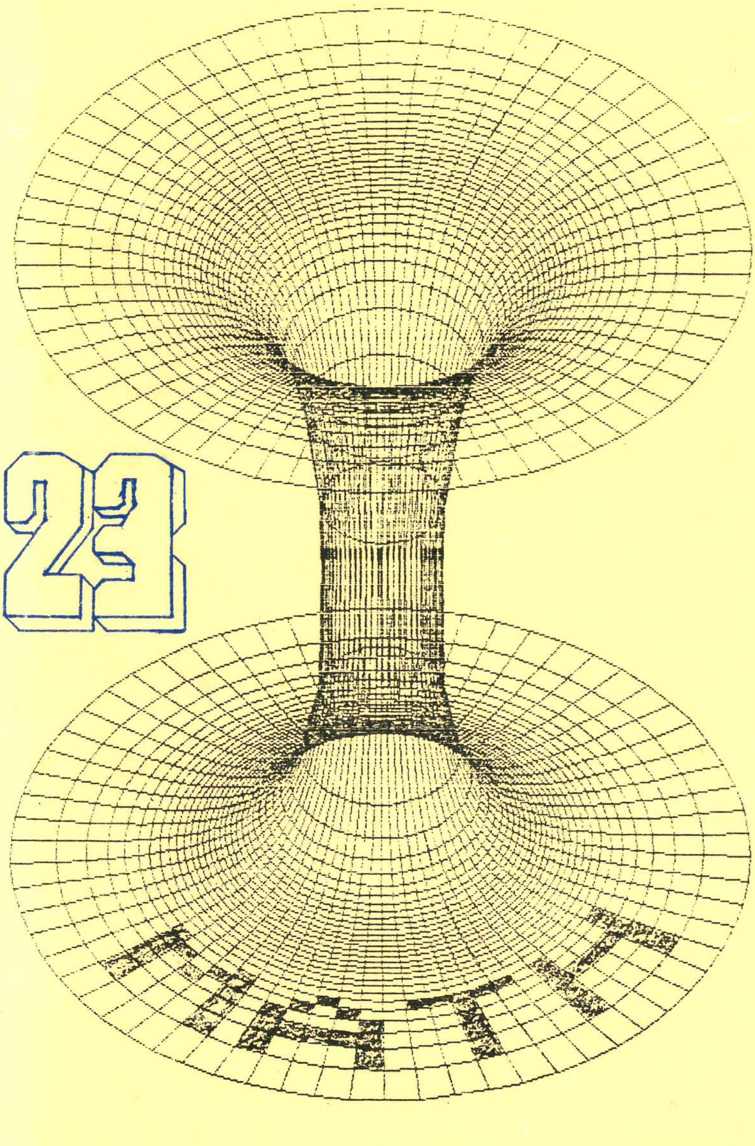
師大數學

23



序

系主任

本系成立於民國三十五年八月，首由張儒林教授擔任系主任，當時招收數學系及四年制專修科各一班，同學三十餘人，教授三位，助教一位，到民國四十五年為配合原來擴校計劃在頭份設三年制專修科，民國四十七年又增設夜間部專修科，民國四十八年停止招日間部專修科，而又將夜間部專修科改制為五年制數學系，為了要培育更高級之數學教育研究人員，於民國五十九年，成立了研究所；三十五年來經歷了各任系主任管公度、潘璞、李新民、康洪元、范傳坡、常法徽、顏啓麟及各任所長李新民、林義雄、呂溪木、李恭晴、顏啓麟之辛勞籌劃與系、所各位教授之苦心經營下，數學系、所，日益茁壯，已由原來每屆僅有十餘位同學，發展至每屆約一百二十名新生入學，目前每年約招收近百位新生；歷年來畢業人數已達三千三百八十餘人，多各有成就；其中獲得碩士學位肆佰餘人，具博士學位者將近二百人，或執教於高等學府，或繼續高深學術研究，餘則多服務於中等學校，都能秉持誠正勤樸之校訓，平時諄諄教學、熱誠服務、堅守崗位，頗獲好評。

現本系共有專兼任教師四十二人，學生十二班共有三百八十九名同學，圖書逾兩萬册，雜誌百餘種，個人電腦六十部，電算室一大間。六十四年夏由本部遷於現址，環境煥然一新，出國學成系友相繼返校，互相砥勵，奠定良好的研究風氣，並擴展了研究領域；今日數學系之師生，更能孜孜不息，為美好遠景奮發努力。

近年來國內外科學發展甚速，對數學之需要更切，本系之任務更日益增大，除肩負數學教育之發展及中等數學教育之輔導外，亦兼具數學學術及數學教育研究之重任。為增強研究風尚，本系二十二年前創辦師大數學年刊，以供師生發表數學及研究心得，切磋琢磨，提高學習及研究興趣。本刊屢經負責同學之精心策劃及全體師生系友之共同支持，漸茲茁壯，除至表感謝外，今後請更不吝珠璣，源源賜稿，善珍此片園地，使本刊前程更能散發絢爛光芒。

陳昭地

七十八年五月

編 者 的 話

— 這不是一份限定於高水準的讀物
我們需要你的參與 —

給親愛的數學系伙伴們：

你已擠進了窄門
走在這一片草坪
告訴我們在這草坪上
你學到了些什麼？
數學形式主義的偏差
從大學帶到中學
從中學及於小學
束縛們長久的進步。
「師大數學」爲你開了一面窗
幫你弄明白這許多堆砌的數學
做的是些什麼
也寄望你以過來人的身份
給剛進這片草坪的
弟妹一點親歷的經驗。

「師大數學」這生長在坪上的一盆樹
掌握在你的手中
需要你給他光與水的滋潤
如果他給你好處
那是因爲你的參與
如果他不意枯萎
那是因爲你袖手旁觀。
讀讀「師大數學」
相信你會有很多話
湧在喉頭
「師大數學」已爲你裝好麥克風
擺在你面前
還帶點音響效果。
請將你的理想落實
灌溉你手裏的這一盆樹。

目　錄

1. 略談大一線性代數

作　　者：林義雄

㈠前言：

大一「線性代數」該教什麼內容？這當然是個見仁見智的問題；但是，基於下列觀點：

1° 承接高中幾何學的觀念；

2° 強調幾何直觀的引導功用，再進入“抽象性”的代數運算步驟或推理；

3° 應用到初等微積分；高等微積分；微分方程式；微分幾何…之考慮。

個人覺得大一「線代」內容應着重線性觀念之幾何來源與幾何應用，請看㈡段內容並參考㈢、㈣段。

㈡擬想中大一「線性代數」課程綱要

開課年級：大一

學　　分：(2,3)，必修

預備知識：高中數學

綱　　要：強調從「幾何觀點」進入抽象「線性代數運算」，並以n維實向量空間R^n（或複向量空間C^n）爲主要討論對象，再附上基本的應用例：

(1)矩陣：代數運算與性質；逆方陣與性質；方陣的行列式函數；分塊矩陣與運算；列（行）簡化梯矩陣；秩二列秩二行秩；解線性聯立方程組之應用。

(2)R^n的結構：先複習直線R^1、平面R^2及空間R^3。

1°線性結構：線性組合、相依與獨立；基底與維度；坐標變換之矩陣表示式；（線性）子空間與各種運算性質。

2°內積結構：內積定義與性質；子空間內積表示式；Gran-Schmidt 直交化法，（就範）直交基；n階行列式之幾何定義與性質、應用；直交投影與對稱運動。

3°仿射結構：仿射子空間、仿射基與仿射坐標；仿射子空間的各種運算與性質；相交、平行、重疊、歪斜；距離（點到平面，平面之間）。

(3)線性變換（從 R^m 到 R^n 爲主）：

1°定義與性質：核空間與値空間；矩陣表示式（與矩陣運算之關係）；坐標變換；矩陣空間。

2°與 R^n 線性，仿射結構之關係：基本方陣之幾何性質。

3°運算與對偶空間：對偶基，第一、二對偶空間與性質。

4°與 R^n 內積結構之關係：保矩運動（剛體運動）與直交方陣；保角運動；不動點與不動線（固有值觀念）。

5° n 階方陣之極化分解式與應用。

6°對稱方陣的對角化與應用：主軸定理，二次曲線與曲面的標準化，極値問題；正（負）定型方陣。

7°（如時間允許）Jordan 標準型。

課程銜接：大二高等微積分，幾何學；大三微分方程式。

(丙)試題（附錄於篇末）

(丁)試題解答與說明：

1.(a)背景：回想平面 R^2 上直線方程式，直線外一點到該直線距離之求法；空間 R^3 中直線與平面方程式，一點到直線與平面距離之求法。完全相同的方法可用來解答本問題；所不同者只不過是在 R^4 中，須用到較多的線性代數觀念與運算。

(b)理論依據：線性子空間；平移；仿射子空間；矩陣的秩與基本列運算；垂直觀念；Gram-Schmidt 直交化法；直交投影向量。

(c)解答：

(1)方法(一)：由 $\begin{cases} x_1+x_2=2+x_3-2x_4 \\ 3x_1=-x_3+x_4 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_1=-x_3/3+x_4/3 \\ x_2=2+4x_3/3-7x_4/3 \end{cases}$

，$x_3, x_4 \in R$，解點 $\overrightarrow{x}$ 可重寫成

$$\overrightarrow{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x_4}{3},\ 2+\frac{4x_3}{3}-\frac{7x_4}{3},\ x_3\ ,\ x_4\right)$$

$$=(0,2,0,0)+x_3\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3},1,0\right)+x_4\left(\frac{1}{3},-\frac{7}{3},0,1\right),\ x_3\ ,\ x_4\in R$$

得到

特解$\overrightarrow{x_0}=(0,2,0,0)$

子空間$V=\langle\langle\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}\rangle\rangle=\{\alpha_1\overrightarrow{x_1}+\alpha_2\overrightarrow{x_2}\mid\alpha_1,\alpha_2\in R\}$，其中$\overrightarrow{x_1}=$

$(-1,4,3,0)$，$\overrightarrow{x_2}=(1,-7,0,3)$

全體的解點可表示成$\overrightarrow{x_0}+V$，是R^4中的<u>二維仿射子空間</u>

(1)之<u>方法(二)</u>：重寫成$A\overrightarrow{x}^*=\overrightarrow{b}^*$，其中$A=\begin{bmatrix}1&1&-1&2\\3&0&1&-1\end{bmatrix}$，$\overrightarrow{x}=(x_1,\cdots,$

$x_4)$，$\overrightarrow{b}=(2,0)$。應用<u>基本列運算</u>到

$$[A\mid\overrightarrow{b}^*]=\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&2&2\\3&0&1&-1&0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&2&2\\0&-3&4&-7&-6\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&2&2\\0&1&-\frac{4}{3}&\frac{7}{3}&2\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&1&-\frac{4}{3}&\frac{7}{3}&2\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=-\frac{1}{3}x_3+\frac{1}{3}x^4\\x_2=2+\frac{4}{3}x_3-\frac{7}{3}x_4\end{cases}$$，以下同「方法(一)」。

(1)之<u>方法(三)</u>：由「方法(一)」，重寫成

$$\begin{bmatrix}1&1\\3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-2\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}$$

今$\begin{bmatrix}1&1\\3&0\end{bmatrix}^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0&-1\\-3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{3}\\1&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ 作用到上式

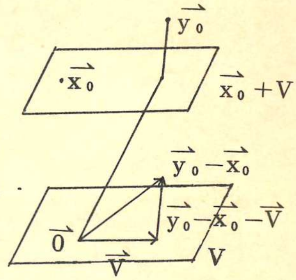
兩邊，得到

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \ , \\ x_2 = 2 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{7}{3}x_4 \ , \ x_3, x_4 \in R \end{cases}$$ ，以下同「方法㈠」。

⑵之<u>方法㈠</u>：令 $\overrightarrow{y_0} = (0, 1, 0, -1)$，問題變成求 $\overrightarrow{y_0} - \overrightarrow{x_0}$ 到 V 之距離與垂足向量 $\overrightarrow{v} = \alpha_1 \overrightarrow{x_1} + \alpha_2 \overrightarrow{x_2}$（引用⑴方法㈠之符號）；那麼 $\overrightarrow{x_0} + \overrightarrow{v}$ 即為 $\overrightarrow{y_0}$ 到 $\overrightarrow{x_0} + v$ 之垂足向量，於是



$$\overrightarrow{y_0} - \overrightarrow{x_0} = (0,1,0,-1) - (0,2,0,0)$$
$$= (0, -1, 0, -1)$$

滿足：$(\overrightarrow{y_0} - \overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{v}) \perp v \Longleftrightarrow (\overrightarrow{y_0} - \overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{v}) \perp \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}$

所以 $\langle \overrightarrow{y_0} - \overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{v}, \overrightarrow{x_i} \rangle = 0 \qquad i = 1, 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 \langle \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_1} \rangle + \alpha_2 \langle \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_1} \rangle = \langle \overrightarrow{y_0} - \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1} \rangle \\ \alpha_1 \langle \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2} \rangle + \alpha_2 \langle \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_2} \rangle = \langle \overrightarrow{y_0} - \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_2} \rangle \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 26\alpha_1 - 29\alpha_2 = -4 \\ -29\alpha_1 + 59\alpha_2 = 4 \end{cases} ; \quad \begin{vmatrix} 26 & -29 \\ -29 & 59 \end{vmatrix} = 693$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{1}{693} \begin{vmatrix} -4 & -29 \\ 4 & 59 \end{vmatrix} = -\frac{120}{693} = -\frac{40}{231} ; \ \alpha_2 = \frac{1}{693} \begin{vmatrix} 26 & -4 \\ -29 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{12}{693} = -\frac{4}{231}$$

於是：

$$\overrightarrow{y_0}-\overrightarrow{x_0}-\overrightarrow{v}=(0,-1,0,-1)-\left[-\frac{40}{231}(-1,4,3,0)-\frac{4}{231}(1,-7,0,3)\right]$$

$$=\frac{1}{231}\left[(0,-231,0,-231)+(-40,160,120,0)+(4,-28,0,12)\right]$$

$$=\frac{1}{231}(-36,-99,120,-219)$$

距離$=|\overrightarrow{y_0}-\overrightarrow{x_0}-\overrightarrow{v}|=\frac{1}{231}\sqrt{36^2+99^2+120^2+219^2}=\frac{1}{231}\sqrt{73458}=\frac{271.0313635}{231}$

$=1.173295946$

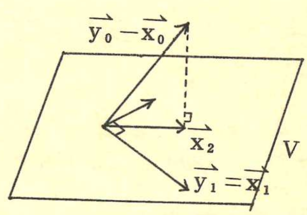
垂直向量$=\overrightarrow{x_0}+\overrightarrow{v}=(0,2,0,0)+\left[-\frac{40}{231}(-1,4,3,0)-\frac{4}{231}(1,-7,0,3)\right]$

$$=\frac{1}{231}\left[(0,462,0,0)+(40,-160,-120,0)+(-4,28,0,-12)\right]$$

$$=\frac{1}{231}(36,330,-120,-12)$$

(2)之方法(二)：用 Gram-Schmidt 直交化法，從 V 基底 $\{\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}\}$ 求一個（就範）直交基。

令



$$\overrightarrow{y_1}=\overrightarrow{x_1}=(-1,4,3,0)$$

$$\overrightarrow{y_2}=\overrightarrow{x_2}-\frac{\langle\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_1}\rangle}{|\overrightarrow{y_1}|^2}\overrightarrow{y_1}=(1,-7,0,3)-\frac{-29}{26}(-1,4,3,0)$$

$$=\frac{1}{26}\left[(26,-182,0,78)+(-29,116,87,0)\right]$$

$$=\frac{1}{26}(-3,-66,87,78)$$

那麼，$\overrightarrow{y_1}\perp\overrightarrow{y_2}$，則 $\overrightarrow{y_0}-\overrightarrow{x_0}$ 在 V 之直交投影向量

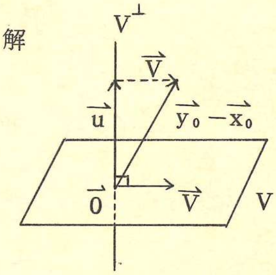
$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{y_0}-\overrightarrow{x_0}-\sum_{j=1}^{2}\frac{\langle\overrightarrow{y_0}-\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_j}\rangle}{|\overrightarrow{y_j}|^2}\overrightarrow{y_j}=\frac{1}{231}(36,-132,-120,-12)$$

$\Rightarrow\overrightarrow{x_0}+\overrightarrow{v}$ 是垂直向量，$|\overrightarrow{y_0}-\overrightarrow{x_0}-\overrightarrow{v}|$ 是距離

(2)之方法(三)：求 V 直交補空間 $V^{\perp}$ 的一個

就範直交基 $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$

設 $\vec{z}=(z_1,z_2,z_3,z_4)\perp\vec{x_i}$, $i=1,2$。解



$$\langle\vec{z},\vec{x_1}\rangle=-z_1+4z_2+3z_3=0$$

$$\langle\vec{z},\vec{x_2}\rangle=z_1-7z_2+z_4=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1=7z_3+\frac{4}{3}z_4 \\ z_2=z_3+\frac{1}{3}z_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{z}=(z_1,z_2,z_3,z_4)=(7z_3+\frac{4}{3}z_4,\ z_3+\frac{1}{3}z_4,\ z_3,\ z_4)$$

$$=z_3(7,1,1,0)+z_4(\frac{4}{3},\frac{1}{3},0,1),\quad z_2,\ z_4\in R$$

令 $\vec{z_1}=(7,1,1,0)$，$\vec{z_2}=(4,1,0,3)$

$$\vec{u_1}'=\vec{z_1}=(7,1,1,0)\rightarrow\vec{u_1}=\vec{u_1}'/|\vec{u_1}'|=\frac{1}{\sqrt{51}}(7,1,1,0)$$

$$\vec{u_2}'=\vec{z_2}-\frac{\langle\vec{z_2},\vec{z_1}\rangle}{|\vec{z_1}|^2}\vec{z_1}=(4,1,0,3)-\frac{29}{51}(7,1,1,0)=\frac{29}{51}(1,22,-29,153)$$

$$\rightarrow\vec{u_2}=\vec{u_2}'/|\vec{u_2}'|=\frac{1}{\sqrt{24734}}(1,22,-29,153)$$

那麼，$\vec{y_0}-\vec{x_0}$ 在 $V^{\perp}$ 之直交投影向量

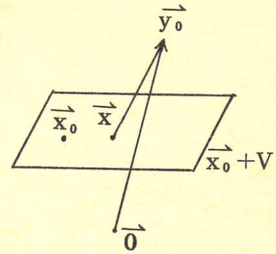
$$\vec{u}=\langle\vec{y_0}-\vec{x_0},\vec{u_1}\rangle\vec{u_1}+\langle\vec{y_0}-\vec{x_0},\vec{u_2}\rangle\vec{u_2}=\cdots=\frac{1}{231}(-36,-99,120,-219)$$

距離＝ $|\vec{u}|$ ＝……；

垂直向量＝$\vec{x_0}+(\vec{y_0}-\vec{x_0}-\vec{u})=\vec{y_0}-\vec{u}=\vec{v}$，…。

其實：可取 $\vec{z_1}=(1,1,-1,2)$，$\vec{z_2}=(3,0,1,-1)$，何故？如何可簡化上列計算。

(2)之方法(四)：（利用 Lagrange 乘數法則方法）：設點 $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 位在平面 $\vec{x_0}+v$ 上，則定點 $\vec{y_0}=(0,1,0,-1)$ 到 $\vec{x_0}$ 之距離之平方為



$d(\overrightarrow{x})=x_1^2+(x_2-1)^2+x_3^2+(x_4+1)^2$，其中

$x_1+x_2-x_3+x_4=0$，$3x_1+x_3-x_4=0$

問題變成：求 $d(\overrightarrow{x})$ 在上述限制條件之下的最小值與最小點 $\overrightarrow{x}$。爲此，

令

$$f(\overrightarrow{x})=x_1^2+(x_2-1)^2+x_3^2+(x_4+1)^2-\lambda_1(x_1+x_2-x_3+x_4-2)-\lambda_2(3x_1+x_3-x_4)$$

$$=\langle\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y_0}\rangle-\lambda_1(\langle\overrightarrow{x},\overrightarrow{y_1}\rangle-2)-\lambda_2\langle\overrightarrow{x},\overrightarrow{y_2}\rangle,$$

$y_1=(1,1,-1,4)$，$y_2=(3,0,1,-1)$

f 在 $\overrightarrow{x}$ 點之全微分

$$df_{\overrightarrow{x}}(\ )=2\langle\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y_0},(\ )\rangle-\lambda_1\langle(\ ),\overrightarrow{y_1}\rangle-\lambda_2\langle(\ ),\overrightarrow{y_2}\rangle$$

$$=\langle 2(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y_0})-\lambda_1\overrightarrow{y_1}-\lambda_2\overrightarrow{y_2},(\ )\rangle$$

$$\Rightarrow\quad df_{\overrightarrow{x}}(\ )=0\iff 2(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y_0})-\lambda_1\overrightarrow{y_1}-\lambda_2\overrightarrow{y_2}=0\iff\overrightarrow{x}=\overrightarrow{y_0}+\frac{\lambda_1}{2}\overrightarrow{y_1}+\frac{\lambda_2}{2}\overrightarrow{y_2}$$

連同 $\langle\overrightarrow{x},\overrightarrow{y_1}\rangle=2$，$\langle\overrightarrow{x},\overrightarrow{y_2}\rangle=0$，解出 λ_1，λ_2 反對應的 $\overrightarrow{x}$⋯⋯。

(d) 一般化情形：給定 $m\times n$ 階矩陣 $A=[a_{ij}]$，$\overrightarrow{b}=(b_1,\cdots,b_m)\in R^m$

1° 設 A 的秩 $r(A)=r$，則齊次方程組 $A\overrightarrow{X}^*=\overrightarrow{b}^*$ 之解向量空間 V 的維度是 $n-r$。

2° 非齊次方程組 $A\overrightarrow{X}^*=\overrightarrow{b}^*$ 有解 $\iff r(A)=r(A\,|\,\overrightarrow{b}^*)$；此時，解點空間是 $\overrightarrow{x_0}+V$（$\overrightarrow{x_0}$ 是一特解；V 同 1°），是 R^n 的 $(n-r)$ 維仿射子空間。

3° 仿射子空間 $\overrightarrow{x_0}+V$ 尚可表示成 $\langle\overrightarrow{x},\overrightarrow{a_i}\rangle=b_i$，$\overrightarrow{a_i}=(a_{i1},\cdots,a_{in})$，$1\leqslant i\leqslant m$；對應的線性子空間 V：$\langle\overrightarrow{x},\overrightarrow{a_i}\rangle=0$，$1\leqslant i\leqslant m$，所以 $\{\overrightarrow{a_1},\cdots,\overrightarrow{a_m}\}$ 是 V 在 R^n 中的直交補空間 $V^\perp$ 中的向量。

4° (1)之方法(三)：設 $A_1=[a_{ij}]_{r\times r}$ 是 A 的 r 階子方陣卻 $r(A_1)=r$；

$B=[a_{ij}]_{r\times(n-r)}$

則 $A\overrightarrow{X}^*=\overrightarrow{b}^*$ 可改寫成等價形式

$$A_1\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_r\end{bmatrix}-B\begin{bmatrix}x_{r+1}\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\end{bmatrix}=A_1^{-1}\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_r\end{bmatrix}-A_1^{-1}B\begin{bmatrix}x_{r+1}\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\quad ,x_{r+1},\cdots,x_n\in R$$

(1)之方法(二)：基本列運算方法。

以上詳見〔 2 〕之p.144 ～ p.154；p.229 ～ p.233；p.239 ～ p.242；p.271 ～ p.275；p.283 ～ p.288。

(2)之方法(一)：取V的一個基底 $\{\overrightarrow{x_1},\cdots,\overrightarrow{x_{n-r}}\}$，令

$$A=\begin{bmatrix}\overrightarrow{x_1}\\ \vdots\\ \overrightarrow{x_{n-r}}\end{bmatrix}_{(n-r)\times n}$$

距離：$|(\overrightarrow{y_0}-\overrightarrow{x_0})-(\overrightarrow{y_0}-\overrightarrow{x_0})A^*(AA^*)^{-1}A|$；

垂足向量：$\overrightarrow{x_0}+(\overrightarrow{y_0}-\overrightarrow{x_0})A^*(AA^*)^{-1}A$

(2)之方法(一)～(四)：詳見參考資料〔 4 〕p.72 ～ p.95 。

2.(a)背景：二階行列式跟平行四邊形面積有何關係？三階行列式跟平行六面體體積有何關係？如何求空間R^3中一個平面平行四邊形的面積？那麼，n階行列式有何幾何意義？

(b)理論依據：向量線性獨立與相依；行列式之基本運算性質與幾何意義；內積運算與直交補空間。

(c)解答：

(1)之方法(一)：設存在常數 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k\to\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\cdots+\lambda_k\overrightarrow{a_k}=\overrightarrow{0}$ 成立；跟$\overrightarrow{a_i}$，$1\leqslant i\leqslant k$ 作內積，得到

$$\sum_{j=1}^{k}\langle\overrightarrow{a_i},\overrightarrow{a_j}\rangle\lambda_j=0\ ,\ 1\leqslant i\leqslant k$$

上式僅有零解 $\lambda_1=\cdots=\lambda_k=0\Longleftrightarrow$ 係數行列式 $\det[\langle\overrightarrow{a_i},\overrightarrow{a_j}\rangle]=$

$G(\vec{a_1},\cdots,\vec{a_k}) \neq 0$

(1)之方法(二)：設 $\vec{a_1},\cdots,\vec{a_k}$ 線性相依；不妨設 $\vec{a_1}=\sum_{i=2}^{k}\alpha_i\vec{a_i}$ 。於是

$$G(\vec{a_1},\cdots,\vec{a_k})=G(\sum_{i=2}^{k}\alpha_i\vec{a_i},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_k})=\begin{vmatrix} \sum_{i=2}^{k}\alpha_i\langle\vec{a_1},\vec{a_i}\rangle & \langle\vec{a_1},\vec{a_2}\rangle & \cdots\cdots & \langle\vec{a_1},\vec{a_k}\rangle \\ & & & \vdots \\ & & & \vdots \\ \sum_{i=2}^{k}\alpha_i\langle\vec{a_k},\vec{a_i}\rangle & \langle\vec{a_k},\vec{a_2}\rangle & \cdots\cdots & \langle\vec{a_k},\vec{a_k}\rangle \end{vmatrix}$$

$=0$ ，這是因爲行列式第一行是第二到第 k 行的線性組合。

反之，設 $G(\vec{a_1},\cdots,\vec{a_k})=0$ 成立，不妨設第一行是第二到第 k 行的線性組合，即

$$\langle\vec{a_j},\vec{a_1}\rangle=\sum_{i=2}^{k}\alpha_i\langle\vec{a_j},\vec{a_i}\rangle=\langle\vec{a_j},\sum_{i=2}^{k}\alpha_i\vec{a_i}\rangle,\ 1\leqslant j\leqslant k$$

$$\Rightarrow\langle\vec{a_j},\vec{a_1}-\sum_{i=2}^{k}\alpha_i\vec{a_i}\rangle=0\ ,\ 1\leqslant j\leqslant k$$

$\Rightarrow (j=1)-(j=2)\times\alpha_2-\cdots-(j=k)\times\alpha_k$,得到 $\langle\vec{a_1}=\sum_{i=2}^{k}\alpha_i a_i$,

$$\vec{a_1}-\sum_{i=2}^{k}\alpha_i\vec{a_i}\rangle=0$$

$$\Rightarrow|\vec{a_1}-\sum_{i=2}^{k}\alpha_i\vec{a_i}|^2=0\Rightarrow\vec{a_1}-\sum_{i=2}^{k}\alpha_i\vec{a_i}=0$$

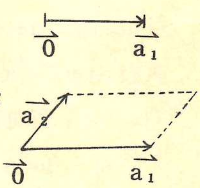
$$\Rightarrow\vec{a_1}=\sum_{i=2}^{k}\alpha_i\vec{a_i}$$

這表示 $\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_k}$ 線性相依

(2)之方法(一)：設 $\vec{a_1},\cdots,\vec{a_k}$ 張拓的線性子空間爲 V，先設 $\dim V=k$ (即 $\vec{a_1},\cdots,\vec{a_k}$ 線性獨立)：用 $V^{\perp}$ 表示 V 在 R^n 中的直交補空間，再取 $V^{\perp}$

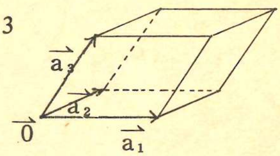
k = 1：

k = 2：

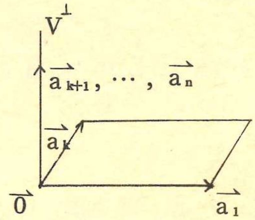


的就範直交基$\{\vec{a}_{k+1},\cdots,\vec{a}_n\}$，即$\langle\vec{a}_i,\vec{a}_j\rangle=\delta_{ij}$，$k+1\leqslant i,j\leqslant n$，令

k = 3



$$A=\begin{bmatrix}\vec{a}_1\\ \vdots\\ \vec{a}_k\\ \vec{a}_{k+1}\\ \vdots\\ \vec{a}_n\end{bmatrix}$$



則$|\det A|$=平行 2n 面體$\square\vec{a}_1\cdots\vec{a}_n$之體積=平行 2k 面積$\square\vec{a}_1,\cdots\vec{a}_k$之 k 維體積（因為$|\vec{a}_i|=1$，$k+1\leqslant i\leqslant n$；且$\langle\vec{a}_i,\vec{a}_j\rangle=0$，$k+1\leqslant i\leqslant n$，$1\leqslant j\leqslant n$）。但是

$$\begin{array}{l}\det AA^*=\\ \quad\|\\ |\det A|^2\end{array}\begin{vmatrix}\langle\vec{a}_1,\vec{a}_1\rangle & \cdots & \langle\vec{a}_1,\vec{a}_k\rangle & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \langle\vec{a}_k,\vec{a}_1\rangle & \cdots & \langle\vec{a}_k,\vec{a}_k\rangle & 0 & & 0\\ 0 & & 0 & 1 & & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & 0\\ 0 & & 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\langle\vec{a}_1,\vec{a}_1\rangle & \cdots & \langle\vec{a}_1,\vec{a}_k\rangle\\ \vdots & & \vdots\\ \langle\vec{a}_k,\vec{a}_1\rangle & \cdots & \langle\vec{a}_k,\vec{a}_k\rangle\end{vmatrix}$$

$=G(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_k)>0$

得證面積$|\det A|=G(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_k)^{\frac{1}{2}}$。

次設$\dim V<k$（即$\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_k$線性相依），仍能從$V^{\perp}$中取出$(n-k)$個向量$\vec{a}_{k+1},\cdots,\vec{a}_n$滿足$\langle\vec{a}_i,\vec{a}_j\rangle=\delta_{ij}$，$k+1<i,j\leqslant n$。同前，$\det A=0$而$G(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_k)=0$成立。

(2)之方法(二)：用「底面積」乘「高」以求體積之方法，配合數學歸納步驟，可證得本題，詳見參考資料〔 1 〕p.258～p.267 。

3.(a)說明：本題是本份試題比較代數性（相對地，欠缺明顯的幾何意義）的問題。

(b)理論依據：線性變換基本性質，基底及其延拓；線性變換限制在線性子空間上也是一個線性變換；矩陣秩的觀念。

(c)解答：

(1)之證明：如 $\dim N(A)=m$，則$A=0$；此時 $\dim R(A)=0$ 得證。

今設 $\dim N(A)=r<m$；取 $N(A)$ 一組基底 $\{\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_r\}$，再擴大爲 R^m 的基底 $\{\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_r,\vec{x}_{r+1},\cdots,\vec{x}_m\}$。今 $\vec{x}_i A=\vec{0}$，$1\leqslant i\leqslant r$；但是，任給 $\vec{x}\in R^m$，由 $\vec{x}=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\vec{x}_0\Rightarrow\vec{x}A=\sum_{i=r+1}^{m}\alpha_i(\vec{x}_i A)$。這表示（$m-r$）個向量 $\vec{x}_{r+1}A,\cdots,\vec{x}_m A$ 張拓出整個 $R(A)$。假設 $\lambda_{r+1},\cdots,\lambda_n$ 滿足

$$\lambda_{r+1}(\vec{x}_{r+1}A)+\cdots+\lambda_m(\vec{x}_m A)=\vec{0}$$

$$\Rightarrow\quad(\lambda_{r+1}\vec{x}_{r+1}+\cdots+\lambda_m\vec{x}_m)A=\vec{0}$$

$$\Rightarrow\quad\lambda_{r+1}\vec{x}_{r+1}+\cdots+x_m\vec{x}_m\in N(A)=\{\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\vec{x}_i\mid\alpha_i\in R,\ 1\leqslant i\leqslant r\}$$

$$\Rightarrow\quad\lambda_{r+1}\vec{x}_{r+1}+\cdots+\lambda_m\vec{x}_m=\vec{0}$$

$$\Rightarrow\quad\lambda_{r+1}=\cdots\cdots=\lambda_m=0$$

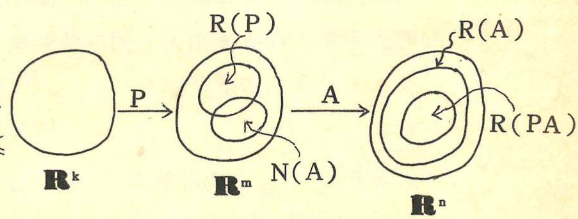
這表示 $\vec{x}_{r+1}A,\cdots\cdots,\vec{x}_m A$ 線性獨立$\Rightarrow\dim R(A)=m-r=m-\dim W(A)$。

(2)之方法(一)：P 及 A 分別定義線性變換

$$R^k\xrightarrow{P}R^m\xrightarrow{A}R^n$$

$$\vec{x}\longrightarrow\vec{x}P,\quad\vec{y}\longrightarrow\vec{y}A$$

由於 $R(PA)\leqslant R(A)$;所以 $\dim R(PA)=r(PA)\leqslant\dim R(A)=r(A)$



今取R(P)在R^m中的直積和補空間U，即$R^m=R(P)\oplus U$，則

$$r(PA)=r(A)\Longleftrightarrow U\leqslant N(A)\Longleftrightarrow R^m=R(P)+N(A)$$

其次，利用$R(P)\leqslant R^m$且$A|_{R(P)}:R(P)\longrightarrow R^n$也是一個線性變換。

利用(a)之結果到$A|_{R(P)}$，得到：

$$\dim(N(A)\cap R(P))+\dim R(PA)=\dim R(P)\qquad(*)$$

由於$\dim(N(A)\cap R(P))\geqslant 0$，所以由(*)有

$$r(PA)=\dim R(PA)\leqslant\dim R(P)=r(P);$$

$$r(PA)=r(P)\Longleftrightarrow\dim(N(A)\cap R(P))=0\Longleftrightarrow N(A)\cap R(P)=\{\overrightarrow{0}\}$$

最後，由(*)有：

$$\begin{aligned}r(PA)&=\dim R(PA)=\dim R(P)-\dim(R(P)\cap N(A))\\&\geqslant\dim R(P)-\dim N(A)\quad(\text{因}N(A)\geqslant R(P)\cap N(A))\\&=\dim R(P)-(-\dim R(A)+m)\quad(\text{利用(1)})\\&=\dim R(P)+\dim R(A)-m\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad r(P)+r(A)-m\leqslant r(PA)$$

等號成立$\Longleftrightarrow N(A)=R(P)\cap N(A)\Longleftrightarrow N(A)\subseteq R(P)$

(2)之方法(二)：看參考資料〔2〕p.394～p.402。

(d)應用：如P是m階可逆方陣，Q是n階可逆方陣，則

$$r(PAQ)=r(PA)=r(AQ)=r(A)$$

這個關係式之應用散見於參考資料〔2〕、〔3〕、〔4〕。

4.(a)背景：回想平面上二次曲線的平移與轉軸運動所代表的剛體運動，在三維空間R^3中又如何呢？開門的動作又如何？

(b)理論依據：特徵多項式，固有值觀念（隱含線性變換之不變子空間觀念）；垂直；剛體運動。

(c)解答：

計算$P^*P=I_3$；或計算P^{-1}，看看是否等於P^*；或計算P的列向量$\overrightarrow{u_1}$，$\overrightarrow{u_2}$，$\overrightarrow{u_3}$是否滿足$\langle\overrightarrow{u_i},\overrightarrow{u_j}\rangle=\delta_{ij}$，$1\leqslant i,j\leqslant 3$

⑵考慮特徵多項式

$$\det(P-\lambda I_3)=\begin{vmatrix} \frac{2}{3}-\lambda & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}-\lambda & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}-\lambda \end{vmatrix}=-\frac{1}{3}(\lambda-1)(3\lambda^2+4\lambda+3)$$

得知P有固有值1。或是，直接解$\overrightarrow{x}P=\overrightarrow{x}$，看看是否有異於$\overrightarrow{0}$之解向量$\overrightarrow{x}$；今（$\overrightarrow{x}=(x_1,x_2,x_3)$）

$$\overrightarrow{x}P=\overrightarrow{x}\Longleftrightarrow\begin{cases}-x_1+2x_2+x_3=0\\ x_1-2x_2-x_3=0\\ x_1-2x_2+3x_3=0\end{cases}\Longleftrightarrow\overrightarrow{x}=(2,1,0)$$

所以$\overrightarrow{x}=\overrightarrow{x}\,/|\overrightarrow{x}|=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0)$

⑶先注意到：如$\overrightarrow{x}\in R^3$ 且$\overrightarrow{x}\perp\overrightarrow{x_1}\Rightarrow\overrightarrow{x}P\perp\overrightarrow{x_1}$；如$|\overrightarrow{x}|=1\Rightarrow|\overrightarrow{x}P|=1$

證明：　$\langle\overrightarrow{x}P,\overrightarrow{x_1}\rangle=\langle\overrightarrow{x},\overrightarrow{x_1}P^*\rangle=\langle\overrightarrow{x},\overrightarrow{x_1}P^{-1}\rangle=\langle\overrightarrow{x},\overrightarrow{x_1}\rangle=0$（因$\overrightarrow{x_1}P=\overrightarrow{x_1}$）

$\langle\overrightarrow{x}P,\overrightarrow{x}P\rangle=\langle\overrightarrow{x},\overrightarrow{x}PP^*\rangle=\langle\overrightarrow{x},\overrightarrow{x}\rangle=1$

今Q必須是直交方陣，形如 $\begin{bmatrix}\overrightarrow{x_1}\\ \overrightarrow{x_2}\\ \overrightarrow{x_3}\end{bmatrix}$：由於

$\langle\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_i}\rangle=0$，$i=2.3$；$\langle\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{x_3}\rangle=0$；$|\overrightarrow{x_2}|=|\overrightarrow{x_3}|=1$

可知$\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{x_3}$必須從《$\overrightarrow{x_1}$》$^\perp=\{\overrightarrow{x}\mid\langle\overrightarrow{x},\overrightarrow{x_1}\rangle=0\}$中取出來；

因此，令

$$\overrightarrow{x_2}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}},0\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0)\,;\,\overrightarrow{x_3}=(0,0,1)$$

那麼

$$Q=\begin{bmatrix}\overrightarrow{x_1}\\ \overrightarrow{x_2}\\ \overrightarrow{x_3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$ 就是直交方陣，使得

$$QPQ^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

『$\overrightarrow{x_1}P = \overrightarrow{x_1} = 1 \cdot \overrightarrow{x_1} + 0 \cdot \overrightarrow{x_2} + 0 \cdot \overrightarrow{x_3}$;

$\overrightarrow{x_2}P \in 《\overrightarrow{x_1}》^{\perp} \Rightarrow \overrightarrow{x_2}P = a_{11}\overrightarrow{x_2} + a_{12}\overrightarrow{x_2}$;

$\overrightarrow{x_3}P \in 《\overrightarrow{x_1}》^{\perp} \Rightarrow \overrightarrow{x_3}P = a_{21}\overrightarrow{x_2} + a_{22}\overrightarrow{x_3}$ 』

因QPQ^{-1}是直交方陣而且$\det QPQ^{-1} = \det P = 1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，所以

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 是二階直交方陣且行列式值$=1$，故QPQ^{-1} 可改寫成

$$QPQ^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

今$\overrightarrow{x_3}P = \overrightarrow{e_3}P = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$而$\langle \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{x_3}P \rangle = -\frac{2}{3} = \cos\theta$，所以

$\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)$

<u>註一</u>：如$\vec{x} \in 《\overrightarrow{x_1}》^{\perp}$且$|\vec{x}| = 1$，則$\langle \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2} \rangle = \cos\theta$恒成立，即P將$\vec{x}$旋轉同一個角度$\theta$。

<u>證明</u>：$\overrightarrow{x_2}P = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}, 0\right)P = \left(\frac{-2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{-5}{3\sqrt{5}}\right)$

$$\langle \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_2}P \rangle = \frac{-2}{15} + \frac{-8}{15} = \frac{-10}{15} = -\frac{2}{3} = \cos\theta$$

任取如此的$\vec{x}$，則$\vec{x} = \alpha_2\overrightarrow{x_2} + \alpha_3\overrightarrow{x_3}$, $\alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{x}P \rangle &= \alpha_2^2 \langle \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_2}P \rangle + \alpha_3^2 \langle \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{x_3}P \rangle = (\alpha_2^2 + \alpha_3^2)\cos\theta \\ &= \cos\theta \end{aligned}$$

<u>註二</u>：從(2)得知

$$V=\{\overrightarrow{x}\in R^3 \mid \overrightarrow{x}(3P^2+4P+3L_3)=\overrightarrow{0}\}$$

是P的一個二維不變子空間（invariant subspace），恰是$\langle\langle \overrightarrow{x_0} \rangle\rangle^{\perp}$

今解$3\lambda^2+4\lambda+3=0$，得$\lambda=\dfrac{-4\pm\sqrt{-20}}{6}=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}i}{2}$。據此，得知

$\cos\theta=-\dfrac{3}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，而

$$QPQ^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{3}{2} & \dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ 0 & -\dfrac{\sqrt{5}}{2} & -\dfrac{3}{2} \end{bmatrix}$$

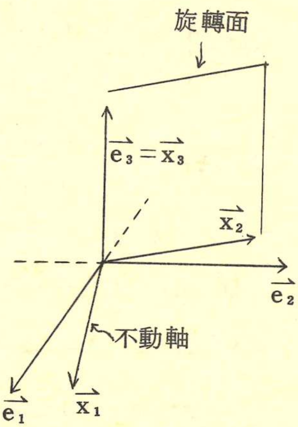
(4) QPQ^{-1} 所代表之幾何意義（或P之幾何意義）：

$\langle\langle \overrightarrow{x_1} \rangle\rangle=\{\alpha\overrightarrow{x_1} \mid \alpha\in R\}$ — 不動軸（旋轉軸）

$\langle\langle \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_2} \rangle\rangle=\langle\langle \overrightarrow{x_1} \rangle\rangle^{\perp}$ —— 旋轉面（不動面）

$Q=\cos^{-1}\dfrac{-2}{3}$ —— 旋轉角

那麼；線性變換$P:\overrightarrow{x}\longrightarrow\overrightarrow{x}P$代表空間$R^3$中，以$\langle\langle \overrightarrow{x_1} \rangle\rangle$為不動軸，以$\langle\langle \overrightarrow{x_1} \rangle\rangle^{\perp}$為旋轉面



作$\theta=\cos^{-1}-\dfrac{2}{3}$之旋轉運動（或剛體運動）。

(d) 一般化情形：

設P是n階直交方陣，則可找到直交方陣Q使得

$$QPQ^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & 0 & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & P_1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & P_k \end{bmatrix},\ P_i=\begin{bmatrix} \cos\theta_i\,,\ \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i\,,\ \cos\theta_i \end{bmatrix},\ 1\leqslant i\leqslant k$$

關於直交方陣與剛體運動，詳見參考資料〔 4 〕p.185 ～ p.311 。

5.(a)背景：平面橢圓或空間中平面橢圓之標準化；

(b)理論依據：一般實矩陣之極化分解式；固有值與固有向量；橢圓之標化。

(c)解答：

(1)

$$AA^*=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}=R^{-1}\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix}R$$

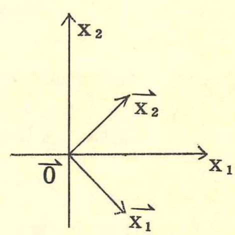
$$\det(AA^*-\lambda I_2)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+8=(\lambda-2)(\lambda-4)$$

$\Rightarrow\quad \lambda=2\ ,\ 3$

$\therefore \lambda_1^2=2\ ,\ \lambda_2^2=4 \Rightarrow \lambda_1=\sqrt{2}, \lambda_2=2$

解 $\overrightarrow{x}(AA^*-2I_2)=0 \Rightarrow \overrightarrow{x_1}=(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{-1}{\sqrt{2}})$

$\overrightarrow{x}(AA^*-4I_2)=0 \Rightarrow \overrightarrow{x_2}=(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}})$



$$\therefore R=\begin{bmatrix} \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{x_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(2) $RA=DQ$ ，設 $Q=\begin{bmatrix} \overrightarrow{y_1} \\ \overrightarrow{y_2} \\ \overrightarrow{y_3} \end{bmatrix}$ 是直交方陣

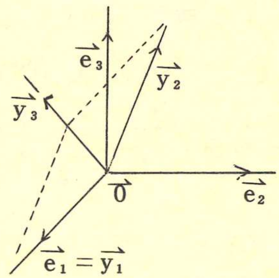
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{x_1} \\ \vec{x_2} \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{y_1} \\ \vec{y_2} \\ \vec{y_3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{x_1}A=\lambda_1\vec{y_1} \\ \vec{x_2}A=\lambda_2\vec{y_2} \\ \vec{y_3}\perp\vec{y_i},\ i=1,2\text{且}\ |\vec{y_3}|=1 \end{array}$$

$$\therefore \vec{y_1}=\frac{\vec{x_1}A}{\lambda_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2},0,0)=(1,0,0)$$

$$=\vec{e_1}$$

$$\vec{y_2}=\frac{\vec{x_2}A}{\lambda_2}=\frac{1}{2}(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$$

$$=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$$



取$\vec{y_3}=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$，所以

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(3)位在A的值空間上（因 $r(A)=2$，所以值空間是二維線性子空間）：$\vec{x}=(x_1,x_2)$，$\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$，由$\vec{x}A=\vec{y}$

得知：
$$\begin{cases} y_1=x_1-x_2 \\ y_2=x_1+x_2 \\ y_3=x_1+x_2 \end{cases} \Rightarrow \quad y_2=y_3$$
，即位在R^3的平面 $y_2=y_3$ 上

亦即位在平面$\langle\!\langle \vec{y_1},\vec{y_2} \rangle\!\rangle=\{\alpha_1\vec{y_1}+\alpha_2\vec{y_2}\ |\alpha_1,\alpha_2\in R\}$之上。

(4)令$\vec{y}=\vec{x}A$，$|\vec{x}|=1$，內用$A=R^{-1}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \end{bmatrix}Q$，得到

$$\vec{y}Q^{-1}=\vec{x}R^{-1}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \end{bmatrix}=\vec{x}R^{-1}D,\ D=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow (\vec{y}Q^{-1})D^* = (\vec{x}R^{-1})DD^* \Rightarrow (\vec{y}Q^{-1})D^*(DD^*)^{-1} = \vec{x}R^{-1}$

其中：1° $|\vec{x}R^{-1}| = |\vec{x}| = 1$，因 R^{-1} 是直交方陣

$$2^\circ \quad DD^* = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix}, \quad (DD^*)^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-2} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-2} \end{bmatrix}$$

暫令 $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3) = \vec{y}Q^{-1}$，則由 $|\vec{x}R^{-1}|^2 = 1$ 得到

$$< \vec{z}D^*(DD^*)^{-1}, \vec{z}D^*(DD^*)^{-1} > = \vec{z}D^*(DD^*)^{-2}D\vec{z}^*$$

$$= \vec{z} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{-4} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \end{bmatrix} \vec{z}^*$$

$$= (z_1, z_2, z_3) \begin{bmatrix} \lambda_1^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \frac{z_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{z_2^2}{\lambda_2^2} = 1,$$

$\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$

得到：按 $\vec{y} = \vec{z}Q$，即按 $\beta = \{\vec{y_1}, \vec{y_2}, \vec{y_3}\}$，平面橢圓之方程式是

$\frac{z_1^2}{2} + \frac{z_2^2}{4} = 1$，其中 $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$ 是點 $\vec{y} = \vec{x}A$ 按基底

β 之坐標。

長軸之半長 $= 2 = \lambda_2$

短軸之半長 $= \sqrt{2} = \lambda_1$

(d) 一般情形：詳見參考資料〔4〕p.312～p.377。

(戊) 參考資料

(1) 初等線性代數：第一冊，行列式

(2) 初等線性代數：第二冊，矩陣

(3) 初等線性代數：第三冊，向量、仿射空間

(4) 初等線性代數：第五冊，內積空間

國立台灣師範大學七十八學年度碩士班研究生入學考試試題

線性代數試題（數學研究所用，本試題共三頁）

※注意：答案必須寫在答案紙上，否則不予計分。

● 用 R^n 表示 n 維實向量空間，當 $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)$，$\vec{y}=(y_1,\cdots,y_n)\in R^n$ 時，用

$$(\vec{x},\vec{y})=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

表示 $\vec{x}$ 與 $\vec{y}$ 的自然內積；而 $|\vec{x}|=(\vec{x},\vec{x})^{\frac{1}{2}}$ 表示 $\vec{x}$ 的長度，用 dimV 表示 R^n 的向量子空間 V 的維度。

● 給定 m×n 階實矩陣 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，仍用 A 代表從 R^m 到 R^n 的線性變換定如 $\vec{x}\to\vec{x}A$（$\vec{x}\in R^m$ 視同為 1 × m 階矩陣），用 A^* 表示 A 的轉置矩陣。

1. 給聯立方程組 $\begin{cases}x_1+x_2-x_3+2x_4=2\\3x_1+x_3-x_4=0\end{cases}$ （15 %）

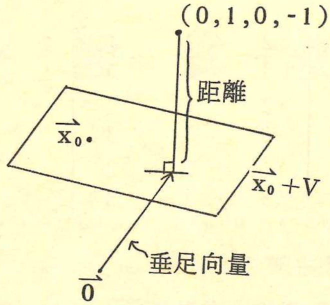
(1)解聯立方程組，並將全體的解 (x_1,x_2,x_3,x_4) 寫成

$$\vec{x_0}+V=\{\vec{x_0}+\vec{x}\mid\vec{x}\in V\}$$

其中 $\vec{x_0}$ 是一個特解，而 V 是 R^4 的一個向量子空間

15

(2)求點 (0, 1, 0, −1) 到 $\vec{x_0}+V$ 的距離與垂足向量（參考下圖）



2. 在 R^n 中給定 k（$1\leqslant k\leqslant n$）個向量 $\vec{a_i}=(a_{i1},\cdots,a_{in})$, $1\leqslant i\leqslant k$ （15%）

(1)證明：$\vec{a_1},\cdots,\vec{a_k}$ 線性獨立 $\Longleftrightarrow$

$$G(\overrightarrow{a_1},\cdots,\overrightarrow{a_k})=\begin{vmatrix} <\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_1}> & <\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}> & <\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_k}> \\ <\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_1}> & <\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_2}> & <\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_k}> \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ <\overrightarrow{a_k},\overrightarrow{a_1}> & <\overrightarrow{a_k},\overrightarrow{a_2}> & <\overrightarrow{a_k},\overrightarrow{a_k}> \end{vmatrix} \neq 0\,(其實,>0)$$

(2)證明：在 R^n 中，以 $\overrightarrow{a_1},\cdots,\overrightarrow{a_k}$ 爲邊向量的平行 2k 面體 $\{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\overrightarrow{a_i} \mid$

$0\leqslant\alpha_i\leqslant 1\ ,\ 1\leqslant i\leqslant k\}$ 的<u>k維體積</u>爲

$$(G(\overrightarrow{a_1},\cdots,\overrightarrow{a_k}))^{\frac{1}{2}}$$

3.給定 $m\times n$ 階矩陣 A 及 $k\times m$ 階矩陣 P　　(20 %)

(1)用 N(A) 及 R(A) 分別表示線性變換 $A:R^m\to R^n$ 的核空間 (kernel space) 及值空間 (range space)，證明：

$$\dim N(A)+\dim R(A)=\dim R^m=m$$

其中 dimR(A) 規定爲 A 的<u>秩</u>，記成 r(A)

(2)用(1)證明：

$$r(P)+r(A)-m\leqslant r(PA)\leqslant\min\{r(P),r(A)\}$$

並求等號成立的充要條件

4.絡定 3 階方陣　　(25 %)

$$P=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(1)證明 P 是<u>直交方陣</u>，即 $P^*=P^{-1}$

(2)證明 P 有<u>固有值 1</u>，並求對應的<u>固有向量</u> $\overrightarrow{x_1}\in R^3$，但要求 $|\overrightarrow{x_1}|=1$

(3)找一個直交方陣　$Q=\begin{bmatrix}\overrightarrow{x_1}\\ \overrightarrow{x_2}\\ \overrightarrow{x_3}\end{bmatrix}$　，使得

$$QPQ^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

並求出 θ 角

(4)試以 R^3 中的基底 $\{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}\}$ 爲基準，解釋(3)中 QPQ^{-1} 所代表的幾何意義（即：剛體運動的旋轉軸，不動面與旋轉角）。

5.給定 2 × 3 階矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 假設可找到 2 階直交方陣 R 及 3 階直交方陣 Q，以及正數 λ_1, λ_2（$\lambda_1 \leqslant \lambda_2$）使得

$$A = R^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \end{bmatrix} Q$$

(1)利用 AA^* 之固有値及固有向量，決定 λ_1, λ_2 及 R。

(2)利用 RA，以決定 Q。

(3) R^2 上的單位圓 $x_1^2 + x_2^2 = 1$ 經過線性變換 $A: R^2 \to R^3$（定如 $\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x}A$）作用之後是個平面橢圓，試求橢圓所在的平面。

(4)求(1)中橢圓的長、短軸並求其標準化（即：寫成 $\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 = 1$ 之形式）。

啓 發 式 教 學

編輯部

本文譯自「教中學數學」（Teaching Secondary School Mathematics）第九章第二節；是以中學數學教師爲對象。原作者爲斯蒂芬・克魯利克（Stephen Krulik）和英格利B. 懷斯（Ingrid B. Weise）。

——編者按

啓發式教學有很悠久的歷史，古代如蘇格拉底的「對話」，近代如坡里雅（Polya）的「怎樣解題」。啓發式教學基本上是由一系列問題構成；這些問題對你來說也許十分自然，那是因爲你已有多年教數學的經驗。切記你的學生還都是生手，你認爲顯而易見的事，對他們來說都還是沒學過的，特別是那些初中學生。

解　題

坡里雅那些意見的最終目的，在增進學生解決數學題目的能力。基於他自己多年解題、教學生、教老師的經驗，他列出了一組大家公認非常有用的問句。坡里雅書上代表性的問句分別列入下表：

你了解題目嗎？

　　什麼是未知的？

　　你能找出已知資料嗎？

　　資料必須滿足什麼條件？

　　畫一個適當的圖有沒有幫助？

你能擬一個計畫嗎？

　　以前你有沒有解過類似的題目？

　　解一的簡單點的題目能不能幫助你建立一個計劃？

　　你有沒有疏忽掉某些資料？

你能執行你的計畫嗎？

　　你有沒有檢查想過的每一步？

　　你能證明每一步都正確嗎？

當你得到結果後有沒有再檢查一遍？

　　你驗證了解答沒有？

　　你有沒有發現更快的或者不同的方法？

　　你的解法能不能用到別的問題上？

　　該不該把解法記憶下？

（下接第 47 頁）

2. 無母數統計法中卡方統計量的探討

指導老師：王惠中
作　　者：于鴻福

在數學教育的研究工作上，常需要對一發生的現象或問題之原因或屬性加以研究分析，以期能進行輔導或補救。例如：某研究計畫針對國中某年級數學科教材內容的適切性進行一項調查，結果由各校該年級任課教師之回收問卷中發現，多數教師認爲教材中之第一章未符合教學目標，於是，研究者就想對答卷教師的任教年資和任教地點之分佈加以研究，看看此一問題是否有著年資長短與地區性的差異。又如某一教師在對全班學生進行數學測驗後，欲了解學生成就之高低是否與課後輔導方式——①沒有補習②在補習班補習③在家教班補習——有關，以便對其課堂教材進行調整。諸如此類問題，我們皆可以列聯表將資料加以整理，然後再以T統計量檢定之。

所謂卡方統計量T乃是對於一 r×c 列聯表：

Column / row	1	2		C	Totals
1	O_{11}	O_{12}	……	O_{1c}	n_1
2	O_{21}	O_{22}	……	O_{2c}	n_2
	…	…	……	…	…
r	O_{r1}	O_{r2}	……	O_{rc}	n_r
Totals	C_1	C_2		C_c	N

定義爲：

$$T=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{c}\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}\quad,\ E_{ij}=\frac{n_iC_j}{N}$$

其中O_{ij}及E_{ij}分別表示在（i，j）一格中觀測個數及期望個數。有關其在無母數統計法中的功能與性質，我們就依下列五個主題來加以陳述：

1. 適用問題及範圍？
2. T之機率分配？
3. 當n＝2時，T之公式爲何？
4. 以T爲基礎的結合性測度（measures of association）？
5. 如何用來做爲配適度檢定（Goodness of Fit test）？

※　　※　　※　　※

1.適用問題及範圍？

在無母數方法中，首先必須學會且也最爲有用的方法莫過於卡方檢定配合列聯表的使用了。這也似乎表示說，在資料能由列聯表展示出來的地方，就是卡方檢定能及之處，因此，回答此一問題即等於寫出可用列聯表來展示資料的問題有那些。以下之問題型態介紹，我們大體將其分爲資料來源（DATA）、資料型態與條件（Assumptions）及假設檢定（Hypotheses）三部份列出。

A型：檢定機率分配的差異性：

Data：由r個母群體中，每群i隨機地抽出n_i個觀測値，而且，每群之觀測値皆可依某一屬性分成C類，令O_{ij}表第i群體之觀測値在第j類的個數。

$$\Rightarrow n_i = O_{i1} + O_{i2} + \cdots + O_{ic} \quad \forall i$$

全部資料可展示爲r×c之列聯表如下：

	Class	1	2		C	ToTals
population	1	O_{11}	O_{12}	……	O_{1c}	n_1
	2	O_{21}	O_{22}	……	O_{2c}	n_2
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	r	O_{r1}	O_{r2}	……	O_{rc}	n_r
	ToTals	C_1	C_2	……	C_c	N

其中 $C_j = O_{1j} + \cdots + O_{rj} \quad \forall_j$

$N = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$

Assumptions：1.每一群之樣本皆爲隨機樣本。

2.各群之間相互獨立。

3.每一觀測值恰可被分入C類中的一類。

Hypotheses：令從第 i 母群體中隨機抽取的觀測值會屬於第 j 類的

機率爲：$P_{ij} \quad \begin{matrix} i=1,2,\cdots r \\ j=1,2,\cdots c \end{matrix}$

$H_0 : P_{1j} = P_{2j} = \cdots = P_{rj} \quad \forall_j$

$H_1 : P_{ij} \neq P_{kj} \quad \exists j \text{ and } \exists i, k$

B型：檢定母群體某兩種屬性（Criterion）之獨立性：

Data：包含一組有N個觀測值的隨機樣本，且觀測值可依兩種母群體屬性來加以分類，先依第一種屬性將觀測值分入C類之一，然後再依第二種屬性將之分入 r 類中的某一類，如此可將資料分成下列的 r × c 之列聯表格式。

Column	1	2		c	Totals
Row 1	O_{11}	O_{12}	·········	O_{1c}	R_1
2	O_{21}	O_{22}	·········	O_{2c}	R_2
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
r	O_{r1}	O_{12}	·········	O_{rc}	R_r
Totals	C_1	C_2	·········	C_c	N

其中 $R_i = \sum_j O_{ij} \quad \forall_i$

$C_j = \sum_i O_{ij} \quad \forall_j$

$N = \sum R_i = \sum C_j$

注意：以下凡屬於第一屬性之第 i 類且屬於第二屬性之第 j 類者，吾人稱之屬於（i，j）一類。

Assumptions ：1.此N個觀測值的樣本是一隨機樣本（ie每一觀測值屬於（i，j）類的機率皆相等。

2.每一觀測值都恰可被分入某一（i，j）類，

for some $1 \leqq i \leqq r$

$1 \leqq j \leqq c$

Hypotheses：令 A_i 表事件“觀測值依第一屬性分在第 i 類”，

$i = 1, 2, \cdots, r$

B_j 表事件“觀測值依第二屬性分在第 j 類”，

$j = 1, 2, \cdots, c$

則 H_0：事件 A_i 與 B_j 相互獨立

i.e. $P(A_i \cap B_j) = P(A_i) \cdot P(B_j) \quad \forall i, j$

H_1：$P(A_i \cap B_j) \neq P(A_i) \cdot P(B_j) \quad \exists i, j$

C型：列聯表之邊界和固定下的檢定：

Data ：資料性質同A，B兩型，惟此型中列聯表之列與行之和已先行固定。 i,e

	Column	1	2	………	c	Totals
Row	1	O_{11}	O_{12}	………	O_{1c}	$n_{1.}$
	2	O_{21}	O_{22}	………	O_{2c}	$n_{2.}$
	⋮	⋮	⋮	………	⋮	⋮
	r	O_{r1}	O_{r2}	………	O_{rc}	$n_{r.}$
	Totals	$n_{.1}$	$n_{.2}$	………	$n_{.c}$	N

其中 $n_{1.}, \cdots, n_{r.}$ 及 $n_{.1}, \cdots, n_{.c}$ 是已先行固定的數。

注意：以下凡在第 i 列且同時在第 j 行者，稱之爲在（i，j）一格。

Assumptions ：1.此樣本是一隨機樣本。

2. 每一觀測值恰可被分入唯一的（i，j）一格

for some $1 \leqq i \leqq r$

$1 \leqq j \leqq c$

3. 每一觀測值屬於（i，j）一格的機率皆相等 $\forall i, j$。

4. 列聯表中每一列及每一行之和是先行固定，非隨機而得

Hypotheses：1. 可同前面A，B兩型之Hypotheses進行之。

2. 可依某特定實驗之目的而定，如可用來測量兩變量（X，Y）中X，Y之獨立性等等。

2. T之機率分配？

首先，我們先看看一般多項分配的情形：

考慮一具 γ 項的多項分配，其各項機率爲 $\pi_1, \cdots \pi_\gamma, \Sigma \pi_i = 1$

$\Rightarrow$ 在抽取 n 個觀測值時，每項中各有 $n_1, \cdots, n_\gamma$ 個觀測值的機率爲：

$$p(n_1, n_2, \cdots, n_\gamma) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_\gamma!} \quad \pi_1^{n1} \cdots \pi_r^{nr}$$

另外，此多項分配之特徵函數爲 $\phi(t_1, \cdots, t_\gamma) = (\sum_{k=1}^{\gamma} \pi_k e^{i t_k})^n$

令 $Y_k = \dfrac{n_k - n\pi_k}{\sqrt{n\pi_k}}$

$$X^2 = \sum_{k=1}^{\gamma} Y_k^2 \;, \quad \sum_{k=1}^{\gamma} Y_k \sqrt{\pi_k} = 0$$

$\Rightarrow (Y_1, \cdots, Y_\gamma)$ 之特徵函數 $\phi_1(t_1, \cdots, t_\gamma)$

$$= \exp\left[-\sum_{k=1}^{r} i t_k \sqrt{n\pi_k}\right] \cdot \left(\sum_{k=1}^{r} \pi_k \exp\left[\frac{i t_k}{\sqrt{n\pi_k}}\right]\right)^n$$

$$\Rightarrow \log \phi_1(t_1, \cdots, t_\gamma) = -i\sqrt{n} \cdot \sum_{k=1}^{\gamma} t_k \sqrt{\pi_k} + n \log(1 + z_n)$$

其中 $z_n = \dfrac{i}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\gamma} t_k \sqrt{\pi_k} - \dfrac{1}{2n} \sum_{k=1}^{\gamma} t_k^2 + 0\left(\dfrac{1}{n}\right)$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = 0 \text{ 且 } n\log(1+z_n) - i\sqrt{n}\sum_{k=1}^{r} t_k\sqrt{\pi_k}$$

$$\to \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{r} t_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{r} t_k\sqrt{\pi_k}\right)^2\right]$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \phi_1(t_1,\cdots,t_r) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{r} t_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{r} t_k\sqrt{\pi_k}\right)^2\right]\right\}$$

現在，我們將利用直交矩陣來轉換上式的風貌！

令 $u_k = \sum_{j=1}^{r} a_{kj}t_j$ ， $k=1,2,\cdots,r$ 且 $a_{rj}=\sqrt{\pi_j}$ $j=1,2,\cdots,r$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{r} a_{kj}a_{ij} = \begin{cases} 1 & k=i \\ 0 & k\neq i \end{cases}$$

因爲 $\sum_{j=1}^{n} a^2_{rj}=1$ ，故有 $n-1$ 個參數可事先決定。

將 $u_1,\cdots,u_r$ 代入 $\lim_{n\to\infty}\phi_1(t_1,\cdots,t_r)$ 中，且令 $T'=(t_1,\cdots,t_r)$ ，

$U'=(u_1,\cdots,u_r)$ ， $A=(a_{ij})_{r\times r}$

$\Rightarrow AA'=A'A=I$ 且 $U=AT$

$\Rightarrow T=A'U \Rightarrow T'T=U'AA'U=U'U$

$$\because \sum_{k=1}^{r} t_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{r} t_k\sqrt{\pi_k}\right)^2 = T'T-U_r^2 = U'U-U_r^2 = \sum_{k=1}^{r-1} U_k^2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\phi_1(t_1,\cdots,t_r) = \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r-1} u_k^2\right] = \prod_{k=1}^{r-1} \exp\left(-\frac{1}{2}u_k^2\right)$$

故 $\lim_{n\to\infty}\phi_1(t_1,\cdots,t_r)$ (i e $(Y_1,\cdots,Y_r)$ 之特徵函數）收斂於 $r-1$

個獨立之N（0，1）平方和的特徵函數。

$$\Rightarrow X^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - n\pi_k)^2}{n\pi_k} \sim X^2_{r-1}$$

利用上面推演的結果，我們將$r \times c$之列聯表中的$n \times c$格看成為$r \times c$種不同的分類，則列聯表之分類就可看成有$r \times c$項的多項分配，而O_{11}，$\cdots$，O_{1c}，$\cdots$，O_{r1}，$\cdots$，O_{rc}就是每項的觀測值數目。

於是　令$Y_{ij}=\dfrac{O_{ij}-E_{ij}}{\sqrt{E_{ij}}}$　$\begin{array}{l} i=1,\cdots,r \\ j=1,\cdots,c \end{array}$　則

$T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\dfrac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}=\sum_{i}\sum_{j}Y_{ij}^2$　在大樣本時就會趨近於卡方分配了。至於自由度，依前面結果本應為$rc-1$，但因有$r-1$個列的邊界機率被估計且$c-1$個行的邊界機率被估計，做：

$$df=rc-1-(r-1+c-1)=rc-r-c+1=(r-1)(c-1)$$

3.當$r=2$時，T之公式為何？

對於列數$r=2$的列聯表

	Column	1	2	……	c	Totals
Row	1	O_{11}	O_{12}	……	O_{1c}	n_1
	2	O_{21}	O_{22}	……	O_{2c}	n_2
	Totals	c_1	c_2	……	c_c	N

$n_2=N-n_1$ 且 $O_{2j}=C_j-O_{1j}$　$\forall_j=1,2,\cdots,c$

$$T=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{c}\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}=\sum_{j=1}^{c}\frac{\left(O_{1j}-\dfrac{n_1C_j}{N}\right)^2}{\dfrac{n_1C_j}{N}}+\sum_{j=1}^{c}\frac{\left(O_{2j}-\dfrac{(N-n_1)C_j}{N}\right)^2}{\dfrac{(N-n_1)C_j}{N}}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{n_1}{N}}\cdot\sum_{j=1}^{c}\frac{\left(O_{1j}-\dfrac{n_1C_j}{N}\right)^2}{C_j}+\frac{1}{\dfrac{N-n_1}{N}}\sum_{j=1}^{c}\frac{\left(C_j-O_{1j}-C_j+\dfrac{n_1}{N}C_j\right)^2}{C_j}$$

$$=\frac{1}{\frac{n_1}{N}} \cdot \sum_{j=1}^{c} \frac{(O_{1j}-\frac{n_1C_j}{N})^2}{C_j} + \frac{1}{\frac{N-n_1}{N}} \cdot \sum_{j=1}^{c} \frac{(O_{1j}-\frac{n_1C_j}{N})^2}{C_j}$$

$$=(\frac{1}{\frac{n_1}{N}}+\frac{1}{\frac{N-n_1}{N}}) \cdot \sum_{j=1}^{c} \frac{(O_{1j}-\frac{n_1C_j}{N})^2}{C_j}$$

$$=\frac{1}{\frac{n_1}{N}(1-\frac{n_1}{N})} \sum_{j=1}^{c} \frac{(O_{1j}-\frac{n_1C_j}{N})^2}{C_j}$$

在爲於電算器計算方便起見，上式可再化成：

$$T=\frac{1}{\frac{n_1}{N}(1-\frac{n_1}{N})} \sum_{j=1}^{c} (\frac{O_{1j}^2+\frac{n_1^2C_j^2}{N^2}-2\times O_{1j}\times\frac{n_1C_j}{N}}{C_j})$$

$$=\frac{1}{\frac{n_1}{M}\times(1-\frac{n_1}{N})} \sum_{j=1}^{c} (\frac{O_{1j}^2}{C_j}+\frac{n_1^2C_j}{N^2}-2\times O_{1j}\times\frac{n_1}{N})$$

$$=\frac{1}{\frac{n_1}{N}(1-\frac{n_1}{N})} (\sum_{j=1}^{c}\frac{O_{1j}^2}{C_j}+\sum_{j=1}^{c}\frac{n_1^2C_j}{N^2}-2\sum_{j=1}^{c}O_{1j}\times\frac{n_1}{N})$$

$$=\frac{1}{\frac{n_1}{N}\cdot(1-\frac{n_1}{N})} (\sum_{j=1}^{c}\frac{O_{1j}^2}{C_j}+\frac{n_1^2}{N^2}\cdot N-2\cdot n_1\cdot\frac{n_1}{N})$$

$$=\frac{1}{\frac{n_1}{N}\cdot\left(1-\frac{n_1}{N}\right)}\times\left(\sum_{j=1}^{c}\frac{O_{1j}^2}{C_j}-\frac{n_1^2}{N}\right)$$

4.以T爲基礎之結合性測度（measures of association）

在列聯表被用來展示資料，並利用卡方檢定來檢定多個母群體間對某一特徵（criteria）之分佈是否無異，進而發展爲由一組獨立樣本，來檢定母群體對某兩個特徵之分佈間是否具有相依關係時，很自然地，當發現特徵間非是獨立時，那麼，我們可能會考慮到其間之相關程度之該如何來表示呢？或者說，此等相關程度該如何來度量呢？在陳述此問題之有關事項之前，讓我們先來看一個例子。

Ex. 有一家公司在收到購買某一產品之顧客的登錄卡片後，決策單位想了解廣告效力是否會因年齡之不同而不同，於是，就進行了一項廣告型態與由此廣告所致以購買該產品之顧客年齡間是否具有相依關係的檢查工作。首先，他們先由數以千計的顧客登錄卡檔案中，隨機地抽出200張當作樣本，並以列聯表計數如下：

廣告型態	顧客年齡 0-20	21-30	31-40	41-50	50以上	小計
以前有購買過之經驗	10	21	28	8	6	73
商店展示	4	8	2	0	0	14
商品目錄	3	4	5	0	0	12
雜誌	4	2	23	8	0	36
報紙	12	18	14	2	4	50
其他	5	8	2	0	0	15
小計	38	60	74	18	10	200

$\forall 1 \leqq i \leqq 6$，$1 \leqq j \leqq 5$，(i , j) 格的期望數值如下：

	1	2	3	4	5
1	13.87	21.90	27.01	6.57	3.65
2	2.66	4.20	5.18	0.56	0.70
3	2.28	3.60	4.44	1.08	0.60
4	6.84	10.80	13.32	3.24	1.8
5	9.50	15	18.50	4.50	2。50
6	2.85	4.50	5.55	1.35	0.75

於是，在虛無假設 H_0：顧客年齡（行）與廣告型態（列）間之分佈是獨立關係下，我們計算卡方統計量。

$$T = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{5} \frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{5} \frac{O_{ij}^2}{E_{ij}} - N = 252.28 - 200 = 52.28$$

其中 O_{ij} 及 E_{ij} 分別表在（ i , j ）格之所得次數與期望值，N 爲樣本總數。

因爲樣由度爲（ 6 － 1 ）（ 5 － 1 ）＝20 ，所以，對於顯著水準 $\alpha = 0.05$，吾人可得臨界值爲 31.41 。

$\because T > 31.41$ ，$\therefore$ reject H_0。

另外，再由表中可查出棄却強度

$$P\{T \geqq 52.28 \mid H_0\} = 0.0001 < 0.01$$

因此，我們可以說，廣告型態對顧客中不同年齡群的影響不同。

上例之結論已確定年齡與廣告型態之相依關係，現在，回到我們的主題上，也就是相依程度到底有多強呢？直觀上來說，既然統計量 T 能夠來決定是否相關，那它也應不失爲用來度量相關程度的好工具，不過，因爲 T 的大小隨情況（或所處理的問題）之不同而不同，且所謂強弱亦非人人能感覺出

來，所以T值的使用，除了方便與簡單外，實在有些不妥，於是乎，也就有了一些其他度量相關強度的統計量了。茲列出如下：

(1)棄却強度：能夠棄却虛無假設H_0之最小的顯著水準值。

(2) $\phi^2=\frac{T}{N}$

(3) Pearson's P coefficient of contigency $P=\sqrt{\frac{T/N}{1+T/N}}$

(4) Tschuprow's coefficient $T_s=\frac{T/N}{\sqrt{(\gamma-1)(c-1)}}$ 其中γ：列數，c：行數。

※(5) Cramers' cefficient of contigency $C=\frac{T/N}{\min(\gamma-1,c-1)}$

另外，對於r=2，c=2時之列聯表

Column	1	2	
Row1	a	b	r_1
Row2	c	d	r_2
	c_1	c_2	N

還有兩種度量方法。

(6) $V_1=\frac{ad-bc}{ad+bc}$

(7) $V_2=\frac{(a+d)-(b+c)}{a+b+c+d}$

不過，現今比較常用的度量方法，也就是由Cramer在1946年所提出的統計量$C=\frac{T/N}{\min(\gamma-1,c-1)}$（i.e上列中※號者），上面所列出的各統計量其實都有其優點，那Cramer統計量如何能脫穎而出，其間之緣由略述如下：

(1)因爲相關程度與卡方統計量之自由度有密切關係，所以，使用T或

$\phi^2=\frac{T}{N}$，仍至Pearson係數$P=\sqrt{\frac{T/N}{1+T/N}}$ 都無法將自由度的影響顯現出來，Kendall & Stuart 在其所著之"THE ADVANCED THEORY OF STATISTICS"中就證明了：「在完全結合性時，$P=\sqrt{\frac{T/N}{1+T/N}}$ 之值與列聯表之行、列數有密切關係」。

既然如此，那爲何同爲考慮了自由度Tschuprow's 係數

$T_s=\frac{T/N}{\sqrt{(n-1)(c-1)}}$ 卻未能被廣泛採用呢？且看下面理由(2)。

(2)要表現相關性之大小，基本上如棄却強度，ϕ^2，P係數，T_s 係數或是Pearson 的線性相關係數都儘可能的讓測量值在完全獨立的情形下是0，而在完全結合性時之值爲1，這樣在感覺上似乎頗能令人接受。而Kendall & Stuard 則證明了：「在完全獨立的情形下，T_s 之值爲0，不過，當完全結合性時，T_s 之值僅在 $\gamma=c$ 時才能達到1，i.e. 在行列數不相等時，$T_s=\frac{T/N}{\sqrt{(\gamma-1)(c-1)}}$ 之值在完全相關之情形亦不能達到其代表值1，反觀Cramer 係數就不會這樣了，i.e. $c=\frac{T/N}{\min(\gamma-1,c-1)}$ 在完全獨立時之值是0，且在完全結合性時之值爲1」。爲何會有這樣的差異呢？其原因也就是Cramer 係數形成的因素。且看分曉：

既然$T=\sum_{i,j}\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}$ 能用來決定獨立與否，且在判別爲相關的情形下，又欲表示其相關程度，於是，就考慮以T值之可能最大值爲界限，i.e.當T爲最大值時，定相關爲1，爲0時，定爲獨立，所以，如此的相關程度之度量統計量似乎可定爲$T/\underset{r,c,N\ \text{fixed}}{\max T}$。其實，在 r.c.N. 固定，T值之最大值是$N\times\min(r-1,c-1)$。

$\because P_{ij} \leqq P_{i\cdot}$, $P_{ij} \leqq P_{\cdot j}$

$$\therefore \frac{T}{N} = \frac{\sum\limits_{i,j} \frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}}{N} = \frac{\sum\limits_{i,j} \frac{O_{ij}^2}{E_{ij}} - N}{N} = \frac{\sum\limits_{i,j} \frac{(N\times P_{ij})^2}{N\times P_{i\cdot}\times P_{\cdot j}} - N}{N}$$

$$= \sum_{i,j} \frac{P_{ij}^2}{P_{i\cdot}\times P_{\cdot j}} - 1 \begin{cases} \leqq \sum\limits_{i}\left(\sum\limits_{j} \frac{P_{ij}\cdot P_{\cdot j}}{P_{i\cdot}\cdot P_{\cdot j}}\right) - 1 = \sum\limits_{i}\left(\sum\limits_{j} \frac{P_{ij}}{P_{i}}\right) - 1 \\ \qquad = \gamma - 1 \\ \text{且} \leqq \sum\limits_{j}\left(\sum\limits_{i} \frac{P_{i\cdot}\cdot P_{ij}}{P_{i\cdot}\cdot P_{j}}\right) - 1 = \sum\limits_{j} \frac{\sum\limits_{i} P_{ij}}{P_{\cdot j}} - 1 \\ \qquad = c - 1 \end{cases}$$

So $T/N \leqq \min(\gamma-1, c-1)$, $r < c$

又當列聯表爲

	1	2		r	r+1	…	c
1	$\frac{N}{r}$	0	………	0	0	…	0
2	0	$\frac{N}{r}$		0	0	…	0
	⋮	⋮		⋮	⋮	…	⋮
r	0	0	………	$\frac{N}{r}$	0	…	0

時（每行、列恰只有一格值非零，且等於 $\frac{N}{r}$ ），

T之値就會是上限 $N\times\min(\gamma-1, c-1)$ 。因此，我們可以確知：當 γ . c . N 因定下，T値之可能最大値是爲 $N\times\min(\gamma-1, c-1)$。

∴在上表的情形下（ $r < c$ ），

$$T_s = \frac{T/N}{\sqrt{(\gamma-1)(c-1)}} < \frac{T/N}{\sqrt{(\gamma-1)(\gamma-1)}} = \frac{T/N}{\gamma-1}$$

$$=\frac{T/N}{\min(r-1,\ c-1)}=C=1$$

(3)除上述兩個理由外，Cramer 係數仍有一個優點：

$$當\ r=c=2\ 時，C=\frac{T/N}{\min(r-1,\ c-1)}=\frac{T}{N}=\phi^2$$

$$當\ r=c\ 時，c=\frac{T/N}{\min(r-1,\ c-1)}=\frac{T/N}{\sqrt{(r-1)(c-1)}}=T_s$$

且除了 r，c 差異極大，不然 Cramer 係數與 T_s 係數差異不大。

雖然，Cramer 係數有如此多的優點，仍有其不理想之處。就以前面的例子來說吧，我們已算出統計量 T＝52.28 且其棄却強度已達 0.0001，但是 Cramer 係數卻僅有 52.28／200 ×min(5－1，6－1)＝0.065，實在沒有明顯地顯出其相關程度。再者，我們可以直觀地感覺到，在檢定為相關後，特徵間到底呈現何種相關，可能是二次相關、三次相關、線性乃至其他種種，但卻要用一個量來看出來這樣複雜的關係情形，實在有些勉強，例如：如下表所示資料顯示著圓形關係。

	0—1	1—2	2—3	3—4	
0 ‧ 0.5	10 / 5	0 / 5	0 / 5	10 / 5	20
0.5 ……	10 / 5	0 / 5	0 / 5	10 / 5	20
…… 1.5	0 / 5	10 / 5	10 / 5	0 / 5	20
1.5 ‧ 2	0 / 5	10 / 5	10 / 5	0 / 5	20
	20	20	20	20	80

左上角：觀察數

右下角：期望值

$$T=\Sigma\frac{O_{ij}^2}{E_{ij}}-N=\frac{100}{5}\times 8-80=80>X_9^2(1-0.05)=16.92$$

且 $C=\frac{T/N}{\min(r-1,c-1)}=\frac{80/80}{\min(4-1,4-1)}=0.33$ ：實在是沒有表示出相關性來！

因此，對於其他更有效的度量方法之發展實在有其必要！而且，對Cramer係數之依賴度也最好不要太強才好。

5.如何用來做爲配適檢定（Goodness of Fit test）？

關於用卡方檢定來做配適度的評量方法，其流程可分成下列步驟：

(1)資料的選取與處理：

①先隨機地選取一隨機變數X的N個觀測值。

②將此N個觀測值分成c類，並令第i類之觀測值數爲 O_i，$i=1,2,\cdots c$

③資料展爲列聯表如下：

class	1	2	………	c	Totals
Observed Frequencies	O_1	O_2	………	O_c	N

(2)資料條件：①此樣本爲一隨機樣本。

②測量尺度至少爲類別尺度。

(3)假設（Hypotheses）

令F(x)表變數X所對應的未知分配函數，而 $F^*(x)$ 是一完全確定的分配函數 i.e. 檢定中之假定的分配函數，則：

H_0 : $F(x)=F^*(x)\ \forall x$（i.e. H_0 : X之分配函數即爲 $F^*(x)$）

H_1 : $F(x)\neq F^*(x)\ \exists x$

(4)檢定統計量：

令 P_i^* 表在 H_0 爲眞下（i.e. $F^*(x)$ 是X之分配函數），隨機觀測值屬於第i類的機率，則定義：$E_i=P_i^*\cdot N\quad i=1,2,\cdots c$ 表在 H_0 下，第

i 類之期望值。

則統計量T取為 $T=\sum_{i=1}^{c}\frac{(O_j-E_j)^2}{E_j}\left(=\sum_{i=1}^{c}\frac{O_j^2}{O_j}-N\right)$

(5)棄却規則：由於T的眞實分配難得到，故可使用前面已證，在大樣本下之卡方分配來逼近，而此時之卡方分配有自由度（ c － 1 ）。於是，當顯著水準定為α，而T值大於（ $1-\alpha$ ）quantil $X_{1-\alpha}$ 的話，則棄却 H_0，否則接受 H_0 。

注意事項：在卡方的配適度檢定中，有關資料的分組，有些事項值得注意：1952年Cochran 提供了一些建議，就是所分出的每一組，其期望值皆不應小於 1 ，且期望值比 5 小的也最好不要超過 20 %，如此，統計量T的卡方分配之逼近才不會誤差太大。不過，Yarnold 在 1970 年則提出較寬的限制，當分類數 $c \geqq 3$ 時，則各組中最小之期望值可低到 $\frac{5r}{c}$，其中 r 為期望值未超過 5 的組數。

綜合以上之建議，當分組時，若是發生期望值小於 1 或比 5 小的組數太多時，可適當地合併一些組，以減小誤差。

參 考 資 料

[1] 黃登源老師的筆記（無母數統計）。

[2] W.J. CONOVER: Practical Nonparametric Statistics, 2nd, 1980 華泰書局

[3] HARALD CRAMÉR: MATHEMATICAL METHODS OF STATISTICS, 1976, 先登出版社

[4] NORMA GILBERT: Statistics, 1976, 環球書社

我在科學上的每一個發現都是逐次累積而得到的，都是經由幾個我所解決過的問題而得到的。這就好像在戰場上總要先打幾個小勝仗才能贏得最後勝利。 ——笛 卡 爾

3. 非整數階的微分

指導老師：趙文敏
作　　者：吳原榮

當數學家在處理積分方程、微分方程、機率……上的問題時，發現若引進非整數階的微分的觀念，會裨於解題，本文即將這方面的概念，做個粗淺的介紹。

在處理函數的微分時，若有參數同時出現在積分式或積分區間時，有下列的結果：

定理一：

設 $f(x,y)$，$f_x(x,y)$：$[a,b]\times[c,d]\to R$ 爲連續函數時，ψ_2,ψ_1 爲 $[a,b]\to[c,d]$ 之可微分函數，若 F 爲依下列公式定義於 $[a,b]$ 之函數

$$F(x)=\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

則 $\forall x\in[a,b]$，F 在點 x 有導數而且

$$F'(x)=\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f_x(x,y)\,dy-\psi'(x)f(x,\psi_1(x))+\psi_2'(x)f(x,\psi_2(x))$$

本定理不擬證明

在應用上述定理時，我們發現 $F_n(x)=\int_c^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt$，$c$ 是常數，有個有趣的結果如下：$\forall n\in N$

$$F_n'(x)=\int_c^x \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!}f(t)\,dt=F_{n-1}(x)$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$F_3'(x) = \int_c^x \frac{(x-t)}{1!} f(t)\,dt = F_2(x)$$

$$F_2'(x) = F_1(x)$$

$$F_1'(x) = f(x)$$

即 $F_n^{(n)}(x) = F_{n-1}^{(n-1)}(x) = \cdots\cdots = f(x)$

如果以 D^{-1} 表示 $f \to \int_c^x f(x)\,dx$ 之運算，即微分之反函數可以知

$F_n(x) = D^{-n} f(x)$

這是一個很好的引思，即若把n換入，$(n-1)!$ 換成 $\Gamma(\lambda)$，而 λ 不一定是整數時，情形會如何？

對於 $\lambda > 0$，令 $D^{-\lambda} f(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\lambda)} \displaystyle\int_c^x (x-t)^{\lambda-1} f(t)\,dt$ (1)

根據Gamma 函數的定義，$\Gamma(\lambda)$ 只對正數 λ 有意義，所以(1)式是個有意義的式子。

另一方面，設 μ 爲一正數，m表示爲大於 μ 之最小整數，設 $\mu = m - s$，則 $0 < s \leqslant 1$，令

$$D^{\mu} f(x) = \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_c^x (x-t)^{s-1} f(t)\,dt \tag{2}$$

(2)式也是個有意義的式子

有了(1)(2)式之定義，我們可以得出以下幾個定理：

定理二：(1)(2)式的定義是線性函數

證明：可容易地證出，其滿足 $D^{-\lambda}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha D^{-\lambda} f(x) + \beta D^{-\lambda} g(x), \lambda > 0$

$D^{\mu}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha D^{\mu} f(x) + \beta D^{\mu} g(x), \mu > 0$

α，$\beta \in R$

定理三：當$\mu, \lambda \in N$時，$D^{\mu} f(x)$ $D^{-\lambda} f(x)$是同正整數的微分，積分一樣的。

證明：$D^{-\lambda} f(x)$ 明顯可知

$$而 D^{\mu} f(x) = \frac{d^{\mu+1}}{dx^{\mu+1}} D^{-1} f(x) = \frac{d^{\mu}}{dx^{\mu}} \frac{d}{dx} \int_{c}^{x} f(t) dt = \frac{d^{\mu}}{dx^{\mu}} f(x) = f^{(\mu)}(x)$$

特別地：當$\mu = 1$時

$$Df(x) = \frac{d^2}{dx^2} D^{-1} f(x) = \frac{d^2}{dx^2} \int_{c}^{x} f(t) dt = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$$

定理四：$D^0 f = f$

證明：$D^0 f(x) = \frac{d}{dx} D^{-1} f = \frac{d}{dx} \int_{c}^{x} f(t) dt = f(x)$

定理五：$D^{-\lambda} D^{-\alpha} f(x) = D^{-\lambda-\alpha} f(x)$ ，λ ，$\alpha > 0$

$$證明：D^{-\lambda} D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\alpha)} \int_{c}^{x} (x-s)^{\lambda-1} \int_{c}^{s} (s-t)^{\alpha-1} f(t) dt ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\alpha)} \int_{c}^{x} f(t) \int_{t}^{x} (x-s)^{\lambda-1} (s-t)^{\alpha-1} ds dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\alpha)} \int_{c}^{x} f(t) \int_{0}^{1} (x-t)^{\lambda+\alpha-1} z^{\alpha-1} (1-z)^{\lambda-1} dz dt$$

其中 $z = \frac{s-t}{x-t}$

$dz = \frac{1}{x-t} ds$

$$= \frac{B(\lambda, \alpha)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\alpha)} \int_{c}^{x} f(t) (x-t)^{\lambda+\alpha-1} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda+\alpha)} \int_{c}^{x} (x-t)^{\lambda+\alpha-1} f(t) dt$$

$= D^{-\lambda-\alpha} f(x)$ ，其中β是表Beta函數

定理六：$D^{\lambda}D^{\alpha}f(x)=D^{\lambda+\alpha}f(x)$，其中$\lambda$，$\alpha>0$，而且函數 f 滿足下列條件：若$\alpha=q-b$，q爲大於$\alpha$之最小正整數，則

$f(c)=f'(c)=\cdots\cdots=f^{(q-1)}(c)=0$

證明：令$\lambda=p-a$，p爲大於λ之最小正整數

則 $\lambda+\alpha=p+q-(a+b)$

$\therefore D^{\lambda}D^{\alpha}f=D^{p}D^{-a}D^{q}D^{-b}f$

$D^{\lambda+\alpha}f=D^{p}D^{q}D^{-a}D^{-b}f$

$\therefore$我們須處理$D^{-a}D^{q}f=D^{q}D^{-a}f$

因爲，$D^{-a}f(x)=\dfrac{1}{\Gamma(a)}\displaystyle\int_{c}^{x}(x-t)^{a-1}f(t)dt$

將之分部積分 q 次可得

$$\frac{1}{\Gamma(a)}\int_{c}^{x}(x-t)^{a-1}f(t)dt=\frac{1}{\Gamma(a)}\left\{\frac{(x-c)^{a}}{a}f(c)+\frac{(x-c)^{a+1}}{a(a+1)}f'(c)+\cdots\cdots+\frac{(x-c)^{a+q-1}}{a(a+1)\cdots(a+q-1)}f^{(q-1)}(c)\right\}+\frac{1}{\Gamma(a+q)}\int_{c}^{x}(x-t)^{a+q-1}f^{(q)}(t)dt$$

依條件 $f^{(q-1)}(c)=\cdots\cdots=f'(c)=f(c)=0$

$\therefore$原式剩最後一項

$\Rightarrow D^{-a}f=D^{-(a+q)}f^{(q)}=D^{-(a+q)}D^{q}f$

$\therefore D^{q}D^{-a}f=D^{q}D^{-(a+q)}D^{q}f=D^{-a}D^{q}f$

所以，我們可得$D^{\lambda}D^{\alpha}f=D^{\lambda+\alpha}f$

證完此定理，我們當然可以依此證明再證出$D^{\alpha}D^{\lambda}f=D^{\alpha+\lambda}f$
但欲得此結果，我們必須要求$f^{(p-1)}(c)=f^{(p-2)}(c)=\cdots=f'(c)=f(c)=0$
在這樣的情況下，我們若要有$D^{\lambda}D^{\alpha}f=D^{\alpha}D^{\lambda}f$，我們需要的條件就更嚴格了，即$f^{(d-1)}(c)=\cdots=f'(c)=f(c)=0$ $d=\max\{p,q\}$

定理七：若 $f^{(d-1)}(c)=\cdots=f'(c)=f(c)=0$，則 $D^{\lambda}D^{\alpha}f=D^{\alpha}D^{\lambda}f$

其中 $\lambda=p-a$，$\alpha=q-b$，p，q 各爲大於 λ，α 之最小正整數，

而 $d=\max\{p,q\}$

證明：若 $d=p \quad \Rightarrow \quad D^{p}D^{-b}f=D^{-b}D^{p}f$

且 $\quad D^{q}D^{-a}f=D^{-a}D^{q}f$

若 $d=q$ 亦同

$$\therefore D^{\lambda}D^{\alpha}f=D^{p}D^{-a}D^{q}D^{-b}f=D^{p}D^{q}D^{-a}D^{-b}f=D^{q}D^{p}D^{-b}D^{-a}f$$

$$=D^{q}D^{-b}D^{p}D^{-a}f=D^{\alpha}D^{\lambda}f$$

在上述中，我們要注意一個問題：

即 $D^{\lambda}D^{\alpha}f$ 中，令 $\lambda=p-a$，$\alpha=q-b$，$0<a,b\leqslant 1$，p、q 各爲大於 α、β 之最小整數。

當 $1<a+b\leqslant 2$ 時，該注意些什麼？

於此情形下

$$\alpha+\lambda=p+q-a-b=p+q-1-(a+b-1)$$

則 $D^{\alpha+\lambda}f=D^{p+q-1}D^{-(a+b-1)}=D^{p+q}D^{-1}DD^{-(a+b)}$

$D^{-1}D$ 是否會等於 I ？

其實 $D^{-1}D=$ constant

但因 $p+q>1$，故對整個定理六之證明是沒有影響的。

當然，$D^{-1}Df$ 是不會等於 $DD^{-1}f$ 的。

由定理二至定理七之探討可知，在某些條件之限制下，定義中之非整數階之微分跟一般微分是很相同的。

在微積分中，我們對 $(f(x)g(x))^{(n)}$ 有個規則

$$即\ (f(x)g(x))^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

但在 $(f(x)g(x))^{(\lambda)}$ 情況會如何呢？

先看個例子：令 $c=0$ 得

$$D^{\frac{1}{2}}x^2 = DD^{-\frac{1}{2}}x^2 = \frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} t^2\,dt$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^1 x^{\frac{5}{2}}(1-s)^{-\frac{1}{2}} s^2\,ds\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\frac{B(3,\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}x^{\frac{5}{2}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{2})}x^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{5}{2})}x^{\frac{3}{2}}$$

$$= x\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})}x^{\frac{1}{2}} + \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})}x^{\frac{3}{2}} = x\cdot D^{-\frac{1}{2}}x + x^{(1)}D^{\frac{1}{2}}x$$

我們再來運算$D^{-\lambda}xf(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_c^x (x-t)^{\lambda-1}\,t\,f(t)\,dt$

$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_c^x (x-t)^{\lambda-1}[x-(x-t)]f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\left[\int_c^x (x-t)^{\lambda-1}xf(t)\,dt - \int_c^x (x-t)^{\lambda}f(t)\,dt\right]$$

$$= xD^{-\lambda}f(x) - \lambda D^{-\lambda-1}f(x)$$

如$D^{\frac{1}{2}}xf(x) = \frac{d}{dx}\left(xD^{-\frac{1}{2}}f(x) - \frac{1}{2}D^{-\frac{3}{2}}f(x)\right)$

$$= D^{-\frac{1}{2}}f(x) + xD^{\frac{1}{2}}f(x) - \frac{1}{2}D^{-\frac{1}{2}}f(x)$$

$$= xD^{\frac{1}{2}}f(x) + \frac{1}{2}D^{-\frac{1}{2}}f(x)$$

由於積分運算繁雜，關於微分、積分之一般化處理，就討論至此，下面我們舉些例子，並述其應用。

EX1：

$f(x) = x^a$ ， $a > 0$ 　$D^{-\lambda}f(x) = ?$

Ans : $D^{-\lambda} f(x) = D^{-\lambda} x^a = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^x (x-t)^{\lambda-1} t^a \, dt$

$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^1 (1-s)^{\lambda-1} s^a x^{a+\lambda} \, ds = \frac{B(a+1,\lambda)}{\Gamma(\lambda)} x^{a+\lambda}$$

$$= \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\lambda+1)} x^{a+\lambda}$$

EX2 : $D^{\lambda} x^a = ?$ $a > 0$

Ans : $D^{\lambda} x^a = \frac{d^m}{dx^m} \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\lambda+1)} x^{a+\lambda} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-\lambda+1)} x^{a-\lambda}$

EX3 : $D^{\lambda} k = ?$ k是常數 $D^{\lambda} = D^{m-s}$

Ans : $D^{\lambda} k = \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^x (x-t)^{s-1} k \, dt$

$$= \frac{d^m}{dx^m} \frac{k}{\Gamma(s)} \frac{x^s}{s} = \frac{k s (s-1) \cdots (s-m+1)}{s \Gamma(s)} x^{s-m}$$

$$= \frac{k}{\Gamma(s-m+1)} x^{s-m} = \frac{k}{\Gamma(1-\lambda)} x^{-\lambda}$$

但有些函數，就不是這麼容易如我們所願可以積出來了，

如 $f(x) = \sin x$

$$D^{-s} \sin x = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^x (x-t)^{s-1} \sin t \, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \left\{ \frac{x^s}{s} \sin 0 + \cdots + \frac{x^{s+m-1}}{s(s+1)\cdots(s+m-1)} \sin^{(m-1)}(0) \right\}$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(s+m)} \int_0^x (x-t)^{s+m-1} \sin^{(m)}(t) \, dt$$

可知仍無法積出

應用 1 ：最常見之應用是在積分方程中

如 $xf(x)=\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} f(t)\,dt$ 要解 $f(x)=?$

$$xf(x)=\Gamma(\tfrac{1}{2})D^{-\frac{1}{2}}f(x)$$

兩邊微$\frac{1}{2}$階

$$\Rightarrow \quad xD^{\frac{1}{2}}f(x)+\frac{1}{2}D^{-\frac{1}{2}}f(x)=\Gamma(\tfrac{1}{2})f(x)$$

$$\Rightarrow \quad xD^{\frac{1}{2}}f(x)+\frac{xf(x)}{2\Gamma(\frac{1}{2})}=\Gamma(\tfrac{1}{2})f(x)$$

$$\Rightarrow \quad xD\left(\frac{xf(x)}{\sqrt{\pi}}\right)+\frac{xf(x)}{2\sqrt{\pi}}=\sqrt{\pi}\,f(x) \qquad \because \Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow \quad x^2f'(x)+\left(\frac{3}{2}x-\pi\right)f(x)=0$$

再利用微分方程之解法

可得 $f(x)=ke^{-\pi/x}x^{-\frac{3}{2}}$

應用 2 ：

若 $D^{-\frac{1}{2}}f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt=\phi(x)$

$$\Rightarrow \quad f(x)=D^{\frac{1}{2}}\phi(x)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\phi(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt$$

此即若名之Abel's integral function

由應用可知，發展如此之微分、積分，是數學家們爲了解決一些積分、微分方程甚且機率上之問題，我們不能期望它具備旣有整數階的情形與公式。當然無可否認地，那天數學家可能會發展出更好的非整數階之微分，更無累贅，且讓我們拭目以待。

參　考　書　目

(1) Courant, Richard & John, Fritz, Introduction to Culculus and analysis, Volume Ⅱ. 1965。

(2) E.T Whittaker and G.N Waston. A course of Mordern analysis, 1963。

(3) Bertram Ross, Muthmatics Magazine, Fractional Culculus p. 115～p.123, 1977。

(4)陳昭地，顏啓麟，數學分析。

(5)趙文敏，大學微積分（上册）。

（上接第22頁）

讓我們把這張表仔細研究一下。正如坡里雅所建議的，這張表可以提供極佳的教學策略，尤其是初爲人師的，就更應細心琢磨了。

了解題目

讀數學書跟學生讀其他教材很不一樣。數學課本中有許多專門名詞與符號；太多太難的符號會帶給學生很多麻煩。就因爲這種困難，很不幸的許多老師甚至於乾脆剝奪了學生學習去讀數學書的機會。你身爲一位數學教師，是有責任幫你的學生，學著讀數學教材，這種工作可使你教學生解題方法時輕鬆許多。

當你幫學生了解題目的敍述時，避免讓他只有招架的機會。不要問：「你唸過這個題目沒有？」而應該說：「請幫我把這題大聲讀給大家聽。」然後注意看他是否在該停頓的地方停頓了？符號讀對了沒有？請他解釋一下這個題目。要解的是什麼？已知的是什麼？看看學生能不能畫個圖，再讓他把已知的資料在圖上標示出，注意他是不是作對了！

擬定計劃

在解題的過程中，如果有必要先想一個解決的計劃與方案時，很多學生馬上就撒手不幹了。他們會要你幫忙，也就是要你給他們一個現成的方案。也有一些同學不會這麼快喪失信心，不過他們也只是朝解決問題方向努力一步而已。總之來到你班上的學生恐怕都很缺乏耐心與毅力。你的責任就是要教他們經歷多次失敗後，還要堅持到底。其實說起來如果一上手就解決的問題，也算不上什麼問題了。

有時候問學生：「昨天是不是解過一個類似的問題？」會觸發學生的思考。經常機械性的引用某些典型的方法，就能把問題解開。因爲教科書中的題目通常只用到剛教過的東西，老師可以問：「我們上一課剛學過什麼啊？」這樣也會幫助學生發現，如何把他剛學過的東西，用到手頭上的問題。

在計劃解決幾何問題時，非常重要的是學生心中應該回想起數種不同的解題法。例如某題最終是要證明兩角全等；當你已請班上同學唸過什麼是「已知」，什麼是「欲證」，以及畫好可用的圖後，就該先問：「我們可以用來證明兩角全等的方法有那些啊？」班上同學那些數學能力強，那些弱，你心裏應該很清楚。注意那些自願回答問題的學生；若是一位平常幾何差的學生想要回答的話，優先叫他回答。當你把他的證明兩角全等的方法寫在黑板上時，儘可能給他應有的反應，並且讚許他。繼續請同學列舉各種方法，都寫在黑板上讓全班看清楚，對班上來說，這也是一個好複習。等到能想到的方法都想出了，你該問：「我們最好先用那個辦法呢？」這次同樣先請一位同學挑個方法。不管你心裏知道這個辦法行得通還是行不通，都要讓全班和你一起努力向前進，直到實在解不出時爲止。然後再請別人挑個新方法。如此類推，直到把兩角的全等證出爲止。利用這種教法，你就間接的教了學生，有時問題是必須嘗試多次才有可能解決的。並且你也同時強調了有彈性的思考的必要。如果開始沒抓住要領，就換一個焦點，尋求另一個部門重新開始。

（下接第 85 頁）

4. 數學上一些未解問題的探討

指導老師：李恭晴
編　　者：陳向榮

在幾千年來的數學發展中，數學家曾經解出很多數學上的艱難問題，尤其最近兩三百年來，在數學上更有驚人的進展；然而，面對著一些只需知道很少的專門知識，而提出來之「簡單」問題時，數學家們卻一籌莫展，百思無解，令人有江郎才盡之感。其實同學們在接觸這類問題時，不要即刻滿懷壯志的去解題，而應該仔細觀察一下，如何搜求「證據」，提出有意義的疑問，這才是解難題的基本態度。以下筆者就一些未解之難題來加以探討。

一、如 n^2-n+p 型態之質數

我們很容易算出，當 $0 \leqq n \leqq 16$ 時，n^2-n+17 一定是質數，同樣地，當 $0 \leqq n \leqq 40$ 時，n^2-n+41 也都是質數。而柏格爾更證明出，當 $0 \leqq n \leqq 11000$ 時，$n^2-n+72491$ 恒為質數。

問題：是不是對於每一自然數N，都可以找到一個質數p，使得當 $0 \leqq n \leqq N$ 時，n^2-n+p 恒為質數；如果能找得到，則P與N之大小關係如何？

其實這個問題是非常難的，為什麼呢？因為當 $n=p$ 時，n^2-n+p 就不是質數，所以 n^2-n+p 充其量只是當n由0到 $p-1$ 時才為質數。

我們可假設這問題有正面解，並且令 p_1 為任一質數，那麼我們可找到另一質數 p_2，使得：

$$0 \leqq n \leqq p_1 \Rightarrow n^2-n+p_2 \text{ 為質數，}$$

接著，對 p_2 而言，我們又可找到另一個質數 p_3，使得

$$0 \leqq n \leqq p_2 \Rightarrow n^2-n+p_3 \text{ 為質數}$$

………；如此遞迴下去即我們有了質數 p_{i-1} 之後，就該可以找到質數 p_i，使得

$$0 \leqq n \leqq p_{i-1} \Rightarrow n^2 - n + p_i \text{ 為質數} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

在(1)式中，由於 $n = p_i$ 時，$n^2 - n + p_i$ 即不為質數，故 $p_i > p_{i-1}$，因此，我們得到一個相異質數所成的無窮嚴格遞增（infinite strictly increasing）序列 $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$，且皆滿足(1)式。

因在(1)式左端以 $n = 1$，2 代入後顯然滿足，故相對的從(1)式右端我們就得到了無限多對相異的孿生質數（即相差為 2 之兩個質數）：

$$\{p_i, p_i + 2\}_{i=1}^{\infty}$$

這就表示孿生質數問題有了正面解（即孿生質數有無限多個）。但我們知道孿生質數問題至今尚仍無法證明，又怎能解答出此問題呢！

但是我們再回頭看看支持此問題的證據，拋開柏格爾（Berger）的例子不管，另外兩個例子：$0 \leqq n \leqq 16$ 時，$n^2 - n + 17$ 是質數（Legendre 發現的）；$0 \leqq n \leqq 40$ 時，$n^2 - n + 41$ 是質數（Euler 發現的）。事實上由數論史得知 Legendre 同時發現 $0 \leqq n \leqq 28$ 時，$2n^2 + 29$ 為質數，於是支持問題一的「證據」，我們可以建議出下列一個新問題：

「是不是對任何質數 p，都可以找到一個整係數多項式 f(n)，使得 f(0) = p，而且當 n 由 1 逐一變至 p − 1 時，f(n) 可產生 p − 1 個互不相同的質數？」

如果我們把這個問題叫做 L(p)，則我們已知 L(17)，L(29)，L(41) 為真。當我們動手試 L(2)，L(3)，……等等，經過了許多次的尋找和運算，可證明 L(p) 對於 $p \leqq 29$ 的質數均為真，筆者將所得的多項式列為下表：

p	$f_p(n)$
2	$n+2$
3	$2n+3$
5	$2n^2+5$
7	$2n^2-2n+7$
11	n^2-n+11
13	$6n^2+13$
17	n^2-n+17
19	$2n^2-2n+19$
23	$3n^2-3n+23$
29	$2n^2+29$

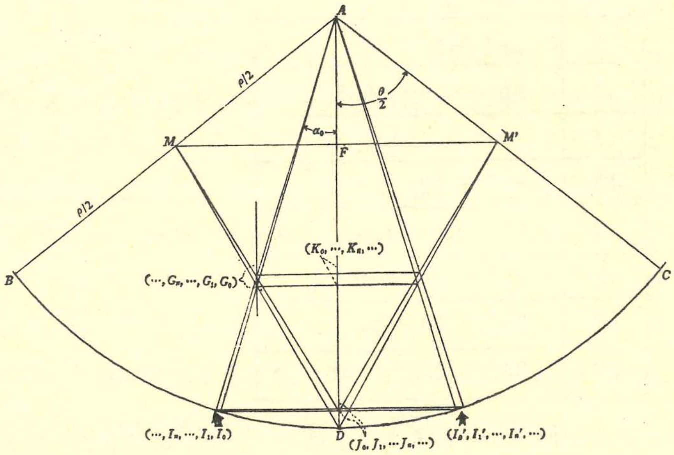
至此，根據上表的十個例子，我們似乎感覺到「證據」的數目已足夠提出一個假說(conjecture)：

「L(p)對任何質數p均爲眞。」

爲了加強上述的假說成立的可能性，自然我們開始找 $f_{31}(n)$，可是無法找到類似上述十個的簡單多項式。如果L(31)爲假，則我們說假說不成立；如果L(31)爲眞，則假說就又變成一個有趣的問題了。究竟眞相爲何，筆者無法解出，只有請各位讀者自行動手試試吧！

二、三等分一任意角之極限解法

在古典的平面幾何學中，要三等分一任意角必須符合下列的規定：「必須用圓規直尺在有限次之作圖中求得其解。」在此條件的限制下，三等分一任意角的作圖已被證明爲不可能，但無此條件之限制則可作圖。下面的解法即是利用極限的觀念，不失爲一有趣的問題。



作圖方法：（參看上圖）

1.作一任意角θ，使之滿足$0<\theta<\pi$，並將此角平分。以角θ之頂點A為圓心，ρ為半徑畫弧交θ角之兩邊及其平分線於B、C、D三點。

2.因AD為角θ之平分線，其兩邊對稱，故可擇其一邊作圖之。

3.連接$\overline{AB}$之中點M於D成$\overline{MD}$。

4.過A點及$\overline{MD}$之中點G_0畫直線交圓弧於I_0並通過I_0作$\overline{AD}$之垂線交$\overline{AD}$於J_0。

5.連接J_0和M成$\overline{J_0M}$與通過G_0平行於$\overline{AD}$之線$\overline{G_0X}$交於G_1。

6.連接A和G_1成$\overline{AG_1}$交圓弧於I_1並過I_1作$\overline{AD}$之垂線，交$\overline{AD}$於J_1。

7.如此繼續下去，可用遞迴（ reccursive ）方法來找$\{G_n\}$，$\{I_n\}$，$\{J_n\}$，$\{K_n\}$。若已找到$\{G_0, G_1, \cdots, G_k\}$，$\{I_0, I_1, \cdots, I_k\}$，$\{J_0, J_1, \cdots, J_k\}$，$\{K_0, K_1, \cdots, K_k\}$；（$K_k$為通過$G_k$點而垂直於$\overline{AD}$之線與$\overline{AD}$之交點），令$\overline{MJ_k}$與$\overline{G_0X}$相交於$G_{k+1}$，且$\overline{AG_{k+1}}$與$\overset{\frown}{BD}$相交於$I_{k+1}$，

而K_{k+1}爲通過G_{k+1}點垂直於AD之線與$\overline{AD}$之交點。至於I'_{k+1}，G'_{k+1}分別爲I_{k+1}，G_{k+1}對於軸$\overline{AD}$之對稱點。

8. $\overline{AI_n}$之極限卽爲所求之三等分線。

證明方法：

設$\angle I_0AD=\alpha_0$，$\angle I_1AD=\alpha_1=\alpha_0+\delta_1=\alpha_0+\angle I_0AI_1$

卽 $\alpha_{k+1}=\alpha_k+\delta_{k+1}$ $\qquad k=0, 1, 2, \cdots\cdots$ (1)

由作圖知

$$\overline{G_0G_{k+1}}=\frac{1}{2}\overline{DJ_k}=\overline{K_0K_{k+1}}=\frac{\rho}{2}(1-\cos\alpha_k) \tag{2}$$

設 $L_0=\overline{AK_0}$

$$=\overline{AF}+\frac{1}{2}\overline{DF}=\frac{\rho}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{\rho}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{\rho}{2}+\frac{\rho}{4}\cos\frac{\theta}{2} \tag{3}$$

$$L_1=L_0-\overline{K_0K_1}=L_0-\frac{1}{2}\overline{DJ_0}$$

$$=\frac{\rho}{2}\cos\alpha_0+\frac{\rho}{4}\cos\frac{\theta}{2} \tag{4}$$

$\vdots$

$$L_{k+1}=\frac{\rho}{2}\cos\alpha_k+\frac{\rho}{4}\cos\frac{\theta}{2} \tag{5}$$

但 $\cos\alpha_0=\overline{AK_0}/(\overline{AK_0}^2+\overline{K_0G_0}^2)^{1/2}$

$$=L_0/\sqrt{L_0^2+C^2} \tag{6}$$

$\vdots$

$$\cos\alpha_k=L_k/\sqrt{L_k^2+C^2} \tag{7}$$

（令$\overline{G_0K_0}=\cdots\cdots=\overline{G_kK_k}=C=$定數）

利用(5)及(7)，$L_k>L_{k+1}$及數學歸納法，可得$\{L_n\}$爲一遞減序列，故極限存在；又由(7)知$\{\alpha_k\}$之極限亦存在，稱其爲α，卽

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha \tag{8}$$

在$\triangle AI_nJ_n$中

$$\overline{AK_n} / 2\overline{K_nG_n} = \overline{AJ_n} / 2\overline{I_nJ_n} = \overline{AE} / 2\overline{EP_n} \tag{9}$$

(9)式中E為$\overline{BC}$與$\overline{AD}$之交點，$\{P_n\}$為$\overline{BC}$與$\{AI_n\}$之交點。(9)式寫成下式：

$$L_n / \frac{\rho}{2}\sin\frac{\theta}{2} = \rho\cos\alpha_n / 2\rho\sin\alpha_n = \rho\cos\frac{\theta}{2} / 2\overline{EP_n}$$

即

$$2\overline{EP_n} = 2\rho\cos\frac{\theta}{2}\tan\alpha_n = (\rho\sin\frac{\theta}{2} / 2L_n)\rho\cos\frac{\theta}{2} \tag{10}$$

由(5)及(10)可得

$$\sin\frac{\theta}{2} - 2\sin\alpha_n\left(\frac{\cos(\alpha_n - 1)}{\cos\alpha_n}\right) = \tan\alpha_n\cos\frac{\theta}{2} \tag{11}$$

由(11)及(8)式得知

$$\sin\frac{\theta}{2} - 2\sin\alpha = \tan\alpha\cos\frac{\theta}{2} \tag{12}$$

即 $\sin\frac{\theta}{2}\cos\alpha - \sin\alpha\cos\frac{\theta}{2} = 2\sin\alpha\cos\alpha$

或 $\sin(\frac{\theta}{2} - \alpha) = \sin 2\alpha$

又因 $0 < \theta < \pi$，$0 < \alpha < \frac{\theta}{2}$

故　$\frac{\theta}{2}-\alpha=2\alpha$

即　$2\alpha=\frac{\theta}{3}$ (13)

(13)式即為我們所求之極限法三等分一任意角。

補註：

1.利用三等分角之極限法尚可求得

$$\lim_{n\to\infty} 3^n \sin\frac{180}{3^n}=\pi$$

讀者可用上式及拋物線求得一圓面積等於正方形面積（即所謂之「方圓問題」）之極限解法，不妨自行試試看。

2.吾人已知

$$\sin 3\beta-2\sin\beta=\tan\beta\cos 3\beta$$

或可寫成

$$\frac{\sin 3\beta}{\sin\beta}-\frac{\cos 3\beta}{\cos\beta}=2 \tag{1}$$

令$\beta=\frac{\theta}{6}$，則(1)式可寫成

$$\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{6}}-\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{6}}=2 \tag{2}$$

由圖，在自D點向$\overline{AB}$作垂線且交$\overline{AB}$ 於Q後，吾人可知(2)式所表示的

係。

$$設\quad \overline{DQ}=\rho\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=b\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 已知$$

$$\overline{AQ}=\rho\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=a\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 已知$$

$$\overline{I_nJ_n}=\rho\sin\left(\frac{\theta}{6}\right)=x$$

$$\overline{AJ_n}=\rho\cos\left(\frac{\theta}{6}\right)=y$$

則 $x^2+y^2=a^2+b^2$ (3)

由(2)式得

$$\frac{b}{x}-\frac{a}{y}=2 \tag{4}$$

由(3)，(4)兩式我們消去 x 或 y，則可求 y 或 x 之四次方程式之根。現在讀者可依據楊氏之四次方程式解法解得 x 及 y 之一組解，即 α_n 爲$\frac{\theta}{6}$之解。

若 x，y 之一組解爲可得，則古典法之三等分一任意角是可解還是不可解？

三、費馬問題之初步研究

「當 n 爲不小於 3 之正整數，則不可能有正整數 x，y，z 使得 $x^n+y^n=z^n$」，此問題自明朝末年法國人費馬（Fermat, 1601-1665）提出後，至今尚無可觀之成就。

費馬問題爲在一個式子中有四個變數（x, y, z, n），下文將四個變數化減爲兩個，即（x＋y）與 z。首先確定（x＋y）與 z 之固定關係爲“$z<(x+y)<2z$”。我們將證明“當 $z=p_i^{\alpha_i}$（p_i 爲任何質數，α_i 爲不小於 1 之任何正整數），$n\geqq 3$，則 x 與 y 必至少有一個不能是正整數”

。〔而後繼續研究之終極目標爲：若 $z = p_a^{\alpha_a}$ 、$p_b^{\alpha_b}$ 、…… $p_i^{\alpha_i}$（任意正整數），則 x 與 y 至少有一個不能是正整數。〕

(一)對 n 之處理

1.令 n 爲不小於 3 之正數，定義 $N = \{ n \mid n \geqq 3 \}$。

2.令 n_1 爲不小於 3 之奇數，n' 爲不小於 1 之正整數，定義 $N_1 = \{ n, n' \mid n_1 \geqq 3$ 的奇數，$n' \geqq 1 \}$ 的正整數。

例如：　3 , 6 , 9 , 12 , 15 , 18 , ……

　　　　5 , 10 , 15 , 20 , 25 , 30 , ……

　　　　7 , 14 , 21 , 28 , 35 , 42 , ……

　　　　⋮

3.令 n_2 爲 2^α , $\alpha = 2, 3, 4$, ……。定義

$$N_2 = \{ n_2 \mid n_2 = 2^\alpha , \alpha = 2, 3, 4, 5, \cdots\cdots \} 。$$

4.N_1 , N_2 , N 之關係如下：

(1) N_1 與 N_2 之交集爲空集合，因爲所有偶數中不能爲奇數所除盡者爲 2^α。

(2) N_1 與 N_2 之聯集爲 N，因爲所有正整數不在 N_1 中者必在 N_2 中，故 N_1 與 N_2 將所有不小於 3 的正整數盡數包含。

5.由已知當 $n = 4$ 時，$x^4 + y^4 = z^4$，則 x , y , z 不能同時爲正整數，可得出當 $n_2 = 2^\alpha$ 時，$x^{n2} + y^{n2} = z^{n2}$；x , y , z 不能同時爲正整數。

證明：若 $x^{2^\alpha} + y^{2^\alpha} = z^{2^\alpha}$，則可改寫成

$$(x^{2^{\alpha-2}})^4 + (y^{2^{\alpha-2}})^4 = (2^{2^{\alpha-2}})^4 ,$$

亦即 2^α 爲 4 的倍數。

結論：凡爲 2^α 之 n_2 均已證明 x , y , z 不能同時爲正整數，所以 N_2 應由 N 中剔除。只處理 N_1，即只處理所有 $n_1 n'$ 即可。

6.若 $x^{n_1 n'} + y^{n_1 n'} = z^{n_1 n'}$，則可改寫成

$$(x^{n'})^{n_1} + (y^{n'})^{n_1} = (z^{n'})^{n_1} 。$$

例如：$x^{30}+y^{30}=z^{30}$，可改寫成$(x^6)^5+(y^6)^5=(z^6)^5$ 。

結論：只處理N_1中之n_1即可，就等於處理了所有的$n\geqq 3$的正整數。也就是將所有$n\geqq 3$正整數問題化簡爲$n\geqq 3$之奇數問題。故下面所有的n均是指不小於3之奇數。

(二)

對所有$n\geqq 3$之奇數，恒可得

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots-xy^{n-2}+y^{n-1})$$

也就是(x^n+y^n)能被$(x+y)$所除盡。

我們現在開始討論$(x+y)$對z之關係：

1. $(x+y)<z$爲不可能

證明：若$(x+y)<z$，則$(x+y)^n<z^n$

因此$x^n+y^n<z^n$，此與題設$x^n+y^n=z^n$相矛盾。

2. 當$x+y=z$，則$n=1$。

3. $(x+y)\geqq 2z$爲不可能

證明：若$x\geqq z$，則$x^n\geqq z^n$。得出

$$x^n+y^n>z^n\ (\because y>0)$$

此與題設$x^n+y^n=z^n$相矛盾，因此$x<z$。同理，也可證得$y<z$，因此x與y均不能大於或等於z，亦即$(x+y)<2z$。

4. 結論：$(x+y)$對z之固定關係爲$z<(x+y)<2z$。

5. 本文僅探討$z<(x+y)<2z$之關係，也就是僅限於$(x+y)$與z兩個變數而已。

(三)

1. 設$z=p_i$，p_i爲任意質數，2, 3, 5, 7, 11, 13, ……。

(1)因n爲奇數，得：

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots-xy^{n-2}+y^{n-1})$$
$$=z^n=p_i^n,$$

即　$(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots-xy^{n-2}+y^{n-1})=p_i^n$

⑵在上式中如何由 p_i^n 中分解出 $(x+y)$ 的因式來？

若取 $(x+y)=p_i$，則 $(x+y)=p_i=z$，即 $n=1$，此與題設 $n\geqq 3$ 不合。若取 $(x+y)=p_i^2$，因最小之 p_i 爲 2，故可得 $(x+y)\geqq 2p_i=2z$，與 $(x+y)<2z$ 相矛盾。

⑶若取一整數 m，使 $p_i<m<2p_i$，並令 $m=x+y$，則 $p_i<(x+y)<2p_i$　合於 $z<(x+y)<2z$。

令　$m=p_j^{\alpha_j}p_k^{\alpha_k}\cdots\cdots p_r^{\alpha_r}$，

則 $p_j, p_k, \cdots\cdots, p_r$ 均不能與 p_i 相等，否則 $m\geqq 2p_i$。代 m 入 z^n，得

$$z^n=p_i^n=(p_j^{\alpha_j}p_k^{\alpha_k}\cdots\cdots p_r^{\alpha_r})\left(\frac{p_i^n}{p_j^{\alpha_j}p_k^{\alpha_k}\cdots\cdots p_r^{\alpha_r}}\right),$$

則　$$(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots\cdots-xy^{n-2}+y^{n-1})=\frac{p_i^n}{p_j^{\alpha_j}p_k^{\alpha_k}\cdots\cdots p_r^{\alpha_r}}$$

因 $p_j, p_k, \cdots\cdots p_r$ 均不與 p_i 相等，故 $\dfrac{p_i^n}{p_j^{\alpha_j}p_k^{\alpha_k}\cdots\cdots p_r^{\alpha_r}}$ 必爲一眞分數，而不是一正整數，所以 $(x^{n-1}-x^{n-1}y+\cdots\cdots-xy^{n-2}+y^{n-1})$ 不是正整數，也就是 x 與 y 不能同時爲正整數。

⑷總而言之，因質數必須整取整捨，是不可分的。

2.結論：若 $z=p_i$，則 x 與 y 不能同時爲正整數，也就是在費馬問題中 z 不可以是質數。

㈣

1.設 $z=p_i^{\alpha_i}$，$\alpha_i\geqq 1$ 爲正整數。得

$(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots-xy^{n-2}+y^{n-1})=p_i^{\alpha_i n}$。

2.若取 $(x+y)=p_i^{\alpha_i-1}$，則 $(x+y)<z$，違反 $z<(x+y)$；

若取 $(x+y)=p_i^{\alpha_i-2}$，則 $p_i^{\alpha_i-2}<p_i^{\alpha_i-1}$；

若取（ $x+y$ ）$=p_i^{\alpha_i-3}$ ，則 $p_i^{\alpha_i-3}<p_i^{\alpha_i-2}$ ；

3.若取（ $x+y$ ）$=p_i^{\alpha_i}$ ，則（ $x+y$ ）$=z$ ，$n=1$ ；

若取（ $x+y$ ）$=p_i^{\alpha_i+1}$ ，則（ $x+y$ ）$\geqq 2z$ ；

若取（ $x+y$ ）$=p_i^{\alpha_i+2}$ ，則 $p_i^{\alpha_i+2}>p_i^{\alpha_i+1}$ ；

若取（ $x+y$ ）$=p_i^{\alpha_i+3}$ ，則 $p_i^{\alpha_i+3}>p_i^{\alpha_i+2}>p_i^{\alpha_i+1}$ ；

⋮

4.其理由與上一段相同，即 p_i 要整取整捨，不可分。

5.結論：若 $z=p_i^{\alpha_i}$ ，則 x 與 y 不能同時爲正整數。

㈤總結

1.在費馬問題中， z 不可以是任何質數的任何次方。

2.由本文討論所得：(1) $z<(x+y)<2z$

(2) $z\neq p_i^{\alpha_i}$

3.期望根據以上三式能解開費馬問題。

四、淺論不定方程式 $x^2+y^2=M$ 之解

前　　言

本文是以問題方式寫出，有關（問題４）之解法及原理乃參考代數公式（ a^2+b^2 ）（ c^2+d^2 ）$=$（ $ac-bd$ ）$^2+$（ $ad+bc$ ）^{2}化成類似矩陣方式來處理。全文是以簡易的數學理論爲主，以統計上之技巧作爲輔助。

根據十三世紀偉大數學家奧都芳定理得知「所有形如 $4n+3$ 的正整數無一能表爲二平方整數的和」，遵循此原則可爲我們解“ $x,y\in N$, $x^2+y^2=M$，求 x 與 y 之値？”時，可以省去很大的麻煩。

原則解說 ：

先設 x ， y 爲二整數

(1)若 x ，y 皆爲偶數，吾人可假設 $x=2n_1$, $y=2n_2$,

可知 $x^2+y^2=4n_1^2+4_2^2=4(n_1^2+n_2^2)$ 爲 4 的倍數。

⑵若 x，y 皆為奇數，吾人可假設 $x=2n_1+1$，$y=2n_2+1$，

$x^2+y^2=(2n_1+1)^2+(2n_2+1)^2=4(n_1^2+n_2^2)+4(n_1+n_2)+2$

可知僅能表為 $4n+2$ 之數。

⑶若 x，y 一為偶數，一為奇數，吾人可假設 $x=2n_1+1$，$y=2n_2$，

$x^2+y^2=(2n_1+1)^2+(2n_2)^2=4(n_1^2+n_2^2)+4n_1+1$

可知亦能表為 $4n+1$ 之數。

綜合上述⑴、⑵、⑶吾人可知 $4n+3$ 之整數不能表為二個平方整數之和。

現在吾人舉出五個例子予以說明，順便將解“$x,y\in N$，$x^2+y^2=M$，求 x 與 y 之值？”的做法列出。

問題一：“若 x，$y\in N$，求 $x^2+y^2=751$ 之 x，y 值”。

解：因已知 $751=4\times 187+3$ 是 $4n+3$ 之數，故知此題無解。

問題二：“若 x，$y\in N$，求 $x^2+y^2=313$ 之 x，y 值”。

解：已知 $313=4\times 78+1$ 是 $4n+1$ 之數，故此題或許有解。

做法：①先將 313 開平方根，知 $313=(17)^2+24$。

②再求 $2n+1$ 如 $16\rightarrow 2\times 16+1=33$

$(n\leqq 16)$ $15\rightarrow 2\times 15+1=31$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

③再以累積加法如 $24+33=57$，$57+31=88$，

$88+29=117$，……

④找出累積數能形成平方數及其對應數，即 (x,y) 之解。如本題累積數 $144=(12)^2$，對應數是 13，故知有 (x,y) 解為 $(12,13)$，又如 $169=(13)^2$，對應數是 12，故知有 (x,y) 解為 $(13,12)$。

			17
			+24
	57	33	16
	88	31	15
	117	29	14
$(12)^2=$	$\boxed{144}$	27	13
$(13)^2=$	$\boxed{169}$	25	12
	192	23	11
	213	21	10
	232	19	9
	249	17	8

（圖一）

各位讀者或許會對圖㈠的解法發生疑惑，現在將其解法原理詳述於下，請各位讀者將圖A與該圖下所列各式相對照，再略加思考，應可明瞭其原理。

首先將313看成一個自然數的平方與另一自然數相加。

			17	
			＋24	
	57	33	16	←①
	88	31	15	←②
	117	29	14	
$(12)^2=$	$\boxed{144}$	27	13	
$(13)^2=$	$\boxed{169}$	25	12	
		23	11	
		21	10	
		19	9	
		17	8	

（圖 A）

$313 = 17^2 + 24$

$313 = 16^2 + 24 + 33 = 16^2 + 57$

即圖(A)①之箭頭所指，因 17^2 比 16^2 大

$2n + 1 = 2 \times 16 + 1 = 33$

$313 = 15^2 + 57 + 31 = 15^2 + 88$

即圖(A)②之箭頭所指，因 16^2 比 15^2 大

$2n + 1 = 2 \times 15 + 1 = 31$

如此一直延續下去至另一數能化成平方數，如本題延至 $313 = 13^2 + 24 + 33 + 31 + 29 + 27 = 13^2 + 144 = 13^2 + 12^2$，直至 13 所對應的 144 能表成一數的平方即 12^2，此即我們所欲求之解。

上述之原理甚易，但圖(A)下面利用算式推演之解法則稍嫌煩燥些，故引用統計技巧上的向下累積加法方式，將其排列成(A)圖之方式，以利計算上的方便。

問題三：“若 $x, y \in N$，求 $x^2 + y^2 = 2340$ 之 x, y 值？”

解：先知 2340 可表爲 $4n + 2$ 之數，將 2340 質因數分解

$2340 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$

將前言代數公式

$(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$ 中，右方兩項以如下之記號表之：

$(ac - bd)^2 = M(a, b, c, d)$

$(ad + bc)^2 = P(a, b, c, d)$

故 $2340 = 6^2 \cdot 5 \cdot 13$

$5 = 1^2 + 2^2, \ 13 = 2^2 + 3^2$

代入 $5 \times 13 = M(2, 1, 3, 2) + P(2, 1, 3, 2)$

$= (4)^2 + (7)^2$

$\therefore$ 知 $2340 = 6^2 \cdot 5 \cdot 13$ 之 $(x, y) = 6 \times (6, 7)$

$= (24, 42)$

問題四：綜合應用“若 $x, y \in N$，$x^2+y^2=61\times 41$ 之 x，y 值？”

解：　$61=7^2+12$　　　　　　$41=6^2+5$

			7
			$+12$
$(5)^2=$	$\boxed{25}$	13	6
	36	11	5
		9	4
		7	3

			6
			$+5$
$(4)^2=$	$\boxed{16}$	11	5
	25	9	4
		7	3

知　$61=(5)^2+(6)^2$　　　　$41=(4)^2+(5)^2$

$$61\times 41=M(5,6,5,4)+P(5,6,5,4)$$

$$=1^2+50^2$$

$$(x,y)=(1,50)$$

或

$$M(6,5,5,4)+P(6,5,5,4)$$

$$=10^2+49^2$$

$$\therefore (x,y)=(10,49)$$

故　(x,y) 可為 $(10,49)$ 或 $(1,50)$

〔作法說明〕

此題之解法，乃先應用問題(二)之求法，求出質數 41, 61，而 $41=(5)^2+(4)^2$，$61=(6)^2+(5)^2$ 然後再代入：

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

求出其解。

問題五：“若 x，$y \in N$，$x^2+y^2=2002$，求 x，y 之值？”

解：　$2002=2\times 7\times 11\times 13$

$\because$ 形如 $4n+3$ 的因數 7 和 11，冪次均只有一次，故知此題無解。

讀者一定會感到奇怪，若何問題(三)其合成數 $2340=2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 13$ 之因數亦有 $4n+3$ 之數卽 3，然其冪次為偶數次時就有解，而問題(五)合成數 $2002=2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$，之因數 $4n+3$ 之數 7 和 11，其冪次為奇數次就

無解呢？

上述問題可由公式 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$ 著想，卽如：

例： $22=2\times 11$，2 可化成 (1^2+1^2)，可將其看成 (a^2+b^2) 或 (c^2+d^2)，11 是 $4n+3$ 之數，故不能表成一整數的平方，故不能表成 (a^2+b^2) 或 (c^2+d^2) 之形式，故知 22 不能表兩整數平方和。

例： $242=2\times 11^2=(1^2+1^2)\times 11^2=(11^2+11^2)$

故知 $4n+3$ 之次數，若為偶數次卽可。

問題六：如何應用上述做法求出整數畢氏三元數

吾人知道畢氏定理是 $x^2+y^2=z^2$，整數的畢氏三元數則“$x, y\in N$”若吾人想使 z 值等於13時，其 (x, y) 值卽等於 $x^2+y^2=13^2$。

知 $13=3^2+2^2$

$$(x, y)=(M(3,2,3,2), P(3,2,3,2))$$
$$=(5,12)$$

故知整數畢氏三元數為 $(5,12,13)$

若想使 z 值為 25 時，知 $25=5\times 5$，$5=2^2+1^2$

$\therefore 25=(M(2,1,2,1), P(2,1,2,1))$

故 $x^2+y^2=25^2$ 可解為

$$25^2=(4^2+3^2)(4^2+3^2)$$
$$=M(4,3,4,3)+P(4,3,4,3)$$
$$=7^2+24^2$$

故知整數畢氏三元數為 $(7,24,25)$。

問題七：“若 $x, y, z\in N$，求 $x^2+y^2+z^2=1000$ 之 x, y, z 解？”

解： 知 $x^2+y^2+z^2=1000$

$1000=10\times 10\times 10$，$10=3^2+1^2$

$$10\times 10=M(3,1,3,1)+P(3,1,3,1)$$
$$=8^2+6^2$$

$$10\times10\times10=(8^2+6^2)(3^2+1^2)$$
$$=M(8,6,3,1)+P(8,6,3,1)$$
$$=18^2+26^2$$

知 $18=2\times9=2\times3^2=3^2+3^2$

$(x,y,z)=(3,3,26)$

或 $26=2\times13=(1^2+1^2)(3^2+2^2)$

$$=M(1,1,3,2)+P(1,1,3,2)$$
$$=1^2+5^2$$

$$26^2=(5^2+1^2)(5^2+1^2)$$
$$=M(5,1,5,1)+P(5,1,5,1)$$
$$=24^2+10^2$$

$(x,y,z)=(18,24,10)$

故有二組正整數解 $(3,3,26)$ 及 $(18,24,10)$。

※註：關於「費馬最後定理」的最新發展，有興趣的讀者請自行參閱「數學傳播」季刊第49期。

大 師 對 話 錄

兪大維對陳省身

編輯部

邁向「超數學」境界

兪大維博士：我年紀大了、老了，但是思想却慢慢成熟，我今天告訴你幾句話，你回去想想，看對不對！

陳省身博士：喔！好極了。

兪：我們的知識，主要是來自「經驗」(Experience)，但是知識時常並非就是「經驗」，知識則是需要「經驗」的「結構」(Organization)。

陳：對極了！對極了！

（下接第97頁）

5. 一個簡單的微分方程的軌跡

指導老師：陳創義
作　　者：洪士薰

我常一個人閒來無事就逛到助教辦公室，找助教聊天，或者問一些問題，大家相談甚歡，一日偶遇一系友，見我平日逍遙快活，嫉妬之心油然而生，於是：

時間：春假前不知幾許日子，其詳細日期已不可考。

地點：太陽系，地球，亞洲，某不知名小島（或有人稱之曰蓬萊仙島。）台北市，羅斯福路五段八八號，師大分部，理學院大樓，A×××室。

導火線：

$$\frac{dz}{dt}=z^{n} \qquad \text{的解曲線描述。}$$

詳細經過：

該系友丟給我上述問題，並告以我從微分方程的向量場觀點出發，描述出該微分方程的軌跡。初時並不太注意此問題，但因題目太容易記，久久無法忘却，爲此深感困擾，終有一日，所中遺毒發作，做起此問題，但因內力不夠深厚（功力尙淺），在行文中難免有弊病之處，辜且念我初犯，尙祈先賢或後進不吝指正。

首先探討特殊的情形：

1. $n=1$　即

$$\frac{dz}{dt}=z, \quad z\in C \tag{1}$$

此微分方程的平衡點集（equilibrium points set）爲 $z=0$ 的解集，顯然其解集爲單點（0，0）

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dx}{dt}+i\frac{dy}{dt}=x(t)+iy(t)=x+iy$$

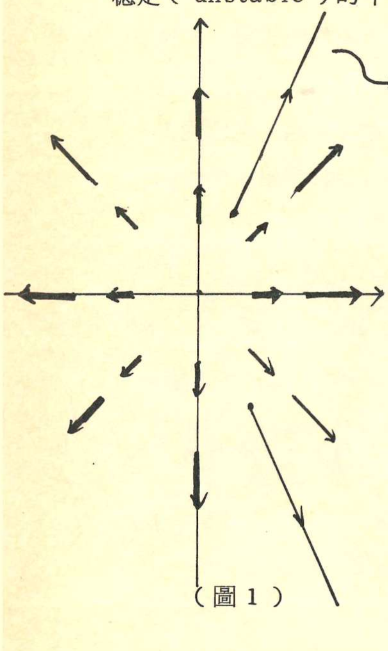
$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(t) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = y(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \alpha e^{t} \\[2ex] y(t) = \beta e^{t} \end{cases}, \alpha = x(0), \beta = y(0)$$

令 $f(x,y) = (x, y) \in R^2$（此時視 $R^2 \cong C$），即 f 爲微分方程(1)的向量場：

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}) = \vec{x}$$

$$J(f)(\vec{o}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} [0, 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

令 $\det(J(f)(\vec{o}) - \lambda I_2) = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$（eigenvalue），∴在（平衡點）原點是一源點（source），是一不穩定（unstable）的平衡點（事實上，是一個節點（node））



相應於 $\vec{x}_0$ 爲初始條件（initial condition）的解。

顯而易見的任給定一個初始條件 $\vec{x}_0 \neq 0$，則其微分方程的解是一條以 $\vec{x}_0$ 爲起點 $\vec{x}_0$ 爲方向的射線。

（圖 1）

2. n ＝2 時

$$\frac{dz}{dt} = z^2 \ , \ z \in C \tag{2}$$

平衡點爲：

$z^2 = 0 \Rightarrow z = 0$ ，即（0，0）是唯一平衡點

$z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 - y^2 \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = 2xy \end{cases}$$ ，向量場（ vector field ） $f: R^2 \to R^2$ ，連續可微分函數。 $J(f)(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$ $J(f)(\vec{0}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

固有值0 ，0 ，非變曲的（ Non-hyperbolic ），故無法運用線性近似方程來觀察平衡點的局部行爲。

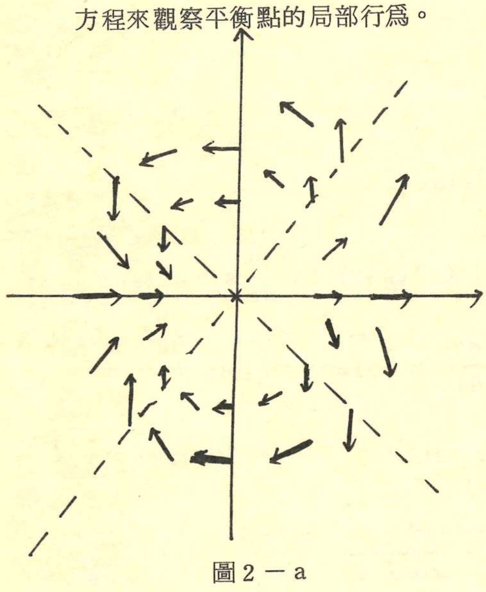


圖 2 － a

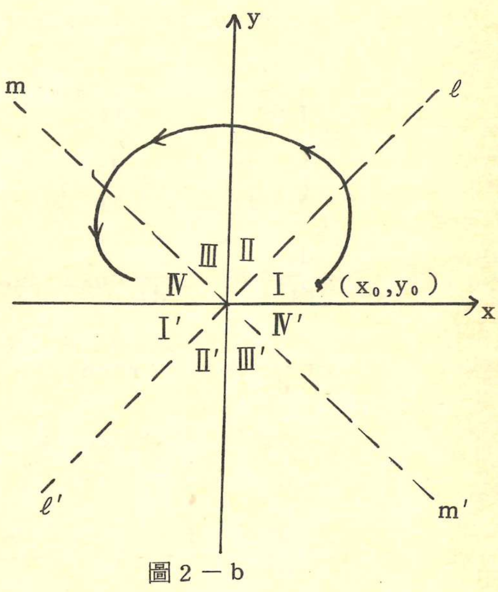


圖 2 － b

引理 1.：微分方程(2)的解若其初值位於上半平面，則其軌跡將由區域Ⅰ到Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ（依著順序，如圖 2 － b ），若其初值位於下半平面則其軌跡將由區域Ⅳ′→Ⅲ′→Ⅱ′→Ⅰ′。

證明：微分方程(2)的軌跡若有一點在Ⅰ區，必穿越 ℓ 到Ⅱ位於Ⅱ者將穿越正 y 軸至Ⅲ……等等。

如可證得上述結果，顯然引理 1.也將成立。

設有軌跡 r 上一點落於區域Ⅰ中，此點 $P(x_0, y_0)$ 採極坐標法：

$$\frac{dz}{dt}=\frac{d(re^{i\theta})}{dt}=\frac{dx}{dt}e^{i\theta}+\frac{d(e^{i\theta})}{dt}\cdot r=\frac{dr}{dt}e^{i\theta}+ir\frac{d\theta}{dt}e^{i\theta}$$

$$=z^2=r^2e^{2i\theta}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{dr}{dt}+ir\frac{d\theta}{dt}\right)(\cos\theta+i\sin\theta)=r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)$$

$$\Rightarrow\left(\frac{dr}{dt}\cos\theta-r\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\right)+i\left(r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta+\frac{dr}{dt}\sin\theta\right.$$

$$=r^2\cos2\theta+ir^2\sin2\theta$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}\cos\theta-r\dfrac{d\theta}{dt}\sin\theta=r^2\cos2\theta\\[2ex] r\dfrac{d\theta}{dt}\cos\theta+\dfrac{dr}{dt}\sin\theta=r^2\sin2\theta\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{dr}{dt}\sin\theta=\left(\frac{dr}{dt}\cos\theta\right)\tan\theta=\left(r^2\cos2\theta+r\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\right)\tan\theta$$

$$\Rightarrow r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta+\left(r^2\cos2\theta+r\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\right)\tan\theta=r^2\sin2\theta$$

$$\Rightarrow r\frac{d\theta}{dt}\left(\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)=r^2\sin2\theta-r^2\cos2\theta\tan\theta$$

$$\Rightarrow r\frac{d\theta}{dt}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)=r^2\left(\frac{\sin2\theta\cos\theta-\cos2\theta\sin\theta}{\cos\theta}\right)=r^2\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = r\sin\theta$$

當 $0 < \theta < \pi$ 時　$\frac{d\theta}{dt} > 0$

此時 $\theta(t)$ 遞增，且遞增到 π，其理由如下：

設 $\exists\, \epsilon_0 > 0 \ni r > \epsilon_0 \quad \forall\, t \in R$ 成立，且 θ_1（在 0 與 π 之間）

$$\theta_1 = \sup_{t \in R} \theta(t)\ ,\ 0 < \theta_1 < \pi \Rightarrow \inf_{\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1} \sin\theta = k > 0$$

$$\Rightarrow r\sin\theta > \epsilon_0 \cdot \inf_{\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1} \sin\theta = k\epsilon_0$$

$$\theta(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{d\theta}{dt}\, dt + \theta(t_0) \geqq \theta(t_0) + \int_{t_0}^{t} k\epsilon_0\, dt$$

$$= \theta(t_0) + k\epsilon_0(t - t_0) \to \infty \quad \text{矛盾。}$$

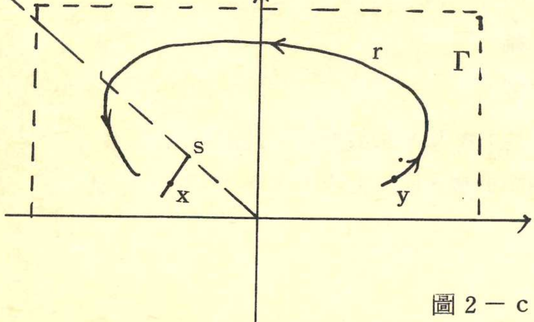
$\therefore$ 必定 $\exists\, t_n\ ,\ t_n \to \infty \ \ni\ r(t_n) \to 0$ 或者 $\theta_1 = \pi$

・若是前一種情況發生，從其向量場的分佈情形來看，知 $\theta(t)$ 仍然會增加到 π（在 $\frac{dz}{dt} = z^3$ and $\frac{dz}{dt} = z^n$ 處再做較確實的說明）

當 $\pi < \theta < 2\pi$ 時　$\frac{d\theta}{dt} < 0$

仿上述的推論過程可證。

<u>引理 2.</u>：微分方程(2)的流若其初值在正實軸上，則此流必為沿正 x 軸方向的射線，若初值在負軸，則此流必沿 x 軸射向原點。



Γ：是一矩形

圖 2－c

軌跡 r 的 $L_w(y)$ 及 $L_\alpha(y)$ 將留在 Γ 內，當 $\frac{5\pi}{4} > \theta > \frac{3\pi}{4}$ 時（軌跡向原點，$\therefore r(t) < 0$）

其中 $L_w(y)$ 是 ω－limit set 而 L_α 是 α－limit set（註 1），不妨設 $L_\omega(y)$ 留在 Γ 中，假如 $0 \in L_\omega(y)$。

則由 Poincare-Bendixson 定理（註 2），因 $L_\omega(y)$ 不包含平衡點，故必爲一閉軌道，但知平面動態系統（Dynamical, System）中的閉軌道，將包圍一個平衡點（註 3）。所以微分方程(2)有其它的平衡點，矛盾

$\therefore 0 \in L_\omega(y)$

若 $x \in L_\omega(y)$，如 $x \neq 0$

在 x 處造一截口（Local section）S，則將有一列 $t_1, \cdots, t_n, \cdots \ni \phi_{t_i}(y) = y_i \in s$，穿過截口，如此一來 r 勢必穿越負 x 軸或正 y 軸，而流線的切線方向爲向量場方向，$\therefore$ 穿越正 y 軸必是由第一象限到第二象限，而流若經過 x 軸必與 x 軸相切，故得一矛盾。

$\therefore L_\omega(y) = \{0\}$

而另一方面考慮向量場（－f）可知 $L_\alpha(y) = \{0\}$，

由上述推論可得到：

<u>結論</u>：（參見圖 2－c）

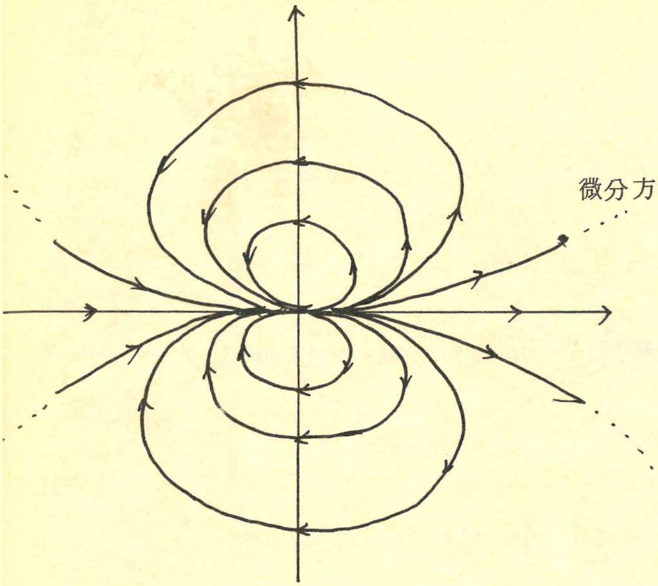
$\frac{dz}{dt} = z^2$ 的流若給定初值爲

(1)原點，則流是一孤立點。

(2)正 x 軸上一點，則流是正 x 軸。

(3)負 x 軸上一點，則流是負 x 軸。

(4)上半（下半）平面，則流是與 x 軸恰相切於原點（此處流包含 $L_\omega(y)$ 及 $L_\alpha(y)$ 的簡單封閉曲線，位於上半（下半）平面，以原點爲終點。



微分方程(2)的解之圖形

圖 2 － d

3.當 $n=3$ 時

微分方程

$$\frac{dz}{dt}=z^3 \;, \; z\in C \tag{3}$$

其平衡點集仍然是 $\{(0,0)\}$

若 $z^3=\alpha z$ ，$\alpha\in R$ $\Rightarrow$ $z^2\in R$ $\Rightarrow$ $\operatorname{Arg} z=0$ ，$\frac{\pi}{2}$，π ，$\frac{3\pi}{2}$

即在 $z=re^{i\theta}$ ，$\theta=0$，$\frac{\pi}{2}$，π ，$\frac{3\pi}{2}$ 時，其向量場與其「位置向量」平行。

令 $\theta=\operatorname{Arg} z$ ，$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ 考慮 $f(z)=z^3$ 向量場函數的方向。

(1) $0<\theta<\frac{\pi}{6}$時，$\operatorname{Re}(z^3)>0$ ，$\operatorname{Im}(z^3)>0$ ，向量場形如 $\nearrow$

(2) $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$ 時，$\mathrm{Re}(z^3) < 0$，$\mathrm{Im}(z^3) > 0$，向量場形如 $\nwarrow$

(3) $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 時，$\mathrm{Re}(z^3) < 0$，$\mathrm{Im}(z^3) < 0$，向量場形如 $\swarrow$

(4) $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{2\pi}{3}$ 時，$\mathrm{Re}(z^3) > 0$，$\mathrm{Im}(z^3) < 0$，向量場形如 $\searrow$

(5) $\frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{5\pi}{6}$ 時，$\mathrm{Re}(z^3) > 0$，$\mathrm{Im}(z^3) > 0$，向量場形如 $\nearrow$

(6) $\frac{5\pi}{6} < \theta < \pi$ 時，$\mathrm{Re}(z^3) < 0$，$\mathrm{Im}(z^3) > 0$，向量場形如 $\nwarrow$

(7) $\pi < \theta < \frac{7\pi}{6}$ 時，$\mathrm{Re}(z^3) < 0$，$\mathrm{Im}(z^3) < 0$，向量場形如 $\swarrow$

(8) $\frac{7\pi}{6} < \theta < \frac{4\pi}{3}$ 時，$\mathrm{Re}(z^3) > 0$，$\mathrm{Im}(z^3) < 0$，向量場形如 $\searrow$

(9) $\frac{4\pi}{3} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ 時，$\mathrm{Re}(z^3) > 0$，$\mathrm{Im}(z^3) > 0$，向量場形如 $\nearrow$

(10) $\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{3}$ 時，$\mathrm{Re}(z^3) < 0$，$\mathrm{Im}(z^3) > 0$，向量場形如 $\nwarrow$

(11) $\frac{5\pi}{3} < \theta < \frac{11}{6}\pi$ 時，$\mathrm{Re}(z^3) < 0$，$\mathrm{Im}(z^3) < 0$，向量場形如 $\swarrow$

(12) $\frac{11}{6}\pi < \theta < 2\pi$ 時，$\mathrm{Re}(z^3) > 0$，$\mathrm{Im}(z^3) < 0$，向量場形如 $\searrow$

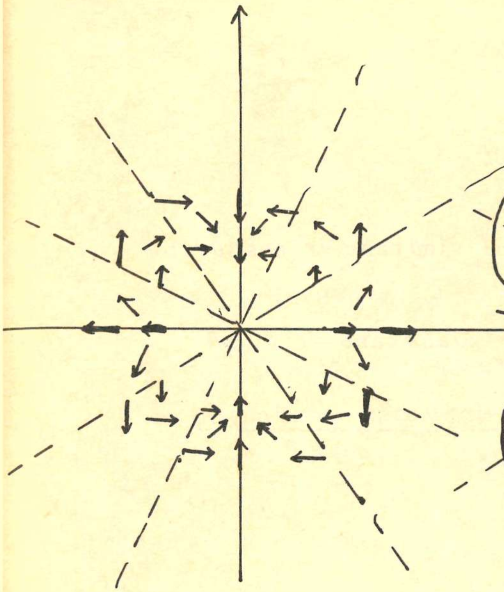


圖 3 － a

微分方程(3)的向量場

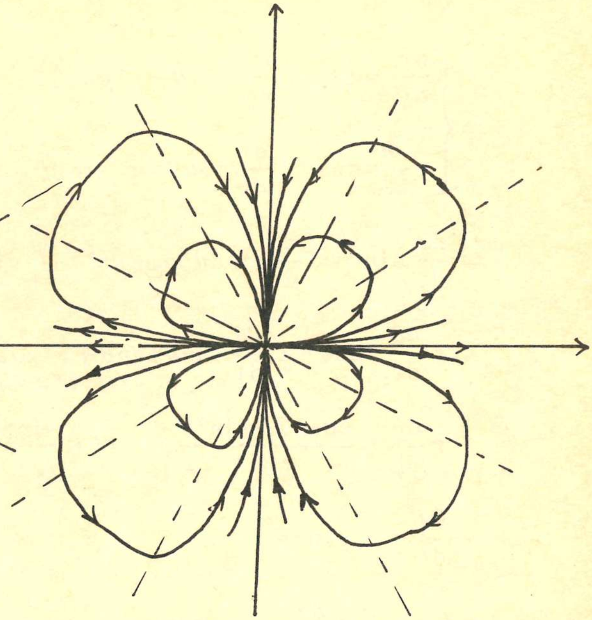


圖 3 － b

微分方程(3)的流（flow）

$$\frac{dz}{dt}=z^3 \qquad 令\ z=re^{i\theta}$$

$$\frac{dr}{dt}e^{i\theta}+ir\frac{d\theta}{dt}e^{i\theta}=r^3\cos3\theta+ir^3\sin3\theta$$

$$\left(\frac{dr}{dt}+ir\frac{d\theta}{dt}\right)(\cos\theta+i\sin\theta)=r^3\cos3\theta+ir^3\sin3\theta$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\cos\theta-r\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\right)+i\left(r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta+\frac{dr}{dt}\sin\theta\right)$$

$$=r^3\cos3\theta+ir^3\sin3\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dr}{dt}\cos\theta = r\dfrac{d\theta}{dt}\sin\theta + r^3\cos 3\theta \\ r\dfrac{d\theta}{dt}\cos\theta + \dfrac{dr}{dt}\sin\theta = r^3\sin 3\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt}\sin\theta = \left(\frac{dr}{dt}\cos\theta\right)\tan\theta = r\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\tan\theta + r^3\cos 3\theta\tan\theta$$

$$r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta + r\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\tan\theta + r^3\cos 3\theta\tan\theta = r^3\sin 3\theta$$

$$r\frac{d\theta}{dt}\left(\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos\theta}\right) = r^3\left(\frac{\sin 3\theta\cos\theta - \sin\theta\cos 3\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = r^2\sin 2\theta$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ 時 $\dfrac{d\theta}{dt} > 0$ ，θ 遞增，方程(3)的流將反時針趨向正 y 軸。

其理由如下：

若 $0 < \theta_1 < \dfrac{\pi}{2}$，$\theta_1 = \sup\limits_{t\in R}\theta(t)$ and $r(t) > R$ （R是某一正實數）$\forall t \in R$

$$\Rightarrow \theta = r^2\sin 2\theta \Rightarrow \theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t0}^{t} r^2\sin 2\theta\,dt \geqq \theta(t_0) + \int_{t0}^{t} k^2\epsilon_0 dt = \theta(t_0) + k^2\epsilon_0(t - t_0) \to \infty$$

$$\epsilon_0 = \inf_{t\in R} \sin(\theta(t)) > 0 \quad \longrightarrow\longleftarrow$$

$$\therefore \exists\, t_n \ni r(t_n) \to 0 \quad 或 \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2}$$

第一種情況如果發生，也將導致 $\theta_1=\frac{\pi}{2}$，$\theta_1>\frac{\pi}{6}$ ($\mathrm{Re}(\frac{dz}{dt})>0$

$\mathrm{Im}\frac{dz}{dt}>0$

當 $z<\frac{\pi}{6}$ 時) $\Rightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\, t_\epsilon \ni \left|\mathrm{Arg}(\frac{dz}{dt})\right|_{t=t^\epsilon}-\mathrm{Arg}(-z(t_\epsilon))\right|$

$<\varepsilon$，即向量場與位置向量的方向接近程度非常充分，而由前面的討論知

向量場與位置向量方向相同時其幅角為 $\frac{\pi}{2}$，$\therefore\ \theta_1=\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 時 $\frac{d\theta}{dt}<0$，θ 遞增，若微分方程(3)初值位於第二象限其流將順時針轉

$\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$ 時 $\frac{d\theta}{dt}>0$ 若方程(3)的初值位於第三象限，其流將反時針地趨向負

y 軸

$\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ 時 $\frac{d\theta}{dt}<0$ 若方程(3)的初值位於第四象限，其流將順時針趨

向負 y 軸

可模仿上述。

方程(3)的流，如 $\frac{dz}{dt}=z^2$ 中所討論的，吾人討論 $\frac{dz}{dt}=z^3$ 的流

若其初值不在 x 軸或 y 軸上時不妨設其位於第一象限，則其流將與 x 軸及 y 軸相切於原點，反時針，轉向 y 軸，最後在原點停止。

由 $\frac{dz}{dt}=z^3$，知若 $|z|$ 愈小，$\left|\frac{dz}{dt}\right|$ 愈小 $\therefore$ 流向原點的“速度”將愈來愈慢，而終將佇止於原點——其實這句話最不太正確的 $\because$ 微分方程的流將永遠達不到原點，但會無止盡的趨向原點，換句話說

$\lim\limits_{t\to\infty}\phi_t(x_0)=0$，$\lim\limits_{t\to\infty}(\frac{dz}{dt})\ |_t=0$。

現在經過 n＝1，2，3 特例的探討，吾人開始對一般情形分析

$$\frac{dz}{dt}=z^n$$

先看向量場平行於位置向量的點集，$\{z\in C-\{0\}\mid z^n=\alpha z,\ \alpha\in R\}$ $=\{z\in C-\{0\}\mid z^{n-1}\in R\}=\{z\in C-\{0\}\mid z=re^{i\theta},\ \theta=\dfrac{k\pi}{n-1},$ $k=0,1,\cdots,2n-3\}$ 將原點處 2π 的角做 $2(n-1)$ 等分的等分線，線上的點其位置向量，將與其上的向量場平行。

其次將向量場分成四類：

$$\begin{array}{lll}
\text{I}: & x'(t)>0,\ y'(t)>0 & (+,+)\\
\text{II}: & x'(t)<0,\ y'(t)>0 & (-,+)\\
\text{III}: & x'(t)<0,\ y'(t)<0 & (-,-)\\
\text{IV}: & x'(t)>0,\ y'(t)<0 & (+,-)
\end{array}$$

C 上任意不爲 0 以極坐標法表示之。

$z=re^{i\theta}$，r 是正實數，$0\leqq\theta\leqq 2\pi$

$z^n=r^ne^{in\theta}$

∴知 $\dfrac{4k\pi}{2n}<\theta<\dfrac{(4k+1)\pi}{2n}$ 時 z 處向量場爲第 I 類

$\dfrac{(4k+1)\pi}{2n}<\theta<\dfrac{(4k+2)\pi}{2n}$ 時 z 處向量場爲第 II 類

$\dfrac{(4k+2)\pi}{2n}<\theta<\dfrac{(4k+3)\pi}{2n}$ 時 z 處向量場爲第 III 類

$\dfrac{(4k+3)\pi}{2n}<\theta<\dfrac{(4k+4)\pi}{2n}$ 時 z 處向量場爲第 IV 類

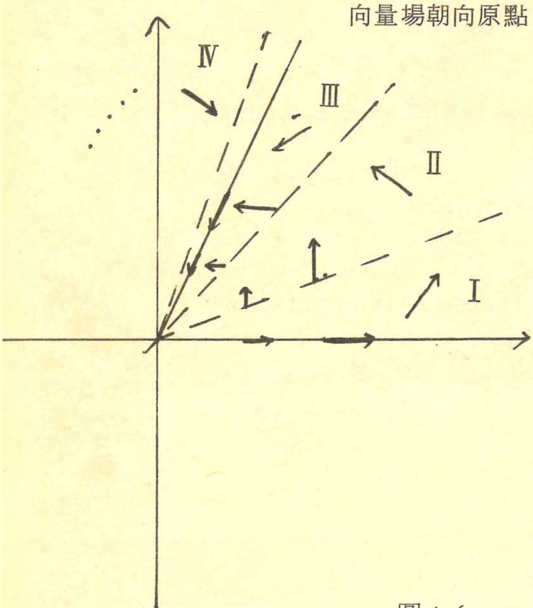
此處 $k=0,1,2,\cdots,n-1$

$z=re^{i\theta}$　　當 k 是偶數時：

$\theta=\dfrac{k\pi}{n-1}$　　　向量場爲從原點向外

當 k 是奇數時

向量場朝向原點。　　$k=0,1,2,\cdots\cdots,2n-3$



按 4n 等分角線將 C 分成 4n 個區域從正 x 軸起每一區域（按逆時針方向）的向量場類別是 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，…………，Ⅲ，Ⅳ

圖 4（ n = 4 時的向量場）

現在考慮微分方程 $\dfrac{dz}{dt}=z^n$ 的流

使用極坐標法表示 $z=re^{i\theta}$

$$\frac{dz}{dt}=re^{i\theta}+ir\theta e^{i\theta}=(r+ir\theta)e^{i\theta}=(r+ir\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$=(r\cos\theta-r\theta\sin\theta)+i(r\theta\cos\theta+r\sin\theta)$$

$$z^n=r^ne^{in\theta}=r^n\cos n\theta+ir^n\sin n\theta$$

由 $\dfrac{dz}{dt}=z^n$　　知

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt}\cos\theta - r\dfrac{d\theta}{dt}\sin\theta = r^n\cos n\theta \\ r\dfrac{d\theta}{dt}\cos\theta + \dfrac{dr}{dt}\sin\theta = r^n\sin n\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt}\cos\theta = r\frac{d\theta}{dt}\sin\theta + r^n\cos n\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt}\sin\theta = (\frac{dr}{dt}\cos\theta)\tan\theta = (r\frac{d\theta}{dt}\sin\theta + r^n\cos n\theta)\tan\theta$$

由 $r\dfrac{d\theta}{dt}\cos\theta + \dfrac{dr}{dt}\sin\theta = r^n\sin n\theta$

$$r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta + (r\frac{dr}{dt}\sin\theta + r^n\cos n\theta)\tan\theta = r^n\sin n\theta$$

$$\Rightarrow r\frac{dr}{dt}(\cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}) = r^n(\sin n\theta - \frac{\cos n\theta\sin\theta}{\cos\theta})$$

$$\Rightarrow r\frac{dr}{dt} = r^n\sin(n-1)\theta$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = r^{n-1}\sin(n-1)\theta$$

由此知若給定初值 $z_0 = r_0e^{i\theta_0}$

$\dfrac{(2k)\pi}{n-1} < \theta_0 < \dfrac{(2k+1)\pi}{n-1}$ 時

$\theta = r^{n-1}\sin(n-1)\theta > 0$ 知其解曲線上的點其幅角將逐漸增大

到 $(\dfrac{2k+1}{n-1})\pi$

爲簡化問題起見，不妨處理 $k=0$ 的情形，

令 $\theta_1 = \sup_{t\in R} \theta(t)$，若 $r > k$（k 是某一正常數）且 $0 < \theta_1 < \dfrac{\pi}{n-1}$

$$\therefore \epsilon_0 = \inf_{t\in R} \sin(\theta(t)) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = r^{n-1}\sin(n-1)\theta > k^{n-1}\epsilon_0$$

$$\Rightarrow \theta(t) \geqq \theta(t_0) + k^{n-1}\epsilon_0(t-t_0) \to \infty$$

矛盾，$\therefore \exists\, t_n \ni r(t_n) \to 0$ 或 $\theta_1 = \dfrac{\pi}{n-1}$

1.假若 $\theta_1 < \dfrac{\pi}{n-1}$，而 $\exists \{t_m\}_{m=1}^{\infty} \ni r(t_m) \to 0$，$\theta(t_m) \to \theta_1$，當 $m \to \infty$

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists\, t_\varepsilon \ni t \geqq t_\varepsilon$ 時 $\mathrm{Arg}\ z(t) \geqq \theta_1 - \varepsilon$（取 $\mathrm{Arg}\ z(t_\varepsilon) = \theta_1 - \varepsilon$）

取 $0 < \varepsilon < \dfrac{\theta_1(n+1)}{(n+2)}$　$\because \exists \{t_m\}_{m=1}^{\infty} \ni r(t_m) \to 0$

$\therefore \mathrm{Arg}(z(t_m) - z(t_\varepsilon)) \xrightarrow{m\to\infty} -\theta_1 + \varepsilon$，故 $\exists\, n_0 \ni m \geqq n_0$ 時，滿足 $-\theta_1 < \mathrm{Arg}(z(t_m) - z(t_\varepsilon)) < -\theta_1 + 2\varepsilon$ 而由中間值定理 $z(t_m) - z(t_\varepsilon) = z'(\bar{t})(t_m - t_\varepsilon)$，$t_\varepsilon < \bar{t} < t_m \Rightarrow \mathrm{Arg}\, z'(\bar{t}) = \mathrm{Arg}(z(t_m) - z(t_\varepsilon))$

$\therefore -\theta_1 < \mathrm{Arg}\, z'(\bar{t}) < -\theta_1 + 2\varepsilon$，而另一方面由微分方程 $\dfrac{dz}{dt} = z^n$

知當 $\theta_1 - \varepsilon < \mathrm{Arg}\ z(\bar{t}) < \theta_1$ 時，$n(\theta_1 - \varepsilon) < \mathrm{Arg}(z'(\bar{t})) < n\theta_1$，

$\mathrm{Arg}(z'(\bar{t}) < -\theta_1 + 2\varepsilon < n(\theta_1 - \varepsilon) < \mathrm{Arg}\, z'(\bar{t})$ 矛盾。

2.假若 $\theta_1 = \dfrac{\pi}{n-1}$，而 $\exists\, k > 0 \ni r(t) > k$　$\forall\, t \in R$，$t > 0$

以原點為圓心，k 為半徑畫一圓交 Γ 於一弧 C_1，而 $\exists\, t_0 \ni t \geqq t_0$ 時 $z(t) \in \Gamma$（if，$z(t_0) \in \Gamma$，由 Γ 中的向量場，顯然 Γ 是所謂正不變集（positively invariant set）即 $z(t_0) = z_0 \in \Gamma \Rightarrow z(t) \in \Gamma$ $\forall\, t \geqq t_0$），以 $|z(t'_0)|$ 為半徑原點為圓心做一圓取上介於 ℓ'，ℓ 之間

的一段為弧 c_2 知由 ℓ, ℓ', c_1, c_2 所圍區域亦是一正不變集，再由已知 $z(t)$ 將與 ℓ 相切，∵ ℓ 上的任意一點為起點的軌道，將恒在 ℓ 上，由存在唯一性定理，得一矛盾，∴ $r(t) > k > 0$，$\forall t \in R$，$t > 0$ 不成立。

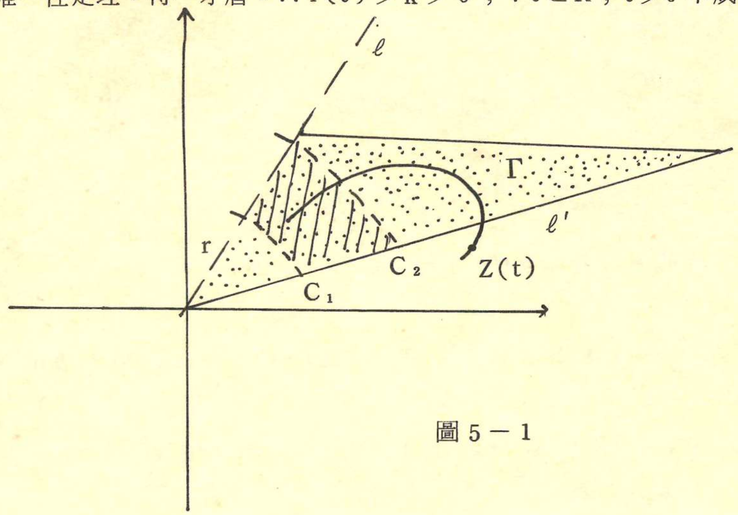


圖 5 － 1

由 1. 2.知 $\operatorname{Arg} z(t) \to \dfrac{\pi}{n-1}$ $|z(t)| \to 0$ 當 $t \to \infty$

$\dfrac{(2k+1)\pi}{n-1} < \theta_0 < \left(\dfrac{2k+2}{n-1}\right)\pi$ 時，同上述討論方式

$\dfrac{d\theta}{dt} = r^{n-1}\sin(n-1)\theta < 0$ 知其解曲線上的點的幅角將逐漸減少，

$\operatorname{Arg} z(t) \to \dfrac{(2k+1)}{n-1}\pi$, $|z(t)| \to 0$ $k = 0, 1, \cdots\cdots, n-2$。

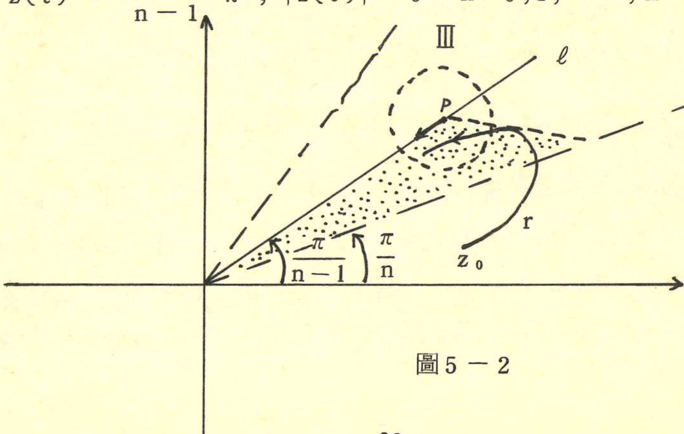


圖 5 － 2

由上述方法可討論得知 $L_\alpha(z_0)=\{0\}=L_\omega(z_0)$

至於其它區域的情形，仿上述的過程可得：

<u>結論 1</u>：給定初值 $z_0=r_0e^{i\theta_0}$，若 $\theta_0\neq\dfrac{k\pi}{n-1}$，$k=0,\cdots,2n-3$

而 1.如果

$$\frac{2k\pi}{n-1}<\theta_0<\frac{(2k+1)}{n-1}\pi \text{ 時}$$

其軌跡的幅角將隨時間的增大而逆時針的靠近 $\left(\dfrac{2k+1}{n-1}\right)\pi$

且 $\lim\limits_{t\to\infty}\phi_t(z_0)=0=\lim\limits_{t\to-\infty}\phi_t(z_0)$

2.如果

$$\frac{(2k+1)}{n-1}\pi<\theta_0<\frac{(2k+2)}{n-1}\pi \text{ 時}$$

其軌跡上的點的幅角將隨時間的增大而順時針的靠近 $\left(\dfrac{2k+1}{n-1}\right)\pi$

且 $\lim\limits_{t\to\infty}\phi_t(z_0)=0=\lim\limits_{t\to-\infty}\phi_t(z_0)$

$k=0,1,\cdots,n-2$

<u>結論 2</u>：當 $z_0=r_0e^{i\theta_0}$，$\theta_0=\dfrac{2k\pi}{n-1}$ 時　　$k=0,1,\cdots,n-2$

顯然其軌跡是原點與 z_0 的射線

$$\left|\lim_{t\to\infty}\phi_t(z_0)\right|=\infty,\quad \lim_{t\to-\infty}\phi_t(z_0)=0$$

當 $z_0=r_0e^{i\theta_0}$　$\theta_0=\dfrac{(2k+1)}{n-1}\pi$ 時 $k=0,1,\cdots,n-2$ 其軌線

是原點與 z_0 的射線

$$\lim_{t\to\infty}\phi_t(z_0)=0\qquad\left|\lim_{t\to-\infty}\phi_t(z_0)\right|=\infty$$

事實上，對 $\frac{dz}{dt}=z^n$ 的情形，可直接求得其軌跡方程，以 $c(z_0)$ 表通過 z_0 滿足微分方程 $\frac{dz}{dt}=z^n$ 的軌跡，

當 $n=1$ 時　$z\in c(z_0)$　$z=re^{i\theta}$，必滿足

$$\operatorname{Arg} z=\operatorname{Arg} z_0$$

當 $n\geqq 2$ 時　$z\in c(z_0)$　$z=re^{i\theta}$，必滿足

$$cr^{n-1}=\sin(n-1)\theta \quad 其中\ c=\frac{\sin(n-1)\theta_0}{{r_0}^{n-1}}$$

但若將微分方程改爲較複雜的形式，不具如 z^n 如此好的性質時，其軌跡（解曲線）往往難以求出，而本文的目的在於從向量場（vector field）出發去了解微分方程的軌跡。

註 1：

$x'=f(x)$, $f: W\to E$; f is C', $W\subseteq E$ open, E: vector space

L: $\{a\in W \mid$ there exist $t_n\to\infty$ with $x(t_n)\to a\}$

S: $\{b\in W \mid$ there exist $t_n\to-\infty$ with $x(t_n)\to b\}$

We call L is ω-limit set, S: α-limit set

註 2：

Poincaré-Bendixson theorem:

A nonempty compact limit set of a C' planar dynamical system, which contains no equilibrium point, is a closed orbit.

註 3：

Let γ be a closed orbit enclosing an open set U contained in the domain W of the dynamical system. Then U contains an equilibrium.

※上述註 1 ～註 3 中爲保持其原意，特保留其原文。

※註 1 ～註 3 的來源出自：

Differential Equations Dynamical. Systems and Linear Algebra.
Morris W HIRSCH AND STEPHEN SMALE.

（上接 48 頁）

實行計劃

在處理代數問題時，也許很直接了當的便可算出正確答案。老師所應強調的是，檢查每一步驟的必要性。如此一來不僅可以避免粗心的錯誤，也可使學生記好解題計劃中的每一環節。你有沒有注意到數學家們的作品都是安排得非常整潔有序？他們會有這種習慣是有道理的：安排得好比散亂在一頁上或一黑板上，要使每一步的檢查來得容易。並且解法的邏輯脈絡也清楚得多。

要執行如上節所提的幾何問題的解法方案可能比較困難。計劃也許只是該如何去做的一個大綱。而證明卻至少需要直觀上能掌握一點簡單的邏輯，以便論證能正確的發展下去。因此即使學生了解了全盤的計劃，仍然有可能寫不出證明。此時有啓發性的問題仍然很有用處。本章以後數節中會討論如何提這種問題。（譯註：此部分不在本譯文的範圍內。）

再檢查

在代數課上，老師很少會忘掉不和同學們一起檢查一下解答。但在幾何課上，這種檢查過程就比較困難。（然而在兩種情況下，經常老師會有點太早認爲題目已圓滿完成了。）有許多例子還可以有其他的解法。或許有較短的證明；或許有數學上更完滿的方法。身爲教師，你應該問學生有沒有看出解某個題目的別種方法。對班上某些同學而言，你如此做正提供了一次可貴的複習。你甚至可讓班上同學看看，這次的解法中有什麼特點，值得記憶下來，以便將來再用。例如也許是這次的解決方針不同，也許是因爲某個三角形內的補助線畫對了。這些辦法都該一一指出，加以說明，用以增加學生日後解題的能力。

教授數學時需要常規問題，甚至需要得很多，可是若只叫學生演算常規問題而不做別種問題，便是不可原諒的。只教常規的數學手續而不教別的，就還夠不上烹飪書的水準，因為厨房裏的處方還給厨子留下一些想像和判斷，而數學的處方却連這一點也沒有。

——取自「怎樣解題」

如果目的是要將一個論證教給學生，那麼歐幾里德的表現法是不能毫無保留地被推薦的。歐氏表現法在某些個別的地方或許有獨到之處，但常常無法特意指出論證的要點。聰明的讀者不難看出每一步驟都是對的。但很難知道整個論證的來源、目的和前後關係。這原因是由於歐氏表現法總是依照與發明的自然程序相反的次序進行的。（歐氏表現法是確守綜合的次序的；參看巴伯士論分析與綜合。特別是3，4，5各節）。

——取自「怎樣解題」

除了學習已經完工的系統與最終的結果外，學習整個理論演進的歷史對學生也是十分有益的。這樣使學生不僅對智識發展的過程有深一層的認識，也使他知道在吸收新觀念時所遭遇的困難，並不一定是因為自己低能，而很可能是因為那些觀念確實非常深奧。了解了前人所受的挫折，會使人在失敗時不致於過分灰心。

——A. Zygmund

求解數學問題而不得成功的原因通常是由於我們不瞭解這個問題的地位。也就是說，我們不明瞭這個問題在它的相關問題之間的角色。一旦弄清楚了這些，我們就好下手了，不只是比較會解眼前的問題，而且還可能解決掉相關的問題。

Hilbert-Constance Reid

6。 仿射理論在電腦繪圖上的應用

指導老師：楊壬孝
作　　者：陳介宇

$$f: R^2 \to R^3$$

$$f \in (\theta, \varphi)$$

$$= ((2+\cos\theta)\cos\varphi, (2+\cos\theta)\sin\varphi, \sin\theta)$$

$$(\theta, \varphi) \in R^2$$

驟然看到這個變換，你能猜得出它在三維空間中的形狀嗎？

這個像集$T^2 = f(R^2)$是R^3中的二維可微分子流形，這個T^2稱爲R^3的二維環面。T^2的形狀爲一個輪胎。猜中了嗎？

在高中相信大家都學過二維函數圖形的畫法，但在三維中要建立圖形的概念則較爲困難，這時候如果借助計算機繪圖就會清晰許多，例如上例以計算機來表示，不到十秒便可繪出如圖一的圖形。

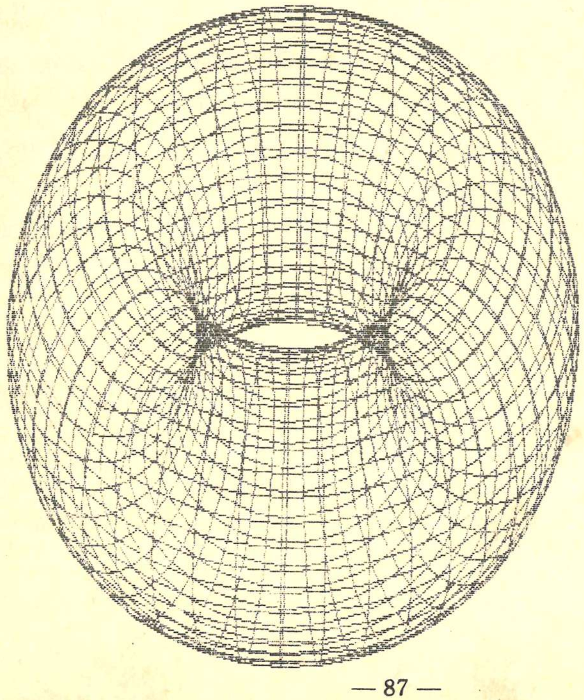


Fig 1

本文就是以仿射的理論將極座標或齊次座標的函式投影到二繪平面，使用的理論十分簡單，只有一個線性變換。

首先，假設眼睛所在座標爲（ρ,θ,ϕ）　（圖2）

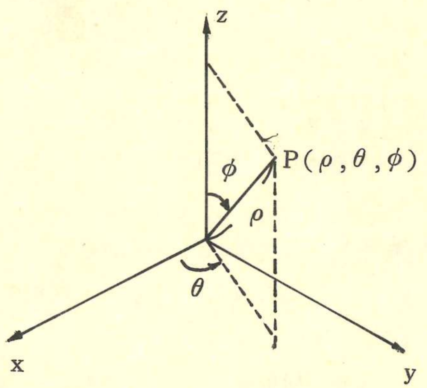


Fig　2

這是以極座標表示，因爲在正投影的變換中此種表示法較齊次座標表示法來得方便，現在要把一個座標系轉換成眼座標（眼座標系指以觀察點爲新原點，而Z軸指向原座標系原點之座標系）。

由圖3我們可看出只要將此座標系平移到眼座標原點的位置，再將Z軸轉到Z′的位置即可，這些可細分成以下四個步驟：

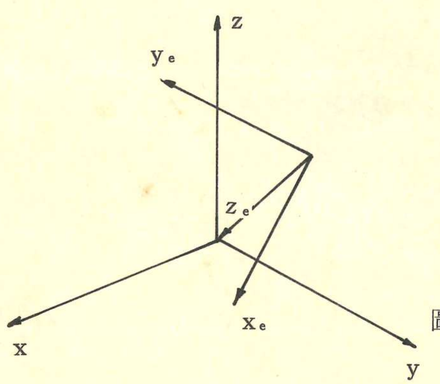


圖3

1.將原座標系平移至觀察點的位置，如圖 4 － 1 。

由於觀察點在齊次座標系的表示法為 ($\rho\sin\phi\cos\theta$, $\rho\sin\phi\sin\theta$, $\rho\cos\phi$, 1)所以此變換為：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\rho\sin\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta & -\rho\cos\phi & 1 \end{bmatrix}$$

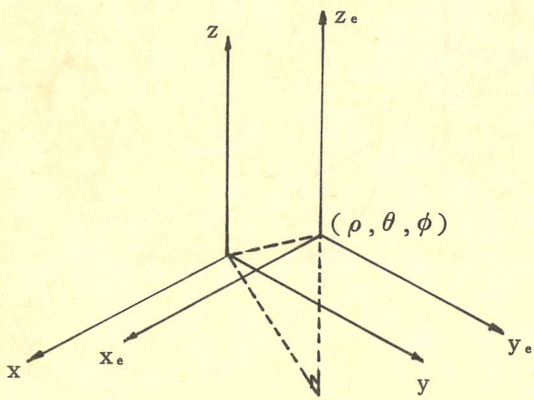


Fig 4 － 1

2.將座標系繞 Z 軸順時針旋轉 $90° - \theta$ ，如圖 4 － 2 。

此變換為：

$$\begin{bmatrix} \cos(90° - \theta) & \sin(90° - \theta) & 0 & 0 \\ -\sin(90° - \theta) & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

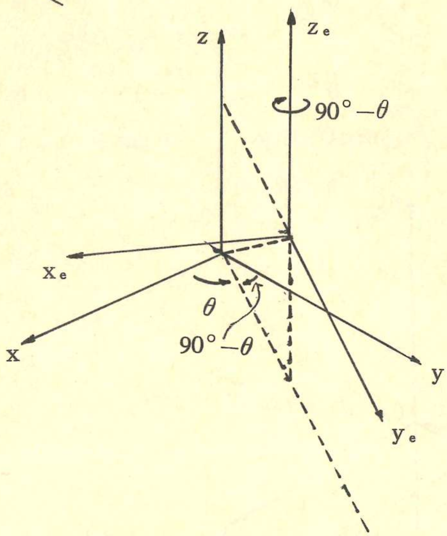


Fig 4—2

3.將座標系繞 x 軸逆時針轉 $180° - \phi$ 。如此 Ze 軸便可通過原座標系的原點，如圖 4 — 3 。

此變換爲：

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & -\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

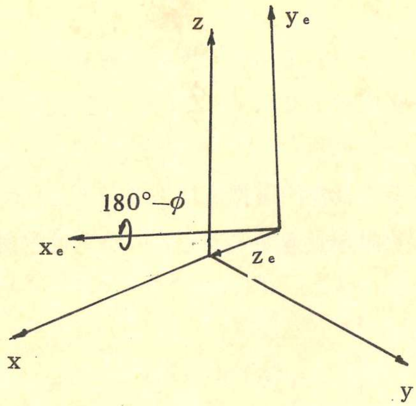


Fig 4—3

4.此時轉換可算已完成了，不過從圖4－3可發現Xe和Ye軸與我們常用的座標系並不相同，這是右手系與左手系的差異，所以再作一次最後的變換：

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

將1、2、3、4步驟的變換合成就如下表：

$$T = \begin{bmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta\cos\phi & -\cos\theta\sin\phi & 0 \\ 0 & -\sin\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & -\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

在電腦繪圖中只要知道T即可，並不須去顧慮前面的過程，在空間中一點（X, Y, Z, 1）經過T變換後成爲（Xe, Ye, Ze, 1），我們又如何利用此一結果呢？

從圖5可清楚的看出在螢幕上此點的座標應爲（Xe, Ye）而和Ze無關，因爲這是正投影，所以不論物體離螢幕是遠是近都不會對此物體在螢幕平面上的投影造成影響。

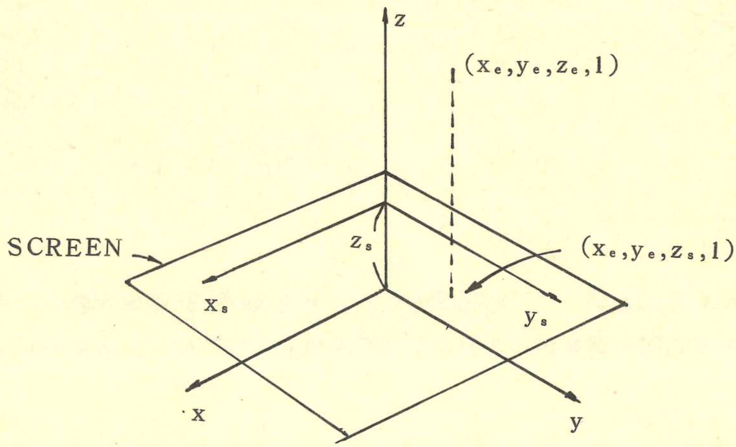


Fig 5

這種正投影的方式雖然可保持物體的比例而可較忠實地表現數學圖形，但對於一般的三維圖形就無法表現出遠小近大的眞實感了，這時就需要使用透視投影了。

圖6就是透視的圖解。

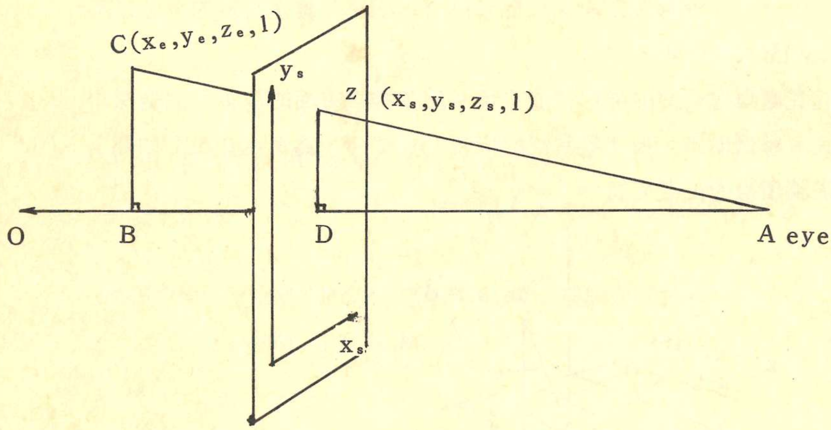


Fig 6

在△ABC中

$\because DE \parallel BC$

$$\therefore Xs = Xe\,\frac{AD}{AB}$$

$$Ys = ye\cdot\frac{AD}{AB}$$

所以眞正在螢幕上的座標爲（ $Xe\cdot\frac{AD}{AB}$ ， $Ye\frac{AD}{AB}$ ）

由於AD是固定的，所以我們只要考慮$\overline{AB}$即可，而$\overline{AB}$爲$\overline{AC}$在$\overline{AO}$上的正射影長，所以$\overline{AB} = |\overline{AC}|\cos(\angle CAB)$

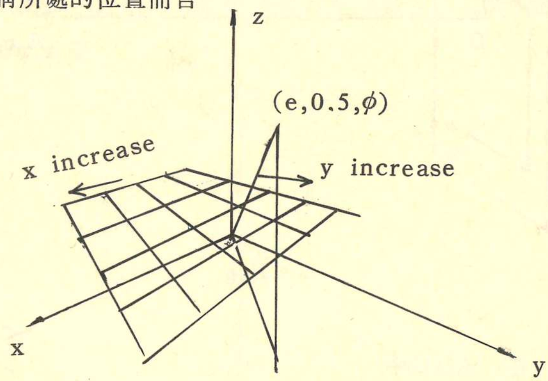
$$= |\overline{AC}|\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}}{|\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{AO}|}$$

$$= \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}}{|\overrightarrow{AO}|}$$

在本文的程式中所用到的只有正投影法，此變換放在函式 3dtran( )中，所以如果要換成透視法只要將上面的結果轉成程式語言的格式即可，不過如果使用透視法可能會使隱藏面的處理出問題。

程式中提供了三種繪圖方式，爲極座標表示法、二維至三維的函數以及 $Z = f(x, y)$型式的函數。

此程式在處理隱藏面的處理時並未用到深度排序方面的計算，而是採用覆蓋的方式，學例而言，如果觀察點的位置(ρ, θ, ϕ)爲 $\theta = 0.5$ (如圖)，那麼對眼睛所處的位置而言



x 值越小越遠，y 值也是越小越遠，所以若在繪圖時由遠而近畫回來，便可將遠的部分覆蓋住，也就是說，x 和 y 值採遞增方式來處理廻圈的話，便不需要計算遠近的問題，先畫的部分一定比後畫的部分遠，所以被後畫的部分遮住也不要緊，至於 x 、 y 應如何遞增或遞減呢？這可由 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 決定：

(1) $\sin\theta \geqslant \phi$ y 遞增

(2) $\sin\theta \leqslant \phi$ y 遞減

(3) $\cos\theta \geqslant \phi$ x 遞增

(4) $\cos\theta \leqslant \phi$ x 遞減

本程式只使用到前文所提的仿射及投影再加上線性變換，在程式中佔了不到十行，可說非常簡單。

註：圖 7 ～圖10皆由本程式畫出

圖 7 爲 $z = \sin(x) + \cos(x)$

圖 8 爲 $Z = xy$

圖9爲　$z = x^2 \cdot y^2$

圖10爲　$z = x^2 + y^2$

註：　本程式使用 turbo C 1.5ϕ

PC AT 16MHZ

參考資料：IBM PC/XT BASIC圖形處理技術

IBM PC繪圖的藝術

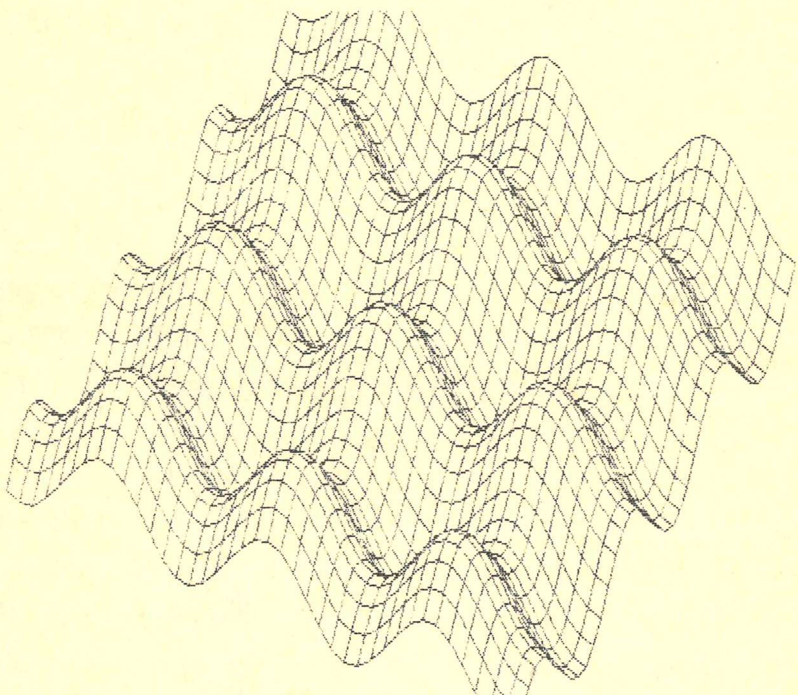


Fig 7

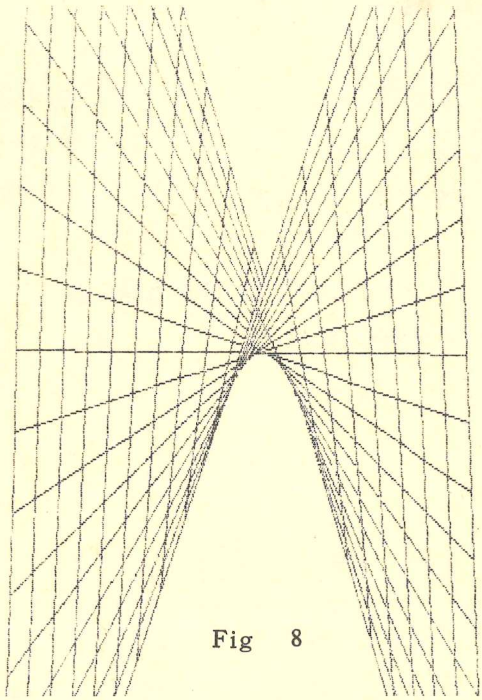


Fig 8

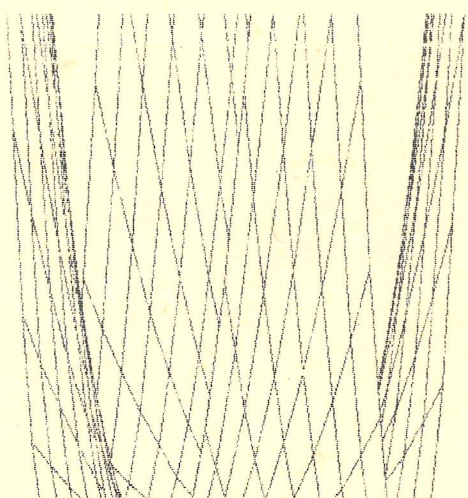


Fig 9

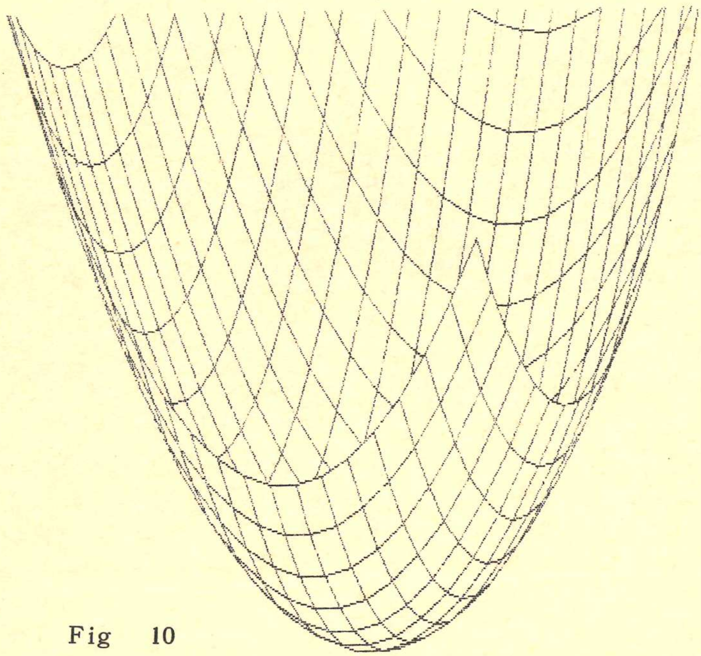


Fig　10

（上接第 66 頁）

俞：現在的問題，就是這個「結構」的本質是什麼？我的答案是這樣子，從「歸納」（Generalization）當中，敏於整個「抽象」（abstract）的探討，攤開來講，就像以前幾何的發展……。

陳：對的，那時候是很多代數。

俞：「歸納」和「抽象」，它可以使近代或將來的研究領域，邁向「超數學」（Super　Mathematics）的境界。

陳：是的，的確如此。

俞：有時候，我們以爲有很多的「範圍」（Discipline）的出現，不管是國人或是外國人的發現，其實都是這樣子。

陳：對！對！因爲學問的範圍，的確是不斷的在擴大。

（下接第 103 頁）

```
#include <graphics.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <alloc.h>
#include <string.h>
#include <ctype.h>
int c=0;
double xe,ye,ze,rho=5,theta=.5,phi=.3,x_rate=50,y_rate=50;
double s1,s2,c1,c2,func(),funx(),funy(),funz();
double x_min=-5,x_max=5,y_min=-5,6_max=5,pi=3.14159;
int x_t=20,y_t=20,x_time=0,y_time=0;
int center_x=360,center_y=175;
void inputd(),inputi();
main()
{
  void tran3d(),draw();
  int gdriver=DETECT,gmode;
  double xx,dx,dy,*xt,*yt,*zt;
  double *xs,*ys;
  double p,r;
  int tx,ty;
  int x_start,x_end,x_step,y_start,y_end,y_step;
  int polys[8]={0,0,10,0,0,10,10,10 };
  int t=0
  char *ans="",*ch="";
  int size=sizeof(double),scale;
  printf("1.polar coordinate\n");
  printf("2.r2->r3\n");
  printf("3.z=f(x,y)\n");
  printf("choos(1-3)");
  *ch=getche();
  if((*ch=='2')||(*ch=='1'))
  {
     x_min=-pi;
     y_min=-pi;
     x_max=pi;
     y_max=pi;
  }
  do
  {
     do
     {
        inputd("\nx min",1e9,-1e9,&x_min);
        inputd("x max",1e9,x_min,&x_max);
        inputd("y min",1e9,-1e9,&y_min);
        inputd("y max",1e9,x_min,&y_max);
        do
        {
           inputi("x time",100,5,&x_x);
           inputi("y time",100,5,&y_t);
           x_time=x_t+1;
           y_time=y_t+1;
```

```
        scale=x_time*y_time;
        xt=calloc(scale,size);
        yt=calloc(scale,size);
        zt=calloc(scale,size);
        scale=2*x_time;
        xs=calloc(scale,size);
        ys=calloc(scale,size);
        *ans='y';
        if  ((zt==0)||(ys==0))
        {

            *ans='n';
            printf("x_time or y_time too large\n");
        }
    }
    while(*ans=='n');
    printf("x min=%f\nx max=%f\nx time=%d\n",x_min,x_max,x_t);
    printf("y min=%f\ny max=%f\ny time=%d\n",y_min,y_max,y_t);
    *ans=tolower(getche());
}
while(*ans=='n');
dx=(x_max-x_min)/(x_time-1);
dy=(y_max-y_min)/(y_time-1);
switch(*ch)
{
    case '1':
    {
        for(tx=0;tx<x_time;tx++)
        {
            xx=x_min+tx*dx;
            s2=sin(xx);
            c2=cos(xx);
            printf("\n");
            for(ty=0;ty<y_time;ty++)

              t=tx*y_time+ty;
              p=y_min+ty*dy;
              r=func(xx,p);
              s1=sin(p);
              xt[t]=r*s1*c2;
              yt[t]=r*s1*s2;
              zt[t]=r*cos(p);
              printf("*");
            }
        }
    }
    break;
    case '2':

        for(tx=0;tx<x_time;tx++)
        {
            xx=x_min+tx*dx;
            printf("\n");
            for(ty=0;ty<y_time;ty++)
            {
```

```
                 t=tx*y_time+ty;
                 p=y_min+ty*dy;
                 xt[t]=funx(xx,p);
                 yt[t]=funy(xx,p);
                 zt[t]=funz(xx,p);
                 printf(":");
               }
           }
       }
       break;
       default:
       {
           for(tx=0;tx<x_time;tx++)
           {
               xx=x_min+tx*dx;
               printf("\n");
               for(ty=0;ty<y_time;ty++)
               {
                 t=tx*y_time+ty;
                 xt[t]=xx;
                 yt[t]=y_min+ty*dy;
                 zt[t]=func(xt[t],yt[t]);
                 printf(".");
               }
           }
       }
       break;
   }
   do
   {
       do
       {
           inputd("\nrho",1e9,0e0,&rho);
           inputd("theta",5e2,-5e2,&theta);
           inputd("phi",5e2,-5e2,&phi);
           inputd("x_rate",1e9,0e0,&x_rate);
           inputd("y_rate",1e9,0e0,&y_rate);
           inputi("center x",1000,-1000,&center_x);
           inputi("center y",1000,-1000,&center_y);
                printf("rho=%f\ntheta=%f\nphi=%f\n",rho,theta,phi);
           printf("x rate=%f\ny rate=%f\n",x_rate,y_rate);
           printf("center x=%d\ncenter y=%d\n",center_x,center_y);
           printf("correct(y/n)?");
           *ans=tolower(getche());
       }
       while(*ans=='n');
       s1=sin(phi);
       c1=cos(phi);
       s2=sin(theta);
       c2=cos(theta);
       if(c2>=0)
       {
           x_start=0;
           x_end=x_time-1;
           x_step=1;
```

```
}
else
{
   x_start=x_time-1;
   x_end=0;
   x_step=-1;
}
if(s2== 0)
{
   y_start=0;
   y_end=y_time-1;
   y_step=1;
}
else
{
   y_start=y_time-1;
   y_end=0;
   y_step=-1;
}
for(tx=x_start;tx<=x_end;tx=tx+x_step)
{
   t=tx*y_time+y_start;
   tran3d(xt[t],yt[t],zt[t]);
   t=tx;
   xs[t]=xe;
   ys[t]=ye;
}
c=1;
if((*ch!='1')&&(*ch!='2'))
{
   printf("\nHidden line(y/n)?");
   *ans=tolower(getche());
}
initgraph(&gdriver,&gmode,"");
t=((*ans=='n')||(*ch=='1')||(*ch=='2')) ? 1 :0;
setfillstyle(1-t,t);
for(ty=y_start;ty<=y_end;ty=ty+y_step)
{
   t=x_start*y_time+ty;
   tran3d(xt[t],yt[t],zt[t]);
   t=x_start+c*x_time;
   xs[t]=xe;
   ys[t]=ye;
   for(tx=x_start+x_step;tx<=x_end;tx=tx+x_step)
   {
       t=tx*y_time+ty;
       tran3d(xt[t],yt[t],zt[t]);
       t=tx+c*x_time;
       xs[t]=xe;
       ys[t]=ye;
       polys[0]=(int) xs[tx-x_step+x_time];
       polys[1]=(int) ys[tx-x_step+x_time];
       polys[2]=(int) xs[tx-x_step];
       polys[3]=(int) ys[tx-x_step];
       polys[4]=(int) xs[tx];
```

```
                ploys[5]=(int) ys[tx];
                ploys[6]=(int) xs[tx+x_time];
                ploys[7]=(int) ys[tx+x_time];
                fillpoly(4,polys);
             }
             c=1-c;
          }
          getche();
          closegraph();
          printf("change view point(y/n)?");
          *ans=tolower(getche());
       }
       while(*ans=='y');
       printf("\nchange range(y/n)?");
       *ans=tolower(getche());
    }
    while(*ans!='n');
 }

 /*-------------------------------------------------------*/
 void tran3d(xw,yw,zw)
 double xw,yw,zw;
 {
    xe=center_x+(-xw*s2+yw*c2)*x_rate;
    ye=center_y-(-xw*c1*c2-yw*s2*c1+zw*s1)*y_rate;
 }
 /*------------------------------------------------------*/
 void inputd(string,max,min,var)
 char *string;
 double max,min,*var;
 {
    char *keyin="";
    double value;
    printf("%S (%f-%f) defa->%f:",string,max,min,*var);
    gets(keyin);
    value=atof(keyin);
    if ((value<=max)&&(value>=min)&&(*keyin!='\0'))
       *var=value;
 }
 /*------------------------------------------------------*/
 void inputi(string,max,min,var)
 char *string;
 int max,min,*var;
 {
    char *keyin="";
    int value;
    printf("%S (%d-%d) defa->%d:",string,max,min,*var);
    gets(keyin);
    value=atoi(keyin);
    if ((value<=max)&&(value>=min)&&(*keyin!='\0'))
       *var=value;
 }
 /*------------------------------------------------------*/
 double func(x,y)
```

```
double x,y;
{
   return 1;
}
/*------------------------------------------------------*/
double funx(x,y)
double x,y;
{
   return (2+cos(x))*cos(y);
}
/*------------------------------------------------------*/
double funy(x,y)
double x,y;
{
   return (2+cos(x))*sin(y);
}
/*------------------------------------------------------*/
double funz(x,y)
double x,y;
{
   return sin(x);
}
/*------------------------------------------------------*/
```

（上接第 97 頁）

俞：「超數學」的發展，說不定將來幾十年後，就沒有幾何了，可能就是……。

陳：哇！對對……。

（雙方愉快的歡笑）

<u>抽取精義予系統化</u>

陳：那應該怎麼說？怎麼答？

俞：現在整個數理是往超級的觀念走，就是要將現有數學領域中，建構「抽象」的「經驗」成爲知識……。

陳：問題還有一個「結構」哪！

俞：如果還不是「歸納」和「抽象」，沒有去「限制」（Limit）它，那還有多少可以存到現在。

陳：是的。

俞：你的看法，是不是同我一樣。

陳：那當然，我想這個學問的進展之中，範圍是愈來愈擴大，所以就是俞先生所提的「歸納」和「抽象」，換句話說，就是需要推廣，才能抽取精義，始能夠將這個推廣範圍，予以系統化。

俞：超數學的理念，我想你在設計 假設（Hypotheses），絕不會在你的研究計畫裏，死鑽胡同。

陳：當然，當然，是的，沒有原則。

俞：先期幾何，現在恐怕沒有啦！對不對！

研究範圍不斷擴大

陳：對！對！總是不斷到新的範圍，這個研究是不斷的擴大。

俞：就是「歸納」和「抽象」，範圍才會不斷的擴大，同時看法也不同，就是所謂「超級觀點」（Super Point of view）。

陳：我懂，我瞭解。

俞：學數學的人很多，但是要眞正成一位大數學家，却是很少，這一代的人的確需要和仰仗「你」。

陳：不敢當。

俞：將來這個數學的發展方向，是朝「超數學」方面走，你覺得如何？

陳：是的！

俞：你能獲得，或許已不再是過去的窠臼，你說我的想法和看法對不對！

陳：對！對！你的思想很年輕，很現代化。

俞：現在學數學的人很多，但是要眞正找到超數學家，還眞少哩！

陳：是的。

俞：如果要往這邊走，學藝的人們，第一要緊是要先「達精」，然後才能往「超數學」領域發展。

俞：我發覺現在美國、歐洲各國及大陸的數學家，大家競爭的很激烈，但是臺灣好像沒有，不知你有沒有關心到這件事。

陳：是的，這個問題是要有好的朋友、好的討論才能發展。

下接第112頁

每一個我所解決的問題都在日後幫助了我去解決別的問題。

——笛 卡 爾

7. 闡釋幾個數學名詞命名的由來

編輯部

本文作者傅溥先生曾任教於師大數學系

一、代　數

代數學一詞，為西文 algebra 的中譯，這是大家知道的。西文 algebra 這個名詞，又是根據那國文中，那個字，創造出的呢？這事說來話長。近古期間，我國數學家發明了「天元術」。所謂天元術，就是用「天」字來代表未知數的一種算法。因為天字既已代表未知數，便不再是一個普通字，特改稱它為「元」。這個天元術，其後經阿拉伯數學家亞魯・科瓦利米（al-Khowarizmi 780?-850?）著了一部題名為「Hisāb al-Jabr W'al-Muqabalah」的書，將它介紹到歐洲去。歐洲人根據這部書名中的「al-Jabr」一字，方纔創造出今日蔚成數學一大分科的 algebra 這個名詞。al-Jabr 的原義為何？經查閱辭書，得知如下：

al = the

jabr = redintegration, consolidation, reunion of broken parts, reduction of fraction into integers.

就是「連合」的意思。所以有趣味的事是，由 algebra 導出的 algebraist 這個字，如果照阿拉伯語來講，除了「代數學家」外，還可解作「外科醫生」，因為外科醫生也能將折斷了的骨頭連合起來的緣故。

algebra 源出我國天元術，這在我國數學史上，是一件值得自豪的大事。乃商務印書館出版的辭源，中華書局出版的辭海，與中國文化研究所出版的中文大辭典三部工具書中，其代數學條竟齊謂創自印度，其後傳入阿拉伯，再由阿拉伯傳入歐洲，殊屬誤導，並自毀光榮。辭源、辭海、中文大辭典諸書的編者多為文學家，盲目的抄襲，誤導猶有可說，為什麼前代的數學家翻

譯時，亦不將它還原爲天元術，而另行譯作代數學呢？這事說起來眞可恥，我國數學史有其光輝的一面，亦有其黑暗的一面。明朝有個毫無數學頭腦，盜名欺世，妄居領導地位的假數學家顧應祥，他對於天元術竟莫明其妙，自認漫無下手之處，擅將前人著作中演算天元的細草，一筆勾銷，全部删去。害得明、清兩朝的數學家，對於天元術懵然無知，前朝先哲的輝煌燦爛成績，亦於以煙消雲散。其後西方傳教士東來，將 algebra 一同帶回本土 。堪笑的事是，當時中國數學家竟不知其即爲自家的祖傳瓌寶，不得已來從事音譯。有的譯作「阿爾熱巴拉」，有的譯作「阿爾熱八達」，有的譯作「阿爾朱巴拉」，形形色色。清初意譯作「借根方」。「借」是假定的意思，「根」指未知數本身，「方」則爲未知數的指數。延至乾隆年間，由大數學家梅穀成參證結果，方知所謂「阿爾熱八達」、「借根方」也者，就是本國古代的天元術。梅氏曾在其所著赤水遺珍中，痛加指摘，使這顆「赤水遺珠」，方得重歸故櫝。咸豐年間，我國大數學家李善蘭，與英人偉烈・亞力（Alexander Wylie，1815-1887）合作，共譯西書多種。其中 Augustus De Morgan（1806-1871）所著 Elements of Algebra（1835）十三卷，經譯作棣麼甘代數學（1859 出版），從此代數學一詞，不但中國通行，即日本亦一致採用。例如彼邦塚本明毅所著筆算訓蒙「明治二年刊行」，福田理軒所著筆算通書（明治四年刊行），與岸俊雄所著西洋算法比例法（明治四年刊行）諸書，用得都是代數學，而今村謙吉所著代數學階梯（明治四年刊行），與柳澤退藏所著代數學發蒙（明治五年刊行）二書，並以代數學三字來命名等是。代數學一詞雖未留有天元術三字任何痕跡，亦不能概括其內容全部，但中外通用已久，約定俗成，今日已不復再有任何爭論矣。李善蘭在其所譯棣麼甘代數學的序言中，僅云：「代數學西名『阿爾熱巴拉』，乃阿拉伯言，譯即補足相消也。」雖未道出其翻譯的理由，但偉烈・亞力卻用英文說出了是這樣的：

> The character which Algebra has now assumed in Europe, is of such a totally different cast from what it was two centuries back, that it may be looked upon as a new science; and it has been

thought advisable instead of using the old name 'tsëay kan fang'借根方, to give it a new designation more in accordance with its altered aspect; the term 代數學 "tae soo' hëo" "Substitutionary arithmetic" has been adopted accordingly.

意即：

「algebra 今日在歐洲表現的性格，迥異於其在二百年前所投射的面影，簡直可說是一種新學問。識是之故，與其仍舊稱它爲借根方，不如更易爲代數學（代數的算術），較爲恰切。」

這就是「代數」一名詞的由來。

二、幾　何

幾何二字的意義爲若干？多少？拿這種疑問詞來作爲數學一大分科的名稱，殊屬奇怪之至。學術界不明眞相，遂有一種謬說流傳，謂幾何二字係由英文geometry 一詞起首三個字母geo 音譯而來，眞是捕風捉影，勞而無功。要知道 geo 爲一接頭語，其意義爲地球；如果geometry一詞可由其接頭語音譯作幾何，那麼，凡是具有接頭語 geo 的 geochemistry（地球化學），geodesic（測地線），geodesy（測地學），geodynamics（地球力學），geognosy（地球構造學），geography（地理學），geology（地質學），……等詞，豈不都可譯作幾何？厚誣古人，莫此爲甚。遍查中國數學史，得知首先出現幾何一詞的典籍，爲明末我國先哲徐光啓與當時來華傳教的意大利人利瑪竇（Matteo Ricci，1552-1610）合作，將希臘歐几里得（Euclid，330?-275? B.C.）所著Elements 譯成的幾何原本。「原本」二字的意義，利瑪竇在其所作「譯幾何原本引」中，說是：「曰原本者，明幾何之所以然，凡爲其說者，無不由此出也。」「幾何」一詞的意義，利氏「譯幾何原本引」中，亦說得淸淸楚楚：「幾何家者，專察物之分限者也。其分者若截以爲數，則顯物幾何衆也。若完以爲度，則指物幾何大也。」蓋「幾何」二字，係由其研究對象的「量」的意義譯出。按歐几里得原著僅十三卷，其後經利氏業師丁先生（P. Christophus Clavius，1537-

1612 ）集解後，又復增加了二卷，共爲十五卷。徐氏譯本，即係根據丁先生集解的前六卷。此書刻仍保藏於湖南長沙章氏家中，李儼所著中國算學史，載有其首頁的照片。書名爲：

EVCLIDIS

ELEMENTORVM LIB XV

上面根本沒有 geometry 字樣，何來音譯的可能？持 geo 音譯說的，爲日本已故數學界權威林鶴一（1873-1935）。林氏此種憑空臆度的行爲，未免有違治學之道，學者當引以爲戒。微妙的事體是，幾何原本傳入日本後，其中所用學語，日人肆意竄改，弄得面目全非。例如今日通用的「定義」，原本中爲「界說」；「公理」，原本中爲「公論」；……等是，不一而足。獨對「幾何」一詞，無法下手，仍舊幾何？幾何？的疑問下去，斯亦奇矣。（百餘年前，我國曾經有人將「幾何」改稱爲「形學」。）

三、方　程

方程式這個連國民中學學生都耳熟能詳的數學名詞，出自我國第二部最古老的算書九章算術。九章算術第八章章名爲「方程」，但下面並無「式」字，式字是後來日本人加上的。它的意義，據三國時魏人劉徽的註解，是這樣的：

> 「程，課程也。群物總雜，各列有數，總言其實。令每行爲率，二物者再程，三物者三程，皆如物數程之。並列爲行，故謂之方程。」

這段註解的意義，茲就九章算術方程章中第一題，說明如下：

題云：今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，實三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，實三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，實二十六斗。問上、中、下禾實一秉各幾何？

「群物雜處」，指上、中、下三種禾混合在一起；

「各列有數」，指上、中、下三種禾每秉各有實若干；

「總言其實」，指上、中、下三種禾雜處在一起，不言其每種每秉的實

數，而言其全體的實數。

第一程是：上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，實三十九斗。

第二程是：上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，實三十四斗。

第三程是：上禾一秉，中禾一秉，下禾三秉，實二十六斗。

「皆如物數程之」，就是說題中有三種禾。程數亦需要有三次，程數與物數須相等。

「令每行爲率，並列爲行」，是說將程得的數，分行、分列排列起來，使其成爲一個表如下：（表中數字，古代當然是用算籌來組成。）

3	2	1	39
2	3	1	34
1	2	3	26

因爲像上面表中的排列一樣，凡是將逐次「程」得的數循序分行、分列排在算盤上時，都會構成一個「方」形，所以叫做「方程」。這就是最後一句，「故謂之方程」的理由。可知方程一詞，在形式上爲一矩陣（matrix），在涵義上則爲聯立一次方程式，與今日表示的 equation 內容，大異其趣。今日表示 equation 的「方程式」，古代另有名稱，叫做「開方式」，與方程二字並無關係。「方程」這個數學名詞，其涵義竟變遷若是，眞不禁令人興滄海桑田之感。但商務印書館出版的辭源中，方程條竟載稱：「方，比也；程，式也。當諸物繁冗，諸價錯雜，按一定之式，作爲比例，是爲方程。」這又是一條謬說，故特辭而闢之。

四、微分、積分

我國清末興學，始於同治元年（西元 1862 年。）是年八月，設立同文館於北京（現改稱北平），期後八年，其算學課程第六年爲「微分」、「積分」。「微分」、「積分」二課程列入我國學制，誠如該文所云，由同治元年開始。但「微分」、「積分」二學語的出現，却要早三年——開始於咸豐九年（1859），我國偉大數學家李善蘭氏與美人偉烈・亞力（Alexander Wylie, 1815-1887）合作，共譯羅密士（Elias Loomis, 1811-1899）

「代微積拾級」(Analytical Geometry and Calculus, 1850)十八卷。其後光緖四年(1878),另一偉大數學家華蘅芳氏與美人傅蘭雅(John Fryer, 1839-?)合作,共譯華里司(美文原名不詳)「微積溯源」(英文原名亦不詳)八卷,其使用的「微分」、「積分」二學語,亦係沿用李氏的譯名。李氏爲當時傳古通今的學者,光緖十二年(1886)錢塘諸可寶續著「疇人傳」三編,其序目曾譽李氏爲「秋紉(李氏號名」集成,必則古昔。」,其將 differential 譯作「微分」, integral 譯作「積分」,當非閉門造車,憑空杜撰,而係淵源於古代文化,自可斷言。

我國小數命名,自古以來,皆係由分、厘、毫、秒(宋以後改爲絲),以迄忽、微,微以後更無再小的名稱。故對於極其細小的東西,槪以「微」字名之,即數學中的無窮小,亦不例外。徵之於宋朝沈括所著的「夢溪筆談」中有「造微之術」的稱呼,可以爲證。又我國古代數學家對於推求圓周率所表演的拿手好戲無窮盡法,即係無限分割。所以沈括的「夢溪筆談」中,對於面積亦有「割會之術」的說法。「微分」這個學語,就是由「夢溪筆談」中,「造微之術」與「割會之術」兩句話中的關鍵語,「微」與「割」連合而成的,不過李氏將其中的「割」字,換了「分」字罷了。它的涵義,就成「微分」是由無限分割法得來的無窮小,你說譯得恰當不恰當?

積,是積聚的意思。「微分」這個學語建立之後,對於無數個「面積微分」的和,順理成章,自應譯作「積分」。換句話說,就是「積分」爲將無數個無窮小積聚起來的和,與英文原意,再脗合沒有。但是「積」字的使用,也不是由李氏開始,最早竟可遠溯到戰國時代。「莊子」天下篇中所載惠施作出的許多逆理(paradox),其中之一:「無厚不可積也,其大千里。」不但用得是「積」字,而且道出了現代的積分原理,殊足驚人。因爲現代積分原理中的面積微分,就是惠施所說的無厚東西,不過這個「厚」字,我們現在改爲「寬」字罷了。這種寬度狹至無窮小的面積微分,有限個積聚起來,它的和當然還是無窮小;但是無數個積聚起來的和,只要那被積分函數的値取得非常大,或上、下限間的距離隔得非常遠,它所代表的「曲線下方、X軸上方、和兩端縱線間包圍的」面積,是可以大至一千方里或較此更大

的。

英人李約瑟，（ Joseph Needham ，現仍健在）根據許多史實，在其所著的「中國之科學與文明」（ Science and Civilization in China, 全書十厚册）數學篇中，曾感慨地說：「有趣味的問題是，現今中國數學家所用的「微分」、「積分」二學語，他們或許不知道，他們祖先思想家，早在十一世紀時，對於同一觀念，就曾使用過了。」「微分」、「積分」這兩個學語命名的由來，外國人對之尚能瞭如指掌，如數家珍，我們中國人自己，豈可反而漠不關心？

參 考 書 籍

1. Joseph Needham ; *Science and Civilisation in China.*
2. Florian Cajori ; *A History of Elementery Mathematics.*
3. 平山諦著　東西數學物語。
4. 李　儼著　中國算學史。
5. 徐光啓譯　幾何原本。
6. 著者不詳　九章算術（我國第二部最古老算書）。
7. 阮　元著　疇人傳。
8. 辭源　商務印書館出版。
9. 辭海　中華書局出版。
10. 中文大辭典　中國文化研究所出版。

（上接第 104 頁）

俞：在這個國際性的數學領域裏，特別是你可以仔細看，範圍莫不朝「超數學」方面發展，這就是我所說的知識，主要是來自「經驗」，但是知識並非全是「經驗」，知識則是需要「經驗」來「結構」，而這「結構」的本質，就是「歸納」和「抽象」。

陳：完全對的，你瞭解得很透徹，很誠懇。

陳：你有時候還看數學嗎？有沒有再接觸？

學問領域日新月異

俞：太晚了，太晚了，現在沒辦法，恐怕書已有毛病。（俞博士輕鬆幽默的調侃自己，使得在場所有人哈哈大笑。）

陳省身博士這時候特別向在場的新聞記者們說明：「俞先生所說『歸納』和『抽象』，事實上，一個是『推廣』，一個是『抽象』。爲什麼推廣呢？因爲無論什麼學問，就是要推廣到新的領域裏面去，一定要愈做愈好，愈做愈新。」

數學認知普及學界

「那麼『推廣』以後，範圍就比較大，然後你對於『它』要有一個瞭解的話，就需要『抽象』，比方說，你看見一本書、二本書、三本書，這是『三』的問題，從這樣子變換成一、二、三，就是『抽象』，等到變成一、二、三『抽象』之後，數學就變成有意義，力量自然就偉大起來。」

陳：「如同俞先生所說，數學同其他學科一樣，要不斷的進步與推新，就需要一個新的觀念，所以『抽象』就變成很要緊，這也就是『超數學』，這樣不斷的超越，將來就更超級，如此大家對數學的認知，就愈來愈多。」

俞：一般人都講，中國人研究物理、化學，最大的困難，就是設備不夠，但是我認爲數學未必要設備，只要一張紙、一枝筆和精密虛心思想的討論就夠，大家都看到很多人都到美國去，差不多都不留在臺灣，恐怕就是這個原因吧！

陳：有好的討論，才有好的發展，或許這就是吧！

把解題看作單純的智力的工作是錯誤的，決心和感情也是重要的角色。用微溫的決心和欲睡的意志去做，對課堂上的常規問題也許是足夠的了；可是要解一個嚴格的科學問題，則意志力便是必要的，只有它才經得起長久的辛勞和不斷的失望。

——取自「怎樣解題」

學習一個新的記號是記憶上的一種負擔。聰明的學生拒絕在看不出報償的時候承受這種負擔。若不給他們充分的機會，使他們由自己的經驗相信數學符號的語言可以幫助思考，那麼，他們就有了不喜歡代數的口實了。幫助他們獲得這種經驗，是教師最重要的工作。

——取自「怎樣解題」

教人解題是意志的教育。學生在解一個對他不大容易的問題時，他學習着忍受失敗，欣賞小的進步，等待重要的想法，而在恰當的時候把握機會奮力工作。假使學生沒有機會在學校裏去體會解題努力中的各種情感，他所受的數學教育在最重要的一點上便是失敗的。

——取自「怎樣解題」

即使是很優秀的學生，當他們得出問題的解答，清楚地寫下來之後，總是蓋好書本，馬上看別的事去了。這種做法會使他們遺漏了這工作的重要而有益的一面。回顧整個解答，重新檢視答案與得出答案的途徑，是可以充實自己解題的知識，發展自己解題的能力的。一個好教師應該懂得，而且使學生也懂得，沒有一個問題是一經解決就算是完全做完了的。

——取自「怎樣解題」

編後語

期盼良久，「師大數學」終於出版了。剛接下這個棒子，滿懷雄心壯志正待宣洩，不料結果事與願違，眞是始料未及。

「師大數學」水準之高，一向被同學們視爲畏途，不肯稍加躬身領略其中的奧妙，張眼欣賞數學殿堂之美。影響所及，「師大數學」美其言不過是幾個老面孔的“獨家刊物”罷了，同學們放棄這個屬於自己的園地，實令人惋惜不已。

不過本老編領著兩個小編，秉持著長工服務的精神，犧牲奉獻，兼以死拉活催，還是讓這代表本數學系的最高水準刊物順利完成，過程之艱辛，可想而知。

本來編輯部這次要開闢一個“數學教育”的專欄，但由於稿件不足只好被迫放棄，吾人深表遺憾。不過這並不妨礙本刊物的可看性，各篇內容舉凡線性代數、統計、分析、數論、微分方程、電腦等，篇篇精華，字字珠璣，均爲作者嘔心瀝血之作，並請系上老師專門指導，有待各位讀者細細品味。其中特別感謝林義雄老師百忙之中抽空爲我們介紹了大一線性代數，及研究所考題的詳解，吾人衷心期望各位同學（不只大一學弟妹）能用心詳閱，方不負老師一番苦心。其次，前任主編吳原榮的經驗傳遞和鼎力協助也功不可沒；諸位投稿的助教、同學以及指導老師也都是幕後功臣，在此一併感謝。最後，懇請各位Σ人多多關愛「師大數學」，並將您的學習研究心得公諸於世，遺惠後人。

陳向榮
洪士薰　謹啓
莊琇惠

發 行 人：陳　昭　地
出 版 者：國立臺灣師範大學數學學會
主　　編：陳　向　榮
編　　輯：洪士薰、莊琇惠
封　　面：陳　介　宇
印 刷 者：公舘打字印刷有限公司
地　　址：台北市羅斯福路三段 281 號 2 樓
電　　話：(02)3633534
出版日期：中華民國七十八年六月十日

師大訓課刊登第 136 號

統 一 編 號
06385750370