

由 Riesz-Fischer 定理知：級數 $\sum C_k r_k(x)$ 爲某一 $L^2[0,1)$ 上可積函數 f 的富氏級數

由註 5 知 Rademacher 級數 $\sum C_k r_k(x)$ 均可表成 Haar 級數的形式爲 $\sum_{k=0}^{\infty} C_k W_k(x) = C_0 X_0^{(0)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} C_n^{(k)} X_{n-1}^{(k)}(x)$

其中 $C_n^{(k)} = \dfrac{n}{\sqrt{2^n}}$，$1 \le k \le 2^{n-1}$，$n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$

$$\because \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (C_n^{(k)})^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 < \infty$$

由 Bary 定理知：級數 $\sum C_k r_k(x)$ 殆遍收斂

由正則性知：Rademacher 級數 $\sum C_k r_k(x)$ 殆遍 $(C, 1)$ 可和（或由註 7 Rademacher 定理及定理 A 得證）

<u>定理 8</u>：任一 Haar 級數 $\sum C_k X_k(x)$ 不可能在一正測度集合上收斂於 $+\infty$

證明：參考 Jau-D Chen & Liang-Ju Chu〔5〕或 Talaljan & Arutjunjan〔8〕

註21：在文章〔5〕中證明了任一 Haar 級數的部份和序列 $\{S_n(x)\}$ 的子序列 $\{S_{2^{n-1}}(x)\}$，在一正測度集合上不可能收斂於 $+\infty$

<u>定理 9</u>：任一 Walsh 級數 $\sum C_k W_k(x)$ 不可能在一正測度集合上收斂於 $+\infty$

證明：利用註 4 及註 21 知：本定理成立

<u>定理 10</u>：任一 Rademacher 級數 $\sum C_k r_k(x)$ 不可能在一正測度集合上收斂於 $+\infty$

證明：利用註 5 及註 21 知：本定理成立

註22：截至目前，我們還不知道是否有一三角級數在一正測度集合上殆遍收斂於 $+\infty$

註23：Menshov 證明存在一三角級數在一正測度集合上測度收斂於 $+\infty$

；Privalov & Lusin 證明存在一三角級數在一正測度集合上 Poisson 可和於$+\infty$；Germeier 證明不存在一三角級數在一正測度集合上Riemann 可和於$+\infty$

註24：Talaljan 證明：對$L^2[0,1]$上任一正交系統，存在一正交級數在一正測度集合上測度收斂於$+\infty$

<u>定理11</u>：任一Haar 級數$\sum C_k X_k(x)$ 不可能在一正測度集合上（C，1）可和於$+\infty$

證明：令 $S_k(x) = \sum_{j=1}^{k} C_j X_j(x) \qquad k = 1, 2, 3, \cdots\cdots$

$$\text{則}\quad \sigma_n(x) = \frac{\sum_{k=1}^{n} S_k(x)}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{n} C_k X_k(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} X_k(x)$$

$$\text{其中}\quad a_{n,k} = \frac{n-k+1}{n} C_k$$

$$\text{則}\quad \lim_{n\to\infty} a_{n,1} = \lim_{n\to\infty} C_1 = C_1$$

考慮子序列$\{\sigma_{2^{n-1}}(x)\}$

仿照定理8（文章〔5〕）的證明過程，我們可以得證子序列$\{\sigma_{2^{n-1}}(x)\}$不可能在一正測度集合上殆遍收斂於$+\infty$

$\therefore \{\sigma_n(x)\}$不可能在一正測度集合上殆遍收斂於$+\infty$

$\therefore$Haar 級數$\sum C_k X_k(x)$ 不可能在一正測度集合上（C，1）可和於$+\infty$

<u>定理12</u>：任一Walsh 級數$\sum C_k W_k(x)$不可能在一正測度集合上（C，1）可和於$+\infty$

證明：利用註4及定理11的證明知：本定理成立

<u>定理13</u>：任一Rademacher 級數$\sum C_k r_k(x)$不可能在一正測度集合上（

C，1）可和於$+\infty$

證明：利用註5及定理11的證明知：本定理成立

註25：由Fejer定理知：存在一三角級數在一正測度集合上（C，1）可和於$+\infty$（參考Bary〔1〕）

第二部份：正交系統

<u>定理14</u>：L^2〔0，1）上的任一正交系統$\{\varphi_k(x)\}$的（C，1）極限殆遍存在

證明：由註10知$\omega(k)=\log^2 k$爲正交系統$\{\varphi_k(x)\}$的Weyl乘子

$$\because \sigma_n(x)=\frac{\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\varphi_k(x)=\sum_{k=1}^{n}C_k\varphi_k(x)$$

其中 $C_k=\frac{1}{n}\leq\frac{1}{k}$ $\quad\forall k=1,2,3,\cdots\cdots n$

且 $\sum_{k=1}^{n}C_k^2\omega(k)\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\log^2 k<\infty$

$\therefore \sum C_k\varphi_k(x)$ 殆遍收斂

$\therefore$極限 $\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x)$殆遍存在

$\therefore$正交系統$\{\varphi_n(x)\}$的（C，1）極限殆遍存在

<u>定理15</u>：三角系統的（C，1）極限殆遍爲0

證明：利用數學歸納法知： $n\in N$， $0<x<1$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin 2k\pi x=\frac{\sin n\pi x\ \sin(n-1)\pi x}{\sin\pi x}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos 2k\pi x=\frac{\cos n\pi x\ \sin(n-1)\pi x}{\sin\pi x}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sigma_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n-1}e^{2k\pi xi}}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n\pi x \sin(n-1)\pi x + i \sin n\pi x \sin(n-1)\pi x}{n \sin \pi x}$$

$$= 0 \quad , \quad 0 < x < 1$$

∴三角系統的（C，1）極限在〔0，1）上殆遍爲0

<u>定理16</u>：Haar 正交系統的（C，1）極限（殆遍）爲0

證明：我們將證明 $\lim_{m\to\infty} \sigma_m(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{m} X_k(x)}{m} = 0$

$\forall P = 1, 2, 3, \cdots\cdots, 2^n \qquad n \in N$

$$\left| \frac{\sum_{k=1}^{2^n+p} X_k(x)}{2^n+p} \right| \leq \frac{\sum_{k=1}^{2^n+p} |X_k(x)|}{2^n+p}$$

$$\leq \frac{\sum_{k=1}^{2^{n+1}} |X_k(x)|}{2^n}$$

$$= \frac{1 + \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=1}^{2^i} |X_i^{(j)}(x)|}{2^n}$$

$\because \forall x \in [0, 1)$，$0 \leq i \leq n+1$，$\exists \triangle_i^s = [\frac{2s-2}{2^{i+1}}, \frac{2s}{2^{i+1}})$

$x \in \triangle_i^s$

即 $X_i^{(j)}(x) \begin{cases} \neq 0 & , \quad j = s \\ = 0 & \quad j \neq s \end{cases}$

$$\therefore \sum_{j=1}^{2^i} |X_i^{(j)}(x)| = |X_i^{(s)}(x)| = \sqrt{2^i}$$

$$\therefore \left| \frac{\sum_{k=1}^{2^n+p} X_k(x)}{2^n+p} \right| \leq \frac{1 + \sum_{i=0}^{n+1} \sqrt{2^i}}{2^n} \to 0 \quad ,$$

$\forall\, p = 1, 2, \cdots\cdots 2^n$

$\therefore \lim\limits_{m\to\infty} \sigma_m(x) = 0$

$\therefore$ Haar 正交系統的 (C , 1) 極限爲 0

<u>定理 17</u> ：Walsh 正交系統的 (C , 1) 極限殆遍爲 0

證明：欲證極限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} W_k(x)}{n}$ 殆遍爲 0

$$\because |\sigma_n(x)| \leq \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} |W_k(x)|}{n} \leq \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} 1}{n} = 1$$

$\therefore \sigma_n(x) \in L^1[0, 1)$

$$\because n^4 (\sigma_n(x))^4 = ((\sum_{k=0}^{n-1} W_k)^2)^2$$

$$= (\sum_{k=0}^{n-1} W_k^2 + 2 \sum_{k<\ell} W_k W_\ell)^2$$

$$= (n + 2 \sum_{k<\ell} W_k W_\ell)^2$$

$$= n^2 + 4n \sum_{k<\ell} W_k W_\ell + 4 (\sum_{k<\ell} W_k W_\ell)^2$$

$$= n^2 + 4n \sum_{k<\ell} W_k W_\ell + 4 \sum_{k<\ell} W_k^2 W_\ell^2$$

$$+ 8 \sum_{i=0}^{n-1} W_i^2 \sum_{\substack{k<\ell \\ k\neq i \\ \ell\neq i}} W_k W_\ell$$

$$= n^2 + 4n \sum_{k<\ell} W_k W_\ell + 4 \sum_{k<\ell} 1$$

$$+ 8 \sum_{i=0}^{n-1} 1 \sum_{\substack{k<\ell \\ k\neq i \\ \ell\neq i}} W_k W_\ell$$

$$= n^2+4n\sum_{k<\ell} W_kW_\ell + 4(1+2+3+\cdots+n-1)$$

$$+8\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{\substack{k<\ell\\ k\neq i\\ \ell\neq i}} W_kW_\ell$$

$$= 3n^2-2n+4n\sum_{k<\ell} W_kW_\ell$$

$$+8\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{\substack{k<\ell\\ k\neq i\\ \ell\neq i}} W_kW_\ell$$

$\because \{W_k(x)\}$ 形成一正交系統

$$\therefore \int_{[0,1)} n^4(\sigma_n(x))^4\,dx = 3n^2-2n$$

$$\therefore \int_{[0,1)} (\sigma_n(x))^4\,dx = \frac{3n^2-2n}{n^4} \leq \frac{3}{n^2}\ ,\ n=1,2,\cdots\cdots$$

$$\therefore \int_{[0,1)} \Sigma(\sigma_n(x))^4\,dx \leq \Sigma\frac{3}{n^2} < \infty$$

$\therefore$ 級數 $\Sigma(\sigma_n(x))^4$ 殆遍有限

$\therefore$ 極限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x)$ 殆遍爲 0

即Walsh 正交系統的 (C , 1) 極限殆遍爲 0

<u>定理 18</u>： Rademacher 正交系統的 (C , 1) 極限殆遍爲 0

證明：仿定理 17 的證明過程知：本定理成立

或可由註 7 Rademacher 定理知 $\omega(k) = \bullet(1)$ 爲 Rademacher 正交系統的Weyl 乘子

$$\because\ \sigma_n(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} r_k(x)}{n} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}r_k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k r_k(x)$$

其中 $C_k = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k}$, $0 < k \leq n-1$

又∵ $\sum_{k=1}^{n} C_k^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \infty$

∴級數 $\sum_{k=0}^{n-1} C_k r_k(x)$ 殆遍收斂

即 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x)$ 殆遍存在

∴Rademacher 正交系統的（C，1）極限殆遍存在

<u>定理19</u>：設 $a_k(x)$ 表示 $x \in [0, 1)$ 的二進位表示式的第 k 位數

則序列 $\{a_k(x)\}$ 的（C，1）極限殆遍爲 $\frac{1}{2}$

證明：由註 3 知 $r_k(x) = 1 - 2a_k(x)$，$k = 0, 1, 2, \cdots\cdots$

欲證極限 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)}{n}$ 殆遍爲 $\frac{1}{2}$

由定理 18 知 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} r_k(x)}{n} = 0$ a.e.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1-r_k(x)}{2}}{n}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} r_k(x)}{n} = \frac{1}{2} \quad \text{a.e.}$$

∴序列 $\{a_k(x)\}$ 的（C，1）極限殆遍爲 $\frac{1}{2}$

第三部份：保測變換

<u>定理20</u>：設 P 爲大於 1 的自然數，則殆遍所有〔0，1）上的實數以 P 爲底是正規的

證明：我們首先定義旋轉變換 T：〔0，1）→〔0，1）爲

$$T(x) = Px \pmod 1$$

則由定理H知：T是一個Ergodic保測變換

令$\mathbf{P} = \{ x \in [0, 1) \mid x$ 可唯一表成P進位有限表示式$\}$

由註2知： $M(\mathbf{P}) = 1$

設 $x = \Sigma \frac{a_k}{p^k} = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \frac{a_3}{p^3} + \cdots\cdots \in \mathbf{P}$

則 $T(x) = \frac{a_2}{p} + \frac{a_3}{p^2} + \cdots\cdots\cdots$

$T^2(x) = \frac{a_3}{p} + \frac{a_4}{p^2} + \cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$T^k(x) = \frac{a_{k+1}}{p} + \frac{a_{k+2}}{p^2} + \cdots\cdots\cdots$

再令 $f_q = X_{B_q}$ 爲 $B_q = [\frac{q}{p}, \frac{q+1}{p})$ 的特徵函數

$$q = 0, 1, 2, \cdots\cdots\cdots, p-1$$

則

$$f_q(T^k(x)) = \begin{cases} 1, & 若\ a_{k+1} = q \\ 0, & 若\ 0 \leq a_{k+1} < q \end{cases}$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots\cdots\cdots$$

∴對每一個 $q \in \{0, 1, 2, \cdots\cdots, p-1\}$

x的P進位表示式中，首n位數出現q值的次數爲

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_q(T^k(x))$$

即有序集合 $\{x, T(x), T^2(x), \cdots\cdots, T^{n-1}(x)\}$ 在集合

$B_q = [\frac{q}{p}, \frac{q+1}{p})$ 中出現的次數爲 $\sum_{k=0}^{n-1} f_q(T^k(x))$

由Birkhoff Ergodic理論（定理Ⅰ）知 $\{f_q(T^k(x)\}$ (C, 1

）極限殆遍存在，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n-1} f_q(T^k(x))}{n}=\int f_q(x)dx=\int X_{B_q}(x)\,dx$$

$$=M(B_q)=\frac{q+1}{p}-\frac{q}{p}=\frac{1}{p}\qquad a.e.$$

即殆遍所有點 x 的 p 進位表示式中，出現 q 的值之相對頻數爲$\frac{1}{p}$

由定義 7 知：殆遍所有點以 p 爲底是正規的。

<u>定理21</u>：（Borel's Theorem on Normal Numbers）

殆遍所有〔0，1）上的實數以 2 爲底是正規的

證明：從定理 20 的證明過程中，取 p = 2 的情形。此定理的結果與定理 19 的結果是一致的。

<u>定理22</u>：殆遍所有〔0，1）上的實數之偏商中，出現自然數 p 的相對頻數爲 $\log_2\frac{(p+1)^2}{p(p+2)}$

證明：從定義 15 的高斯測度 $G(A)=\frac{1}{\log_2}\int_A\frac{1}{1+x}\,dx$ 知：

$$G([0,1))=\frac{1}{\log_2}\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=1$$

令 $f=X_A$ 爲 $A=[\frac{1}{p+1},\frac{1}{p})$ 的特徵函數

從定義 14 中的 g 函數與 T 函數的定義及註 18 的結果知：對所有〔0，1）上的無理數 x

x 的第 k 階偏商 $q_k=g(T^k(x))=P$

$$\Longleftrightarrow\quad T^k(x)\in A=[\frac{1}{p+1},\frac{1}{p})$$

$$\Longleftrightarrow\quad f(T^k(x))=X_A(T^k(x))=1$$

∴殆遍所有 x 的偏商中，首 n 次出現 p 值的次數爲

$$\sum_{k=1}^{n} f(T^k(x))$$

由註 20 及註 13，利用Birkhoff Ergodic 理論知：

對高斯測度而言，殆遍所有 $x \in [0, 1)$ 的偏商中，出現 p 值的

相對頻數爲 $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} f(T^k(x))}{n} = G(A)$$

$$= \frac{1}{\log_2} \int_{\frac{1}{p+1}}^{\frac{1}{p}} \frac{1}{1+x}\, dx$$

$$= \log_2 \frac{(p+1)^2}{p(p+2)}$$

∵高斯測度與Lebesgue 測度具有相同零測度集（註 19）

∴對高斯測度殆遍成立的性質，對 Lebesgue 測度也是殆遍成立

∴殆遍所有〔0，1）上的實數之偏商中，出現 p 值的相對頻數

爲 $\log_2 \frac{(p+1)^2}{p(p+2)}$

參考資料

[1] N.K. Bary, A treatise on Trigonometric Series, Pergamon Press, Vol.I & II (1964)

[2] Dold & Eckmann, Ergodic Theory, Lecture Notes in Mathematics. 729 (1978). 1-15

[3] Garsia, Topics in Almost Everywhere Covnergence, 19-29.

[4] R. Halmos, A Hilbert Space Problem Book. 121-122

[5] Jau-D Chen & Liang-Ju Chu, On the Convergence of Haar Series to Infinite, A SMP Com. Math. 27 (1987). 39-48

[6] Milton & Tsokos, Probability Theory, 290-294

[7] A.A. Talaljan, The Representation of Measurable Functions by Series. 75-136.

[8] Talaljan & Arutjunjan, On the Convergence of Haar Series to $+\infty$, Transl. AMS Ser 2, 72 (1965) 1-8, MR30 4116.

[9] W. Rudin, Functional Analysis. 123-125

[10] Zygmund, Measure & Integral, 137-140 & 211-263

有一天小華對小明說：「請將你的年齡乘上 4 然後加 10 」（如小明 16 歲，則 $16 \times 4 + 10 = 74$ ）。

「再將所得乘上 25 」（如 $74 \times 25 = 1850$ ）。

「減去一年的日數」（如 $1850 - 365 = 1485$ ）。

「加上你袋中的硬幣數目」（如 $1485 + 12 = 1497$ ）。

「最後加上 115 」（如 $1497 + 115 = 1612$ ）。

則你的年齡便是 16 歲，你袋中硬幣數是 12 個。你知道這是什麼原理嗎？

3. 一維變換的分歧理論

指導老師:王惠中
譯　　者:費毓港

The theory of differential equations represents a vast conglomerate of a great many ideas and methods of different nature, very useful for many applications and constantly stimulationg theoretical investigations in all areas of mathematics.
.....V.I.Arnold.....

本文譯自: Guckenheimer J., Holmes P.
Nonlinear Oscillations, Dynamical System, and Bifurcations of Vector Fields. (Applied Math. Science 42)
Springer-Verlag, 1983.
第 6.3節, pp.306-311.

爲什麼要考慮「一維變換」呢?首先,我們關心的是「動力系統」中的(穩定)週期軌道,而通常動力系統是由一組常微分方程或差分方程所決定的。對微分方程而言,藉助Poincaré 變換,能夠將此連續的系統離散化,並且保留了大部份的結構,因此,我們可以暫時捨「微分方程」而就「變換」,也就是說,只討論差分方程,即形如$x_{n+1} = f(x_n)$ 的「離散動力系統」。再者,我們考慮的大都是有能量耗損的「逸散系統」(dissipative system),而逸散性會帶給系統一個整體的穩定狀態,隨著過程的發展,相空間(phase space)中代表初始狀態的體積漸漸收縮,相流(flow)裡的一些截面就慢慢壓縮成接近一維,所以,高維度的系統同樣享有一維變換的某些性質。還有,的確有不少動力系統是利用一維差分方程定義出來的,特別是在生態學中,譬如文中提到之 logistic 變換就是一個很著名的例子(你可以在PHASER 中看到它)。當然,簡單也是考慮一維變換的主要原因之一。儘管如此,由於在一維系統的理論中,常常訴諸實數線上的大

小關係，所以，有些結果並不能推廣到高維度（如文中提到的Sarkovskii定理）。

考慮區間I上的動力系統$x_{n+1} = f(x_n)$，其中$f : I \to I$爲連續函數，我們稱$x_0 \in I$爲f的一個n—週期點（或週期n的點）的意思是：「$f^n(x_0) = x_0$，但當$1 \leq i < n$時，$f^i(x_0) \neq x_0$」，其中$f^m = f \circ f \circ \cdots\cdots$ of 爲f的m次合成。特別，當$n = 1$時，稱x_0爲f的定點。若x_0是f的n - 週期點，則稱$\{x_0, f(x_0), \cdots\cdots, f^{n-1}(x_0)\}$爲f的一個週期軌道（periodic orbit），很自然地，我們希望這是一個「穩定」的週期軌道，也就是說，當$y_0 \in I$很接近x_0時，它的軌道$\{y_0, f(y_0), f^2(y_0), \cdots\cdots\}$也會適當地靠近$x_0$的軌道，此時，若f可微分，我們等於要求

$$|(f^n)'(x_0)| = \left|\prod_{j=0}^{n-1} f'(x_j)\right| < 1$$

其中$x_j = f^j(x_0)$，$j = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1$。

一般而言，f會含有一個參數μ，即我們得考慮變換族$f_\mu = I \to I$，$\mu \in [\mu_0, \mu_1]$；通常f_{μ_0}只有一個穩定的定點，隨著μ的增加，各種週期軌道陸續產生，系統漸漸呈現複雜的結構，最後（或許不一定到最後），混沌現象（chaos）產生了。「分歧」（bifurcation）就是指週期軌道數目改變的現象，而「分歧理論」乃是研究這種改變的情況以及到達混沌的過程，再從混沌中找出它的規律。

本文作者主要用到的是所謂的「符號動力系統」（symbolic dynamics），把一個區間用一個符號代替，透過一些定義和計算，得出所要的結果。符號動力系統是一種預備知識很少，但用途很廣的技巧，例如，H. Fursterberg利用它並藉助Poincaré再歸定理（recurrence theorem）證明了數論中的Van der Waerden 定理：「若整數集Z可表示成r個子集$C_1, C_2, \cdots\cdots, C_r$的聯集，則其中一個$C_i$包含有任意長度的等差數列」。符號動力系統在分歧理論乃至動力系統的定性理論都有極大的效用。

最後，提出兩點個人的感想：

(1) 難的不一定是重要的！唯有具實際背景與目標的理論才是值得追求

的。就像在譯文中，用得最多的只是一個連續函數的中間值定理而已，但其中結果的重要性是毋庸置疑的。願數學家走出抽象冥思的胡同，不要執著純與應用的分野，共同爲有用的數學努力。

(2) 台灣的高中開始教微積分了，那麼大學裡的微積分又該教些甚麼呢？是不是把以往二、三年級課程的一部分拿來教就好呢？我想不盡然！事實上，現在我們用的數學課本，就像數學史一樣，講的都是好幾十年、甚至一兩百年前的數學。是不是它們都那麼必要？是否最近二、三十年來沒有新的數學理論產生，或者它們都是那麼艱深莫測呢？我想也不盡然。總而言之，順應世界數學的潮流，大學數學教育的改革是時候了。

*　　*　　*　　*

我們要討論的對象是僅具有一個臨界點的一維變換，描述關於它們的 kneading 理論及其在分歧理論中的含義。我們只提出所牽涉到的主要觀念，讀者可以在Collet , Eckmann〔 2 〕中找到省略的細節。

我們將假設 $f : I \to I$ 爲單位區間上的變換，三次可微分，且具有負的 Schwarz 導數：即當 $f'(x) \neq 0$ 時，

$$S(f)(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2 < 0 \qquad (1)$$

如此技巧性假設的動機來自於 Singer〔 14 〕下面的這個定理（參考 Misiurewicz〔 12 〕; Collet , Eckmann〔 2 〕）：

<u>定理 1</u>　令 $f : I \to I$ 爲具有非負 Schwarz 導數的 C^3 變換，若 γ 是一穩定的週期軌道，則存在 f 的一個臨界點或者 I 的一個端點，其軌跡逼近 γ。

<u>略證</u>：　首先，證明 $S(f) < 0$ 及 $S(g) < 0$ 時會有 $S(f \circ g) < 0$，故 f 的迭代 f^n 皆有負的 Schwarz 導數。利用這點證明 $|(f^n)'|$ 之極小值爲 0，因此，穩定週期點的每個鄰域均包含一個臨界點的逆像或者 I 的一個端點。

我們還要假設 $f(0) = f(1) = 0$，且 f 在 I 的內部只有一個臨界點 C（註 1）。若 0 是穩定的定點，則假設當 $n \to \infty$ 時，$f^n(c) \to 0$。在這些條件下，變換 f 就至多有一個穩定的週期點。我們將針對滿足以上設定的單

參數變換族（one parameter families of maps），在當參數改變時，檢視其穩定週期軌道的出現規律。

令 $f_\mu : I \to I$ 爲一「單參數變換族」，其中 $\mu \in [\mu_0, \mu_1]$，除了前面的設定以外，它們還擁有下面的性質：

(1) $f_{\mu_0}(c) = c$；

(2) $f_{\mu_1}(c) = 1$。

（一般來講，臨界點 $c = c(\mu)$ 是隨 μ 而變的。）我們稱這樣的 $\{f_\mu\}$ 爲一個「全族」（full family）。它們的一個代表是二次 logistic 方程：

$$f_\mu(x) = \mu x(1-x); \quad \mu \in [2, 4] \tag{2}$$

此時，c 恆爲 $\frac{1}{2}$。在一個「全族」裡面，必定有很多週期軌道的分歧現象。事實上，f_{μ_0} 僅有兩個定點，而當 $n > 0$ 時，$f^n_{\mu_1}$ 最少有 2^n 個定點（註 2）。因此，當 μ 在 $[\mu_0, \mu_1]$ 之間增加時，新的週期軌道就陸續產生。這種規律乃是由變換的「一維性」（one dimensionality）所維繫著的，也正是我們現在描述的現象。

我們可以利用「符號動力系統」（symbolic dynamics）來描述一個「全族」中週期軌道的出現情況，這種所謂 kneading 理論的數學架構及術語是由 Milnor 和 Thurston〔11〕所引進的，它可以描畫出個別變換的大部份結構，同時也能決定一個變換族的很多分歧構造。我們將從少數幾個必要的定義出發，首先，把區間 I 分成兩個子區間 $I_0 = [0, c)$，$I_1 = (c, 1]$ 以及一個點 $C = \{c\}$，區間 I_0 和 I_1 稱爲 f 的「邊」（laps），若 $x \in I$，$n \geq 0$，視乎 $f^n(x) \in I_0$，$f^n(x) = c$ 或者 $f^n(x) \in I_1$，分別稱 x 的第 n 次位置 $A_n(x)$ 爲 I_0，C 或者 I_1。x 的<u>歷程</u>（itinerary）$A(x)$ 乃指序列 $\{A_n(x)\}$，而 $f(c)$ 的歷程則稱爲 f 的<u>kneading 序列</u>。

我們定義 $\varepsilon(I_0), \varepsilon(C)$ 及 $\varepsilon(I_1)$ 分別爲 $+1, 0, -1$，給定符號序列 $a = \{a_n\}$，它的<u>不變坐標</u>（invariant coordinate）$\theta(a) = \{\theta_n(a)\}_{n \geq 0}$ 定義成

$$\theta_0(a) = a_0 \ ; \ \theta_n(a) = \left[\prod_{i=0}^{n-1} \varepsilon(a_i) \right] a_n \ , \ n \geq 1 \ ,$$

而對 $x \in I$，記 $\theta(x) = \theta(A(x))$，$\theta_n(x) = \theta_n(A(x))$。

我們規定大小關係 $-I_1 < -C < -I_0 < 0 < I_0 < C < I_1$，再按照字典的排列順序，就可以賦與（不變）坐標的一個次序。也就是說，如果存在 n，使得當 $i < n$ 時，$\theta_n(x) < \theta_n(y)$，則定義 $\theta(x) < \theta(y)$。不變坐標的這種次序關係正好能夠反映出直線上的大小關係：

<u>命題 2</u>　（Milnor , Thurston , 1977〔 11 〕）

$$x < y \quad \Rightarrow \quad \theta(x) \leq \theta(y)$$

<u>證明</u>：　令 $x < y$，並設 $\theta(x) \neq \theta(y)$。若 n 是使 $\theta_n(x) \neq \theta_n(y)$ 成立的最小整數，且 $J = [x, y]$，那麼，由於當 $i < n$ 時，c 都不落在 $f^i(J)$ 中，故對 $i \leq n$ 而言，f^i 在 J 上皆是單調的。而 f^n 在 J 上爲下降或是上升則視乎 $\theta_n(x)$ 的符號爲 -1 或是 $+1$ 而定，無論如何，容易證明 $\theta_n(x) < \theta_n(y)$。

不變坐標的這種單調性允許我們作進一步的符號計算，由於 $f(c)$ 是變換 f 的最大值，故 $\theta(f(c))$ 會大於（或等於）其他任何點的不變坐標，利用這個觀點我們可以得出一個關於對給定歷程之軌道存在性定理。首先，注意到 $A(f(x)) = \sigma(A(x))$，其中 σ 是序列的「位移變換」（shift map）；因此，對任意的 $x \in I$ 及 $n \geq 0$，關係式 $\theta(\sigma^n(A(x)) \leq \theta(f(c))$ 皆成立。（註 3）

<u>定理 3</u>　若 a 是一個符號序列，且 $\theta(\sigma^n(a)) < \theta(f(c))$ 對所有 $n \geq 0$ 皆成立，則存在一點 x，使得 $a = A(x)$。

f 的 kneading 序列本質上可以決定 f 的所有歷程，詳盡的細節可以參考 Guckenheimer〔 7 〕。

前面這個定理直接地引導我們去探察分歧集的結構，利用定理中的判別式，我們可以定義符號序列的一個次序關係。給定兩個符號序列 a 和 b，我們稱 $a < b$ 的意思是「存在整數 $m \geq 0$，使得對所有 $n \geq 0$，皆有 $\theta(\sigma^n($

a))＜θ(σ^m(b))」；此時，如果存在一點x使得A(x)＝b，那麼，也必定有一y使A(y)＝a。變換之間kneading 序列如果一樣的話，則它們的所有歷程都是相同的，而＜正好定義了kneading 序列的一個大小關係。對可微分變換而言（f′(c)＝0），一個全族裡可以獲得所有可能的kneading 序列。因此，在參數μ_0及μ_1間的分歧現象，代表了介於f_{μ_0}及f_{μ_1}間所有變換之kneading序列的轉移（transitions）。特別地，我們有：

<u>定理4</u>　在以I_0和I_1爲元素的所有週期序列當中，存在一個次序關係，具有以下性質：

(1) 序列a及b爲等價的充要條件是存在n使得σ^n(a)＝b。

(2) 若f_μ，$\mu\in$〔μ_0，μ_1〕爲一個單參數變換族，而f_{μ_0}及f_{μ_1}皆有週期的kneading序列，且f_{μ_0}的比f_{μ_1}的小，則變換族f_μ中有一堆分歧現象，對應著f_{μ_0}及f_{μ_1}的kneading序列之間所有週期軌道的出現情況。

<u>習題</u>：（Sarkovskii〔13〕；Li，Yorke〔9〕；Stefan〔15〕）令f爲單位區間I上的連續函數，L＝〔a，b〕，R＝〔c，d〕是I的兩個閉子區間，其中b≤c，並且L∪R⊂f(R)，R⊂f(L)，最後假設b＜c或者f^2(b)$\not\subset$R。證明f有任意週期的週期點，因此，若變換g有週期3的點，則它有所有週期的點。（提示：找出軌道{f^k(x)}，其中當0≤k≤n－2時，f^k(x)∈R，而f^{n-1}(x)∈L及f^n(x)＝x∈R）

不像Guckenheimer〔6〕、〔7〕或者Collet，Eckmann〔2〕那樣繼續追求解析的細節，我們將引介一種關於kneading序列的符號計算，它會涵蓋Sarkovskii定理〔13〕（參考Stefan〔15〕）。這種計算乃針對每個週期，找出其最小的週期軌道（在我們這裡所定義的大小關係之下）。我們只考慮不含C的歷程，原因是它們絕對不會是最小的週期軌道。（註4）

首先，注意到「常」歷程a，其中對所有n皆有a_n＝I_0，僅代表會逼近I_0中某個定點（0）的點，因此，所有週期大於1的週期軌道的歷程中均含有符號I_1。其次，以I_1I_0開始的序列要比以I_1I_1開始的大，同理，開

始爲 $I_1I_0I_0$ 的要比開始爲 $I_1I_0I_1$ 的大。（註 5 ）

引理 5　考慮序列 a 和 b，$a_0 = b_0 = I_1$，$a_1 = b_1 = I_0$，而對 $2 \leq j < \ell$，$a_j = b_j = I_1$，且 $a_\ell = I_0$，$b_\ell = I_1$；若 ℓ 爲偶數，則 $\theta(b) < \theta(a)$；若 ℓ 爲奇數，$\theta(a) < \theta(b)$。

證明：　利用不變坐標之大小關係的定義容易得證。（註 6 ）

引理 6　令 a 爲一個歷程，當 i 是偶數時，$a_i = I_1$；b 也是一個歷程，$b_0 = I_1$，而對某個偶數 i，$b_i = I_0$，則存在整數 k，使得對所有 $\ell \geq 0$，$\theta(\sigma^\ell(a)) < \theta(\sigma^k(b))$。

證明：　令 i 表示使 $b_i = I_0$ 成立的最小偶數，再取偶數 k 使得 $b_{k+1} = I_0$，而當 $k+1 < j < i$ 時，$b_j = I_1$。那麼，若令 $c = \sigma^k(b)$，則 $c_1 = c_{i-k} = I_0$，且對 $1 < j < i-k$ 及 $j = 0$，$c_j = I_1$。今對任意 $\ell \geq 0$，令 $d = \sigma^\ell(a)$，若 ℓ 是奇數，則 $d_1 = I_1$，這表示 $\theta(d) < \theta(c)$。若 ℓ 是偶數，則對所有的偶數 j，$d_j = I_1$。此時若 $d_1 = I_1$，則 $\theta(d) < \theta(c)$。若 $d_1 = I_0$，取 m 爲使 $d_m = I_0$ 成立之最小奇數，然後來比較 $\theta(c)$ 及 $\theta(d)$。如果 $m < i-k$，則 $j = m$ 爲使 $c_j \neq d_j$ 成立之最小整數，因而 $c_m = I_1$，$d_m = I_0$，且在這兩個序列的前 m 項中各出現偶數個 I_1，所以 $\theta(d) < \theta(c)$。如果 $m > i-k$，則 $j = i-k$ 爲使 $c_j \neq d_j$ 成立之最小整數，因而 $c_{i-k} = I_0$，$d_{i-k} = I_1$，且在這兩個序列的前（$i-k$）項中各出現奇數個 I_1，所以 $\theta(d) < \theta(c)$。由於 m 是奇數，絕不會等於 $i-k$，故得證本引理。

引理 7　令 n 爲一奇數，a 是週期 n 的最小週期軌道中最大那點的歷程，那麼，若 $i \equiv 1 \pmod n$，則 $a_i = I_0$；否則，$a_i = I_1$。

證明：　如果存在 k 使得 $a_k = I_1$ 及 $a_{k+1} = a_{k+2} = I_0$，則 $\sigma^k(a)$ 要比只孤立地出現 I_0 的序列有較大的不變坐標。因此，對引理中的序列 a 而言，若 $a_k = I_0$，則 $a_{k-1} = a_{k+1} = I_1$。其次，在序列中會有一「節」偶數長度的符號，除了首、尾之外，皆是 I_1。引理 5 告訴我們這種「節」愈長，它的歷程愈短。在本引理提到的歷程中，也有這類的「節」，對週期 n 來講，其最大長度爲 $n+1$。

系理 8　若 $n > 1$ 爲奇數，則存在週期 $n+2$ 的週期軌道，使得它小於所有週期 n 的週期軌道。

利用引理 6，我們可以造出任意偶數週期的軌道，使其小於所有奇數週期的軌道，具有如此性質的週期軌道之歷程的偶數項必爲 I_1。若變換 f 的 kneading 序列有此性質，則 f^2 的圖形就會形如圖 1 中的那樣，存在〔0，1〕的一個包含 c 的子區間 J，它被 f 映回到 J 裡。我們前面對 f 的討論正好可以用於 f^2 在 J 中各點的歷程上，只不過現在符號 I_0 與 I_1 須要互換而已（此乃因這個變換經過一次「倒轉」之故）。所以，序列 a 要小於序列 b，其中當 i 是偶數時，$a_i = I_1$，當 $i \equiv 1 \pmod 4$ 時，$a_i = I_0$；而當 i 是奇數時，$b_i = I_1$，且存在某個 $i \equiv 1 \pmod 4$，使得 $b_i = I_1$。

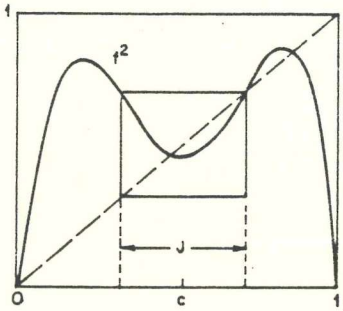


圖 1：f^2 的圖形

引理 9　若 k，ℓ 爲奇數，$m > n$，則存在週期爲 $k \cdot 2^m$ 的序列，它小於所有週期爲 $\ell \cdot 2^n$ 的序列。

引理 10　若 k，ℓ 爲奇數，$1 < k < \ell$，則存在週期爲 $\ell \cdot 2^n$ 的序列，它小於所有週期爲 $k \cdot 2^n$ 的序列。

證明：　習題。

我們以 Sarkovskii 定理結束這個對週軌道的討論，它在非常一般的情況之下也會成立的。

<u>定理 11</u> （Sarkovskii〔13，1964〕，Stefan〔15〕，Block 等〔1〕）考慮以下所有正整數之間的一個大小關係：

$$1 \leftarrow 2 \leftarrow 4 \leftarrow \cdots \leftarrow 2^{k} \leftarrow 2^{k+1} \leftarrow \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots \leftarrow 2^{k+1} \cdot (2l+1) \leftarrow 2^{k+1} \cdot (2l-1) \leftarrow \cdots \leftarrow 2^{k+1} \cdot 5 \leftarrow 2^{k+1} \cdot 3 \leftarrow \cdots$$

$$\cdots \leftarrow 2^{k} \cdot (2^{l}+1) \leftarrow 2^{k} \cdot (2l-1) \leftarrow \cdots \leftarrow 2^{k} \cdot 5 \leftarrow 2^{k} \cdot 3 \leftarrow \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots \leftarrow 2(2l+1) \leftarrow 2(2l-1) \leftarrow \cdots \leftarrow 2 \cdot 5 \leftarrow 2 \cdot 3 \leftarrow \cdots$$

$$\cdots \leftarrow (2l+1) \leftarrow (2l-1) \leftarrow \cdots \leftarrow 5 \leftarrow 3$$

若 f 爲從某個區間到它本身的連續函數，又 f 有週期爲 p 的週期點，且 $q \leftarrow p$，則 f 有週期 q 的週期點。

特別地，這個定理包含了Li，Yorke〔9〕所謂的『週期 3 ⇒混沌（chaos）』。

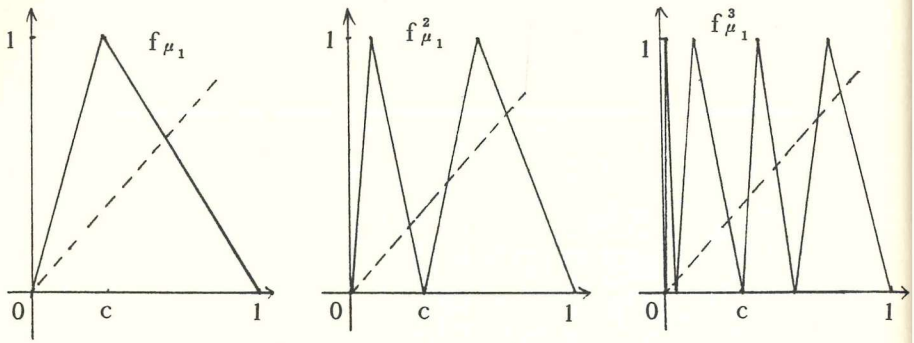
注意Sarkovskii 次序中的第一列，它是由 2 的冪方從小至大排在一起的，這代表了在單參數族中從只含一個定點的參數演化成有無窮個週期軌道的參數之間的<u>週期倍增分歧現象</u>（periodic doubling bifurcations），Feigenbaum〔4〕首先發現它有豐富的結構，並具，在一個很大批的變換之間，這些性質是跟變換無關的，也就是所謂的「universal」（參考 Collet，Eckmann〔2〕；Collet 等〔3〕）（註 7）。再者，透過週期倍增分歧到混沌的現象，在某些系統中極爲普遍（都有某個週期軌道的穩定與不穩定流形（stable and unstable manifold）複雜地相交在一起，即所謂的 homoclinic tangency （註 8）），譬如Huberman，Crutchfield〔8〕及Ueda〔16〕利用數值的方法從Duffing 方程觀察得到；另外也出現在Libchaber，Maurer〔10〕的流體實驗中；Gollub，Benson〔5〕更藉助指出其與分歧理論的關係，以瞭解流體系統中轉變成「亂流」（turbulence）的情境。

*　　*　　*　　*

譯註：

(1) 這裡都假設 c 爲極大點，若改成極小點，則後面的一些不等式的方向會相反。

(2)



可以看出 $f^n_{\mu_1}$ 的確會有 2^n 個定點。

(3) $\sigma(\{a_1, a_2, \cdots\cdots\}) = \{a_2, a_3, \cdots\cdots\}$，

所以， $\sigma^n(A(x)) = A(f^n(x))$

(4) $I_1 I_0 I_0 I_0 \cdots\cdots$ 一定要比它小，也一定有這種週期點。

(5) $\theta\{I_1 I_0 \cdots\cdots\} = \{I_1, -I_0, \cdots\cdots\}$

$\theta\{I_1 I_1 \cdots\cdots\} = \{I_1, -I_1, \cdots\cdots\} < \{I_1, -I_0, \cdots\cdots\}$

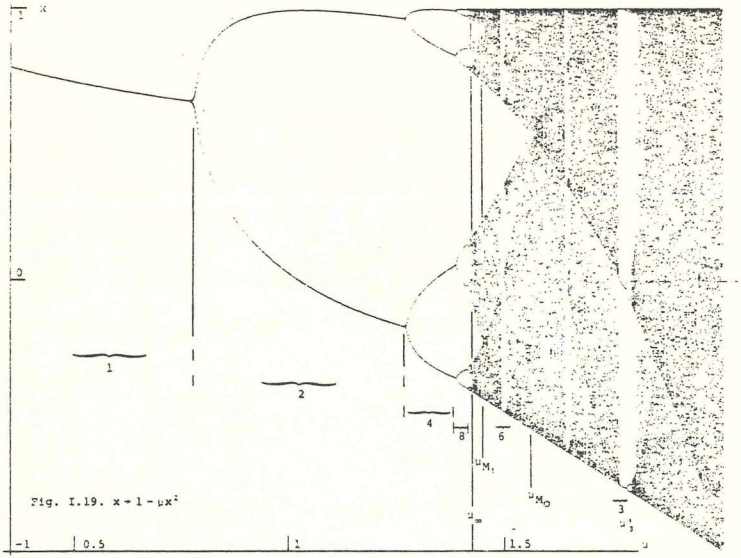
$\theta\{I_0 \cdots\cdots\cdots\} = \{I_0, \cdots\cdots\} < \{I_1, -I_0, \cdots\cdots\}$

(6) $a = \{I_1 I_0 I_1 I_1 \cdots\cdots I_1 I_0\}$， $b = \{I_1 I_0 I_1 I_1 \cdots\cdots I_1 I_1\}$

$\theta_j(a) = \theta_j(b)$， $j = 0, 1, 2, \cdots\cdots, \ell - 1$

$\theta_\ell(a) = (-1)^{\ell-1} I_0$， $\theta_\ell(b) = (-1)^{\ell-1} I_1$

(7)



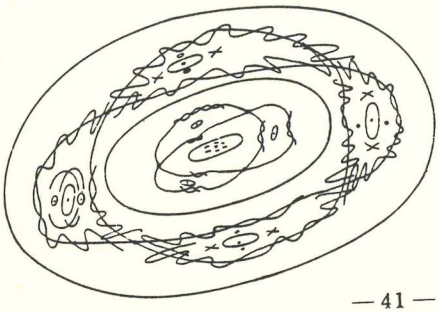
<u>週期倍增現象</u>：當 $\mu = \mu_n$ 時，f_μ 開始有 2^n 一週期點，Feigenbaum 證明，對某一類變換族，

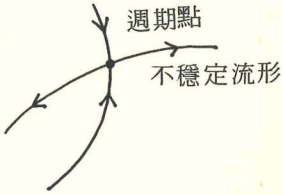
$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu_\infty \text{ 存在}$$

而且 $$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n+1}-\mu_n}{\mu_n-\mu_{n-1}} = \delta \approx 4.66920 \cdots\cdots$$ （與變換 f_μ 無關）

(8)

homoclinic tangency





参考資料：

[1] Block L., Guckenheimer J., Misiurewicz M., Young L.S.

Periodic points of one-dimensional maps.

Lecture Notes in Math. 819(1979) 18-34.

[2] Collect P., Eckmann J.P.,

Iterated Maps on the Interval as Dynamical System.

Progress on Physics I, 1980, Birkhauser.

[3] Collet P., Eckmann J.P., Lanford O.E.

Universal properties of maps on an interval.

Comm. Math. Phy., 76(1980) 211-254.

[4] Feigenbaum M.J.

Quantitative universality for a class of nonlinear transformations.

J. Stat. Phy., 19(1978) 25-52.

[5] Gollub J.P., Benson S.V.

Many routes to turbulent convection.

J. Fluid Mech., 100(1980) 449-470.

[6] Guckenheimer J.

On the bifurcation of maps of the intervals.

Invent. Math., 39(1977) 165-178.

[7] Guckenheimer J.

Sens itive dependence on initial conditions for one-dimensional maps.

Comm. Math. Phy., 70(1979) 133-160.

[8] Huberman B., Crutchfield J.P.

Chaotic states of anharmonic systems in periodic fields.

Phy. Rev. Lett., 43:23(1979) 133-160.

[9] Li T.Y., Yorke. J.A.

Period three implies chaos.

Amer. Math. Monthly, 82(1975) 985-992.

[10] Libchaber A., Maurer J.

A Rayleigh-Benard experiment: Helium in a small box.

Nonlinear Phenomena at Phase Transitions and Instabilities, 259-286, Plenum, 1982.

[11] Milnor J., Thurston R.

On iterated maps of the interval, I &II.

Princeton University, 1977 (unpublished notes).

[12] Misiurewicz M.

The structure of mapping of an interval with zero entropy.

Publ. Math. IHES, 53(1981) 5-16.

[13] Sarkovskii A.N.

Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself.

Ukr. Math. Z., 16(1964) 61-71.

[14] Singer D.

Stable orbits and bifurcations of maps of the interval.

SIAM J. Appl. Math., 35(1978) 260-267.

[15] Stefan P.

A theorem of Sarkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line.

Comm. Math. Phy., 54(1977) 237-248.

[16] Ueda Y.

Explosion of strange attractors exhibited by Duffing' equations.

Nonlinear Dynamics, 422-434, New York Acad. of Sci. 1981.

4．反射原理

指導老師：王建都
作　　者：于鴻福

前年因帶75 甲的機率論。在他們所採用的課本（S.M.Ross 所著的“INTRODUCTION TO PROBABILITY MODELS”）中看到了下面這個問題：

已知在某次選舉中，候選人A得n張選票而候選人B得m張選票，其中$n>m$。若假定在開票過程中，每一張選票被抽出的機率皆相同，那麼，試證：在整個開票過程中，A得票一直領先B的機率是$n-m/n+m$。

此問題是著名的“投票問題”。初見這個問題，感覺相當的有意思，想了一想，動筆畫了幾下，一時之間不知從那兒著手才好。於是順勢地看了題目下的解答，其整個證明如下：

令$P_{n,m}$ 表示所求的機率，利用條件機率的概念，我們可得

$$P_{n,m}=p\{A\text{一直保持領先}\mid A\text{得到最後一票}\}\times\frac{n}{n+m}$$

$$+P\{A\text{一直保持領先}\mid B\text{得到最後一票}\}\times\frac{m}{n+m}$$

現在若已知A得到最後一票，則A一直保持領先的機率是和總票數$n+m-1$時，A得$n-1$票，B得m票，且A一直保持領先的機率是一樣的。同理，若已知B得到最後一票，則A一直保持領先的機率和總票數$n+m-1$時，A得n票而B得$m-1$票，並且A一直保持領先之狀況的機率相等，於是

$$P_{n,m}=\frac{n}{n+m}\times P_{n-1,m}+\frac{n}{n+m}P_{n,m-1}$$

現在我們可以對 $n+m$ 做歸納，以證明

$$P_{n,m}=\frac{n-m}{n+m} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

當 $n+m=1$ 時；因 $n>m$，所以 $n=1$ ，$m=0 \Rightarrow n-m=1 \Rightarrow \frac{n-m}{n+m}=1$ $=P_{1,0}$ 成立，假設當 $n+m=k$ 時結果成立，那麼，對於 $n+m=k+1$ ，我們可由(1)式和歸納法假設得到

$$P_{n,m}=\frac{n}{n+m}\times\frac{n-1-m}{n-1+m}+\frac{m}{n+m}\times\frac{n-m+1}{n+m-1}=\frac{n-m}{n+m}$$

故證明完畢！

實在令人興奮，此證明既清晰又簡潔，眞是值得多看幾遍。但仔細地想了一想，整個證明是以對

$$P_{n,m}=\frac{n-m}{n+m}$$

來做歸納法而完成的，但究竟這個關鍵

$$P_{n,m}=\frac{n-m}{n+m}$$

又是如何知道的呢？至此還是沒有解決。$Z^{z^{z^{\cdots}}}$

……，數十日後，也就在此問題將要完全淡忘的那時候，有一位高二的學生進到辦公室來問了下面這個問題：

已知某家戲院有價格 50 元、100 元之兩種入門票各 n 張，今有 $2n$ 個人手持一張 50 元或 100 元鈔票，其中恰 n 個人持 50 元，n 個人持 100元，若規定在買票過程中，售票處若無錢找給持 100元買票之人的話，則就不賣給此一持 100元的人，那麼，試問：若將此 $2n$ 個人隨機地排成一列去買票，則 $2n$ 張票可以完全售完之機率是多少？

那時看完了題目，心理覺得相當得意，以爲是「投票問題」的特殊情形，這下子可以對這個高中生好好地表現一下，誰知拿出書本翻至 p.105，仔

細一對照，才知此問題中，排隊買票固然和開票類似，但「投票問題」中是 A 一直保持領先，而此問題則是說，不管從隊中之那一個人往前算，持 50 元的人數總不比持 100元之人數少！雖然是深受打擊，但此時心中也下了決心，非把此題連同「投票問題」澈底解決不可。於是，除了展開一連串的老師、學長和同學的拜“會”行動外（ p.s 順便打擊他們），自己也舉了一些簡單的例子如下：

$n=1$ ；

排隊方式：

√① 50,100

② 100,50

所以機率：$\frac{1}{2}$

$n=2$ ；

排隊方式：

√① 50,50,100,100

√② 50,100,50,100

③ 50,100,100,50

④ 100,50,100,50

⑤ 100,50,50,100

⑥ 100,100,50,50

所以機率是 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$n=3$ ；

排隊方式：

√① 50,50,50,100,100,100

√② 50,50,100,50,100,100

√③ 50,50,100,100,50,100

④ 50,50,100,100,100,50

√⑤ 50,100,50,50,100,100

√⑥ 50,100,50,100,50,100

⑦ 50,100,50,100,100,50

⑧ 50,100,100,50,50,100

⑨ 50,100,100,50,100,50

⑩ 50,100,100,100,50,50

⑪ 100,50,50,50,100,100

⑫ 100,50,50,100,50,100

⑬ 100,50,50,100,100,50

⑭ 100,50,100,50,50,100

⑮ 100,50,100,50,100,50

⑯ 100,50,100,100,50,50

⑰ 100,100,50,50,50,100

⑱ 100,100,50,50,100,50

⑲ 100,100,50,100,50,50

⑳ 100,100,100,50,50,50

所以機率是 $\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

由上面的數據，或許很自然地大家都會猜說，當 $n=k$ 時，其機率是 $1/k+1$。大膽假設，小心求證，既然答案已經假設出來，接著就來模倣一下「投票問題」的解答，來個歸納法證明：

因爲有 50 元和 100 元兩種，所以令 $P(n,n)$ 表所求的機率，其中第一個表 50 人數，第二個 n 表 100 元人數。

$$P(n,n)=P\{\text{票全部售完}\mid\text{最後一個人是持 50 元}\}\times\frac{n}{2n}$$

$$+P\{\text{票全部售完}\mid\text{最後一個人是持 100 元}\}\times\frac{n}{2n}$$

$$=P(n-1,n)\times\frac{1}{2}+P(n,n-1)\times\frac{1}{2}$$

$$=P(n,n-1)\times\frac{1}{2}$$

式子看來似乎不錯，但是我們所已知的值是 $P(k,k)$ 的型式，而 $P(k,k-1)$ 的型式，於是，在我的心中就起了這樣的盤算：只對 n 做歸納，要求證 $P(n,n)=\frac{1}{n+1}$ 可能不恰當，倒不如先求出 $P(n,m)$，然後再對 n，m 做歸納加以證明。就這樣，箭頭轉向求出 $P(n,m)$ 之值：其中 n 是持 50 元人數，m 是持 100元人數 $n\geq m$。下面看幾個 $n\neq m$ 的簡單例子。

$n=2$，$m=1$

排隊方式：

√① 50,50,100

√② 50,100,50

③ 100,50,50

所以機率是 $\frac{2}{3}$

$n=3$，$m=1$

排隊方式：

√① 50,50,50,100

√② 50,50,100,50

√③ 50,100,50,50

④ 100,50,50,50

所以機率是 $\frac{3}{4}$

$n = 3$, $m = 2$

排隊方式：

√① 50,50,50,100,100

√② 50,50,100,50,100

√③ 50,50,100,100,50

√④ 50,100,50,50,100

√⑤ 50,100,50,100,50

⑥ 50,100,100,50,50

⑦ 100,50,50,50,100

⑧ 100,50,50,100,50

⑨ 100,50,100,50,50

⑩ 100,100,50,50,50

所以機率是 $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$n = 4$, $m = 1$

排隊方式：

√① 50,50,50,50,100

√② 50,50,50,100,50

√③ 50,50,100,50,50

√④ 50,100,50,50,50

⑤ 100,50,50,50,50

所以機率是 $\frac{4}{5}$

$n = 4$, $m = 2$

排隊方式：

√① 50,50,50,50,100,100

√② 50,50,50,100,50,100

√③ 50,50,50,100,100,50

√④ 50,50,100,50,50,100

√⑤ 50,50,100,50,100,50

√⑥ 50,50,100,100,50,50

√⑦ 50,100,50,50,50,100

√⑧ 50,100,50,50,100,50

√⑨ 50,100,50,100,50,50

⑩ 50,100,100,50,50,50

⑪ 100,50,50,50,50,100

⑫ 100,50,50,50,100,50

⑬ 100,50,50,100,50,50

⑭ 100,50,100,50,50,50

⑮ 100,100,50,50,50,50

所以機率是 $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

要由前面和上面的數據去推出有兩個變數的$P(n,m)$實在是有困難，不過；我們有一個“超級土法”可以解決這個問題：由於此題與「投票問題」甚爲相近且「投票問題」之答案是$\frac{n-m}{m+n}$，於是，吾人可以假設

$$P(n,m)=\frac{an+bm+c}{dn+em+f}$$

（注意：如此假設並無一定正確，僅是一試罷了，不過，仍不失其合理之處）

將前面$n=1$，$m=1$，$P_{n,m}=\frac{1}{2}$；$n=2$，$m=2$，$P_{n,m}=\frac{1}{3}$；$n=3$，$m=3$，$P_{n,m}=\frac{1}{4}$及上面這些數據代入上式得：

$$\left.\begin{array}{l}
P(1,1)=\dfrac{a+b+c}{d+e+f}=\dfrac{1}{2} \\
\quad\Rightarrow 2a+2b+2c=d+e+f \\
P(2,2)=\dfrac{a\times 2+b\times 2+c}{d\times 2+e\times 2+f}=\dfrac{1}{3} \\
\quad\Rightarrow 6a+6b+3c=2d+2e+f \\
P(3,3)=\dfrac{a\times 3+b\times 3+c}{d\times 3+e\times 3+f}=\dfrac{1}{4} \\
\quad\Rightarrow 12a+12b+4c=3d+3e+f
\end{array}\right\}\begin{array}{l}
4a+4b+c=d+e \\
\\
6a+6b+c=d+e
\end{array}\Bigg\}\Rightarrow a+b=0$$

$\therefore c=d+e=f$且$b=-a$

代入$P(n,m)$中得

$$P(n,m)=\frac{a\times n+(-a)\times m+(d+e)}{d\times n+e\times m+(d+e)}$$

再將$n=2$，$m=1$，$P(n,m)=\frac{2}{3}$；$n=3$，$m=1$，$P(n,m)=\frac{3}{4}$；$n=3$，$m=1$，$P(n,m)=\frac{4}{5}$

$$P(2,1)=\frac{a\times 2+(-a)\times 1+(d+e)}{d\times 2+e\times 1+(d+e)}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3a+(d+e)=4d+2e$$

$$P(3,1)=\frac{a\times 3+(-a)\times 1+(d+e)}{d\times 3+e\times 1+(d+e)}=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 8a+(d+e)=9d+3e$$

$$P(4,1)=\frac{a\times 4+(-a)\times 1+(d+e)}{d\times 4+e\times 1+(d+e)}=\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow 15a+(d+e)=16d+4e$$

$$\left.\begin{array}{l} 5a=5d+e \\ 7a=7d+e \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=d \\ e=0 \end{array}$$

$$\Rightarrow c=d=f=a=-b$$

於是 $$P(n,m)=\frac{a\times n+(-a)\times m+a}{a\times n+a}=\frac{n-m+1}{n+1}$$

現在，我們也對 $n+m$ 做歸納，以證明 $P(n,m)=\dfrac{n-m+1}{n+1}$ 的正確性：

(1) 當 $n+m=1$; i.e., $n=1$, $m=0$，所以，必定可以賣完，∴機率是 1 ，而 $P(n,m)=\dfrac{1-0+1}{1+1}=1$ ，所以，$n+m=1$ 成立。

(2) 設 $n+m=k$ 是，結果亦成立；那麼，當 $n+m=k+1$ 時，因

$$P(n,m)=P\{\text{票全部售完}\mid\text{最後一個人是持 50 元}\}\times\frac{n}{m+n}$$

$$+P\{\text{票全部售完}\mid\text{最後一個人是持 100元}\}\times\frac{m}{m+n}$$

$$\therefore P(n,m)=P(n-1,m)\times\frac{n}{m+n}+P(n,m-1)\times\frac{m}{m+n}$$

$$=\frac{n-m}{n}\times\frac{n}{m+n}+\frac{n+1-(m-1)}{n+1}\times\frac{m}{m\times n}$$

$$=\frac{(n-m)(n+1)+(n-m+2)\times m}{(n+1)(m+n)}$$

$$=\frac{n^2+n-mn-m+mn-m^2+2m}{(n+1)(m+n)}=\frac{(n+m)(n-m+1)}{(n+1)(m+n)}$$

$$=\frac{n-m+1}{n+1}$$

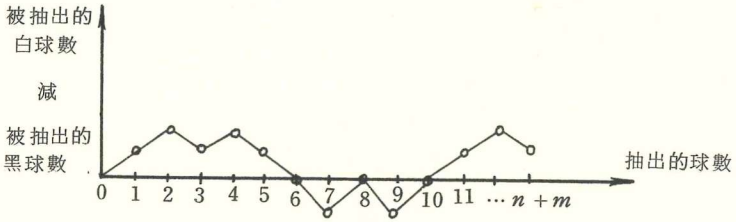
證明順利完成！眞是皇天不負苦心人！對於特殊的情形 $n=m$，代入 $P(n,m)$ 中，我們可得到

$$P(n,n)=\frac{n-m+1}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

此即我們前面所推測而未能證明的結果！

到上面所止固然是對 $P(n,m)$ 的由來有了“一點”交代，但是，方法太土，實在有點傷腦筋，不過，下面我們要介紹的這一種稱爲反射原理（Reflection Principle）的方法，不但一點也不土，而且清晰有效率。這是本篇的主題，所以其威力可想應不會太差，茲介紹如下：

假設要從一個裝有 n 個白球與 m 個黑球（$n>m$）的盒子中連續不放回地將球抽出。我們想求出在某一次抽完後，被抽出的白球和黑球個數會相等的機率。上面這個狀況可看成是 n 個白球和 m 個黑球的混合排列，現在我們將這個結果表成圖㈠樣的坐標圖形，這樣可給我們一個清晰的輪廓。圖㈠的橫軸表示抽出的球數，縱軸表示抽出的白球數減去抽出的黑球數。因爲 n 個白球和 m 個黑球之不同的排列總數是 $\frac{(n+m)!}{n!+m!}=C_m^{m+m}$，而且，這些排列



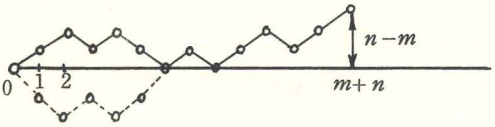
圖㈠

的每一種發生的機率都一樣，所以，在某一回抽出後，已抽的向黑球個數相同的機率應等於有這樣現象的結果的個數除以C_m^{m+n} 。不過，有著已抽出的黑白球個數會相等這種現象的結果吾人可將其分成兩種類型：

(1) 第一個被抽出的球是黑的；其實因$n>m$，所以已註定抽出的黑白球個數會在某一次後相等。

(2) 第一個被抽出的球是白的；

現在我們隨便考慮一個型(2)的結果並將其以圖(一)之形式表示如下：



圖(二) 反射原理

把0到圖形和橫軸第一次接觸的地方間的那段對橫軸做反射而其餘部份不改變，那麼，我們就可以得到一個型(1)的結果。實際上，經由這種方法（就是所謂的反射原理）我們不難知道，我們可以將型(2)的結果以一對一的方式對應於型(1)的結果。例如，圖(二)中所示的是將結果WWBWBBWBWWBWW反射成BBWBWWWBWWBWW這個結果。從型(1)和型(2)間的這種1-1對應。我們可以得知：型(1)和型(2)的結果一樣多。但是，第一個被抽出的是黑球這樣結果的總數等於n個白球和$m-1$個黑球的排列總數

i.e. $\dfrac{(n+m-1)!}{n!\times(m-1)1}$ 。因此，在某次抽出後，會有抽出之白黑球數目相等的機率是

$$\frac{2\times\dfrac{(n+m-1)!}{n!\times(m-1)!}}{\dfrac{(n+m)!}{n!m!}}=\frac{2m}{n+m}$$

至此，我們可以利用這個結果不費吹灰之力地將前面兩個問題好好地加以修理修理：

1. 「投票問題」：對於此問題，應將上面情形之白球看作A候選人之得票，黑球則爲B候選人之得票，那麼因爲A候選人一直保持領先，開票的任何時候皆和B之得票不同，故其機率是

$$P_{n,m} = 1 + \frac{2m}{n+m} = \frac{n-m}{n+m}$$

2. 「買票問題」：此問題則是把白球視爲50元票，黑球視爲100 元票。對於此問題我們還是先解出一般的情形，i.e.50 元票有n張，100元票m張，而且有n個人持50元，m個人持100元，排隊買票。依前所用的行號，我們可得

$$P_{n,m} = \frac{n}{n+m} \quad P(n-1, m)$$

又因$P_{n,m} = \dfrac{n-m}{n+m}$，所以 $P(n-1, m) = \dfrac{n-m}{n}$

因此 $$P(n, m) = \frac{n+1-m}{n+1}$$

最後，我們再看一個反射原理的精彩應用。這個例子就是利用反射原理以求出布朗運動（BROWNIAN MOTION）的機率表示式。以下內容是由[3]中p.274-p.279節錄下來，詳細原文請自行參考書中之內容。現在，我們先給出布朗運動的定義：

定義：布朗運動就是具有下列性質的隨機過程$\{X(t): t \geq 0\}$：

(a) 每一增量$X(t+s)-X(s)$都是期望值0，變異數ct的常態分配；其中$c>0$是一個固定的常數參數。

(b) 對於海一對互不重疊的時間區間$[t_1, t_2]$，$[t_3, t_4]$，$t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$，增量$X(t_4)-X(t_3)$和$X(t_2)-X(t_1)$是有(a)中分配之獨立隨機變數。至少任意n個互不重疊之時間區間的狀況與此相似。

在這種定義中，其實已明訂說位移$X(t+s)-X(s)$ 和過去過程無關。或者說，假如我們知道$X(s)=x_0$，那麼，沒有$X(\tau)$ $(\tau < s)$ 進一步的值可

以有作用於$X(t+s)-X(s)$的機率模式。正式地寫的話是這樣的：假如

$t>t_0>t_1>\cdots>t_n$，

$$P_r[X(t)\leq x \mid X(t_0)=x_0, X(t_1)=x_1, \cdots, X(t_n)=x_n]$$
$$=P_r[X(t)\leq x \mid X(t_0)=x_0]$$

在定義的(a)部份，令$c=1$，我們可得

$$P_r[X(t)\leq x \mid x(t_0)=x_0]=P_r[X(t)-X(t_0)\leq x-x_0]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}}\int_{-\infty}^{x-x_0}\exp\left[-\frac{\alpha^2}{2(t-t_0)}\right]d\alpha$$

由物理的起源來看，$X(t)$是粒子在其環境介質中連續碰撞所產生的移動路徑，所以是個連續函數。不過，在此之討論，我們僅把$X(t)$當作是粒子位置的x - 坐標。利用$X(t)$之連續性，我們就可以開始出發了：

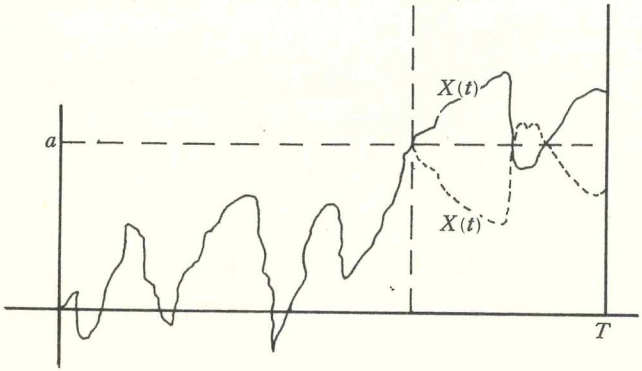
考慮$X(t)$，$0\leq t\leq T$，$X(0)=0$且$X(T)>a$ ($a>0$)

$\because X(t)$連續且$X(0)=0$，$\therefore$ τ α

$$X(\tau)=a \text{ 而 } X(t)\neq a \quad \forall\, t<\tau$$

如此，對於$t>\tau$，我們把$X(t)$對於線$x=a$作反射後可得

$$X(t)=\begin{cases} X(t), & t<\tau \\ a-[X(t)-a], & t>\tau \end{cases}$$



圖三

注意：因爲$X(T)>a$，所以$X(T)<a$，在已知$X(\tau)=a$之下，由於$t>\tau$之路徑的機率規律，對於$x>a$和$x<a$是對稱的，以數學式來表示的話就是$P_r[X(T)>a \mid X(\tau)=a\}=P_r\{X(T)<a \mid X(\tau)=a\}$，且和時間$\tau$之前的過去無關，所以這個反射作用就對於每一個$X(T)>a$之路徑有兩個有相同發生機率之路徑$X(t)$和$X(t)$，其中

$$\max_{0\le u\le T} X(u)\ge a \text{ 且} \max_{0\le u\le T} X(u)\ge a \text{（因爲} X(\tau)=X(\tau)=a\text{）}$$

又反過來看，由這種對應性質可知，每一個有著$\max_{0\le u\le T} X(u)\ge a$之路徑函數$X(t)$都是從兩個有等機率之函數$X(t)$而來，而且其中一個是$X(\tau)>a$（除非$X(T)=a$），不過$P_r\{X(T)=a\}=0$。所以，我們可以在$X(0)=0$之條件下推出：$P_r\{\max_{0\le u\le T} X(u)\ge a\}=P_r\{\max_{0\le u\le T} X(u)\ge a, X(T)>a\}$

$+P_r\{\max_{0\le u\le T} X(u)\ge a, X(T)=a\}+P_r\{\max_{0\le u\le T} X(u)\ge a, X(T)<a\}$

但是，$P_r\{\max_{0\le u\le T} X(u)\ge a, X(T)>a\}=P_r\{X(T)>a\}$，

$P_r\{\max_{0\le u\le T} X(u)\ge a, X(T)<a\}=P_r\{\max_{0\le u\le T} X(u)\ge a, 2a-X(T)<a\}$

$=P_r\{\max_{0\le u\le T} X(u)\ge a, X(T)>a\}=P_r\{X(T)>a\}$，因此

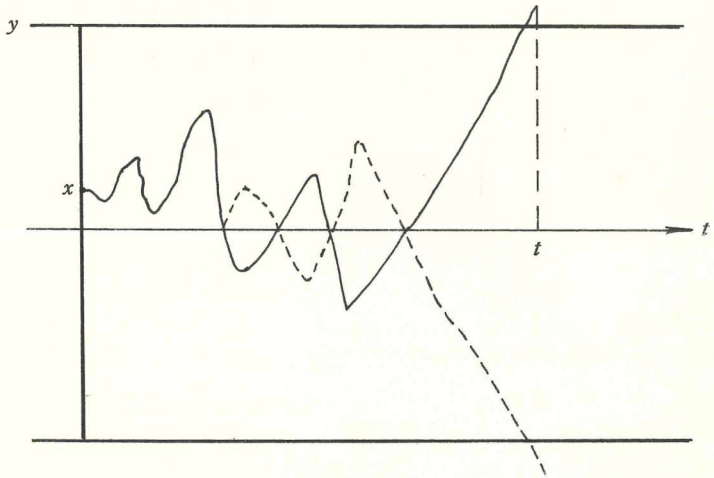
$$P_r\{\max_{0\le u\le T} X(u)\ge a\}=2P_r\{X(T)>a\}=\frac{2}{\sqrt{2\pi T}}\int_a^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2T}\right)dx \qquad \cdots\cdots(1)$$

再由反射原理，我們現在可以解出

$$A(x,y)=P_r\{X(t)>y, \min_{0\le u\le t} X(u)>0 \mid X(0)=x\},\ x>0,\ y>0$$

顯然

$$P_r\{X(t)>y \mid X(0)=x\}=A(x,y)+P_r\{X(t)>y, \min_{0\le u\le T} X(u)\le 0 \mid X(0)=x\} \qquad \cdots\cdots(2)$$



圖(四)

圖(四)是狀況的假想圖，可以導引我們對此問題的分析。

又 $$P_r\{X(t)>y\ ,\min_{0\le u\le T} X(u)\le 0\mid X(0)=x\}$$

$$(\text{反射原理})=P_r\{X(t)<-y\ ,\min_{0\le u\le T} X(0)\le 0\mid X(0)=x\}$$

$$=P_r\{X(t)<-y\mid X(0)=x\}\cdots\cdots(3)$$

將(3)代入(2)中，吾人可得

$$A(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_y^{\infty}\exp\left[-\frac{(x-u)^2}{2t}\right]du$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{-y}\exp\left[-\frac{(x-u)^2}{2t}\right]du$$

由(2)式之助，我們可以決定出在 $X(0)=0$ 之條件下，首次到達 $a>0$ 之分配。

令 T_a 表示在 $X(0)=0$ 之條件下，$X(t)$ 首次到達 a 的時間，那麼，

$$P_r\{T_a\le t\}=P_r\{\max_{0\le u\le t} X(u)\ge a\mid X(0)=0\}$$

但由(1)式，

$$P_r\{\max_{0\le u\le t} X(u)\ge a \mid X(0)=0\}=2P_r\{X(t)>a\}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{2\pi t}}\int_a^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{t}\right]dx$$

所以

$$P_r\{T_a\le t\}=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\int_a^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{t}\right]dx$$

現在做一下變數變換，令 $x=y\sqrt{t}$，則

$$P_r\{T_a\le t\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^{\infty}\exp\left[-\frac{y^2}{2}\right]dg$$

現在把上式對 t 做微分，我們可得隨機變數 T_a 之密度函數

$$f_{T_a}(t\mid X(0)=0)=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}t^{-\frac{3}{2}}\exp\left[-\frac{a^2}{2t}\right]dt \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

由布朗運動的對稱性和空間的本質性（ spatial homogeneity ），我們可以對於分配(4)推論出

$$P_r\{\min_{0\le u\le t} X(u)\le 0\mid X(0)=a\}$$

$$=P_r\{\max X(u)\ge 0\mid X(0)=-a\} \qquad \text{（由對稱性）}$$

$$=P_r\{\max X(u)\ge a\mid X(0)=0\}P_r\{T_a\le t\} \qquad \text{（由同質性）}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t u^{-\frac{3}{2}}\exp\left[-\frac{a^2}{2a}\right]du \qquad a>0$$

參考書籍

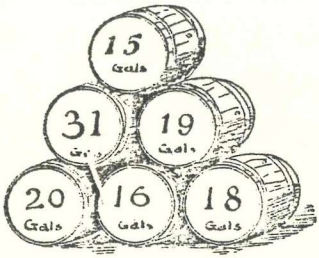
1. Sheldon M.Ross :“ INTRODUCTION TO PROBABILITYMODELS ” 狀元出版社，1985。
2. Sheldon M.Ross :“ A First Course in Probability ” 華泰書局

1980。

3. SAMUEL KARLIN:"A FIRST COURSE IN STOCHASTIC PROCESES" 環球書社，1969。

4. M. Loeve : " Probability Theory Ⅱ " ; 4th Edition, Springer Verlay, New York, Heidelberg Berlin, 1978。

▒商人有六桶酒，其容積分別爲 15，16 ，18 ，22 ，20 ，28 ，如圖，其中只有一桶是啤酒。現在讓我們一起來找出那一桶啤酒。已知商人將除啤酒外的五桶酒都賣給了甲乙二人，賣給甲的酒容積剛好是乙的酒容積的兩倍。



▒五塊等重的砝碼與另一塊外形相同但重量不同的特殊砝碼混在一起。請發揮您高度的數學頭腦，如何用天平在三次測量後找出那個特殊砝碼，且比較它的重量比其他砝碼重或輕？

5. Georg Canto的傳奇

作者：鄭英豪

提起Cantor，許多人都會湧起一股又愛又怕的情緒；他在集合論上的貢獻，使後世從事數學研究的學者有了更進步、更清晰的工具，然而也因爲公設集合論的問世與被採納，使許多的“直觀”，變成了錯誤，這可以提醒我們直觀並不見得是完全正確的！

本文主要在敍述Cantor 發展集合論的過程與重要的結果，並於最後簡單介紹膾炙人口的Cantor 集。有關的結果並不作詳細的說明與證明，有興趣的讀者可從文後所列的參考書目中去找尋資料。

一、Cantor 與集合論

Georg Cantor 1854年生於蘇俄，1918年逝世，他是猶太人，後來隨父母移居德國，由於他的父親希望他學工程，於是進入柏林大學就讀。後來受Karl Weierstrass 的影響而轉攻數學。二十九歲時在數學學報上發表了革命性的無限集理論，雖然文中有些許錯誤，但其創造性的手法已引起當時許多人的注意。此後他陸陸續續發表了許多集合論與超限數（transfinite number）的論文，解決了許多古老的問題並帶動了新的想法。

Cantor 最主要的想法在討論無限集，他認爲所謂無限集就是集合能與其一部份成一一對應。這個想法在當時並未能讓人接受，因爲當時數學家們對“無限”仍存有相當的恐懼，所以對無限的定義也一直無法落定。

在無限集的觀念提出以後，Cantor 便使用一一對應的方法尋找無限集的大小，這裏的大小指的是“基數”的觀念。

兩個集合間若有一一對應的關係存在，Cantor 稱此二集合有相同的“冪”（power，後來稱爲cardinality，基數），例如自然數集與偶自然數集可藉 $n \to 2n$ 的映射定義出一對一關係，所以自然數集與偶自然數集有相

同的冪！同時，Cantor 把與自然數集同冪的集合稱爲“可數集”（enumerable set，countable set ），他認爲這是“最小”的無限集。

隨後Cantor 處理有理數集的冪，他首先在１８７４年證明了有理數集是可數集，但是方法太繁複，後來在１８９５年他又提出了今日我們所熟知的證法，也就是將有理數（正有理數）排列如下：

$$
\begin{array}{llll}
\frac{1}{1} \rightarrow & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} \rightarrow & \frac{4}{1}\cdots\cdots \\
\swarrow & \nearrow & \swarrow & \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2}\cdots\cdots \\
\downarrow \nearrow & & \swarrow & \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3}\cdots\cdots \\
\swarrow & & & \\
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4}\cdots\cdots \\
\downarrow & & & \\
\vdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & &
\end{array}
$$

按箭頭方向“數起”$\frac{1}{1}$對應１，$\frac{2}{1}$對應２，$\frac{1}{2}$對應３，如此進行下去，讀者可自行將其對應映射求出。將其重覆之數刪除後，就得到正有理數集爲可數集！

１８７４年，Cantor 亦證明了代數數集爲可數！設代數數α的最小多項式爲$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 其中$a_i \in Z$，我們稱α爲一n階代數數，他定義$N\alpha = n - 1 + |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_0|$，稱爲$\alpha$的高N（high N），因N爲一自然數，故每個N只有有限個最小多項式與之對應，也就是每個N只有有限個代數數與之對應，如此可得代數數有可數多個！

在此同時，Cantor 也找出了實數爲不可數的證明，這個問題他也證明了兩次，第二次的證明較爲後人所熟悉，即設０與１間之實數爲可數，將其表爲十進位小數，並將型如$0、\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n$ 之有限小數改以$0、\gamma_1\gamma_2\cdots(\gamma_n - 1)999\cdots$表出，因設爲可數，故可排列如：

$1 \to 0 \cdot a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \cdots\cdots$

$2 \to 0 \cdot a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \cdots\cdots$

$3 \to 0 \cdot a_{33}\ a_{32}\ a_{33} \cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

然後他造了一個小數 $0 \cdot C_1\ C_2\ C_3 \cdots\cdots$ 如下：

$$C_i = \begin{cases} 9 & 若\ a_{ii} = 1 \\ 1 & 若\ a_{ii} \neq 1 \end{cases}$$

這個數落在0與1間但與前述之小數皆相異，得到一個矛盾，因而證明了這個結果。這個方法通常稱爲 Cantor 對角綫方法（Cantor's diagonal process）。至於 Cantor 的第一個方法爲一個定理：

令 a_1，a_2，$a_3 \cdots\cdots$ 爲任意相異實數列，則任給一區間（a，b）中，必有一數不在此數列中出現。這個定理較少人知，在此也不多作說明。

根據 Cantor 的說法，實數既爲不可數而代數數可數，也間接證明了超越數的存在性與不可數性。

在解決可數集的問題之後，Cantor 便著手於不可數集冪的研究工作，他將可數集的冪稱爲 ω，實數集的冪稱爲 c，並將兩集合間冪的大小關係定義成：兩集合 A，B，若 B 可與 A 之一部份集合成一一對應而 A 卻不與 B 之任一部份集合成一一對應，則稱 A 的冪大於 B 的冪。因此 $c > \omega$。冪的大小可以比較後，Cantor 提出對一已知基數之集合尋找更大基數集合的方法，他考慮此集合之所有部份集合所成之集合，並證明了此集合的冪要比原集合的大。隨後他定義了兩集合之聯集所成之集合的冪爲此二冪之和，並用積集合的冪定義了冪的積，並利用重複排列的觀念定義了冪的冪次方，後來他更證明了 $c = 2^{\omega}$ ！

Cantor 提出超限數的理論後，有限集合也能使用他的結果，因此他便想從有限集的“序”（order）推廣到無限集的“序”，並定義了序的加法與乘法，在此由於過於複雜，不作多述，有興趣的讀者可以參考有關集合論的書籍。序數問題推展最後便是著名的“連續統假設”（continuum hypothesis），也就是在 ω 與 c 之間，是否有冪數存在，然而 Cantor 努力許久

仍無法解決；另外一個問題是對任意兩個集合A，B，可能A無法與B之子集一一對應，而且B亦無法與A之子集一一對應，如此一來此二集合的冪便無法比較大小，至Cantor 去世爲止，此二問題一直無法得到完整的解決，雖然後來經由Ernst Zermelo 的努力使第二個問題獲得解決，但他亦加入了一個新的“選擇公設”（ Zermelo axiom，Choice axiom），才能有所突破。終Cantor 一生，其在集合論上的貢獻不可謂不大。

二、奇妙的Cantor 集

Cantor 集是Cantor 於1883年所提出的，由於這個集合的出現與推廣，使得在近代分析中得到許多例證。

考慮實數綫上區間 $I=[0,1]$，依下述步驟“挖掉”不要的部份：

(1)將I三等分，挖掉中間部分的開子區間（$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$）。

(2)將步驟(1)中所剩兩個閉子區間〔0，$\frac{1}{3}$〕，〔$\frac{2}{3}$，1〕各三等分並挖掉各段中間部分的開子區間。

(3)依相同方法，每次均在前一步驟所剩閉子區間中挖掉中間$\frac{1}{3}$部分的開子區間。

(4)如此進行下去，“可數次”後所剩之部分即爲Cantor 集。

Cantor 集的性質相當不錯，我們簡單列述於後：

(1)Cantor 集中每個點均可寫成三進位小數O、a_1 a_2 a_3 … 之型，其中 $a_i=0$ 或2；事實上這是個充要條件。

(2)Cantor 集是個緊緻集（ compact set），這點根據Cantor 集的造法可以很明顯看出。

(3)Cantor 集是不可數集，它的冪是 c；前者的證明類似於Cantor 對角綫方法；後者的證明用到積空間的觀念，請讀者參考有關書籍。

(4)Cantor 集爲一零測度集，這裏的測度與長度的觀念類似，這個結果在測度論與實變數函數中十分常見。

(5)Cantor 集爲一疏落集（ nowhere dense set ），由測度零可以看出它不含任意區間，故其閉包（即本身）的內點集爲空集合。

(6) Cantor 集爲一完全集（ perfect set ），所謂完全集是指此集合爲一閉集且集合中每一點均爲聚點。Cantor 集中任意一點的每個鄰域都必包含某一個在某步驟中未被挖掉的區間，而這個區間在下一步驟中就會被挖掉中間$\frac{1}{3}$，而挖掉的端點使留下來成爲 Cantor 集中之點，從這個角度來看，Cantor 集是沒有孤立點的閉集，所以是個完全集。

(7) Cantor 集是一個完全不連通集（ totally disconnected set也就是說 Cantor 集中任意一點，包含此點之所有連通子集的聯集（即連通區）爲此點本身。由於在實數綫上之連通集僅有一點與區間兩種，而Cantor 集的疏落性告訴我們它不含任何區間，故它是個完全不連通集。

由以上性質可知Cantor 集是個十分奇特的集合，事實上在拓樸學中它有更多更強的論述，限於篇幅在此不作冗述。

參 考 書 目

趙文敏著，拓樸學導論　九章　六十九年六月

林義雄等著，理論分析初步　九章

洪萬生譯，偉大數學家的想法　南宏　六十五年四月

Morris Kline 原著　林炎全等譯，數學史—數學思想的發展（下册）　九章　七十二年七月

N · Ya. Vilenkin 原著　九章譯，集合的故事　九章　七十三年十二月

Pinter ,Set Theory 1 9 7 1 美亞代理出版　七十三年十一月

Richard L. Wheeden and Antoni Zygmund, Measure and Integral 1 9 7 7　凡異

6. 簡單連分數與Pell方程式

指導老師：趙文敏
作　　者：陳彩媚
楊環蜜

$x^2-3x-1=0$ 這是一元二次方程式，只要是國中程度的學生，已學過解一元二次方程式，相信在五分鐘內，都會算出它的二個解是$\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$。但是題目若不是求精確解，而只要求列出近似於解的有理數列，而且其數列的極限必需是精確解。那麼你會做嗎？

$$x^2-3x-1=0$$

等式兩端同時以x，再移項 $\Rightarrow$ $x=3+\frac{1}{x}$ ……(1)

將$x=3+\frac{1}{x}$代入(1)式右端的x $\Rightarrow$ $x=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{x}}$

如此重覆將$x=3+\frac{1}{x}$代入上式右端的x

則 $x=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{x}}}=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\vdots}}}}}$ ……(2)

(2)式的右端，我們稱爲連分數。

而題目所要求的近似解數列爲 3，$3+\frac{1}{3}$，$3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}$，$3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}}$

，……

其實只要形如 $a_1+\cfrac{b_1}{a_2+\cfrac{b_2}{a_3+\cfrac{b_3}{a_4+\cfrac{b_4}{\vdots}}}}$ 之數式，（$a_1, a_2, \cdots\cdots$ & $b_1, b_2, \cdots\cdots\cdots$ 可爲任意實數或複數），就可稱爲連分數了。但是本文裏我們所討論的僅 $b_1, b_2, \cdots\cdots$ 皆等於 1 的情形，也就是我們只介紹了簡單連分數的定義、性質和若干重要定理，如“α 爲循環簡單連分數的充要條件是 α 必爲二次無理數”。並予以詳細證明。此外還進一步探討Pell 方程式的正整數解問題以下就請讀者細細品味本文了。

〔定義一〕 簡單連分數（simple continued fraction）

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲一數列，形如

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{}{+\cfrac{1}{a_n}}}}$$

的數式，當滿足

①$\forall\, i\in N$，$a_i\in C$，$a_i\neq 0$（$i\geq 2$）時，稱此數式爲有限連分數（finite continued fraction）。

②$\forall\, i\in N$，（$i\geq 2$），$a_i\in N$，$a_1\in Z$時，稱此數式爲有限簡單連分數（finite simple continued fraction）。

無論①或②的情況，我們都將該數式記作$\langle a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\rangle$。

當 $\lim\limits_{n\to\infty}\langle a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\rangle$ 存在時，稱此極限爲連分數（continued fraction），記作$\langle a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\rangle$。舉個例子來說。

例：$\langle 5, 2, 1, 1, 2, 10, 2, 1, 1, 2, 10, \cdots\cdots\rangle$

即爲簡單連分數的一個例子。

〔定義二〕 第 n 漸近數（nth convergent）

$<a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots>$爲一簡單連分數

我們稱$<a_1>$爲第1漸近數，記作C_1；

$<a_1, a_2>$爲第2漸近數，記作C_2；

$\vdots$

$<a_1, a_2, \cdots, a_n,>$爲第n漸近數C_n。

對連分數$<a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots>$定義兩個數列$\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$與$\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$如下：

$$\begin{cases} P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2}, \ n \geq 2, \ P_0 = 1, \ P_1 = a_1 \\ Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}, \ n \geq 2, \ Q_0 = 0, \ Q_1 = 1 \end{cases}$$

令我們感到興趣的是C_n, P_n, Q_n，究竟有什麼關係存在，且看以下定理

〔定理一〕

C_n爲$<a_1, a_2, \cdots, \cdots>$的第n漸近數，則$C_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$，$\forall n \in N$。

證明：利用數學歸納法

$n = 1$時，$C_1 = <a_1> = \dfrac{a_1}{1} = \dfrac{P_1}{Q_1}$ 成立。

$n = 2$時，$C_2 = <a_1, a_2> = a_1 + \dfrac{1}{a_2} = \dfrac{a_1 a_2 + 1}{a_2} = \dfrac{a_2 P_1 + P_0}{a_2 Q_1 + Q_0}$

$= \dfrac{P_2}{Q_2}$成立

假設$n = 1, 2, 3, \cdots, k$原關係式均成立。

考慮$n = k + 1$時：

$$C_{k+1} = <a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}>$$

$$= <a_1, a_2, \cdots, a_k + \frac{1}{a_{k+1}}>$$

$$= \frac{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}) \cdot P_{k-1} + P_{k-2}}{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}) \cdot Q_{k-1} + Q_{k-2}}$$ （以$a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}$代a_k之位置）

$$=\frac{a_k \cdot P_{k-1}+P_{k-2}+\frac{1}{a_{k+1}} \cdot P_{k-1}}{a_k \cdot Q_{k-1}+Q_{k-2}+\frac{1}{a_{k+1}} \cdot Q_{k-1}}$$

$$=\frac{P_k+\frac{1}{a_{k+1}} \cdot P_{k-1}}{Q_k+\frac{1}{a_{k+1}} \cdot Q_{k-1}} \qquad \text{（由遞迴關係式）}$$

$$=\frac{P_{k-1}+a_{k+1} \cdot P_k}{Q_{k-1}+a_{k+1} \cdot Q_k}$$

$$=\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} \qquad \text{（由遞迴關係式）}$$

$\therefore$ 由數學歸納法知 $C_n=\frac{P_n}{Q_n}$， $\forall n \in N$。

有關 P_n，Q_n 的關係式尚有許多，定理二、定理三會給您一個小交

〔定理二〕

$P_nQ_{n-1}-Q_nP_{n-1}=(-1)^n$， $\forall n \in N$

證明：利用數學歸納法及 P_n，Q_n 的遞迴關係式易證

〔定理三〕

若 $\alpha=\langle a_1, a_2, \cdots\cdots \rangle$ 爲一簡單連分數

則 $|\alpha Q_n-P_n|<\frac{1}{Q_n}$ ， $\forall n \in N$

證明：(1)首先證明 α 介於第 n 漸近數 C_n 及第 n − 1 漸近數 C_{n-1} 之間

$$\alpha=\langle a_1, a_2, \cdots\cdots\cdots \rangle$$

$$=\langle a_1, a_2, \cdots, a_n, \alpha_n \rangle\text{，其中 } \alpha_n=\langle a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\cdots \rangle$$

$$=\frac{\alpha_n \cdot P_n+P_{n-1}}{\alpha_n \cdot Q_n+Q_{n-1}}$$

交叉相乘並整理後得

$$\alpha_n(\alpha Q_n - P_n) = -(\alpha Q_{n-1} - P_{n-1})$$

同時以 $\alpha_n Q_n$，

$$\alpha - \frac{P_n}{Q_n} = -\frac{Q_{n-1}}{\alpha_n Q_n} \cdot \left(\alpha - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right)$$

$$\because -\frac{Q_{n-1}}{\alpha_n Q_n} < 0 \qquad \therefore \left(\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right)\left(\alpha - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right) < 0$$

故 α 介於 C_n, C_{n+1} 之間，且 $\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right|$

$$= \left|-\frac{Q_{n-1}}{\alpha_n Q_n}\right| \cdot \left|\alpha - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|$$

又由 Q_n 的定義易知 $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲非負遞增數列，且 $\alpha_n > 1$

故 $\left|-\frac{Q_{n-1}}{\alpha_n Q_n}\right| < 1$

$$\Rightarrow |\alpha - C_n| < |\alpha - C_{n-1}|$$

(2)次證 $|\alpha - C_n| < \frac{1}{Q_n^2}$

由(1)以 $n+1$ 代入，知

$$|\alpha - C_n| < |C_n - C_{n+1}| = \left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right|$$

$$= \left|\frac{P_n \cdot Q_{n+1} - Q_n \cdot P_{n+1}}{Q_n \cdot Q_{n+1}}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{Q_n \cdot Q_{n+1}}\right| \text{(由定理二)}$$

$$= \frac{1}{Q_n \cdot Q_{n+1}} < \frac{1}{Q^2} \quad (\because Q_n \text{ 爲遞增數列})$$

(3)由(2)同乘 Q_n 得 $|\alpha Q_n - P_n| < \frac{1}{Q_n}$ ， $\forall n \in N$

接下來，我們再定義幾個名詞，以便做進一步的探討。

〔定義三〕 循環簡單連分數（periodicly simple continued fraction）

$\langle a_1, a_2, \cdots\cdots \rangle$爲一簡單連分數

若存在 $t \in N$ 及非負整數 K，使得 $a_n = a_{n+t} \quad \forall n > k, n \in N$，

則稱 $\langle a_1, a_2, \cdots\cdots \rangle$ 爲一循環簡單連分數，記作 $\langle a_1, a_2, \cdots, a_k, \overline{a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots\cdots, a_{k+t}} \rangle$。

當 $k = 1$ 時，$\langle a_1, a_2, \cdots\cdots \rangle = \langle \overline{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_t} \rangle$，此時稱爲純循環簡單連分數（purely periodic simple continued fraction）。

〔定義四〕 二次無理數（quadratic irrational）

若 α 是一個無理數，且 α 爲某個整係數一元二次方程式的根，則稱 α 爲二次無理數。由一元二次方程式的公式解可知 α 形如 $a + b\sqrt{k}$，$a, b \in Q$，$b \neq 0$，$k \in N$，k 不爲完全平方。

〔引理一〕

若 α 爲純循環簡單連分數，則 α 必爲二次無理數。

證明：令 $\alpha = \langle \overline{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n} \rangle$

則 $\alpha = \langle a_1, a_2, \cdots, a_n, \alpha \rangle$

$$= \frac{\alpha \cdot P_n + P_{n-1}}{\alpha \cdot Q_n + Q_{n-1}}$$

交叉相乘得

$$Q_n \alpha^2 + \alpha (Q_{n-1} - P_n) - P_{n-1} = 0,$$

且 P_n, Q_n 均爲整數，$\forall n \in N$

所以 α 爲二次無理數

〔引理二〕

若 α 爲二次無理數，a、b、c、$d \in Q$，$c + d\alpha \neq 0$，

則 $\dfrac{a + b\alpha}{c + d\alpha}$ 爲有理數或二次無理數

證明：①若存在 $k \in N$，使 $\alpha = \sqrt{k}$

$$\frac{a+b\alpha}{c+d\alpha}=\frac{(a+b\alpha)(c-d\alpha)}{(c+d\alpha)(c-d\alpha)}$$

$$=\frac{(ac-bdk)+(bc-ad)\sqrt{k}}{c^2-d^2k}$$

(1)若 $bc-ad=0$，則 $\dfrac{a+b\alpha}{c+d\alpha}\in Q$

(2)若 $bc-ad\neq 0$，則 $\dfrac{a+b\alpha}{c+d\alpha}$ 爲二次無理數

②若 $\alpha=e+f\sqrt{k}$　$e\neq 0$，e，$f\in Q$

$$\frac{a+b\alpha}{c+d\alpha}=\frac{(a+be)+bf\sqrt{k}}{(c+de)+df\sqrt{k}}$$

同①之討論，可得 $\dfrac{a+b\alpha}{c+d\alpha}$ 爲有理數或二次無理數。

〔定理四〕

若 α 爲循環簡單連分數，

則 α 爲二次無理數。

證明：令 $\alpha=\langle a_1,a_2,\cdots,a_n,\overline{b_1,b_2,\cdots,b_m}\rangle$

$\beta=\langle\overline{b_1,b_2,\cdots,b_m}\rangle$

則 β 爲二次無理數。

$\alpha=\langle a_1,a_2,\cdots,a_n,\beta\rangle$

$$=\frac{\beta\cdot P_n+P_{n-1}}{\beta\cdot Q_n+Q_{n-1}}$$

⇒由引理二知，α 爲有理數或二次無理數

但 α 爲無窮簡單連分數，故 α 不爲有理數

⇒ α 爲二次無理數

〔定理五〕

α 爲一元二次整係數方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的無理根

若對每個 $n\in N$，令 $\alpha=\langle a_1,a_2,\cdots,a_n,\alpha_n\rangle$

令$A_n = a P_n^2 + b P_n Q_n + c Q_n^2$

$B_n = 2 a P_n P_{n-1} + b (P_n Q_{n-1} + P_{n-1} Q_n) + 2 c Q_{n-1} Q_n$

$C_n = a P_{n-1}^2 + b P_{n-1} Q_{n-1} + c Q_{n-1}^2$

則α_n爲$A_n x^2 + B_n x + C_n = 0$的根，且$B_n^2 - 4 A_n C_n = b^2 - 4 a c$

證明：$\alpha = < a_1, a_2, \cdots, a_n, \alpha_n >$

$$= \frac{\alpha_n P_n + P_{n-1}}{\alpha_n Q_n + Q_{n-1}} \quad \text{代入} \quad a \alpha^2 + b \alpha + c = 0$$

$$a \left(\frac{\alpha_n P_n + P_{n-1}}{\alpha_n Q_n + Q_{n-1}} \right)^2 + b \left(\frac{\alpha_n P_n + P_{n-1}}{\alpha_n Q_n + Q_{n-1}} \right) + c = 0$$

$$(a P_n^2 + b P_n Q_n + c Q_n^2) \alpha_n^2 + (2 a P_n P_{n-1} + b (P_n Q_{n-1} + P_{n-1} Q_n) + 2 c Q_n Q_{n-1}) \alpha_n + (a P_{n-1}^2 + b P_{n-1} Q_{n-1} + c Q_{n-1}^2) = 0$$

ie $\quad A_n \alpha_n^2 + B_n \alpha_n + C_n = 0$

故α_n爲$A_n x^2 + B_n x + C_n = 0$之根 ……①

$$\begin{aligned} B_n^2 - 4 A_n C_n &= (2 a P_n P_{n-1} + b P_n Q_{n-1} + b P_{n-1} Q_n + 2 c Q_n Q_{n-1})^2 \\ &\quad - 4 (a P_n^2 + b P_n Q_n + c Q_n^2) (a P_{n-1}^2 + b P_{n-1} Q_{n-1} \\ &\quad + c Q_{n-2} \}^2 \\ &= (b^2 - 4 a c) (P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1})^2 \\ &= b^2 - 4 a c \end{aligned}$$

〔推論五・1〕

α爲二次無理數，且$\alpha = < a_1, a_2, \cdots, a_n, \alpha_n >$

則存在有限集$F \subset \mathbb{Z}$

使得對所有正整數n，可找到A、B、C$\in$F，而且α_n爲$A x^2 + B x + C = 0$的根

證明：依定理五 α_n 是$A_n x^2 + B_n x + C_n = 0$的根

所以，令$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ A_n, B_n, C_n \}$，只要再證明F是有限集就好了。

$\forall n \in N$，由定理三知

$$| \alpha Q_n - P_n | < \frac{1}{Q_n}$$

所以可令 $P_n = \alpha Q_n + \frac{\varepsilon}{Q_n}$, $|\varepsilon| < 1$

$$A_n = a P_n^2 + b P_n Q_n + c Q_n^2$$

$$= a\left(\alpha Q_n + \frac{\varepsilon}{Q_n}\right)^2 + b\left(\alpha Q_n + \frac{\varepsilon}{Q_n}\right) Q_n + c \cdot Q_n^2$$

$$= (a\alpha^2 + b\alpha + c) Q_n^2 + \left(2a\alpha + b + \frac{a \cdot \varepsilon}{Q_n^2}\right) \cdot \varepsilon$$

$$= \left(2a\alpha + b + \frac{a\varepsilon}{Q_n^2}\right) \cdot \varepsilon$$

所以 $|A_n| = \left|2a\alpha + b + \frac{a\varepsilon}{Q_n^2}\right| |\varepsilon| < |2a\alpha + b| + |a|$

$\Rightarrow$ $\{A_n\}$ 有界 ……①

而 $C_n = A_{n-1}$ ，故 $\{C_n\}$ 亦有界 ……②

因 $B_n^2 - 4A_nC_n = b^2 - 4ac$

$$\therefore B_n^2 = |4A_nC_n + b^2 - 4ac| \leq 4|A_n||C_n| + |b^2 - 4ac|$$
$$< 4(|2a\alpha + b| + |a|)^2 + |b^2 - 4ac|$$

所以 $\{B_n\}$ 亦有界 ……③

設 $M \in N$, $|A_n|$, $|B_n|$, $|C_n| \leq M$

$\Rightarrow$ $F \subset \{-M, -M+1, \cdots\cdots, 0, 1, 2, \cdots\cdots M\}$

$\Rightarrow$ F 爲一有限集

〔定理六〕 （定理四的逆定理）

若 α 爲二次無理數

則 α 可表爲循環簡單連分數

證明：令 $\alpha = \langle a_1, a_2, \cdots\cdots a_n, \alpha_n \rangle$ ，而 F 是推論五．1 中的有限集

以 F 中的元素作爲一元二次方程式的係數

所以每個 α_n 都是某一方程式的根

因爲 α_n （ $n \in N$ ）的個數有無限多個，而方程式的個數有限

所以必存在k、t∈N，使得 $\alpha_k = \alpha_{k+t}$

而 $\alpha_k = \langle a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots\cdots \rangle$

$\alpha_{k+t} = \langle a_{k+t+1}, a_{k+t+2}, \cdots\cdots \rangle$

$\therefore \quad a_{k+1} = a_{k+t+1}$

$a_{k+2} = a_{k+t+2}$

$\vdots$

$a_{k+j} = a_{k+j+t}$

所以 $\alpha = \langle a_1, a_2, \cdots\cdots, a_k, \overline{a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots\cdots, a_{k+t}} \rangle$

Pell 方程式

1657年 Fermat 曾指出"當D是正整數且D不爲完全平方數時，$x^2 - Dy^2 = 1$ 有無窮多組正整數解"。但他並未提出證明。後來尤拉（Euler）研究此一問題時，誤將此方程式命名爲Pell 方程式。其實Pell 在這方面並未作任何貢獻，但是至今我們仍將錯就錯，稱爲Pell 方程式。

"$x^2 - Dy^2 = 1$"眞有無窮多組解嗎？解與解之間又有什麼奧妙的關係存在呢？有興趣的讀者請捧個場，繼續研讀下去。

$x^2 - Dy^2 = 1$

1° 若 $y = 0$，則 $x \pm 1$

2° 若 $x = 0$，$D = -1$，則 $y \pm 1$

3° 若 (x, y) 爲 $x^2 - Dy^2 = 1$ 之一組解，則 $(x, -y)$，$(-x, -y)$，$(-x, y)$ 亦爲 $x^2 - Dy^2 = 1$ 之解。

以上三種情形之解，我們將不予以考慮。因此，我們只考慮 $x^2 - Dy^2 = 1$ 的正整數解。

再看看D的範圍

1° 若 $D < 0$

$\Rightarrow \exists\, a > 0 \quad \times \quad D = -a \quad \Rightarrow \quad x^2 + ay^2 = 1$

方程式顯然沒有正整數解

2° 若D爲完全平方數

$\Rightarrow \exists\, d \in N \quad \times \quad D = d^2$

$\Rightarrow \quad x^2-(dy)^2=1$

1 不可能爲兩個正整數的平方差

因此限制D爲正整數與不完全平方數是合理的。

以下該如何求解呢？

$\sqrt{D}$是無理數，我們若能找到適當的 a、b $\in N$，使$\frac{a}{b}\to\sqrt{D}$，則 $\frac{a^2}{b^2}\to D$

$D \Rightarrow \exists c \to \frac{a^2}{b^2}-D=\frac{c}{b^2}$

等式兩端同乘 b^2

$a^2-Db^2=c$

取 $c=1$，則 $a^2-Db^2=1$

如此一來，a 、b 便爲 $x^2-Dy^2=1$ 的一組解，因此如何適當的找到 a、b $\in N \times \frac{a}{b}\to\sqrt{D}$應是我們的當急之務。此可藉由連分數來求。請先看下面的引理。

〔引理三〕

若α是二次無理數，

則α是純循環簡單連分數$\Longleftrightarrow \alpha>1$ & $-1<\alpha'<0$（α'爲α之共軛根數）

證明：

（$\Rightarrow$）假設$\alpha=<\overline{a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n}>$，則$a_1=a_{n+1}\geq 1$

$\because \quad a_i\in N, \quad \forall i=1,2,\cdots\cdots n$

$\Rightarrow \quad \alpha>1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$①

又α是二次無理數，α'爲α之共軛根數

則由引理一的證明過程

$\Rightarrow \quad \alpha, \alpha'$爲$f(x)=Q_n x^2+(Q_{n-1}-P_n)x-P_{n-1}=0$之根

$f(-1)=(Q_n-Q_{n-1})+(P_n-P_{n-1})>0$

$f(0)=-P_{n-1}<0$

所以 f(x) 必有一根落於 -1 與 0 之間

$\because \quad \alpha > 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < \alpha' < 0$ ……②

(⇐)假設 α 是二次無理數，$\alpha > 1$ 及 $-1 < \alpha' < 0$

令 $\alpha = \langle a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \alpha_n \rangle$

則

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{\alpha_1}, \quad \alpha' = a_1 + \frac{1}{\alpha_1'}, \quad a_1 = [\alpha]$$

$$\alpha_1 = a_2 + \frac{1}{\alpha_2}, \quad \alpha_1' = a_2 + \frac{1}{a_2'}, \quad a_2 = [\alpha_1]$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\alpha_k = a_{k+1} + \frac{1}{\alpha_{k+1}}, \quad \alpha_k' = a_{k+1} + \frac{1}{\alpha_{k+1}'}, \quad a_{k+1} = [\alpha_k]$$

$\because \quad \alpha > 1$，利用 $\alpha_k = a_{k+1} + \dfrac{1}{\alpha_{k+1}} \quad (k \in N)$

可得 $\alpha_k > 1$，$\forall k \in N$

$\because -1 < \alpha' < 0$，利用數學歸納法亦不難證 $-1 < \alpha_k' < 0$

$\forall k \in N$

$$\because -1 < \alpha_k' < 0 \quad \& \quad \alpha_k' = a_{k+1} + \frac{1}{\alpha_{k+1}'}$$

$$\Rightarrow \quad -1 < a_{k+1} + \frac{1}{\alpha_{k+1}'} < 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 < -a_{k+1} - \frac{1}{\alpha_{k+1}'} < 1$$

$$\left[-\frac{1}{\alpha_{k+1}'}\right] - a_{k+1} = \left[-\frac{1}{\alpha_{k+1}'} - a_{k+1}\right] = 0$$

$$\therefore \quad a_{k+1} = \left[-\frac{1}{\alpha_{k+1}'}\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$\because \quad \alpha = \langle a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \alpha_n \rangle$ 是二次無理數 $(n \in N)$

$\exists k \,\&\, t \quad \times \quad \alpha_k = \alpha_{k+t} \quad \Rightarrow \quad \alpha_k' = \alpha_{k+t}'$

$$a_k = [-\frac{1}{\alpha'_k}] = [-\frac{1}{\alpha'_{k+t}}] = a_{k+t}$$

$$\alpha_{k-1} = a_k + \frac{1}{\alpha_k} = a_{k+t} + \frac{1}{\alpha_{k+t}} = \alpha_{k+t-1}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_{k-1} = \alpha_{k-1+t}$$

同理可證 $\alpha_{k-2} = \alpha_{k-2+t}$

$$\alpha_{k-3} = \alpha_{k-3+t}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1 = \alpha_{t+1}$$

$$\alpha = \alpha_t$$

$$\alpha = \langle a_1, \cdots\cdots, a_t, \alpha_t \rangle = \langle a_1, \cdots\cdots, a_t, \alpha \rangle$$

$$= \langle \overline{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_t} \rangle$$

$$\therefore \alpha = \langle \overline{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_t} \rangle$$

〔引理四〕

假如D是正整數，且不爲完全平方數

則 $\sqrt{D} = \langle a_1, \overline{a_2, \cdots\cdots, a_n, 2a_1} \rangle$，此處 $a_1 = [\sqrt{D}]$

證明：令 $\alpha = \sqrt{D} + [\sqrt{D}]$

$\because \quad \sqrt{D} > 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha > 1$ ……①

又 $\alpha' = -\sqrt{D} + [\sqrt{D}]$

$\therefore \quad -1 < \alpha' < 0$ ……②

由引理三，知

$$\alpha = \sqrt{D} + [\sqrt{D}] = \langle \overline{[\alpha], a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n} \rangle$$

$$= \langle [\alpha], \overline{a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, [\alpha]} \rangle$$

$$= \langle 2[\sqrt{D}], \overline{a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, 2[\sqrt{D}]} \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{D} = \alpha - [\sqrt{D}] = \langle [\sqrt{D}], \overline{a_2, a_2, \cdots\cdots, a_n, 2[\sqrt{D}]} \rangle$$

〔定理七〕

設D是正整數且不是完全平方數，n爲 $\sqrt{D}$ 之循環節的長度

若n是偶數，則對每個正整數k，$x = P_{kn}$，$y = Q_{kn}$ 爲 $x^2 - Dy^2 =$

1 之解

而 $x^2 - Dy^2 = -1$，沒有正整數解

若 n 是奇數，則對所有正奇數 k，$x = P_{kn}$，$y = Q_{kn}$ 爲 $x^2 - Dy^2 = -1$ 之解；

對所有正偶數 k，$x = P_{kn}$，$y = Q_{kn}$ 爲 $x^2 - Dy^2 = 1$ 之解

證明：　∵D 是正整數且不爲完全平方

由引理三　⇒　$\sqrt{D} = \langle a_1, \overline{a_2, \cdots\cdots, a_n, 2a_1} \rangle$（n 爲循環節的長度）

$$= \langle a_1, \overline{a_2, \cdots, a_n, 2a_1, a_2, \cdots, a_n, 2a_1, a_2, \cdots, a_n, 2a_1} \rangle$$

又 $\because \sqrt{D} = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots\cdots, a_{kn}, \alpha_{kn} \rangle$ ……(1)

則　$\alpha_{kn} = \langle 2a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, 2a_1, \cdots\cdots \rangle$

$$= \langle 2a_1, \overline{a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, 2a_1} \rangle = \sqrt{D} + a_1$$

由(1)式　⇒　$\sqrt{D} = \dfrac{\alpha_{kn} P_{kn} + P_{kn-1}}{\alpha_{kn} Q_{kn} + Q_{kn-1}}$

將　$\alpha_{kn} = \sqrt{D} + a_1$ 代入上式

$$\sqrt{D} = \frac{(\sqrt{D} + a_1) P_{kn} + P_{kn-1}}{(\sqrt{D} + a_1) Q_{kn} + Q_{kn-1}}$$

交叉相乘　$\sqrt{D}[(\sqrt{D} + a_1) Q_{kn} + Q_{kn-1}]$

$$= (\sqrt{D} + a_1) P_{kn} + P_{kn-1}$$

$$\Rightarrow \quad DQ_{kn} + (a_1 Q_{kn} + Q_{kn-1})\sqrt{D} = (a_1 P_{kn} + P_{kn-1}) + P_{kn}\sqrt{D}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} DQ_{kn} = a_1 P_{kn} + P_{kn-1} \\ a_1 Q_{kn} + Q_{kn-1} = P_{kn} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{kn-1} = DQ_{kn} - a_1 P_{kn} \\ Q_{kn-1} = P_{kn} - a_1 Q_{kn} \end{cases}$$

$\because$　$P_{kn} Q_{kn-1} - Q_{kn} P_{kn-1} = (-1)^{kn}$　（定理 2）

將 P_{kn-1} 與 Q_{kn-1} 之值代入上式

$$P_{kn}(P_{kn} - a_1 Q_{kn}) - Q_{kn}(DQ_{kn} - a_1 P_{kn}) = (-1)^{kn}$$

$$\Rightarrow \quad P_{kn}^2 - DQ_{kn}^2 = (-1)^{kn}$$

1° 若 n 爲偶數，則對所有正整數 k，$P_{kn}^2 - DQ_{kn}^2 = 1$

即　$x = P_{kn}$ ，$y = Q_{kn}$ 爲 $x^2 - Dy^2 = 1$ 之解

但　$x^2 - Dy^2 = -1$ 無正整數解

° 如果 n 是奇數

則對所有的正奇數 k　⇒　$P_{kn}^2 - DQ_{kn}^2 = (-1)^{kn} = -1$

即　$x = P_{kn}$ ，$y = Q_{kn}$ 是 $x^2 - Dy^2 = -1$ 之解

對所有的正偶數 k　⇒　$P_{kn}^2 - DQ_{kn}^2 = 1$

即　$x = P_{kn}$ ，$y = Q_{kn}$ 是 $x^2 - Dy^2 = 1$ 之解

因此由定理七，我們不難看出 $x^2 - Dy^2 = 1$ 方程式常能有特解，但 $-Dy^2 = -1$ 就不一定有解。

以下我們實地舉 2 個例子演練一下

：求 $x^2 - 21y^2 = 1$ 之解

$$\sqrt{21} = 4 + \sqrt{21} - 4$$

$$= 4 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{21} - 4}} = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{21} - 1}{5}} = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{\sqrt{21} - 1}}}$$

$$= 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{5\sqrt{21} + 5}{20}}} = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{5\sqrt{21} - 15}{20}}} = \cdots\cdots$$

$\therefore$　$\sqrt{21} = \langle 4, \overline{1, 1, 2, 1, 1, 8} \rangle = \langle a_1, \overline{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7} \rangle$

$\because$ 循環節的長度 $n = 6$ 爲偶數

則對所有正整數 k，$x = P_{kn}$ ，$y = Q_{kn}$ ，爲 $x^2 - Dy^2 = 1$ 之解

當　$k = 1$ 時

$x = P_6$ ，$y = Q_6$

$P_1 = 4$, $P_2 = a_2P_1 + P_0 = 1 \cdot 4 + 1 = 5$,

$Q_1 = 1$, $Q_2 = a_2Q_1 + Q_0 = 1 \cdot 1 + 0 = 1$,

$P_3 = a_3P_2 + P_1 = 1 \cdot 5 + 4 = 9$,

$P_4 = a_4P_3 + P_2 = 2 \cdot 9 + 5 = 23$,

$Q_3 = a_3Q_2 + Q_1 = 1 \cdot 1 + 1 = 2$,

$Q_4 = a_4Q_3 + Q_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$,

$P_5 = a_5P_4 + P_3 = 1 \cdot 23 + 9 = 32$,

$P_6 = a_6P_5 + P_4 = 1 \cdot 32 + 23 = 55$,

$Q_5 = a_5Q_4 + Q_3 = 1 \cdot 5 + 2 = 7$,

$Q_6 = a_6Q_5 + Q_4 = 1 \cdot 7 + 5 = 12$,

$\therefore \quad P_6 = 55 \ , \ Q_6 = 12$

$x^2 - 21\ y^2 = 55^2 - 21 \cdot 12^2 = 3025 - 3024 = 1$

$\therefore x = 55$, $y = 12$ 爲 $x^2 - 21\ y^2 = 1$ 的一組解（最小正整數解）

當 $k = 2$ 時，

$x = P_{12}$, $y = Q_{12}$

可由 $\begin{cases} P_n = a_nP_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_n = a_nQ_{n-1} + Q_{n-2} \end{cases}$ 求出 P_{12}, Q_{12} 之值（讀者不妨自行演算）

$k = 3 \ , \ 4 \ , \cdots\cdots$

例：求 $x^2 - 29\ y^2 = 1$ 之解

$$\sqrt{29} = 5 + \sqrt{29} - 5$$

$$= 5 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{29} - 5}} = 5 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{29} + 5}{4}} = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{\sqrt{29} - 3}{4}}$$

$$= 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{4}{\sqrt{29} - 3}}} = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4\sqrt{29} - 8}{20}}} = \cdots\cdots\cdots$$

$$\sqrt{29} = \langle 5, \overline{2, 1, 1, 2, 10} \rangle = \langle a_1, \overline{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6} \rangle$$

循環節的長度 $n = 5$ 爲奇數

1° 對所有的正奇數 k , $x = P_{kn}$, $y = Q_{kn}$ 爲 $x^2 - D\ y^2 = -1$ 之解

當 $k=1$ 時，$x=P_5$ ，$y=Q_5$

$P_1=5$ ， $P_2=a_2P_1+P_0=2\cdot 5+1=11$ ，

$Q_1=1$ ， $Q_2=a_2Q_1+Q_0=2\cdot 1+0=2$ ，

$P_3=a_3P_2+P_1=1\cdot 11+5=16$

$P_4=a_4P_3+P_2=1\cdot 16+11=27$

$Q_3=a_3Q_2+Q_1=1\cdot 2+1=3$

$Q_4=a_4Q_3+Q_2=1\cdot 3+2=5$

$P_5=a_5P_4+P_3=2\cdot 27+16=70$

$Q_5=a_5Q_4+Q_3=2\cdot 5+3=13$

$\therefore P_5=70$ ，$Q_5=13$

$x^2-29y^2=70^2-29\cdot 13^2=4900-4901=-1$

$\therefore x=70$ ，$y=12$ 爲 $x^2-29y^2=-1$ 的一組解

同理 $k=3$ 時，P_{15} ，Q_{15} 爲另一組解

2° 對所有的正偶數 k，$x=P_{kn}$ ，$y=Q_{kn}$ 爲 $x^2-Dy^2=1$ 之解

當 $k=2$ 時， $x=P_{10}$ ，$y=Q_{10}$

仿前面利用 $\begin{cases} P_n=a_nP_{n-1}+P_{n-2} \\ Q_n=a_nQ_{n-1}+Q_{n-2} \end{cases}$

分別求得 $\begin{cases} P_6=727 \\ Q_6=135 \end{cases}$ $\begin{cases} P_7=1524 \\ Q_7=283 \end{cases}$ $\begin{cases} P_8=2251 \\ Q_8=418 \end{cases}$

$\begin{cases} P_9=3775 \\ Q_9=701 \end{cases}$ $\begin{cases} P_{10}=9801 \\ Q_{10}=1820 \end{cases}$

$x^2-29y^2=9801^2-29\times 1820^2=96059601-96059600=1$

$\therefore x=9801$ ，$y=1820$ 爲 $x^2-29y^2=1$ 之一組解

同理 $k=4$ 時，亦可求出另一組解。

設 n 爲循環節的長度，在求得 P_n 與 Q_n 之後，若還要依次求出 P_{2n} ，Q_{2n} ，P_{3n} ，Q_{3n} ，……，讀者或許會認爲計算過於冗長，那麼是否在求出一組特解之後，還有更快的方法可導引出其他的所有解呢？且看下面的定理八。

〔定理八〕

如果 x_1, y_1 是 Pell 方程式 $x^2 - Dy^2 = 1$ 的最小正整數解，則此 Pell 方程式的其他正整數解 x_n, y_n 都能由 $x_n + y_n\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n$ 求得

$$\text{或}\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{2}\{(x_1 + y_1\sqrt{D})^n + (x_1 - y_1\sqrt{D})^n\} \\ y_n = \dfrac{1}{2\sqrt{D}}\{(x_1 + y_1\sqrt{D})^n - (x_1 - y_1\sqrt{D})^n\} \end{cases}$$

證明：㈠首先證明滿足 $x_n + y_n\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n$ 的 x_n, y_n 爲 $x^2 - Dy^2 = 1$ 之解

$$\begin{aligned} x_n^2 - Dy_n^2 &= (x_n - y_n\sqrt{D})(x_n + y_n\sqrt{D}) \\ &= (x_1 - y_1\sqrt{D})^n(x_1 + y_1\sqrt{D})^n \\ &= \quad (x_1 - y_1\sqrt{D})(x_1 + y\sqrt{D})]^n = (1)^n = 1 \end{aligned}$$

$\therefore x_n, y_n$ 爲 $x^2 - Dy^2 = 1$ 的一組解

㈡讓 x', y' 是 Pell 方程式的一正整數解，欲證 $\exists\, n \in N$

$x \quad x' + y'\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n$

假設 $\nexists \quad n \in N \quad x \quad (x' + y'\sqrt{D}) = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n$

$\because x_1, y_1$ 是最小正整數解

$\therefore \exists\, m \in N$ 使得

$$(x_1 + y_1\sqrt{D})^m < (x' + y'\sqrt{D}) < (x_1 + y_1\sqrt{D})^{m+1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

$$\begin{aligned} \because\ & (x_1 - y_1\sqrt{D})^m(x_1 + y_1\sqrt{D})^m \\ &= [(x_1 - y_1\sqrt{D})(x_1 + y_1\sqrt{D})]^m = 1 \end{aligned}$$

$\therefore (x_1 - y_1\sqrt{D})^m > 0$

$(*)$ 式同乘以 $(x_1 - y_1\sqrt{D})^m$

$$\begin{aligned} &(x_1 + y_1\sqrt{D})^m(x_1 - y_1\sqrt{D})^m < \\ &< (x' + y'\sqrt{D})(x_1 - y_1\sqrt{D})^m < \\ &< (x_1 + y_1\sqrt{D})^{m+1}(x_1 - y_1\sqrt{D})^m \\ &1 < (x' + y'\sqrt{D})(x_m - y_m\sqrt{D}) < x_1 + y_1\sqrt{D} \\ &1 < x'x_m - y'y_m \cdot D - x'y_m\sqrt{D} + y'x_m\sqrt{D} < x_1 + y_1\sqrt{D} \cdots ① \end{aligned}$$

令 $x_0 = x'x_m - y'y_mD$ ， $y_0 = -x'y_m + y'x_m$ ，則

$$x_0^2 - y_0^2 \cdot D = (x'x_m - y'y_mD)^2 - (-x'y_m + y'x_m)^2 \cdot D$$
$$= x'^2 \cdot x_m^2 + D^2y'^2 \cdot y_m^2 - 2x'y'x_my_mD$$
$$-(x'^2y_m^2 + y'^2x_m^2 - 2x'y'x_my_m)D$$
$$= x'^2 \cdot x_m^2 - y'^2 \cdot x_m^2D + D^2y'^2y_m^2 - y_m^2 \cdot x'^2 \cdot D$$
$$= x_m^2(x'^2 - y'^2D) + Dy_m^2(Dy'^2 - x'^2)$$
$$= x_m^2 + Dy_m^2(-1) = x_m^2 - Dy_m^2 = 1$$

$\therefore x_0, y_0$ 是 $x^2 - Dy^2 = 1$ 之一組整數解

x_0, y_0 是否爲正？

$\because x_0^2 - y_0^2 \cdot D = (x_0 - y_0\sqrt{D})(x_0 + y_0\sqrt{D}) = 1$

$x_0 + y_0\sqrt{D} > 0 \Rightarrow x_0 - y_0\sqrt{D} > 0$

$\Rightarrow 2x_0 > 0$

又 $\because x_0 + y_0\sqrt{D} > 1$

$\therefore x_0 - y_0\sqrt{D} < 1$

$\Rightarrow 2y_0\sqrt{D} > 0 \Rightarrow y_0 > 0$

$\therefore x_0, y_0$ 均爲正整數 ……②

由①②得 x_0, y_0 是 $x^2 - Dy^2 = 1$ 的更小正整數解，與已知→←

所以 $\exists n \in N \quad x(x' + y'\sqrt{D}) = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n$

讓我們看看下面的例子

例：求 $x^2 - 21y^2 = 1$ 之解

解：由前面的例子，已求出 $x_1 = 55$ ， $y_1 = 12$ 爲 $x^2 - 21y^2 = 1$ 的最小正整數解，則

$$x_2 + y_2\sqrt{21} = (55 + 12\sqrt{21})^2$$
$$= 3025 + 1320\sqrt{21} + 3024$$
$$= 6049 + 1320\sqrt{21}$$

$\therefore x_2 = 6049$ ， $y_2 = 1320$ 是 $x^2 - 21y^2 = 1$ 的第二組正整數解

如此由 $x_n + y_n\sqrt{21} = (55 + 12\sqrt{21})^n$ ，求出 x_n, y_n 的方法顯然比前面求 P_{kn} 與 Q_{kn} 快多了。一般而言，我們都是利用定理七先求出一組特

解，再藉由定理八，找出其他的正整數解。

Pell 方程式尚可推廣到求 $x^2 - Dy^2 = n$（$0 < |n| < \sqrt{D}$）的正整數解，因限於篇幅的關係，我們留給讀者自行做練習。

參考資料：

1. JAMES E. SHOCKLEY, INTRODUCTION TO NUMBER THEORY, Holt Rinehart & Winston, Inc. 1967 pg.174-208.
2. 趙文敏，數學史（第一卷），協進圖書有限公司，1985，pg.382～388、402～408。
3. 趙文敏，數論淺談，協進圖書有限公司，1981，pg.261～273。
4. 王昌銳，連分數，徐氏基金會出版，1979。

一般人大概都會如此想，在57人裡有二人剛好在365日中同一天出生的機率恐怕不高吧！事實上，在57人中兩人在同一天出生的機率達到99％，你是否會很驚訝！其實這只是在欺騙那些不懂機率的人罷了，因爲我們可以如此推算：

這 57 人都具有不同生日的機率是

$$\frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{309}{365} \approx 0.01$$

∴在 57 人中至少有兩人在同一天出生的

機率便是 $1 - 0.01 = 0.99$

所以同學以後可別被騙了哦！

7. 波阿松過程的探討

指導老師：黃登源
作　　者：陳美卿

一、緒言

在日常生活中經常遭遇到計數問題，如何利用數學方法處理這些資料是很重要的工作。這篇文章主要在探討一些重要的數學性質，提供同學學習數學時，重視數學過程及數學模型的精神。

二、波阿松過程

首先須先介紹一種隨機分配—計數過程（Counting process）$\{N(t), t \geq 0\}$，$N(t)$ 代表在 t 時間內事件發生之總數。

一個計數過程必須滿足以下的要件：

(1) $N(t) \geq 0$

(2) $N(t)$ 是整數值

(3) 若 $s < t$，則 $N(s) \leq N(t)$

(4) 若 $s < t$，則 $N(t) - N(s)$ 表發生在 $(s, t]$ 時間之事件總數。

若一計數過程，在不重疊之時間區間內發生之事件互相獨立，則稱爲獨立增量（independent increments）。舉例而言，$N(10)$ 和 $N(15) - N(10)$ 無關，換句話說，在 10 個時間單位內所發生事件總數和在時間 10 單位至 15 單位事件之發生無關。

又若一計數過程，在任一時間區間內發生事件之次數僅與時間區間之長度有關，則稱爲具固定增量（stationary increments）之過程，即如 $N(t_1 + s) - N(t_2 + s)$ 和 $N(t_1) - N(t_2)$ 具相同之分配，$\forall\, t_1 < t_2,\ s > 0$。

接下來，我們介紹波阿松過程之定義：

定義(A)：

一計數過程，（$N(t)$，$t \geq 0$），若滿足下列三項條件，則被稱爲具有比率 λ 之波阿松過程，$\lambda > 0$

(1) $N(0) = 0$

(2)此過程具有獨立增量

(3)在任一長度爲 t 之區間，其事件次數是波阿松分布，且期望值爲 λt，（$E(N(t)) = \lambda t$），也就是說，$\forall s, t \geq 0$

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

定義(B)：

一個計數過程，$\{N(t), t \geq 0\}$，若滿足下列條件，則被稱爲具有比率 λ 之波阿松過程，$\lambda > 0$

(1) $N(0) = 0$

(2)此過程具有獨立且固定之增量

(3) $P\{N(h) = 1\} = \lambda h + 0(h)$

(4) $P\{N(h) \geq 2\} = 0(h)$ ……（註一）

事實上，定義(A)和定義(B)是等價的（參考〔1〕）

因爲定義(A)(1)⇐⇒定義(B)(1)

定義(A)(2)，(3)⇒定義(B)(2)，(3)，(4)

由定義(A)之(3)

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$= P\{N(t) - N(0) = n\},$$

$$\forall s, t \geq 0, \ n = 1, 2, \cdots\cdots$$

∴具有固定增量

因此由定義(A)之(2)(3)⇒定義(B)之(2)

而且定義(A)之(2)(3)可推得定義(B)之(3)(4)，如下：

$$\lim_{n\to 0}\frac{P\{N(h)=1\}-\lambda h}{h}=\lim_{n\to 0}\frac{P\{N(h)-N(0)=1\}-\lambda h}{h}$$

$$=\lim_{n\to 0}\frac{e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^1}{1!}-\lambda h}{h}$$

$$=\lambda\lim_{n\to 0}(e^{-\lambda h}-1)=0$$

故 $P\{N(h)=1\}-\lambda h=0(h)$

亦即 $P\{N(h)=1\}=\lambda h+0(h)$

同理，可推得 $P\{N(h)\geq 2\}=0(h)$

故定義(A)可推得定義(B)

其次，我們再證明由定義(B)亦可推得定義(A)

首先，定義(B)(2)成立，則定義(A)之(2)亦必成立

接下來，我們將再證明，定義(B)之(2)、(3)、(4)成立，則定義(A)之(3)亦成立：

令 $P_n(t)=P\{N(t)=n\}$

則 $P_0(t+h)=P\{N(t+h)=0\}$

$=P\{N(t)=0, N(t+h)-N(t)=0\}$

$=P\{N(t)=0\}P\{N(t+h)-N(t)=0\}$

（by 定義(B)(2)，具有獨立增量）

$=P_0(t)P\{N(h)-N(0)=0\}$

（by 定義(B)(2)，具有固定增量）

$=P_0(t)P\{N(h)=0\}$ （$\because N(0)=0$）

$=P_0(t)(1-P\{N(h)=1\}-P\{N(h)\geq 2\})$

$=P_0(t)(1-\lambda h-20(h))$

$=P_0(t)(1-\lambda h+0(h))$ ……（註二）

於是，

$$\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=-\lambda P_0(t)+\frac{0(h)}{h}\cdot P_0(t)$$

$$=-\lambda P_0(t)+\frac{0(h)}{h} \qquad \text{（註三）}$$

當 $h\to 0$ 時，可得　$P_0'(t)=-\lambda P_0(t)$

亦即　$\dfrac{P_0'(t)}{P_0(t)}=-\lambda$

積分亦得　$\log P_0(t)=-\lambda t+c$

即　$P_0(t)=K\cdot e^{-\lambda t}$

但因 $P_0(0)=P\{N(0)=0\}=1$　（by 定義(B)(1)）

$=K\cdot e^{-\lambda\cdot 0}=K$　　$\therefore K=1$

同樣地，　$n>0$

$$\begin{aligned}
P_n(t+h)&=P\{N(t+h)=n\}\\
&=P\{N(t)=n,N(t+h)-N(t)=0\}\\
&\quad+P\{N(t)=n-1,N(t+h)-N(t)=1\}\\
&\quad+\sum_{k=2}^{n}P\{N(t)=n-k,N(t+h)-N(t)=k\}\\
&\quad\text{（by 定義(B)(2)）}\\
&=P\{N(t)=n\}P\{N(t+h)-N(t)=0\}\\
&\quad+P\{N(t)=n-1\}P\{N(t+h)-N(t)=1\}\\
&\quad+\sum_{k=2}^{n}P\{N(t)=n-k,N(t+h)-N(t)=k\}\\
&\quad\text{（by (2)及(4)）}\\
&=P_n(t)P_0(h)+P_{n-1}(t)P_1(h)+0(h)\\
&=P_n(t)(1-\lambda h)+P_{n-1}(t)(\lambda h+0(h)+0(h)\\
&=P_n(t)(1-\lambda h)+P_{n-1}(t)\lambda h+0(h)
\end{aligned}$$

因此　$\dfrac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+\dfrac{0(h)}{h}$

當 $h \to 0$ 時

$$P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

即 $$e^{\lambda t}[P_n'(t) + \lambda P_n(t)] = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t)$$

即 $$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} \cdot P_n(t)) = \lambda \cdot e^{\lambda t} P_{n-1}(t) \cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

但 $$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} P_1(t)) = \lambda e^{\lambda t} P_0(t) = \lambda e^{\lambda t} e^{-\lambda t} = \lambda$$

$$\therefore \quad P_1(t) = (\lambda t + c) e^{-\lambda t}$$

又 $$P_1(0) = C = 0$$

$$\therefore \quad P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

現在想證明 $$P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$$

利用數學歸納法，假設 $k = n - 1$ 時，成立，則代入 $(**)$

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} P_n(t)) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}$$

則 $$e^{\lambda t} P_n(t) = \frac{\lambda^n t^n}{n!} + C$$

但 $$P_n(0) = 0 \qquad \therefore C = 0$$

故 $$P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$$ ，則對於 $k = n$ 時亦成立

故由定義(B)之條件可推得定義(A)之條件

根據上述知，定義(A)、(B)爲等價

在此，附帶說明一下，定義(A)之(3)期望值

$$E(N(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} n P\{N(t) - N(0) = n\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \left(e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}\right)$$

$$= \lambda t \cdot e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \lambda t \cdot e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t}$$

$$= \lambda t$$

現在，先舉一波阿松分配的應用例子：

例：一個健康人體的白血球數目平均約每一立方毫米血液中含6,000個，爲檢查白血球是否不足時，取出0.001立方毫米之血液，在此血液中尋找白血球數目（以X表之），問在一健康人的血液中，白血球數目之期望值爲多少？又若最多只發現兩個時，是否即患白血球不足之證據？（參考〔2〕）

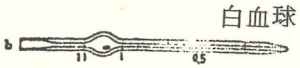
註：白血球爲無色之細胞，分爲兩大類，一類僅具單個細胞核（此類包括淋巴球與單核球兩種），另一類白血球則作葉狀，且常分爲連續之數小葉，其細胞質含有微細之嗜色顆粒，故總稱爲“顆粒球”，這些細胞都很小，體積最大的單核球，其細胞體之直徑亦不過15微米，大部分係介於10—15微米之間，顆粒球之直徑平均約10—12微米，淋巴球小者直徑爲8微米，大者12微米或過之。故須在高倍顯微鏡下方可觀察得。在此處先將此一實驗步驟稍加說明：

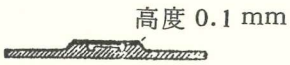
1° 取血液置於“白血球用混合玻璃管”內，以生理食塩水稀釋至100倍，並充分混合均勻。（若不稀釋，濃度太高，使用Poisson分配不合適，見定義(B)(3)；而稀釋時，若用蒸餾水，會將細胞（血球）脹破）

2° 吹去附在吸管尖端之血液2～3滴，再將吸管之尖端觸蓋玻片及計算盤相接處，管內液體因毛細管作用進入蓋玻片下。不宜加入過多，否則使蓋玻片浮起或產生氣泡皆不宜。

3° 置於顯微鏡下觀察，由於白血球有核而紅血球無核，經由染色後，在高倍顯微鏡下可分辨出。

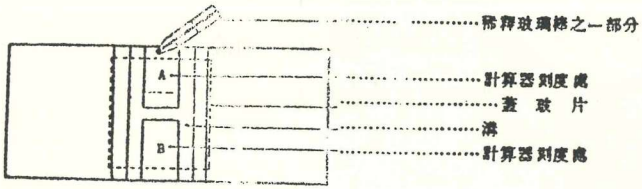
4° （如圖四），一大方格（16個中方格）之稀釋液體，即爲$1 \times 1 \times 0.1 = 0.1\ (mm)^3$，因稀釋100倍，故含血液成分$0.1 \times \frac{1}{100} = 10^{-3}\ (mm^3)$



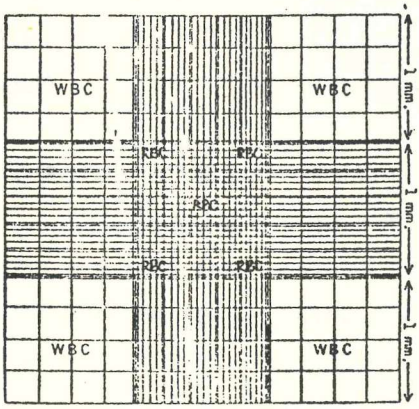


圖一　白血球用混合玻璃管

圖二　計算室之側面圖



圖三　計算室圖示



圖四　放大的計算室格子

(Solution) : $\left.\begin{array}{l} S = 0.001 \\ \lambda = 6{,}000 \end{array}\right\} > \lambda s = 6$ ←——期望值

$$P[X \leq 2] = \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-6}6^{x}}{x!} = \frac{e^{-6}6^{0}}{0!} + \frac{e^{-6}6^{1}}{1!} + \frac{e^{-6}6^{2}}{2!} = 0.062$$

但這是否即爲白血球不足的證據呢？這就牽涉到判斷的標準，若你認爲0.062極小，那麼結論自然是此人患了白血球不足。

(Remark)

N(t) 具有 Poisson distribition 的結果是波阿松逼近二項分配 (Binomial distribition) 的結果，試將區間細分成 k 個等分，k 夠大。利用定義(B)之(4)，當 k 充分大，則有兩個或更多個事件發生在同一個子區間之機率接近0，又根據固定增量及獨立增量之特性，這個數目將是一個參數爲 k，且 $P = \frac{\lambda t}{k} + 0\left(\frac{t}{k}\right)$ 的二項分配。

此時，N(t) 之期望值爲

$$\lim_{k \to 0} k\left[\lambda \cdot \frac{t}{k} + 0\left(\frac{t}{k}\right)\right] = \lambda t + \lim_{k \to \infty} \frac{t \cdot 0\left(\frac{t}{k}\right)}{\frac{t}{k}} = \lambda t$$

△等待時間分配 (Interarrval and Waiting Time Distribitions)

考慮一個波阿松分配，令 T_1 代表第一次事件發生的時間，當 $n > 1$ 時，T_n 代表第 (n − 1) 次事件發生後至第 n 次事件發生所經過的時間，則此序列，$\{T_n, n = 1, 2, \cdots\cdots\}$，叫做The sequence of interarrival times，舉例而言，若 $T_1 = 5$，$T_2 = 8$，就是說，第一次事件發生在5時，第二次事件發生13時，

接下來，我們就可以決定 T_n 的分配

$$P\{T_1 > t\} = P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$$

因此，T_1 具有一指數分配，而其mean 爲 $\frac{1}{\lambda}$

而 $P\{T_2 > t\} = E[\{T_2 > t \mid T_1\}]$

$$\therefore P\{T_2 > t \mid T_1 = S\} = P\{0 \text{ event in } (s, s+t] \mid T_1 = S\}$$
$$= P\{0 \text{ event in } (s, s+t]\}$$
$$(\because \text{independent increments})$$
$$= P\{0 \text{ event in } (0, t]\}$$
$$(\because \text{stationary increments})$$
$$= e^{-\lambda t}$$

因此，T_2 也具有mean爲$\frac{1}{\lambda}$的指數分配，而且T_1 和T_2 無關。（僅和時間 t 有關）

更進一步說，

（prop 1） T_n ; $n = 1, 2, \cdots\cdots$是一獨立（independent），穩定（stationary）的指數分配，（exponential distribition）隨機變數，且mean爲$\frac{1}{\lambda}$

現在，再看看另一種所謂的第 n 次事件的等待時間（Waiting time），記爲S_n，

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i, \quad n \geq 1$$

因爲第 n 次事件在時間 t 之前發生，即在時間 t 之內至少發生 n 次事件

即 $N(t) \geq n \iff S_n \leq t$

所以 $F_{S_n}(t) = P\{S_n \leq t\} = P\{N(t) \geq n\}$

$$= \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

經過微分可得

$$f_{S_n}(t) = -\sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} + \sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}$$

$$= -\sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}$$

$$+ \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= -\sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$$+ \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

（prop 1 ）也提供了我們另一種定義波阿松分配的方法，假如有一獨立，穩定的指數隨機分配序列，$\{T_n, n \geq 1\}$ 且此序列每一分配的期望值（mean ）爲$\frac{1}{\lambda}$，則我們可根據此定義—計數分配：

在此分配中發生第 n 次事件所發生的時間在S_n，

$$S_n = T_1 + T_2 + \cdots\cdots + T_n,$$

則此計數分配 $\{N(t), t \geq 0\}$ 將是一個比率爲 λ 的波阿松分配。（註：$N(t) = \max\{n, S_n \leq t\}$，而 $S_0 = 0$ ）

△波阿松分配的進一步的性質

考慮一比率爲 λ 的波阿松分配 $\{N(t), t \geq 0\}$，假定在一時間內發生的事件不是 type Ⅰ，就是 type Ⅱ （即事件僅有此二種分類），再進一步，發生事件爲 type Ⅰ 的機率爲 p，發生事件爲 type Ⅱ 的機率爲（1－p），所有事件皆彼此獨立，比方說，到某一商店光顧的顧客是根據比率爲 λ 的波阿松分配，到達的顧客爲男性者（ type Ⅰ ）機率爲$\frac{1}{2}$，爲女性者（ type Ⅱ ）機率爲$\frac{1}{2}$。

且令$N_1(t)$，$N_2(t)$分別代表 type Ⅰ和 type Ⅱ在〔0，t〕時間內發生的個數。（注意 $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$）

（prop 2 ）$\{N_1(t), t \geq 0\}$ 及 $\{N_2(t), t \geq 0\}$ 都是波阿松過程，其比率分別爲 λp 和 $\lambda(1-p)$，而且此二過程互相獨立。

（證）首先，讓我們先算出這個聯合分配之機率 $P\{N_1(t) = n, N_2(t) = m\}$

$$P\{N_1(t) = n, N_2(t) = m\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N_1(t)=n, N_2(t)=m \mid N(t)=k\} P\{N(t)=k\}$$

但因 $N(t)=N_1(t)+N_2(t)$

（〔0，t〕內若有n次 type Ⅰ 事件及m次 type Ⅱ 事件發生，則事件總數必然爲 n＋m 次）

故 $P\{N_1(t)=n, N_2(t)=m \mid N(t)=k\}=0$, if $k \neq n+m$

所以 $P\{N_1(t)=n, N_2(t)=m\}$

$$=P\{N_1(t)=n, N_2(t)=m \mid N(t)=n+m\} \cdot P\{N(t)=n+m\}$$

$$=P\{N_1(t)=n, N_2(t)=m \mid N(t)=n+m\} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!}$$

再看 $P\{N_1(t)=n, N_2(t)=m \mid N(t)=n+m\}$

相當於（n＋m）次事件發生，其中爲 type Ⅰ 事件之機率爲 p，爲 type Ⅱ 機率爲（1－p），則恰發生 n 次 type Ⅰ 事件，m 次 type Ⅱ 事件的機率分配。

機率爲 $\binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m$

因此，

$$P\{N_1(t)=n, N_2(t)=m\}$$

$$=\binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!}$$

$$=\frac{(n+m)!}{n!\,m!} p^n (1-p)^m e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n (\lambda t)^m}{(n+m)!}$$

$$=e^{-\lambda t p} (\lambda t p)^n e^{-\lambda t(1-p)} \frac{(\lambda t(1-p)^m}{m!} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

因此， $P\{N_1(t)=n\} = \sum_{m=0}^{\infty} P\{N_1(t)=n, N_2(t)=m\}$

$$= e^{-\lambda t p}\frac{(\lambda t p)^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda t(1-p)}\frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!}$$

$$= e^{-\lambda t p}\frac{(\lambda t p)^n}{n!}$$

而顯然 (1)$N_1(0) = 0$

(2)此過程具獨立增量

根據定義(A)，$\{N_1(t), t \geq 0\}$爲一波阿松分配，比率爲λp，同樣地

$$P\{N_2(t)=m\} = e^{-\lambda(1-p)}\frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!}$$

$\therefore \{N_2(t), t \geq 0\}$亦爲一波阿松分配，比率爲$\lambda(1-p)$

再根據 equation (*)

$$P\{N_1(t)=n, N_2(t)m\} = P\{N_1(t)=n\}P\{N_2(t)=m\}$$

$\therefore$此二分配，彼此獨立。

參考資料

(1) ROSS. Mc Graw-Hill Book Company, New York Introduction To Probability Models.

(2) Mitton, J. S. and ARNOLD, J. S. (1986). Probability And Statistics In The Engineering And Computing Sciences.

註釋：

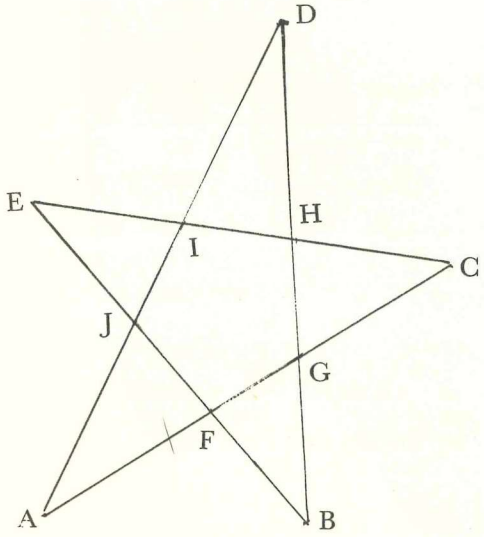
註一：一個函數 f，若滿足 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=0$，則稱爲 $0(h)$

註二：$f(h)$ 若爲 $0(h)$，其常數倍 $Cf(h)$ 亦爲 $0(h)$

註三：$\because P_0(t)$ 爲一機率，故 $0\leq P_0(t)\leq 1$，

若 $\frac{f(h)}{h}\longrightarrow 0$ as $h\longrightarrow 0$

則 $\frac{f(h)}{h}\cdot P_0(t)<\frac{f(h)}{h}\longrightarrow 0$ as $h\to 0$



如圖A、B、C、D、E、F、G、H、I、J十點，今想用9個銅板塡滿其中9個點，方法爲若要塡A，則必須由G或I開始，G→F→A或I→J→A塡。欲塡F，則須由E或C開始，E→J→F或C→G→F塡，而塡過之點不可當起始點，如A塡過後，要塡G就只能由D開始，試問該如何才可塡滿其中之9點。

8. 畫 廊 定 理

指導老師：趙文敏
作　　者：王彩蓮

＊＊一個形狀爲多邊形的畫廊，如果對於掛在畫廊中的任三幅畫我們均可選擇一個位置同時看到它們，則必可選擇一個位置同時看到畫廊中全部的畫＊＊。

這就是Krasnoselskii 定理，也就是所謂的“畫廊”定理（Art Gallery Theorem）。本文主要的目的是想利用凸集（convex）的一些理論來證明它。

雖然凸集在對局論（game theory）、線性規劃（linear programming）及其它數學分支有很大的應用，但它們本身亦有獨立的興趣。我們將重點放在一般的二維平面E^2（Euclidean space of two dimensions），更高維的情形則留待讀者自行推廣。

何謂凸集？首先介紹凸集的定義。

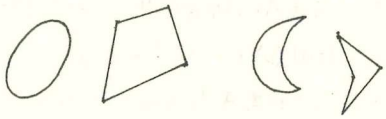
a、b$\in E^2$，我們用〔a，b〕表連接a、b之線段，即

$$[a, b] = \{ (1-t)a + tb \mid 0 \leq t \leq 1 \}$$

<u>定義1</u>：C爲E^2的子集，若每對a，b$\in$C都滿足〔a，b〕$\subset$C，則稱C爲凸集。（也就是說C中任意兩點皆可彼此對“看”?!）

例如一個點、一條線段、圓板、三角區域及E^2本身等都是凸集（見圖一）規定：ϕ爲凸集。

（圖一）



1°　2個凸集$\subset E^2$　　2°　2個非凸集$\subset E^2$

由於凸集定義本身牽涉到E^2的線性結構，因此凸集的線性運算常可保持凸性；例如A，B爲E^2中之二凸子集，$\alpha \in R$，則

$$\alpha A = \{ \alpha a \mid a \in A \}$$

$$A + B = \cup \{ [a, b] \mid a \in A, b \in B \}$$

皆爲凸子集。

現在讓我們來考慮一批凸集的交集與聯集是否仍爲凸集？我們將它寫成下面的定理。

<u>定理 1</u>：(1)任意一批凸集的交集仍爲凸集。

(2)任意一批凸集的聯集未必爲凸集，但當此批凸集形成所謂的塔（tower）時（即任給兩凸集A和B，不是$A \subset B$就是$B \subset A$），則其聯集爲凸集。

證　明：(1)令&表一批凸集所成的族；

如果$p, q \in \bigcap_{C \in \&} C$，則$p, q \in C$，$\forall C \in \&$。因爲C爲凸集，所以$[p, q] \subset C$，$\forall C \in \&$。因此$[p, q] \subset \bigcap_{C \in \&} C$

根據定義可知$\bigcap_{C \in \&} C$爲凸集

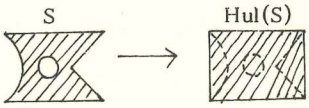
(2)令&表一批成塔的凸集所成之族；

如果$p, q \in \bigcup_{C \in \&} C$，則可找到&中之二元素A、B使得$p \in A$且$q \in B$，因爲&形成塔，因此不是$A \subset B$就是$B \subset A$，假設$A \subset B$，則$p, q \in B$，因爲B爲凸集，所以$[p, q] \subset B \subset \bigcup_{C \in \&} C$。因此$\bigcup_{C \in \&} C$爲凸集。

以上是有關凸集一些重要的結果。由於凸集對任意交集是封閉的，因此在E^2中任取一子集A，則包含A的所有凸集之交集仍爲凸集且仍包含A，換句話說：這交集是E^2中包含A的所有凸集中最小的，這個凸集與A的關係很密切，我們寫成一個定義如下：

<u>定義 2</u>：包含A的所有凸集之交集稱爲A的凸包（convex hull）簡寫成Hul(A)。（見圖二）

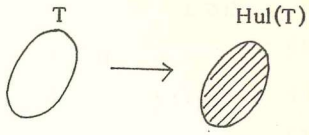
（圖二）



與E^2的子集A有關連的凸集除了凸包外，還有一個稱爲凸核（convex kernel），如下定義：

<u>定義 3</u>：$\ker(A) = \{ x \in A \mid$ 對

每個y ∈ A，恒有〔x，y〕⊂ A }也就是說，一個點若屬於ker(A)，則它可以“看”到A中所有的點!!（見圖三）

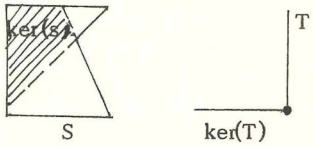


2 個集合 S 和 T 的凸包

由定義可推得 ker(A) 是包含於A中的凸集。

有關 ker(A) 與 Hul(A) 之間的類似點並不完美；因爲 Hul(A) 是包含A的最小凸集，但是 ker(A) 既不是A的最大凸子集也不是最小凸子集。然而，ker(A) 與A的“最大”凸子集有某種關連，下個定理將明確地指出此關連，在陳述此定理之前，我們先介紹一些預備的知識以證明它。

（圖三）



兩個集合 S 和 T 的凸核

<u>定義 4</u>：令&表一個集合族，π 表&中元素的性質，如果M∈&，且滿足：

(1)M有性質π

(2)M不爲&中其它有性質π的集合之眞子集。

則稱集合M關於性質π爲極大（maximal）。

下面是所謂的 Zorn 引理

公設（Zorn 引理）：設（&，≥）爲一半序集，若&中每個非空的全序子集都有上界，則&有極大元素。

此引理顯示了A的極大凸子集之存在性，且對A中每點p，我們皆可找到含p點的極大凸子集。（請讀者自證之，Hint：利用定理 1(2)）

現在我們可開始著手於下個定理了。

<u>定理 2</u>：A ⊂ E^2，則 ker(A) 爲A的所有極大凸子集之交集。

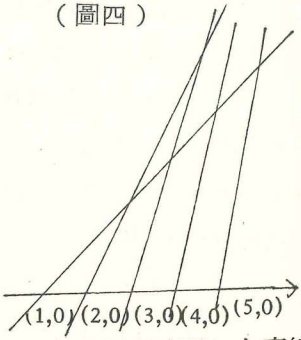
證　明：令&表A的所有極大凸子集所成的集合，首先我們證明 ker(A) ⊂

$\bigcap_{B\in\&} B$。如果 $\ker(A)=\phi$，當然成立。假設 $\ker(A)\neq\phi$，令 $M\in\&$，$p\in\ker(A)$，因此〔 p , q 〕$\subset A$，$\forall q\in M$。令 $C=\cup\{〔p,q〕\mid q\in M\}$ 則C爲A之凸子集（因爲凸集“相加”仍爲凸集），且包含M，因爲M是A的極大凸子集，所以 $M=C$，因爲 $p\in C$，所以 $p\in M$。因此 $\ker(A)\subset M$，$\forall M\in\&$。所以 $\ker(A)\subset\bigcap_{B\in\&} B$。再來我們證明 $\bigcap_{B\in\&} B\subset\ker(A)$。如果 $\bigcap_{B\in\&} B=\phi$，當然成立。假設 $\bigcap_{B\in\&} B\neq\phi$，令 $x\in\bigcap_{B\in\&} B$，我們只須證明對A中每點y，皆有〔 x , y 〕$\subset A$ 便夠了，令 $y\in A$，因此y必包含在A的某個極大凸子集M中。因爲 $x\in\bigcap_{B\in\&} B$，所以 $x\in M$。因爲 x , y $\in M$，所以〔 x , y 〕$\subset M\subset A$，因此 $x\in\ker(A)$。所以 $\bigcap_{B\in\&} B\subset\ker(A)$。因此 $\ker(A)=\bigcap_{B\in\&} B$

下面我們介紹Helly定理，它是我們證明畫廊定理的主要工具，我們先提出一個問題：含&表 E^2 中一批凸集所成的集合，如果&中任二個元素交集均非空，則&中所有元素的交集是否非空？改爲任三個元素交集均非空呢？

第一個問題是很簡單的，令 C_n 表過（ n , 0 ）點且斜率爲n之直線，&表所有 C_n 所成的集合，則&爲凸集族，且任二個元素交集均非空（因爲若 $n_1\neq n_2$，則 C_{n1} 與 C_{n2} 不平行了！），但是&中所有元素的交集卻爲空集合（見圖四），但此例卻無法提供第二個問題的答案（因爲&中任三個元素的交集均爲空集合）。但依Helly定理，我們可以很快地解決第二個問題。

（圖四）



過（ n , 0 ）點斜率爲n之直線 C_n

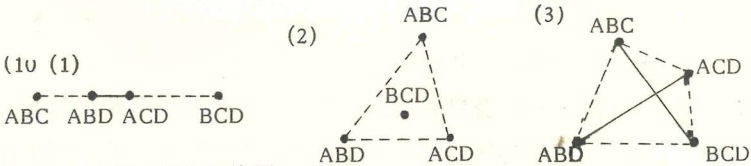
<u>定理 3</u>（Helly定理）：令&表 E^2 中一批凸集所成的集合，且&中任三個元素均有共同點，則只要 $n\geq 4$，&

中任n個元素必有共同點。

證　明：先著手於最簡單的情形，即n＝4時，令&表E^2 中一批凸集所成的集合，且&中任三個元素均有共同點。我們從&中任意選出四個元素A，B，C，D，爲了方便，我們以ABC表A，B，C這三個集合的一個共同點等等，如果ABC，ABD，ACD，BCD四點有其中兩點重合，則此重合點便爲A，B，C，D之共同點了。假設此四點相異，則此四點在E^2 中的位置可分爲三種情形來討論。

(1)四點共線：考慮中間兩點與旁邊兩點連線段的交點（見圖五(1)），因爲從ABD至ACD之線段的兩個端點均在凸集A與D內，所以此線段必爲A∩D之子集，同理從ABC至BCD之線段必爲B∩C之子集，所以此兩條線段的交點必屬於A，B，C，D四個集合了。

（圖五）



四個交點的位置

(2)其中三點形成一個三角形，另一點位於此三角形區域（即三角形內部與邊界的聯集）：考慮落在三角形區域的這點（見圖五(2)），因爲ABC，ABD，ACD，這三點均在凸集A內，所以此三角形區域必爲A的子集，又BCD此點位於此區域，故BCD爲A，B，C，D之共同點了。

(3)四點形成一個凸四邊形：考慮此四邊形對角線的交點即可（見圖五(3)）。

由上述討論可知A，B，C，D必有共同點，現在我們知道&中任

四個元素必有共同點，接著證明&中任五個元素必有共同點。假設給&中任五個元素A，B，C，D，E，我們當然也可列出這五個交點，再考慮此五點的位置，然而卻有太多的可能性。如果n更大，此n點之位置便變得非常複雜了。因此我們利用一點小技巧，令**A**＝{A,B,C,D,E}，考慮新的子集族**B**＝{A,B,C,D∩E}。在**B**中，我們有四個凸集，且**B**中任三個元素的交集均爲**A**中四個（或者更少）元素的交集，因此交集非空。由前面證出的結果可知**B**中此四個元素的交集非空。因此A∩B∩C∩D∩E＝A∩B∩C∩(D∩E)不爲空集合了，所以&中任五個元素的交集非空。因此，只要給n（n≥4），我們便可重複此步驟到達到n，所以&中任意有限個元素的交集必非空，這也就是我們欲證的結果。

現在我們將證明畫廊定理了!! 我們以平面凸集來表現它，改寫畫廊定理如下：

Krasnoselskii 定理之改寫：令P爲平面多邊形區域，如果對於P邊界上任意三點，均存在P中之一點x，使得〔x，a〕∪〔x，b〕∪〔x，c〕包含於P，則ker(P)≠ϕ。

證　明：首先賦予P的邊界逆時針方向，然後在每個邊界σ上畫一直線λ包含σ，對於每條直線λ，我們作個正方形S滿足下列性質：（見圖六）

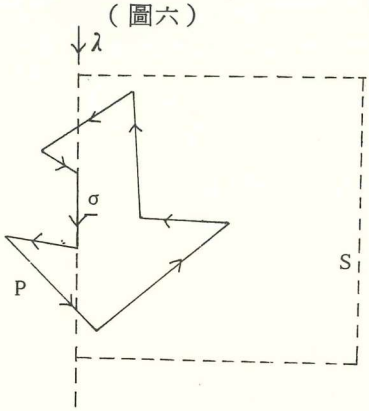
(1)S有一邊在直線λ上

(2)S爲λ所決定之左半閉平面之子集。

(3)S足夠大而能包含P中位於λ左側的點。

我們先證明每三個正方形皆有共同點。令S_1，S_2，S_3爲P之三邊σ_1，

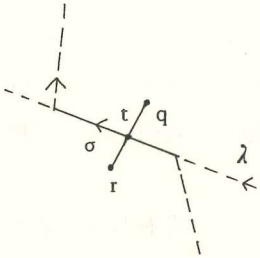
（圖六）



正方形S的作法

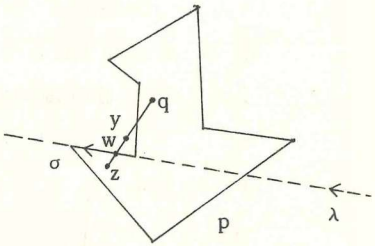
σ_2, σ_3 上的點但不爲P的頂點。根據假設我們可找到一點 $x \in P$，使得〔x，a〕∪〔x，b〕∪〔x，c〕⊂P，則x必位於 λ_1，λ_2, λ_3 這三條直線的左側，因爲如果x位於 λ_1（例如）的右側，則〔x，a〕亦位於 λ_1 之右側。因爲a不爲P的頂點，因此存在P中的點很接近 σ_1，但卻位於 σ_1 的右側，但這是不可能的，因爲我們賦予P逆時針方向，所以P的點皆位於P每一邊的左側。因爲 $x \in P$，又 S_1, S_2, S_3 夠大足以包含P中位於 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 左側的點，所以x屬於 S_1, S_2 和 S_3。因此任三個正方形均有非空交集，又因爲正方形皆爲 E^2 中的凸子集，根據Helly 定理，必有一點q位於每個正方形。我們首先證明 $q \in P$，再證明 $q \in \ker(P)$，則 $\ker(P) \neq \phi$ 了！如果 $q \notin P$，我們可畫一線段連接q與P內部的一點r，使得〔q，r〕不過P的頂點。因此當我們由q沿著〔q，r〕走到r時，一定會先碰到P邊界 σ 上之一點t（見圖七），因爲〔q，t〕和P只交於點t，因此〔q，t〕的每一點必位於 σ 的右側，則q就不位於 λ 所造的正方形上了。這是不可能的，因爲q屬於每個正方形，所以 $q \in P$。如果 $q \notin \ker(P)$，則存在一點 $z \in P$，使得〔q，z〕 $\not\subset P$，令y爲〔q，z〕中但不屬於P之點，因此當我們由y沿著〔q，z〕走至z時，一定會先碰到P邊界 σ 上的一點 ω（見圖八）。因爲〔q，ω〕中必有點很接近 σ，但卻不在P中，所以q，必位於 λ 之右側了。因此q不位於 λ 所造之正方形。這仍產生矛盾，所以 $q \in \ker(P)$。因此 $\ker(P) \neq \phi$，得證了Kranoselsii 定理。

（圖七）



如果 $q \neq p$ 的情形

（圖八）



如果 $q \neq \ker(p)$ 的情形

參考資料：PERSPECTIVES IN MATHMATICS / PENNY.

在此介紹一下何謂古希臘三大作圖難題：

(1)能否用圓規直尺將任意角分爲三等分。

(2)能否用圓規直尺來作出另一立方形，其邊長爲 b，使得和一已知正方形，其邊長爲 a 單位，有 $a^3 = 2a^3$ 之關係？

(3)對任一已知圓，我們能否用圓規直尺作出一個正方形，使其面積等於已知圓的面積？

若讀者對這些證明有興趣，請參閱由L. E. DICKSON 所著的 "FIRST COURSE IN THE THEORE OF EQUATION"

編　後　語

常常笑我們自己：敢用“零經驗＋負才能”接了師大數學，“憨憨”的我們，曾預見前途是一片光明，但當我們跂足一呼，Σ人的稿件竟不知何緣故，被嚇得不敢出來了，在熱鍋上的我們，只好硬著厚皮忍受煎熬，終於“柳暗花明又一村”，“皇天不負苦心人”，師數出刊了。

好想大喊一聲！一發所感。

誠摯地感謝助教與學長、姊的稿件及指導。

最後，感謝師數讓我們三個楞小子成長。

也願師數更好，更完美！

吳献錚
施藹玲　謹上
吳原榮

發 行 人：陳　　昭　　地

出 版 者：國立臺灣師範大學數學學會

主　　編：吳献錚、施藹玲、吳原榮

封　　面：李　　淑　　芬

印 刷 者：公舘打字印刷有限公司

出版日期：中華民國七十七年六月五日

師大訓課刊登第 136 號

統一編號
06385750370