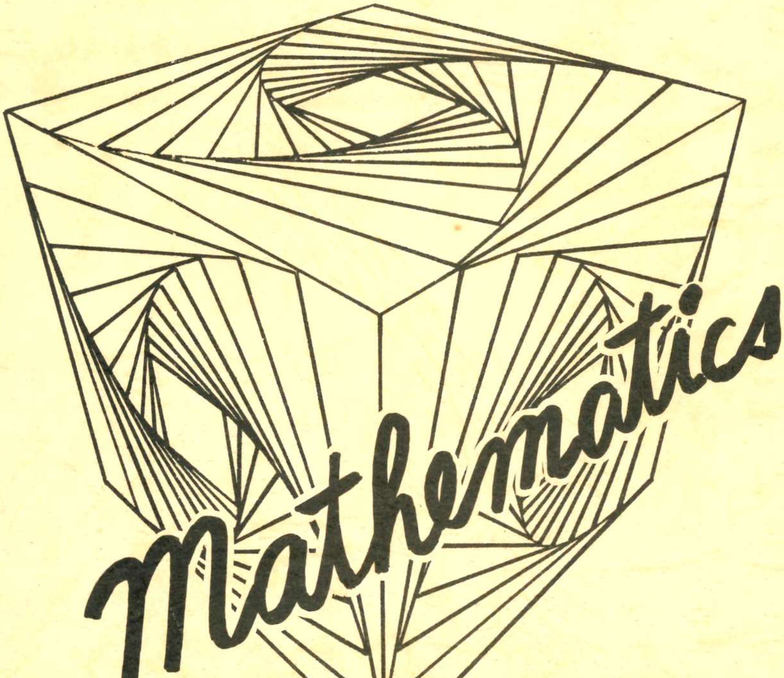
師大數學

25



序

系主任

本系成立於民國三十五年八月，首由張儒林教授擔任系主任，當時招收數學系及四年制專修科各一班，同學三十餘人，教授三位，助教一位，到民國四十五年爲配合原來擴校計劃在頭份設三年制專修科，民國四十七年又增設夜間部專修科，民國四十八年停止招日間部專修科，而又將夜間部專修科改制爲五年制數學系，爲了要培育更高級之數學教育研究人員，於民國五十九年，成立了研究所碩士班，並於去年八月開始奉准成立研究所博士班。四十多年來經歷了各任系主任管公度、潘璞、李新民、康洪元、范傳坡、常法徽、顏啓麟及各任所長李新民、林義雄、呂溪木、李恭晴、顏啓麟之辛勞籌劃與系、所各位教授之苦心經營下，數學系、所，日益茁壯，已由原來每屆僅有十餘位同學，發展至每屆約一百二十名新生入學，目前每年約招收近百位新生；歷年來畢業人數已達三千七百餘人，多各有成就；其中獲得碩士學位肆百餘人，具博士學位者將近二百人，或執教於高等學府，或繼續高深學術研究，餘則多服務於中等學校，都能秉持誠正勤樸之校訓，平時諄諄教學、熱誠服務、堅守崗位，頗獲好評。

現本系共有專兼任教師四十六人，學生十二班共有三百四十四名同學，圖書逾兩萬册，雜誌百餘種，個人電腦PC／AT四十部，386電腦二十部，麥金塔電腦一套，雷射印表機五部，電算室一大間，未來將朝網路發展；大螢幕電視投射機一部，紅外線製作機4部，錄放影機五部，攝影機四部，剪接系統一套，製圖桌兩臺，編輯系統一套。六十四年夏由本部遷於現址，環境煥然一新，出國學成系友相繼返校，互相砥勵，奠定良好的研究風氣，並擴展了研究領域；今日數學系之師生，更能孜孜不息，爲美好遠景奮發努力。

近年來國內外科學發展甚速，對數學之需要更切，本系之任務更日益增大，除肩負數學教育之發展及中等數學教育之輔導外，亦兼具數學學術及數學教育研究之重任。爲增强研究風尚，本系二十年前創辦師大數學年刊，以

供師生發表數學及研究心得，切磋琢磨，提高學習及研究興趣。本刊屢經負責同學之精心策劃及全體師生系友之共同支持，漸茲茁壯，除至表感謝外，今後請更不吝珠璣，源源賜稿，善珍此片園地，使本刊前程更能散發絢爛光芒。

陳昭地

八十年五月

編者的話

各位親愛的學弟學妹學長學姊大家好，我在這裏不想再老生常談一些警世寓言，「師大數學」一向被認爲是所謂高水準、高智慧的刊物，爲什麼呢？簡單一句話：看沒有嘛！那爲什麼看沒有呢？原因不外乎作者都是些高年級生或助教以上人士（本期亦不例外），大一小弟弟小妹妹看得懂才怪哩。所以我在這裏要拍拍桌子鄭重呼籲：「師大數學」是全體數學系的刊物，你只要有什麼學習研究心得，儘管丟上來沒關係，別人只有羨慕的份兒。

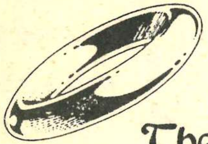
什麼？您捨不得動筆？那也不妨，至少把這一本某些人的辛苦結晶瀏覽閱讀一下吧，多讀是有好處的，我舉一個例子：高斯在1848年參加了一個名叫“反革命”的文藝俱樂部，他成了會員之後，每天的十一點至一點都在其閱覽室看報。高斯看報章雜誌看得非常兇，每次他都把要看的東西按次序疊成一堆，墊在屁股上，然後一張張地抽出來看。他把特別有趣的東西抄在小記事本上。如果某個學生正在看的報紙，不巧是他所要的，高斯就會張眼瞪著這可憐蟲，直到學生羞紅了臉，把報紙呈送給他爲止。學生們都叫他“閱報室之霸”。

嘿！我可不是叫你去做什麼什麼室之霸，事實上在這裏你也霸不起來。我是想說明，多閱讀書刊絕對有好處（我是指正常的），看在高斯的份上，就讓我們一起來分享數學的美妙世界吧。

學弟學妹們加油!!

目　錄

應用數學簡介



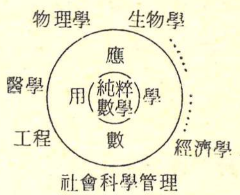
The First Circle

編輯部

上一期師大數學裏介紹了許多老前輩對數學的看法，使身處數學系的我們了解自己執著的是什麼東西。也許大一學弟妹剛踏進這個圈子裏對數學還沒有什麼刻骨銘心的感覺，但根據敝人的觀察發現，大部分同志常苦於學無法致用，甚至淪落至擔心被當與否之低層次腦部活動，而於課堂所學之運用也止於平時之娛樂或家教時之“靈活發揮”罷了，至使一些有志鑽研數學的同志對高深數學理論產生迷惘，到底學了這些先人遺產對現實生活有什麼幫助？有鑑於此，本編輯部於本期簡略介紹應用數學之來龍去脈，附以若干實例解說，希望喚起一些絕望的鬥士，或給一些迷途羔羊作爲參考，重新找回一片蔚藍的天空。

什麼是應用數學

有人把應用數學叫做純粹數學與科學技術之間的橋樑。曾有人對此還用圖於作了解釋（圖一）。他們認爲：在圖的中心爲純粹數學，而外面邊緣是各種科學，諸如物理學、生物學、醫學、工程、社會科學管理、經濟學等等，應用數學則介於其中。



圖一

其實，不同的歷史階段，應用數學的含意也是不同的。

1904年，德國哥廷根大學哲學院數學系，首次設立應用數學講座。當時的第一任教授龐格（Runge, 1856～1927）所寫的

講義，主要是將物理、工程、經濟學等學科中所用的數學滙集整理而成的。龐格當時是把應用數學看作“能具體運用的數學”，並沒有眞正的區分出應用數學。

柯朗
(Courant, 1888～1972)

1942年，由於第二次世界大戰的需要，美國建立了應用數學小組。他們把全國數學方面的專家組織起來，供需要數學的軍事部內諮詢，爲戰爭的勝利而服務。在民間，因是猶太人被趕出德國的哥廷根大學教授柯朗(Courant, 1888～1972)，也在紐約州立大學領導了一個應用數學小組。他們廣泛研究了來自戰爭的各種尖端問題，如水下爆炸理論，噴氣式飛機的噴嘴設計等。在整個戰爭期間，僅柯朗小組就完成了194項研究。這些成就不僅出色地對大戰的獲勝大有貢獻，而且有力地推動了數學的發展，引出了不少獨立的數學分支，這些分支構成了應用數學的基本內容。這時，應用數學就不是現有數學的一部分，而是在解決實際問題上出現的一種新的領域。

二次世界大戰期間應用數學的大顯身手，使人們對應用數學的看法又有了很大的變化。像馮·諾伊曼等一些傑出的純粹數學家，都不僅轉向於應用數學，而且充分發揮了作用。這使不少人轉向對應用數學的研究，而這種研究主要是表現在數學向技術、生物、經濟、語言等各種科學分支的滲透。這時，又出現了貝爾曼(Bellman, 1920～　)創立的動態規劃，以及香農(Shannon, 1916～　)開創的信息論等等。隨著應用數學的作用越來越大，範圍越來越廣，這就再一次引起了應用數學含義的變化，它被說成是“我們全部知識中凡能夠用數學語言表達的那一部分”。

爲了進一步地了解應用數學，還是讓我們具體地介紹一下應用數學的分支吧！

應用數學的兩個分支

現代應用數學可以分數數學規劃(或者叫規劃論)、運籌學、信息論、

控制論、計算數學等幾個大分支。在這些大分支下還有若干小分支。它們組成了應用數學的龐大系統。下面我們逐一介紹這些分支的基本內容。

【規劃論】顧名思義，它是研究合理規劃的科學。現實中需要合理規劃的事情很多。比如，物資的調運、人力的調配、場地的選擇、原料和機器的合理利用等等。這些問題在數學上可以概括為：求某一函數在一定條件下的最大（或最小）值問題。但是，由對規劃的對象是尚未實現的行動，對所給條件、目標、結構關係以及它們的函數類型都不甚確實了解，因此規劃論所提煉出來的函數都比較複雜，研究它的方法也就比較特殊，不是單靠純粹數學中的分析方法所能解決的。

狹義的規劃論是指線性規劃、非線性規劃、動態規劃、隨機規劃等。廣義的有時還包括排隊論、對策論、庫存管理論等。這時，如果偏重它的數學形式，常把它叫做規劃數學。

在規劃論中，發展得最早的是線性規劃。如果不算古代憑經驗所作的規劃的話，那麼至少也可以追溯到十八世紀。

1781 年，法國數學家蒙日（Monge, 1746～1818）在拿破崙政府任海軍部長和國防組織者時，就自覺地在工作中展現了數學規劃。十九世紀末，規劃論作為一門獨立的學科產生，在本世紀三四十年代得到系統的發展。這方面有較大貢獻的數學家是蘇聯的康特洛維奇、美籍匈牙利人馮·諾伊曼，以及美國的但澤（Dantzig）、貝爾曼（Bellman）等。

【運籌學】運籌學（作業研究）英文名“Operational research”，簡稱“OR”。它是第二次世界大戰期間，英國在對對空火箭的研究中，考慮到了策劃和管理方面的問題而產生的。這種思想後來在美國得到傳播，並逐漸發展成為一種具有一定理論系統的學科。

關於這門學科的確切定義和它所包括的範圍目前還很難肯定。由於它的許多內容與規劃論、對策論、排隊論、最優化方法相交錯，所以也有人認為運籌學是包括這些分支在內的大學科。

目前運籌學主要是用來研究經濟活動中能用數量表達的有關策劃、管理方面的問題。它的獨特方法表現在能對可能出現的行動給以預測、比較和度

量，從而研究制定管理策略。

【信息論】信息，通常也叫情報。它是指接受者所預先不知道的報導和消息。利用數學方法研究信息的計量、傳送、變換和儲存的理論，就叫做信息論或情報理論。

香農

（Shannon，1916～）

信息論最初是美國應用數學家香農發明的。香農在美國密執安大學畢業，並在麻省理工學院獲得數學博士後，就投身到了應用數學的研究中去。1940年，香農開始考慮通信工程中的信息量問題；1945年，他進入美國著名的貝爾實驗室。他通過長期而又大量的通信實驗，提煉出了通信中的數學問題的背景、意義和提法，終於在1948年發表了標誌著信息論問世的《通信的數學理論》。現在，信息論已發展成爲重要的數學分支之一。

【控制論】在人的活動中，神經控制是常見的一種。打靶時爲了命中目標，就得通過神經控制活動來調節槍。能不能通過科學的方法研究動物和人的這種神經控制活動，使之達到最優的控制方案呢？能！控制論就是一門綜合地處理動物與機器中的通信及控制機能的學科。它是1947年由美國數學家維納（Wiener，1894～1964）創立的。

“控制論”這個詞的英文寫法是“Cybernetics”，這個詞淵源於希臘語，意思是舵手或調速器，中文翻譯成控制論，在意義上並不完全一致。

維納

（Wiener，1894-1964）

維納曾經給控制論下過這樣一個定義：設有兩個狀態變量，其中一個是能由我們進行調節的，而另一個是我們不能控制的。這時面臨的問題是如何根據那個不可控制的變量，從過去到現在的信息，來適當地確定可以調節的變量的最優值，以求實現對於我們最合適最有利的狀態。控制論正是旨在提供我們解決這樣一些問題的方法和途徑。控制論研究的

中心問題是信息。因而人工腦、人工智慧的研究，從一開始就是它的重要內容。

本世紀五十年代以來，控制論有了很大的發展。現在控制論不僅在生物學和經濟領域有廣泛的應用，而且在哲學、工程學、語言學和社會科學的其他方面也都有廣泛的應用。

目前有一種觀點認爲：控制論是與數學和物理學等並列的基礎科學的一種。這種觀點在蘇聯科學家中比較盛行。當然，也有一部分人把控制論作爲應用數學的一部分。

【計算數學】看到這一名稱你也許會想，數學不就是處理計算問題的嗎？爲什麼在數學中還要分出什麼計算數學來呢？其實，數學不僅是關於計算的學科，數學的發展已經使它的研究對象和研究方法發生了很大的變化，而原先關於計算的那部分內容，隨著現代科學技術的迅速發展也大大地豐富了。於是，數學中就形成了一個專門研究計算問題的解決方法及其有關理論的分支，它就是計算數學，也稱爲數值分析。

現代計算數學的形成與電子計算機的應用密切相關。現代計算數學已經不再是以數值計算爲主要研究對象了，它主要研究有關的數學和邏輯問題怎樣由數字電子計算機加以有效地解決。因此計算數學包括了計算方法和程式設計兩大部分。

計算方法也叫數值計算方法。主要是研究各種各樣的數值解法，包括代數方程、線性方程組、常微分方程、偏微分方程等的數值解法；特徵值的數值計算法；數值積分法以及像插值法、鬆弛法、最速下降法等各種具體的計算方法的應用。

程式設計主要是由於要利用電子計算機自動解題而建立的。用計算機自動解題，首先要由人確定計算方法，然後列出解題的步驟，根據這些步驟編成程式，讓計算機按照所編的程式來解題。編程式就是“程式設計”。給機器傳達“指令”，必須要能使機器“看得懂”，這樣，就產生了計算機專用語。最早的是計算機語言，後來又創造了組合語言和算法語言。用算法語言

編寫的程式並不能直接讓計算機執行，還需要將它翻譯成解釋程式，這就是程式編譯。這些都是程式設計這一分支所研究的內容。

總之，計算數學是一門內容很豐富的應用數學分支。近年來，計算數學和其他學科相結合，產生了許多新的分支，如計算力學、計算地震學、計算物理、計算化學、計算生物學等。隨著科學技術的不斷發展，計算機功能的不斷提高，計算數學的內容勢必越來越豐富，它的應用也將越益廣泛。

以上大致介紹了應用數學的分類與內容，也許讀者還無法確定到底我們四年之中所讀的數學課程，是如何應用在各方面的？在下面我們要介紹一種資訊系統，因爲融入了數學中拓樸的概念而大幅度改善，並充分發揮其功效。

地理資訊系統（ Geographic Information System ）除了少數研究單位，及政府機構外，對國內來說是完全陌生的名詞，聽說最近台大地理系同學也流行玩這項功能強大的系統。它並不是指單一的產品，而是一種整合的資訊系統，其牽涉之廣泛、複雜，包括電腦科技、電腦繪圖、遙測（Remote Sensing ），資料庫及軟體等。綜合言之，GIS 已被視爲一種決策支援系統，也就是一種電腦輔助決策系統，用以擷取、編輯、分析、儲存及顯示空間性及非空間性的地理資料。

傳統上GIS 是屬於「圖幅導向式」（ Sheet-oriented ）的，但是目前「圖元導向式」（ Feature-oriented ）正逐漸取代了圖幅導向式，這種改變使得GIS 更可以應用到功能日益強大的 386PC 上。所謂圖幅導向式GIS 是將空間或是位置的資料，組成一些圖元（ Graphic feature ），然後將它們置於某個層（ layer ）內。所以在某張地圖內的空間資料都儲存在同一個檔案中。如我們想要跨越圖幅的限制，以得到某個圖元，例如某個地籍區域，GIS 系統必須進行許多動作，例如結合，搜尋，並分解若干相關的檔案，才能得到完整的該圖元，這些動作相當花時間，而事實上其中有些步驟是不必要的。而新的圖元導向式GIS 則可避免這項缺點。它將圖形資料視爲一種地圖圖元（Map feature），和圖幅沒有直接關係，它是由許多的圖形單位所構成，如點、線、多邊形等，視應用的不同，圖元之間可依使用者所定義之方式組合，使得GIS 可以擁有更複雜的查詢功能，即使檔案

相當龐大，也不會減低其效率。以下介紹由ESRI（ Environmental Systems Research institute ）所發展，目前最著名的圖幅導向式GIS的ARC／INFO 系統在地圖資料處理技術上，如何將Topology 觀念運用其上。

ARC／INFO 處理有關位置的資料，通常依據X，Y平面座標系明確地界定其值，亦可以拓樸學爲基礎找尋與其它特徵之間的關係，而通常都同時採用座標與拓樸來表示地圖數據化內容之特徵，而其特徵種類及屬性表格之內容包含以下七項：

1. ARC. 表示線的特徵，或是多邊形的邊界。一條線的特徵可以是由許多的ARC 組成。以拓樸學的角度言之，ARC 可以說是與它的端點（ End-points 或Nodes ）或它所畫分的兩個區域相連接。

2. POLYGON代表區域的特徵，它是由許多連續的ARC 所形成的邊界及其內部的一個標示點（ Label point ）所組成。

3. LABEL POINT 代表點的特徵。在拓樸上，Label Point是與其環繞在周圍的Polygon 相接。

4. ANNOTATION用來說明特徵的文字註解。在拓樸上，它不與其它特徵相連接，只用來顯示說明，而不參與分析的過程。

5. Point Features 它是以X，Y座標來定義位置，可用來表示山峯、水井、城鎭等位置。通常是以Label Point來代表Point Features 。

6. TICS可以說是某個地圖數據化資料的註脚點，或說是地理位置上的控制點。TICS使得所有的特徵能納入一般通用的座標系內。

7. COVERAGE EXTENT（或BND ）代表圖形的周界，它是一個定義出ARCS或Label Points 之極限座標的矩形。

有了前述地圖資料之特徵種類及屬性分配內容後，我們再來看看ARC／INFO 是如何處理點、線、面間的特徵關係的。

一、POLYGON TOPOLOGY

(1)將ARC 以連續的定義直線之座標儲存起來

● Node

A Polygon A

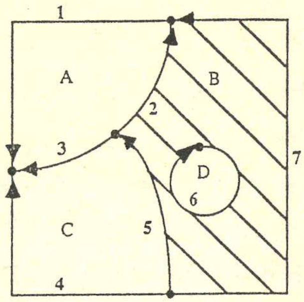
7 Arc number 7

Arc digitized in the direction of the arrow

（如 X_1Y_1 ，X_2Y_2 ，…，etc ），同時也將其座標的順序儲存，以決定 ARC 的方向性。

(2)將所有的 ARC 由 1 開始依序編號。

③根據 ARC 的數目與構成邊界的 ARC 表來定義 Polygon，見圖一，其中的 Polygon B 由四個 ARC 組成，包括存在其內部的 Island（ i。e。 Polygon D ），而 ARC 表中的"0"表示構成此 Island 的 ARC 將定義於後。再則，ARC 表中 ARC 編號之正負號決定 ARC 的方向性，負號表示欲形成封閉迴圈的 Polygon 時，必須將此 ARC 轉向者。



Polygon	No. of Arcs	List of Arcs
A	3	-1, -2, 3
B	4	2, -7, 5, 0, -6
C	3	-3, -5, 4
D	1	6

圖一 Example of polygon topology

二、ARC TOPOLOGY。

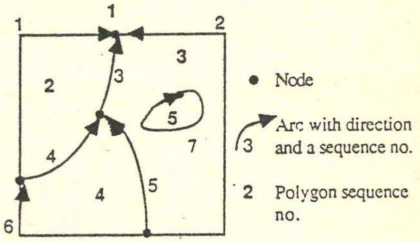
(1)將圖集內所有的 ARC 由 1 開始順序編號。

(2)所有的 ARC 均具有方向性，作爲起點者稱爲 From-node，終點者則稱爲 To-node。

(3)在依據 ARC 表建立 Polygon 之同時，亦將 Polygon 順序編號。

(4)由於每一個 ARC 均具有方向性，且左右兩邊各有一個 Polygon，因此可分別列出左、右 Polygon 之編號。

(5)至於矩形周界之 ARC，亦有左右 Polygon 之分，通常將矩形外圍的



Arc #	Left Poly #	Right Poly #
1	1	2
2	3	1
3	2	3
4	2	4
5	4	3
6	1	4
7	3	5

圖二 Example of contiguity

Polygon 之順序編號設定為 1。

(6)若 ARC 僅是用來表示線的特徵，而非構成 Polygon 之邊界，則其左右兩邊之 Polygon 的編號均為 0。

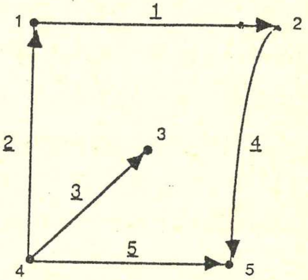
三、NODE TOPOLOGY

(1)根據 ARC 的起點為 From-node，終點為 To-node 的原則，將每一個 NODE 順序編號。

(2)當 ARC 的編號完畢，便會與其它的 ARC 比較，鑑定出那些 ARC 與之共用 NODE（即擁有相同之 X，Y 座標者），此時，共用之 NODE 編號必須一致。

(3)依據前述資料，可產生在某個 NODE 上相會之許多 ARC，如圖三，以 4 為 From-node 或 To-node 的 ARC 編號有 2，3，5。

藉著以上各種處理方式，可以清楚地知道此套地理資訊系中所應用之拓樸概念即是以簡單的點、線、多邊形之特徵為基礎來建立包含在地圖內的各項複雜特徵，更可以根據特徵之表格資料重新建立以下三種定義關係：



圖三 Example of arc-node topology

Polygon 的定表

Polygon 的相鄰性

ARC 之相接性

ARC #	FNODE #	TNODE #
1	1	2
2	4	1
3	4	3
4	2	5
5	4	5

● 1 Node number 1

4 Arc #4 digitized in the direction of the arrow

如此，由許多簡單的點、線集合，即可繪製出生動的地圖來。

因此，我們的結論是，Topology 拓樸乃一般化（Generalization）之

最高境界，也唯有此才能儲存地理上的特徵資料，而後，在進行地理上的多項分析時，只需藉著與其它特徵的相關位置來作存取的動作，毋須直接到座標的檔案中找尋絕對的位置。“相對”畢竟比“絕對”來得有彈性，靈巧及靈活多了，這也就是拓樸概念想要表達的最大宗旨，你說拓樸學到底有沒有用呢？

後記

本篇簡略介紹了應用數學之動向，並提供了一個數學概念應用於現今尖端資訊處理系統的實例，我們所想要表達的是，請不要把所有被認爲超理論性的書本看成死的，先人遺留下來跟不上時代的古板觀念，事實上，這些觀念涵養經過時代的洗滌，常常能夠衍生出新的文化，新的科技，我們的生活不也都是從舊中求新，新中求變的嗎？愼思！

參考資料：

數學誕生的故事

CAD／CAM雜誌

自動化科技1990年4月

PC ARC／INFO STARTER KIT User Guide.

數學科學與天體力學300年

高　飛譯

V. I. Arnold 著　　王繼海校

本文節自數學傳播十三卷四期

自從牛頓的《自然哲學數學原理》問世至今，已整整三百年了。牛頓這一著作奠定了現代理論物理學基礎，對科學發展全部進程，都產生了巨大影響。書中不少章節，現已發展成爲理論，對此，已寫出了成千上萬的書。

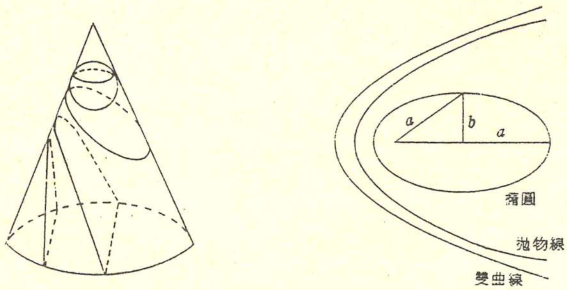
1.牛頓的書，主要爲了論述如何解決如下數學問題：證明在到與吸引中心的距離平方成反比的引力作用下，被吸引物體沿橢圓運動，而吸引中心在其中一個焦點上（當初始速度足夠大時，物體也可能沿其它錐截曲線——拋物線和雙曲線——運動）。換句話說，即根據牛頓萬有引力定律，推出刻卜勒行星第一定律（行星沿橢圓軌道運行，太陽位於其中一個焦點上）。

爲此目的，牛頓遠遠地發展了力學的數學工具，從大家熟知的牛頓三定律直到月球攝動理論。

2.無論是萬有引力定律，還是牛頓定律，都不是牛頓發現的。慣性定律（牛頓第一定律）始於伽利略。惠更斯在1659年推導了圓周運動的向心力公式（爲此，需要掌握牛頓第二定律）。1663年，惠更斯在倫敦皇家科學院會議上，敘述了能量和動量守恒規律。

刻卜勒（1609）寫道：「如果地球停止吸引，所有海水都將湧入月球。」引力平方反比定律，已見於1645年I. Biot所著書中。

激發牛頓認眞研究引力的推動力，是虎克的一封信。虎克是始建於1662年的皇家科學院的學監，根據規定，學監有責任在每周舉行的科學院會議上演示二三種證明某些自然定律的實驗。這些定律不一定是他本人的發現，也可得知於和其他學者的通訊，或取自出版物等，只要求是由實驗證明成立的



圓錐截線——橢圓、拋物線和雙曲線（左側）。圓錐的內接球面與橢圓平面在焦點相切。如果作用力為引力，且反比於到吸引中心距離平方，則物體將沿錐截曲線運動。地球軌道為一橢圓，太陽位於其中一個焦點上。軌道的偏心率現在等於 $\frac{1}{60}$ （ $e = \frac{c}{a}$ 為偏心率），而二十萬年前約為其3倍。

定律。

虎克忠實地完成了自己的使命，在長達四十年的期間裏，證明了大量自然規律。他個人，一生中發現的規律達五百以上。其中一些規律，至今仍以虎克命名，如彈性基本定律：回復力正比於對平衡位置的偏離。其它一些規律，被歸屬於另外的作者（如氣體彈性定律，作為助手虎克的發現，首先在波義耳的書中發表，現稱為波義耳——馬略特定律）。

3.由於每周都必須證明幾項自然規律，虎克常常很匆忙，無暇顧及自己所發現規律的數學表述。1679年底至1680年初，在與牛頓的通信中，虎克把自己關於引力的一些想法告知牛頓：⑴被中心力所吸引的物體，當力的大小反比於距離平方時，將沿偏心的類橢圓線（即類似於橢圓的曲線）運動；⑵實驗已經證明，地球引力隨高度增加而減小；⑶如同彈性力在趨向平衡位置時變弱一樣，當物體向礦井下落時，引力也將減弱，因此（在無阻力情況下）落體軌道將類似橢圓，其中心即在地球中心處。

虎克未能精確確定軌道形狀。看來，他用圖解法積分運動方程，或者利

用了某種特殊的模擬計算器（虎克曾對沿平面、球面，或者其它曲面運動的擺進行實驗，他指出，這些實驗，視表面不同模擬的引力規律亦不同）。

4.虎克希望，牛頓以其卓越的數學方法，定能證明軌道的橢圓性。牛頓也的確完成了這一任務。他用幾何方法的證明曾經是（而且仍然是）異常複雜，這使牛頓清楚地意識到，虎克「所斷定的比他所知道的要多」。因此，在進一步的工作中，他避免引用虎克。哈雷在1686年曾勸說牛頓在《原理》中提及虎克（虎克在1666年和1674年就表過關於引力的論文），在與哈雷的通信中牛頓曾以一段話表達了自己關於數學家（牛頓）與物理學家（虎克）對待科學的差異，這些話時至今日仍有現實意義，牛頓寫道：“發現一切的數學家，應滿足於馱重的牲畜和枯燥無味的計算者的角色，而另一個人，他什麼也不能證明，只是攫取一切，僭望一切，並囊括其前輩及後人的全部榮譽”。

牛頓於1714年斷言，他在1665或1666年發現了距離平方反比規律（關於蘋果落地的軼聞，是牛頓的外甥女大約在1726年向伏爾泰講述的），而軌道的橢圓性，則是在1676或1677年證明的（即在與虎克通訊之前）。後一日期似乎是可疑的，至少，在1684年以前，牛頓從未向任何人談過自己的證明。而且他什麼也沒有發表過。

早在1676年，牛頓就寫道：“人應當作出抉擇——或者什麼都不發表，或者用一生去保衞自己的發明權。看來，他兩者都做到了：首先，他什麼也未發表過；其次，不斷進行關於發明權的爭辯（與虎克、萊布尼茲、弗萊斯蒂得等等）。

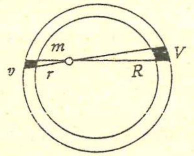
5.證明軌道的橢圓性之後，牛頓仍然不認爲引力定律已經證明。他注意到，地球不是一個點。當然，在吸引物體遠處，其引力接近於將該質量放於物體中心處的引力。但是引力定律的導出，是建立在地球對月球的吸引和向地面落石（或蘋果）這兩者對比基礎上的。在計算對月球的吸引時，地球尚可認爲是一個點，但對石塊，將是另外一種情況。需要證明，雖然地球的不同部位沿不同方向吸引石塊，但其合力對石塊的作用相當於將地球全部質量集中於中心。

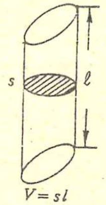
對這一事實的幾何證明（如《原理》中所敘述的，其中包括關於完整的球殼對內部點完全無吸引的證明）是要克服許多困難，這在當時也只有牛頓力所能及。

牛頓的這些定理的現代證明基於流體力學考慮，最早由拉普拉斯提出。問題在於，不可壓縮流體唯一可能的球對稱流，是沿徑向的流，其速度與到中心的距離的平方成反比。〔這是因爲，單位時間通過半徑爲任何值的球面的流量均相等而球面積正比於半徑平方。與此同理，從中心源向外飛散的粒子（例如太陽光子）通量強度反比於到源的距離平方。〕

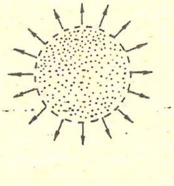
於是，點質量的引力場在數學上與不可壓縮流體速度場一致！在此意義上，超距作用“變成”了近距作用。

由此立即可得牛頓關於球的引力定理。的確，任意質量系統的引力場在質量之外具有同樣的“不可壓縮性”（由於總場的通量等於分通量之和，所以，不可壓縮場之和也是不可壓縮的）。





牛頓對球面層引力的計算，來自v和V體積元的引力作用於m物體，兩者方向相反，大小相等，因爲體積元v和V相應正比於距離r和R的平方（稜柱的體積等於稜邊長ℓ乘以垂直於該稜邊截面積S）。於是，作用於球面層內的物體的合力等於零。



沿徑向向外流動的不可壓縮流體的速度場。速度大小反比於到中心距離的平方，因爲單位時間通過任意球面的流量都相同（流體源位於中心）。力的變化也按相同規律。

由球對稱的質量分布所產生的引力場仍然是球對稱的，在這些質量之外是不可壓縮的，因此，其強度反比於到質量中心的距離。比例常數由以下條件確定：通過包含全部源的球面的通量等於源的總強度。因此，這一比例常數對於所有球對稱的質量分佈都是相同的，其中包括集中於中心的質量。

6.牛頓的主要結果——在按距離平方反比規律減弱的場中軌道爲橢圓——可以從虎克定律和牛頓定律之間的特殊對偶關係中得出。

一般說，對正比於到吸引中心距離的 a 次方的引力規律，存在着對應的規律，其方次A由條件（$a+3$）（$A+3$）$=4$ 確定。對於虎克定律，$a=1$，因此，牛頓定律（$A=-2$）與其對偶。

互偶的定律之間的聯繫在於：將按 a 次方規律運動的軌道乘以 $d=\frac{a+3}{2}$ 次方，則此軌道即過渡爲按A次方規律運動的軌道（兩種軌道均位於複數平面上）〔《原理》出版後三百年所發現的這一事實，可以通過二次微商驗證〕。

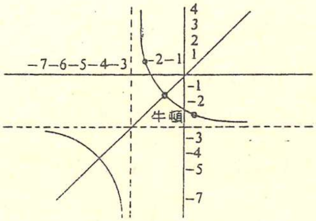
按虎克定律，運動軌迹爲橢圓，而吸引點在其中心（簡諧振動的初等理論）。

牛頓定律（$A=-2$）與虎克定律（$a=1$）互偶，其軌道可通過將虎克的軌道乘以二次方得到（$d=2$）。原來，當對複數取二次方時，虎克的橢圓（中心在原點）即轉化爲牛頓的橢圓（焦點在原點）！

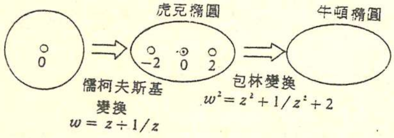
天文學家包林的這個定理，最簡單的證明方法是利用儒柯夫斯基函數 $w=z+\frac{1}{z}$（此函數也用於計算機翼升力）。當變數 z 沿中心在原點的圓周取值時，變數 w 的複數值的焦點爲 ± 2 的虎克的橢圓上，而儒柯夫斯基函數的平方 $w^2=z^2+\frac{1}{z^2}+2$ ，將仍沿橢圓取值，但其焦點已移至原點。

於是，牛頓引力定律的橢圓性，可從虎克定律的橢圓性推導出來。順便指出，虎克定律可作爲均勻地球內的礦井中落體規律而得到實現。虎克曾設想過這一規律，而牛頓證明了它（《原理》中的定理XXXIII）。

錐截曲線理論是古希臘數學家建立的，兩千年後，牛頓將其應用於天體力學，成爲一種基本工具。這是「數學在自然科學中具有不可思議的效力」的一個光輝例證。1979年諾貝爾物理獎得者溫伯格，對於數學家超前物理學前這一令人驚奇的現象這樣寫道：「一些數學家出賣魂給魔鬼，以換取何種數學在許多年後將爲物理學家所應用的信息。」



虎克定律與牛頓定律的互偶性。引力正比於到中心距離 a 次方的引力定律，與引力正比於到中心距離 A 次方的引力定律互偶，這裡 a 與 A 滿足公式（ a ＋ 3 ）（ A ＋ 3 ）＝ 4 。虛線爲其漸近線。虎克定律（ a ＝1 ）與牛頓定律（ A ＝－ 2 ）互偶。在《原理》中還討論了－ 1 次方定律與－ 5 次方定律的自對偶。



把圓變換爲虎克橢圓的儒柯夫斯基變換和把虎克橢圓變換爲牛頓橢圓的包林變換。對 w 取平方，中心爲零點的橢圓化爲焦點在零點的橢圓（ 這從w^2的公式可看出 ）。由此可解釋引力場中軌道的橢圓性。在圖上還畫出了虎克引力場和牛頓引力場中，向徑掃過的扇形。

7. 無論是世界體系的發現，無論是理論物理的創建，也無論是天體力學的建立，在公元1700年以前，都未納入劍橋大學或皇家科學院的年度計劃或遠景規劃。長達七百頁的《原理》是牛頓在哈雷的堅持請求下，用一年半的時間完成的。由於此書不在計劃之內，哈雷不得不自己出錢出版。

在此期間，牛頓的特立尼蒂學院任教授。當時他只有三名學生。他講授算術、地理、光學以及其它一些課程。僅在秋季學期授課，（每年十講）每次講一個半小時，有時，沒有一個學生來上課（牛頓的課以難懂著稱），牛頓只好回家。

牛頓把更多的時間和精力用於研究煉金術和神學，他的主要發現都是在他23到24歲時這兩個學年中作出的。在《原理》之後（當時牛頓 44 歲），他脫離了科學工作。

1696年，牛頓被任命爲倫敦造幣廠管事，後來又升任廠長，並在由他過去的學生Halifax 勛爵所領導的經濟改革中發揮了重要作用。Halifax 是英國銀行的創建者，3位英國勛爵大法官（Lord Justice）之一，當威廉三世不在時，三位大法官負責管理國家。

始於內戰，終於1688年的"光榮革命"，在英國延續了幾十年的革命變革，使國家的經濟陷入困境。過去幾十年積累的各種弊端，要求經濟改革。在這一過程中，不得不及時停止舊的無聲望貨幣的流通。

牛頓在短期內未增加一台幣機床就把貨幣的鑄造增加8倍。與此同時，進行了搜尋和偵察，僅在1697年一年，就向法院提出一些案件，結果約有20名造僞幣者被處決。

1703年虎克去世，牛頓成爲皇家科學院院長，直至1727年逝世。

8. 在《原理》一書所包含的一些最重要的物理原理中，需要指出關於時空相對性的思想（"在自然界中既不存在靜止的物體，…也不存在均勻的運動"。）；關於存在慣性坐標系的假設；決定性原理——世界上所有粒子的初始位置和速度，決定其未來和過去。

過去表現爲混沌的宇宙，在《原理》之後乎變成了某種調整好了的鐘錶。基本原理的這種規律性和簡單性（據此可推導出各種觀測到的複雜的運動

），在當時被認爲是存在上帝的證明。牛頓寫道：“太陽、行星和彗星如此美妙的聯合，只有按照智慧超群、威力無邊的人的旨意才能發生。他掌管一切，不是作爲世界的靈魂，而是作爲宇宙的統治者，即占有一切的上帝。”

理論物理在牛頓建造的天堂中逗留了二百餘年，直到量子力學和相對論粉碎了這些幻覺。

在這裏，甚至簡要地羅列《原理》的主要具體成就，也都是不可能的，故僅限於指出以下幾點：極限理論的建立（與現代理論僅有符號上的差異），阿貝爾積分超越性的拓樸證明（引理ⅩⅩⅧ），稀薄介質中高超音速運動阻力的計算（僅在宇航時代才得到應用），太陽引起的月球攝動的計算。

9.牛頓之後天體力學的發展，表現爲萬有引力定律所取得的一系列巨大成就：觀測上的偏離，被解釋爲没有精確計算攝動所造成（著名的例外——水星近日點的進動：觀測值爲每百年576″，而攝動理論僅給出533″。不足的43″只能由廣義相對論予以說明。新物理學常常誕生於對最後幾位數的修正！）

引力論的第一個巨大成就是預言哈雷彗星的回歸。哈雷並未發現公正地以他的名字命名的彗星。他覺察出1456，1531，1607和1682年彗星軌道的相似性，並且大膽預言彗星將在76年後，即在1758年回歸。但是，由於木星和土星的攝動，彗星的回來遲了，實際上是在1759年4月經過近日點的（根據Klero的計算，對75年的周期，它將遲到618天），這與Kl-ero的預言幾乎一致。

引起對引力定律的普遍性和精確性產生懷疑的另一現象是緩慢的但却是毫無疑義的木星加速和土星的減速（刻卜勒1625；哈雷1695）。如果這一過程繼續千萬年，它將使太陽系完全改觀：木星將接近太陽，土星將遠離太陽。

全部行星質量總和僅約爲太陽質量的千分之一，因此，行星運動中相互吸引所造成的攝動可達其所經過路程的千分之幾。如果攝動積累幾千年，行星可能隕落在太陽之上，並相互碰撞，地球也可能因遠離太陽而凍結。

爲什麼所有這一切均未發生？問題在於，行星在不同時間所經歷的攝動

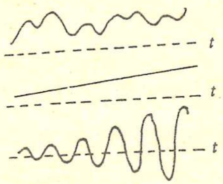
，不總是沿同一方向，而且具有振盪的性質。

數學上，這種攝動表現爲各分量之和，而分量之形式爲：$\cos \omega t$ 和 $\sin \omega t$ ——周期的，並不危險的攝動。積累的攝動，其分量隨時間線性增長，或者表現爲振幅隨時間增長的振盪：$t\cos(\omega t+\theta)$。和時間成正比的危險的分量 at 稱爲長期的，因爲，即使係數 a 很小（例如千分之一量級），經過若干世紀，攝動也將變得很大。

這就產生了長期攝動問題：由於宇宙時間尺度十分巨大（幾十億年），甚至軌道尺度的異常小的長期攝動（如果確實存在的話），也將根本改變全部太陽系的歷史，其中也包括地球的歷史。

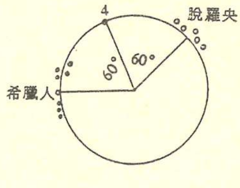
10.問題在於，長期攝動是否眞正存在，或者只不過是一種假象，是不成功的數學計算的結果。（例如，考察按 $x=\cos \omega t$ 振盪的擺，並假設頻率 ω 產生一小擾動 a，成爲 $\omega+a$。這時，將攝動展開爲 a 的級數，將有 $\cos(\omega+a)t \simeq \cos \omega t - at\sin \omega t$。在這一展開中包含着危險的，帶 at 的"混合"項，與此同時，實際的擺動幅度是有限的，完全不隨時間增長。）

對行星攝動的分析，最後使拉格朗日（1776）和拉普拉斯（1784）得到關於太陽系穩定性的拉普拉斯定理。根據這一定理，即近似在同一平面



周期的（上圖），長期的（中圖）和混合的（下圖）攝動。長周期的攝動與長期的攝動的差異只有經過極長的時間間隔 t 才能表現出來。土星對木星的攝動周期爲九百年，過去一直認爲這一攝動是長期的，並將導致木星不斷向太陽接近。

“希臘人”和“脫羅央”人（“特洛伊人”）——木星軌道上運行的兩組小行星，一組超前木星 60°，另一組落於 60°。拉格朗日於 1772 年得到與此相應的三體問題的精確解一直到 20 世紀初，這一精確解都僅僅被當作數學奇聞。



上，沿互不相交的近似爲圓的橢圓軌道向同一方向運動的諸行星相互之間的攝動，僅導致偏心率和在零點附近傾斜的接近周期性的振盪。與此同時，行星到太陽的距離則在初始值附近振盪。換句話說，刻卜勒橢圓的長軸没有長期攝動。

拉普拉斯定理並未被拉普拉斯嚴格證明，因爲拉普拉斯將攝動表示爲級數，並只證明在展開式前幾項中不包含長期分量。

後來證明，級數的所有項中均不包含長期項或混合項。然而，據此（級數中不包含長期項）尚不足以得出結論，確認刻卜勒橢圓長軸永遠保持在其初始值附近，因爲級數本身是發散的（其中一些項很大）。級數的前幾項在有限時間範圍內給出很好的近似，但不能據此判斷軌道在宇宙時間尺度內的行爲。

至於木星和土星的相互攝動，正如拉普拉斯在1784年所指出，它們僅導致軌道長周期的，而不是長期的變化，其周期約爲 900 年。在 450 年內，攝動積累造成的木星和土星的移動不足一度。

軌道幾乎位於同一平面，這是極爲重要的。如果月球軌道由於某種原因翻轉 90 度，則月球的偏心率在太陽攝動的影響下將如此迅速增長，以致 4 年內月球將嵌入地球（M. V. 利多夫，1963）。

長時期以來，月球的運動一直是最爲複雜的問題。因爲月球距地球很近，我們可以紀錄其微小的位移，於是在級數展開中就不得不考慮高階小量項。早在1693年，哈雷就已指出，把阿拉伯和古代觀測月蝕的數據與當代數據加以比較就可發現，月球繞日運行周期以及運行軌道有所減少（“長期加

速度”爲每百年10″）。

1770年，巴黎科學院設獎徵答：引力理論能否解釋上述現象？軌道變短是否將導致月球墜地？歐拉在應徵論文中寫道：“月球長期運動的不同不可能是引力所引起，這似乎已經以不可置疑的明顯性被牢固確立。”他以介質的阻力解釋月球的加速，並認爲加速將導致災難。

但是，到了1787年，拉普拉斯又把月球加速與地球軌道偏心率在行星攝動下的長周期振盪聯繫起來。這些振盪的周期爲萬年量級，因此，此現象像是長期性的。

地球軌道偏心率的振盪——是引起出現冰川的主要因素之一。由於這種振盪的作用，列寧格勒的有效經度，在幾萬年內將從Taimer 的經度變到基輔的經度（M. milankovich，1939）。

至於談到月球，拉普拉斯的解釋只對了一半：除地球軌道偏心率的變化外，還應考慮由潮汐摩擦引起的月球的長期加速（根據某些估計，這種效應的幾乎一半要歸因於白令海）。月球的這一長期加速是表面上的。這可以用地球旋轉變慢加以解釋。由於潮汐摩擦，地球自轉周期（晝夜長）將逐漸增加，經過約 10 億年時間地球晝夜長將增加一倍（由於大氣層和大洋中物質重新分佈而引起的晝夜時間長的季節性振動還要大一百倍）。而月球則由於潮汐摩擦而逐漸遠離地球—— 10 億年遠離兩倍。

11.兩體運動問題已由牛頓解決，與此同時，即使是3個質點的運動問題，對於一般初始條件下的解析解，至今不但沒有求得，甚至在一定意義上可以說這種解不可能得到（三體問題在《原理》中已被提出）。

儘管如此，歐拉還是指出了某些專門的解（1767）。在這些特解中，三體相互位置不變——或者位於同一直線上，或者位於正三角形的頂點上（拉格朗日，1772）。

這樣一些解，在發現木星的軌道上有兩組小行星“希臘人”和“脫羅央”（特洛伊人）與太陽和土星形成兩個等邊三角形（“希臘人”落後於木星，而“脫羅央”則超前木星）之前（1906年），似乎僅僅是數學奇聞。

三體位於三角形頂點的解是穩定的，至少在線性近似下是這樣。與此同

時，三體位於同一直線的解明顯不穩定，因此，直至最近一些年曾一直被認爲是沒有實際意義的。

但是，在宇航時代，情況改變了。位於地球和太陽之間由歐拉解所確定的點上（此點稱爲秤動點）的空間站，滿足觀測太陽的最佳條件。這個狀態不穩定，猶如“頭脚倒置”的擺。空間站相對秤動點極小的偶然偏離，將隨時間增長。但是，由於秤動點與精確解相對應，攝動的增長速度很小。爲不斷校正軌道偏離，使空間站永遠停留在秤動點附近，所消耗的能量也不是很大（允許偏離度愈小，能量消耗也愈小）。當正確選擇校正方法時，其它物體攝動的影響不改變最後結果（P. E. Eljasberg，1986）。於是，18 世紀發現的精確解，今天在宇航中得到應用。

12.在牛頓時代太陽系終止於土星。天王星於 1781 年 3 月 13 日被 Herschel，偶然發現（按照當時傳統，在培養專門人才時普遍限制其職責範圍和容許積極活動的領域，Herschel 不受傳統約束，選擇了一條未經開闢的新路）。

1846 年 9 月，在 Adams 和 Leverrier 根據天王星的攝動所預言的位置上發現了海王星。可以說這顆行星是在“筆尖上”發現的。這一發現成爲萬有引力定律的新勝利，不過，預言的軌道與實際軌道相差甚遠（海王星與太陽的平地距離爲 30 個天文單位，而不是預言的 38 天文單位；偏心率也比預言的小若干倍）。

有些研究者認爲，海王星在所預言的位置被發現純屬僥倖。原來，Adams 和 Leverrier 的計算是以當時觀測的天王星攝動數據爲依據的，同時還假設海王星軌道半徑遵從“Bode 定律”（由 Tichius 發現的）。但這個假設是不正確的。

Tichius 的經驗定律（Bode 於 1772 年發現了 Tichius 發表的論文）給出下列軌道半徑：4（水星），4＋3（金星），4＋3×2（地球），4＋3×4（火星），4＋3×8（？），4＋3×16（木星），4＋3×32（土星）4＋3×64（天王星）。半徑 28 是一個空白，因爲在火星和木星之間不知有任何行星存在。於是，開始尋找這個缺少的行星。

1801年1月1日發現小行星谷神星（直徑約一千公里）之後，不久又相繼發現智神星（直徑600公里），灶神星（直徑540公里），以及婚神星（直徑250公里）。所有這些小行星的軌道均位於火星和木星的軌道之間。現在，天文學家定期觀測2500個類似天體的運動。它們統稱之爲小行星。這些小行星的直徑從幾百公里到幾百米。看來，直徑爲D或大於D的小行星數目反比於 D^2 。據認爲，直徑大於一公里的小行星數目達一百萬之多。

13.有一些小行星的軌道接近於地球軌道，另外一些小行星在行徑火星或土星附近時，可能大大偏離原來軌道，也可能靠攏地球。

根據現代資料，地球與直徑半公里以上的小行星相遇平均約爲十萬年一次。小行星與地球相撞時所形成的坑窩，其範圍可達幾十公里（Kaluk城即位於坑窩上），有時甚至上百公里（西伯利亞北部Popigay河口附近）。特別大的小行星能穿透地殼（F.L.Whipple猜測冰島就是這樣形成的）。

在最近4億年內，與直徑爲 20 公里的小行星愛神星相撞（碰撞速度爲 14 公里／秒）的機率，按現代估計約爲五分之一。相撞後形成的坑窩的直徑約爲250公里。

與巨大的小行星相撞的後果類似核戰爭：大氣層實際上不能減低小行星的速度，於是，小行星的全部動能，都在與地球相撞的頃刻之間迸發出來。

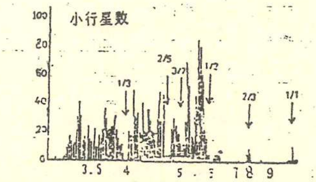
特別强的碰撞可能有生態學的意義，使個別大陸，甚至整個地球上的某些物種消亡。

由此看來，與小行星相撞爲作用可與人類自身活動所造成的後果相當，它並不威脅地球的完整性。

14.大多數小行星繞日公轉周期均在火星和木星公轉周期之間，但分佈極不均勻。1857 Kirkwood 發現存在“窗口”——周期軸上無小行星的空白區。這些窗口與共振（可公約周期）相對應：有一個窗口位於木星的半周期附近，另外一個位於木星周期$\frac{2}{3}$處。此外，還有分別與$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$等相對應的窗口，而且，共振等級（指分數的分母）愈高，窗口愈窄。

與窗口類似的間隙，也存在於土星環中。位於A環和B環之間的一個最

大間隙，早在1675年即已被Cassini 發現。在《旅行者－２》所拍攝的B光環的照片上，光環的精細結構清晰可見。寬度爲３萬公里的B環，由相互之間有很寬間隔的一系列環所組成，其中每一個環又分爲若干間隙較窄的小環，等等——看來，一直分到環的寬度與土星環厚度（公里量級）相當爲止。



基爾克伍德“窗口”，小行星“廻避”與木星周期可公約的軌道：在小行星的分佈中存在一些窗口，其周期相應爲木星周期的１／２，２／３，３／５，等等。

土星光環中的間隙，與土星衞星共振相對應。幾年前，在一次從飛機上進行的天王星遮掩恒星的觀測中，偶然發現了天王星的光環。根據對環的共振結構的分析，蘇聯天文學家N.N.Kharkavo和A.M.Fridman預言天王星也有一系列衞星。一年半之後，1986年1月24日，當《旅行者－２》掠過天王星附近時，所有這些衞星都被發現了，而且正好在所預言的距離之處。這是牛頓萬有引力定律的又一次勝利。

15.在歐拉、拉格朗日和拉普拉斯手中，牛頓的數學方法獲得了巨大的技巧上的發展，到Leverriex時代，已經達到理論與觀測的高度一致。然而，

在思想方面，所有這些複雜的計算仍未超出牛頓所創建的攝動理論的各種方案。

從惠更斯和牛頓的天才發現到黎曼和龐加萊將數學幾何化，其間長達200年的時期似乎成了只不過充滿了各種計算的數學沙漠。

龐加萊，拓樸學以及現代動力系統理論的奠基者，從嶄新的角度提出天體運動的問題。他没有尋求天體位置隨時間變化的公式，而是提出了關於天

體軌道的定性方面的問題，行星是不是相互接近，它們是否會墜落到太陽上，或者遠離太陽而去，等等。拉普拉斯“定理”未能回答這些涉及時間間隔無限的問題，因爲正如龐加萊所指出，拉普拉斯的級數是發散的。

從龐加萊的《天體力學新方法》和《Analysis Situs》（拓樸）開始，從數學——定性數學誕生了。關於這一新數學在天體力學中的應用，這裏只能略談幾句。

原來，三體或多體系統中的運動，視初始條件如何，或者表現爲規則的，或者表現爲混沌的。行星沿刻卜勒橢圓軌道的運動是規則運動的例子。這一橢圓軌道在無限長時間內少許而緩慢地改變其偏心率，同時在攝動的作用下緩慢轉動，但永遠停留在略微搖擺（在固定位置附近）的平面上，正如拉普拉斯的近似理論所描繪的那樣。

Kirkwood 窗口附近小行星的運動，是渾沌運動的例子（A. I. Neustadt, 1985, J. L Tennison 等 1986）：與木星的共振相互作用導致偏心率“偶然的”，不規則的，忽而朝這一方向，忽而又朝另一方向的變化。偏心率這種連接不斷的“跳躍”，實際上是各不相關的。根據概率理論，無規則的變化的偏心率有時會變得很大，這時小行星便有可能隕落，例如落到火星上。有一種假說認爲，正是這種拋擲小行星的機制，經過上億年終於導致形成窗口（Wisdom, 1985）。哈雷彗星軌道也在不規則地變化（B.V. Chirikov, 1986）。

規則運動和混沌運動的初始條件是相互摻雜的，如同有理數和無理數那樣（但有一點差別：無論規則運動，還是混沌運動的概率都是正的，而隨機選擇一個數爲有理數的概率等於零）。於是，即使行星和小行星的運動是規則的，初始狀態足夠小的攝動也可以使其變成混沌的。不過，幸而這種攝動的發展速度不大，因此，只要初始狀態攝動足夠小，混沌運動開始產生影響的時間，比太陽系存在的時間長很多。在最近 10 億年內太陽系不會明顯變化，而牛頓所描繪的“鐘錶機制”將繼續正常運轉。

（本文轉載自「數學譯林」，七卷四期，原譯文翻譯自俄文期刊，本刊轉載時，將俄文人名轉換成英文）

Kolmogorov配適檢定
(goodness-of-fit test)

The Second Circle

作者：于鴻福

在配適檢定問題上，所考量的是樣本值的分配和理論分配間一致的程度。就此問題，通常所使用的方法有二，即Pearson的卡方檢定(chi-square test) 和Kolmogorov 檢定。由於有關卡方檢定的介紹頗爲普遍，故本文以介紹Kolmogorov 檢定爲主。爲方便往後說明，我們仍將卡方檢定之一般程序略述如下：

設 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_N$ 爲隨機變數X之一組隨機樣本，將其分成C類(class) 並以 $1 \times C$ 列聯表記錄各類樣本數爲

類	1	2	…………	C	總數
樣本個數	O_1	O_2	…………	O_C	N

令 $F_{(x)}$ 是X眞實而未知的分配函數，而 $F^*_{(x)}$ 爲一完全明確之假定分配函數〔假如 $F^*_{(x)}$ 有參數未知的話，可由樣本加以估計〕，則虛無假設和對立假設爲

$$H_0: F_{(x)} = F^*_{(x)} \quad \forall x,$$
$$H_1: F_{(x)} = F^*_{(x)} \quad \exists x,$$

檢定統計量

$$T = \sum_{j=1}^{c} \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j}$$

其中 $E_j = P^*_j \cdot N \quad j = 1, 2, \cdots C$ ，而 P^*_j 表 H_0 爲眞時，X之觀測值在第 j 類的機率。

在棄卻與否的決定上，由於T的眞實分配難以得到，所以一般都使用大樣本時有 (C － 1) 自由度的卡方分配來逼近。〔若有由樣本估計 $F^*_{(x)}$ 的參數時，那麼，每估計一個參數就需減少一個自由度。〕

Cochran (1952) 對於有關資料的分組提供了一些建議，就是爲了使得卡方分配對T的近似效果不致太差，各類的期望值皆不應小於 1，且比 5

小的也不宜超過20%。由此，我們不難得知，在樣本數小時，利用卡方檢定可能就不太合適了。然而，Kolmogorov 檢定對於此種情形則可提供有效的處理方法。此法是Kolmogorov 於1933年所提出，以樣本的分配函數(empirical distribution function)可相當好地估計母體分配函數的概念為基礎發展而成，其有關結果略述如下：

令 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是一組取自一具分配函數 $F_{(x)}$ 之母體的隨機樣本，則所謂樣本分配函數即為

$$S_{n(x)} = \frac{1}{n}\left[\, x_i \leq x \text{的個數} \,\right], \; -\infty < x < \infty。$$

或者，將 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 排序，假定得 $x_{i_1} < x_{i_2} < \cdots < x_{i_n}$，則

$$S_{n(x)} = \begin{cases} 0 & x < x_{i_1} \\ \dfrac{R}{n} & x_{i_k} \leq x < x_{i_{k+1}} \\ 1 & x_{i_n} \leq x \end{cases}$$

定理.(Glivenko-Cantelli).令 $S_{n(x)}$ 是一組取自一具分配函數 $F_{(x)}$ 之母體的 n 個值的隨機樣本的分配函數，則

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{-\infty<x<\infty} \left| S_{n(x)} - F_{(x)} \right|\right\} = 0\right) = 1$$

i.e. $S_{n(x)}$ 殆遍均勻收斂到 $F_{(x)}$

由此定理，可得我們所要的結果。

推論.條件同上，則

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \left| S_{n(x)} - F_{(x)} \right| \to 0 \quad \text{in probability}。$$

現在我們開始敍述 Kolmogorov 檢定及其有關的性質。

令 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 為一組具共同但未知之分配函數 $F_{(x)}$ 的隨機樣本，而 $F^*_{(x)}$ 為一完整明確之假定分配函數，則其虛無假設與對立假設為

Hypothesis：

A.(雙尾檢定)

H_0：$F_{(x)} = F^*_{(x)} \quad \forall x$,

H_1：$F_{(x)} = F^*_{(x)} \quad \exists x_0$

B.(單尾檢定)

$H_0 : F_{(x)} \geq F^*_{(x)} \quad \forall x$

$H_1 : F_{(x)} < F^*_{(x)} \quad \exists x$

C.(單尾檢定)

$H_0 : F_{(x)} \leq F^*_{(x)} \quad \forall x$

$H_1 : F_{(x)} > F^*_{(x)} \quad \exists x$

令 $S_{n(x)}$ 爲 x_1 , x_2 , … , x_n 所決定之樣本分配函數，那麼，上述三種假設之檢定統計量定爲

Test Statistic :

A. $T = \sup\limits_{x} |F^*_{(x)} - S_{n(x)}|$

B。 $T^+ = \sup\limits_{x} [F^*_{(x)} - S_{n(x)}]$

C。 $T^- = \sup\limits_{x} [S_{n(x)} - F^*_{(x)}]$

Decision Rule :

在顯著水準 α 下，棄卻 H_0 之 T ， T^+ 和 T^- 所對應的 $1-\alpha$ 百分點 $W_{1-\alpha}$ 可由已製成的表中查得。

Kolmogorov 檢定除了有適用於小樣本的優點外，還有另一特點就是，在雙尾檢定中，可像未知參數之區間估計一樣，利用 $1-\alpha$ 百分點 $W_{1-\alpha}$ 以得到母體眞實而未知之分配函數 $F_{(x)}$ 的信賴帶(confidence band)。

令 x_1 , x_2 , … , x_n 表一組分配函數 $F_{(x)}$ 未知之連續隨機樣本，且 $S_{n(x)}$ 爲樣本分配函數。則 $F_{(x)}$ 信賴係數(confident coefficient) 爲 $1-\alpha$ 之信賴帶的建造步驟爲:

(i) 查出雙尾檢定之 $1-\alpha$ 百分點 $W_{1-\alpha}$。

(ii) 在 $S_{n(x)}$ 上方距離 $W_{1-\alpha}$ 處畫一曲線，稱之爲 $U_{(x)}$ (即將 $S_{n(x)}$ 垂直上移 $W_{1-\alpha}$)。

(iii) 在 $S_{n(x)}$ 下方 $W_{1-\alpha}$ 處畫一曲線，稱之爲 $L_{(x)}$ (即將 $S_{n(x)}$ 垂直下移 $W_{1-\alpha}$)。

那麼， $U_{(x)}$ 和 $L_{(x)}$ 間的區域即是 $F_{(x)}$ 之 $1-\alpha$ 信賴帶。不過，要注意

的是，因分配函數之值不會超過1，所以，當$U_{(x)}=S_{(x)}+W_{1-\alpha}$大於1時，則取其值爲1，即$U_{(x)}$不高過$y=1$之水平線。同理，$L_{(x)}$不低過於x軸。即

$$U_{(x)}=\min(S_{n(x)}+W_{1-\alpha},\ 1),\ L_{(x)}=\max(S_{n(x)}-W_{1-\alpha},\ 0)。$$

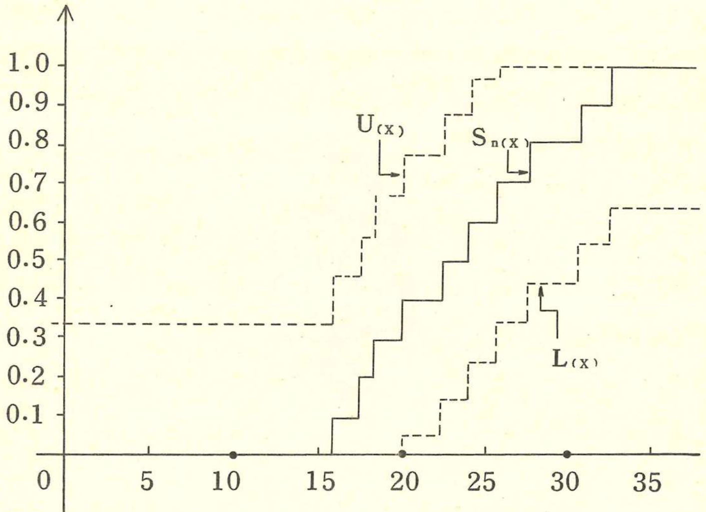
以機率式表示即爲

$$P\left[L_{(x)}\leq F_{(x)}\leq U_{(x)},\ \forall x\right]\geq 1-\alpha。$$

例：令18.2 24.0 32.3 30.6 17.4 25.7 22.5 20.0 27.5 15.9爲取自一分配函數$F_{(x)}$未知之母體的隨機樣本，則$F_{(x)}$之90％的信賴帶之做法爲

(i) 將此10個樣本從小到大排序得

15.9 17.4 18.2 20.0 22.5 24.0 25.7 27.5 30.6 32.3，畫出樣本分配函數$S_{n(x)}$（下圖中實線者）。



(ii)查表得0.90百分點$W_{0.90}=0.369$。

(iii)畫出$U_{(x)}$，$L_{(x)}$（圖中虛線者）。注意，$U_{(x)}$和$L_{(x)}$之值在0.1之間。

則二虛線間之區域即是$F_{(x)}$ 90％的信賴帶。

在此附帶一提的是，對於任一給定$\in>0$而言，若欲以$S_{n(x)}$估計$F_{(x)}$，而且其誤差在ϵ以內，則我們可以利用統計量T來決定出所需的最小樣本數。

有關Kolmogorov檢定各項性質之探討頗多，下面就其效力、一致性及與卡方檢定、母數法的常態檢定相比較等方面，列出一些結果，以期有助於我們對此檢定的了解。

1.（〔3〕Massey 1950）

設x_1，x_2，…，x_n是取自一具未知連續分配函數$F_{(x)}$之母體的隨機樣本。令$F_{0(x)}$爲一完全明確的函數。

假設：H_0：$F_{(x)}=F_{0(x)}$

H_1：$F_{(x)}=F_{1(x)}$，$F_{1(x)}\neq F_{0(x)}$

令$T=\max|F_{0(x)}-S_{n(x)}|$，$\triangle=\max|F_{0(x)}-F_{1(x)}|=|F_{0(x_0)}-F_{1(x_0)}|$對於某一$x_0$，對於顯著水準$\alpha$，令$W_{1-\alpha}$爲T之$1-\alpha$百分點。由於n↑時，$W_{1-\alpha}\cdot\sqrt{n}$↓，所以，當n足夠大時，$-W_{1-\alpha}\pm\triangle$和$W_{1-\alpha}\pm\triangle$會同號。故

(a)當n足夠大時，

$$\text{power}>1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\lambda_2}^{\lambda_1}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \quad \text{其中} \quad \begin{aligned}\lambda_1&=2\sqrt{n}(-W_{1-\alpha}\pm\triangle)\\ \lambda_2&=2\sqrt{n}(W_{1-\alpha}\pm\triangle)\end{aligned}$$

$$\text{i.e } 1-(\Phi(\lambda_2)-\Phi(\lambda_1))=1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \text{ 是檢定效力}$$

之下界。

(b)

$$\because \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad \therefore \text{power} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

即此雙尾檢定具一致性（consistent）。

(c)在有限樣本的情形下，此檢定具偏性（biased），即P〔棄卻H_0｜H_1〕>P〔棄卻H_0｜H_0〕。

2.（〔4〕Slakter 1965）

考慮一組有N個值的隨機樣本，並依大小將其分成k群，且設各群之機率爲P_i，$i=1,2,\cdots,k$。於假設

$$H_0: P_i=\frac{1}{k}, \quad i=1,2,\cdots,k,$$

下，Slakter對25個（N，k）組合：（10，5），（10，9），（10，10），（10，20），（10，27），（10，30），（10，33），（10，40），（10，50），（25，9），（25，10），（25，20），（25，27），（25，30），（25，33），（25，40），（25，50），（50，9），（50，10），（50，20），（50，27），（50，30），（50，33），（50，40），（50，50），進行每組10000次的模擬，得到的結果爲：一般而言，在上述的條件下，Pearson的卡方檢定比Kolmogorov檢定較具確實性（validity）i.e.眞實的α值大致和nomial α相等。而Kolmogorov檢定則較爲保守（conservative）。

3.（Lee 1966）

設從具分配$n(\mu, \sigma^2)$之母體中取一組5個值的隨機樣本，則對於假設

$$H_0: \mu=\mu_0$$

$$H_1: \mu=\mu_1,$$

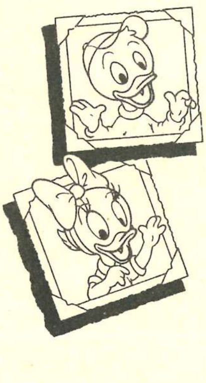
Lee針對$\mu_0-\mu_1$不同的值比較了Kolmogorov檢定與一常態的標準母數法檢定之效力，得如下之結果：

$\mu_0-\mu_1$ \ α (%)	0.10		0.05		0.01	
	Kolmogorov test	Normal test	Kolmogorov test	Normal test	Kolmogorov test	Normal test
0.5	31.65	43.48	25.09	29.91	8.66	11.35
1.0	74.95	82.99	61.57	72.27	33.16	46.41
1.5	94.93	98.09	89.50	95.58	68.19	84.80
2.0	99.50	99.93	97.89	99.77	90.53	98.40

由此可以看出，在如此並非理想的條件下，Kolmogorov 檢定之效力並不會比這常態檢定之效力遜色太多。不過，若上面的比較改爲針對變異數之差異做檢定時，則 Kolmogorov 檢定之效力會比此常態檢定之效力高！

在說明檢定效率（efficiency）方面，一個重要的概念即爲 A.R.E（asymptotic relative efficiency），有關Kolmogorov 檢定之 A.R.E討論，可見參考資料〔5〕第8章。

就一般的感覺來說，Kolmogorov 檢定似乎比卡方檢定較有效力，尤其在行爲科學方面，因所處理的時有小樣本的情形，故Kolmogorov 檢定頗見成效。



參考資料

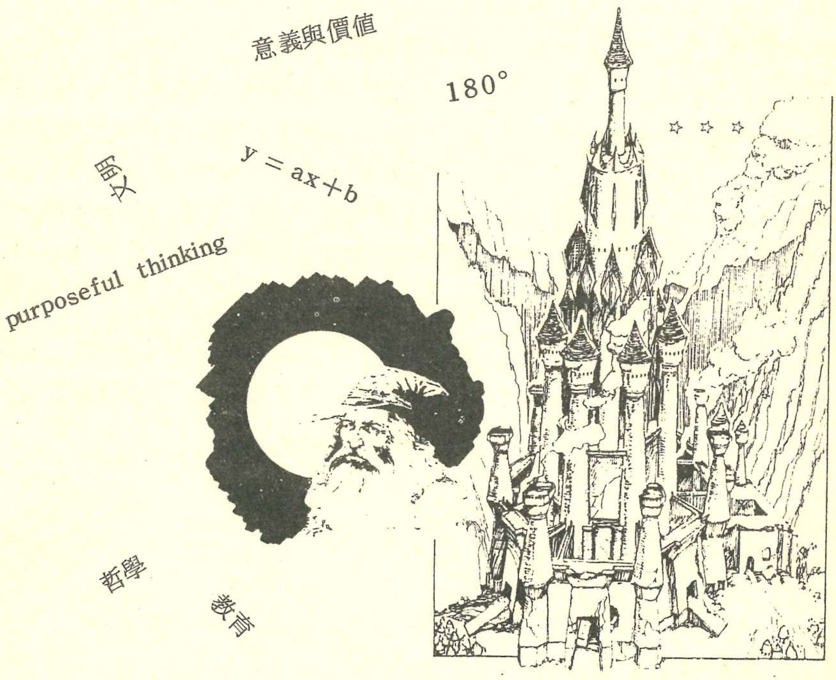
(1) W.J. CONOVER: Practical Nonparametric Statistics, 2nd, 1980, 華泰書局。

(2) RANDLES, WOLFE: Introduction to The Theory of Nonparametric Statistics, JPHN WILEY & SONS.

(3) Massey, F.J. (1950). A note on the power of a nonparametric test. The Annals of Mathematical Statistics, 21, 440–443.

(4) Slakter, M.J. (1965). A comparison of the Pearson chi–square and Kolmogorov goodness–of–fit tests with respect to validity. Journal of the American Statistical Association, 60, 854–858.

(5) Praft, Gibbons: Concepts of Nonparametric Theory, Springer–Verlag.



方陣環上的恒等式

指導教授：李白飛
整　　理：王彩蓮

一、前言

各位親愛的學弟妹們，不知你們平常是否注意到系上的演講公告？本篇的靈感便是來自於上學期末台大李白飛教授蒞臨系上之演講，實在是愛極了李老師深入淺出的演說方式“好東西要和好朋友分享”，所以啦！就好希望把它介紹給大家，可是，由於詞拙，愈想把它以原來的面貌呈現給你們，愈顯得它的冗長，眞的好希望系上能再次請李白飛教授來演講，這樣不但學弟妹能親身“如沐春風”（相信你們一定也會愛上它和“他”的！）而且我也可藉機再次獻花和…獻吻!!（上次錯失了一次良機，害我難過好久！）哇！不多寫了，轉入正題要緊，各位學弟妹們，請以堅忍不拔，愈挫愈勇的精神忍耐地看我慢慢道來。

二、各位同學在大學代數課中一定都學過環（ring），交換環與非交換環二種環，其研究對象不同，來源也不同，而在交換環與非交換環中最重要的例子分別是多環式環與方陣環，事實上，各位同學最先接觸到的非交換的經驗，不外乎是矩陣的乘法。

一個環R若可交換，對我們而言是很特殊的，我們可把R中任二個元素對調其乘法順序而不改變其結果，亦可如此來看，我們把x，y看成變數，考慮二個變數的多項式 $f(x,y)=xy-yx$，在交換環中我們發現對任意的兩個元素代入 $f(x,y)$ 恒等於零，所以對交換環而言，它滿足了 $xy-yx=0$ 這樣子的恒等式。

我們再看些非交換環的例子，如F為一個體（field），$M_2(F)$ 表佈於F上之二階方陣環，一般來講 $a, b \in M_2(F)$ $ab-ba$ 未必等於零，但是 $ab-ba$ 此交換子（commutator）有個性質，它們對角線元素和即跡（

trace ）恒等於零（ ∵ $\mathrm{tr}\,ab=\mathrm{tr}\,ba$ ），所以可把 $ab-ba$ 寫成 $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha\end{pmatrix}$

，其平方後等於 $\begin{pmatrix}\alpha^2+\beta r & 0 \\ 0 & \alpha^2+\beta r\end{pmatrix}$ ，可和 $M_2(F)$ 中任意元素交換，所以在 $M_2(F)$ 中有 $(ab-ba)^2c=c(ab-ba)^2$ 這樣子的恒等式。

那麼其它高階方陣是否也有類似的恒等式呢？答案是有的！在介紹之前，先介紹一下標準恒等式，我們考慮這樣的恒等式 $S_n(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{\sigma}(-1)x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)}$ 即把 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 做各種排列，加起來之前多個正負，視 σ 爲奇排列或偶排列而定，如 $S_2(x_1,x_2)=x_1x_2-x_2x_1$ 共二項，$S_3(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3-x_1x_3x_2+x_2x_3x_1-x_2x_1x_3+x_3x_1x_2-x_3x_2x_1$ 共六項（正、負各三項）稱此 S_n 爲標準恒等式，它在恒等式中是相當重要的，不難看出 S_n 具有下列特性：

1. 多重線性：即對 $x_1,\cdots,x_n$ 每個變數皆爲線性，例如對 x_1 而言，我們以 x_1+x_1' 代入後 $S_n(x_1+x_1',x_2,\cdots x_n)=S_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)+S_n(x_1',x_2,\cdots,x_n)$ 可拆開來，乘個常數 $S_n(\alpha x_1,x_2,\cdots,x_n)=\alpha S_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 係數可以提出來。

2. 交錯性：即任二個變數 x_i,x_j（$i\neq j$）若對調則差個負號，因爲這時奇、偶排列互調了，（同學們學過的行列式亦有此性質！）S_n 還有個簡單的性質，我們注意到如果把 $n+1$ 個變數做各種排列 (*) $S_{n+1}(x_1,x_2,\cdots x_{n+1})=x_1S_n(x_2,x_3,\cdots x_{n+1})-x_2S_n(x_1,x_3,\cdots x_{n+1})+\cdots+(-1)^n x_{n+1}S_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，會等於第一項是 x_j 的提出後乘上其它 n 個變數的排列，加起來　再乘個 $(-1)^j$（∵差個正、逆序），(*)告訴我們，如果一個環滿足了 n 個變數的標準恒等式 S_n，必滿足 $n+1$ 變數的標準恒等式 S_{n+1}。

現回到剛剛的問題，一個方陣環若是二階的，它滿足的恒等式可很快的寫出來，但高階的又如何呢？假始說 A 是個 n 維的代數（ algebra ）佈於一個體 F 上，（即它是一個環，又同時爲佈於體 F 上的向量空間）則這樣的代數必滿足了 $n+1$ 個變數的標準恒等式，即 $S_{n+1}(a_1,a_2,\cdots a_{n+1})=0$，

對任意的a_i（$i=1,2,\cdots,n+1$）$\in A$，爲什麼呢？因爲A有組基底$\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\}$，所以$a_i$ 可表成$\Sigma a_{ij}\varphi_j$，代入$S_{n+1}(a_1,a_2,\cdots,a_{n+1})=\Sigma a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}S_{n+1}(\varphi_{j_1},\cdots,\varphi_{j_{n+1}})$因爲每個變數的係數可拿出，所以只須看基底元素的代入即可，又因爲S_n具有交錯性而$n+1$個變數至少有2個φ_{j_ℓ}是相同的，所以每一項皆等於零了，因此一個n階方陣環$M_n(F)$其維數爲n^2，必滿足n^2+1個變數的恒等式$S_{n+1}(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})$，當然也滿足更多變數的標準恒等式，如$n=3$，我們至少知道了$M_3(F)$滿足了$S_{10}(x_1,\cdots x_{10})$，當然也滿足了$S_{11},S_{12},\cdots$，但是又想到了一個問題，10個變數是不是太多了，有沒有？能不能？少一點呢即S_9，S_8或更小的是否也滿足。

談到這個問題，讓我們先來觀察一下現象，設R表一個環，如果R滿足某個恒等式，則必可做出一個多重線性的恒等式，使得R仍滿足它。

例如R滿足了式子$f(x,y)=x^2y-yx^2=0$，此恒等式並不是很好，因爲對y而言雖爲線性，但對x而言則非線性了，爲了使x的成分線性化，我們多個變數Z，將x改成$x+z$，考慮$f(x+z,y)-f(x,y)-f(z,y)=xzy+zxy-yxz-yzx=g(x,y,z)=0$此三個變數的恒等式，注意左式展開最高次爲二次的項皆被消掉了，因此經處理後原本非線性的$f(x,y)$可變成多重線性的$g(x,y,z)$，因此一個環若滿足某個非線性的恒等式，只要將非線性的成分加上個新的變數相減，便可把次數降下來，經有限個步驟後便可使得每個變數的次數爲一次了，因此我們可增加變數個數使得R滿足一個多重線性的恒等式。

再來看剛剛的問題，$M_n(F)$必滿足S_{n^2+1}，但次數有沒有低一點的，現要說的是最少最少爲S_{2n}，2n 已經是極限了，不是我們找不到低於2n的，而是根本沒有，舉個例子來說，如3階方陣環$M_3(F)$是否滿足$S_5(x_1\cdots x_5)$呢？答案是否定的，因爲我們可找5個方陣代入使之不滿足此式，可令$x_1=e_{11}$，$x_2=e_{12}$，$x_3=e_{22}$，$x_4=e_{23}$，$x_5=e_{33}$，注意這樣的選取是有意義的，因爲只有當$x_1=e_{11}$排第一，$x_2=e_{12}$緊接在後，再來x_3,x_4,x_5接此順序，値等於e_{13}，其它的皆等於零了，所以$S_5(x_1,x_2,\cdots,x_5)$

$\neq 0$，不爲一個恒等式了，因此，一般而言，$M_n(F)$ 不可能找得到次數低於 $2n-1$ 的恒等式 $f(x_1, \cdots, x_{2n-1})$（未必是標準恒等式！）理由相同，只要以 e_{11}，e_{12}，e_{22}，$\cdots$，e_{nn} 代入，則有1項＝ e_{1n}，其它的皆等於零了，所以我們知道次數最少要 $2n$，但是 $2n$ 一定有嗎？答案是肯定的！這可不顯然了，這是1950年Amitsur與Levitzki 所發現的，這篇論文蠻長的共寫了15頁，證明是利用對冪等元（ idempotent elements ）的個數作歸納，1963年Swan 給個另一個證明（並不完全對！）寫了10頁左右，他利用了圖形理論（ graph-theory ）證明，怎麼會和圖形理論扯上關係的？回頭看一下剛剛的經驗可知，若要證明 $M_n(F)$ 滿足 $S_{2n}(x_1, \cdots, x_{2n})$，即對任意的 n 階方陣代入 S_{2n} 皆等於零，我們只要證明對任意的 e_{ij}（$1 \leqslant i, j \leqslant n$）代入皆等於零即可（∵多重線性）而 $e_{ij} \cdot e_{hk}$ 這兩個元素相乘有個特性，若 $j \neq h$，則等於零，因此那些項不必考慮了，來看看不等於零的項，即 $j = h$，也就是後面足碼須與前面足碼同，它們就像接龍一樣，足碼一個接一個，如同許多點考慮其種種路徑一般。在Swan之前（1958年）Kostanti 也給了22頁的證明，他的論文並不完全是爲了此定理而已，他更發現了此定理與其它數學的分支有關，其中之一便是群的餘同調理論（ cohomology of groups ），而到目前爲止，所知道簡單的證明是1976年Rosset 他用外積代數（ exterior algebra ）所證明的，僅僅只花了2頁而已。

回頭來看剛剛提到的方陣環 $M_n(F)$，它是個 n^2 維的代數，有 n^2 個基底元素，因此對任一個元素 $a \in M_n(F)$，$1, a, a^2, \cdots, a^{n^2}$ 此 n^2+1 個元素必線性相關（ linearly dependent ）所以 a 必滿足某個次數小於等於 n^2 的多項式，但事實上由漢米爾敦（ Hamilton ）定理可知 a 必滿足1個 n 次的多項式（即其特徵多項式），因此，我們知道 $M_n(F)$ 的每個元素皆爲代數性（ algebraic ）且皆滿足一個次數不超過 n 的多項式，這樣的代數我們有個名稱稱爲次數有界（ n ）之代數性代數，即A：algebraic of bounded degree n $\Leftrightarrow \forall a \in A$，$\exists f_a(x) \in F[x] \ni f_a(a) = 0$ 且 $\deg f_a \leqslant n$，如上述的 $M_n(F)$ 即爲一例。

關於次數有界之代數性代數，有個著名的Kurosh problem ，如果A是代數性代數（即A爲一個代數，A中每個元素皆滿足某個多項式，但次數未必有界）這樣的代數會不會是局部有限（ locally finite ）？先來看看何謂局部有限，大家在體論中一定學過所謂的代數延拓（ algebraic extension ），而一個有限延拓（ finite extension ）必爲代數延拓，（∵有組基底），但反之代數延拓卻未必爲有限延拓了，可是如果一個代數延拓只是由有限個元素所生成，則可推得它仍是有限延拓，所謂的局部有限也就是此意，即每個有限生成的子代數維度必有限。（ every finite generated subalgebra is finite degree.）

1964年Golod與Shafarevitch 給了Kurosh Problem 一個反例，在此問題被否定之前，一般就猜想是不是從代數性代數到局部有限所假設的條件太少了？因此有所謂的Weak Kurosh Problem ，即A若爲次數有界的代數性代數是否可推得A爲局部有限，這個答案是肯定的，在1945年Jacobson解決了Jacobson radical等於零的情形，1946年Kaplansky與Levitzki 解決了一般的情形，在這裏，Jacobson 發現一個事實，即一個次數有界的代數性代數，必滿足某個多項恒等式，舉個例子來說，如A爲有界次數2的代數性代數，因此任意的元素 $a \in A$ 必滿足了一個二次式 $a^2 + \alpha a + \beta = 0$（$\alpha$，$\beta$ 隨著a而改變），利用交換子 $[x, y] = xy - yx$ 的線性及變數與常數相乘可對調順序的性質，我們拿其它元素 $b \in A$ 與 $a^2 + \alpha a + \beta$ 做交換子，可得 $0 = [a^2 + \alpha a + \beta, b] = [a^2, b] + \alpha[a, b] + [\beta, b] = [a^2, b] + \alpha[a, b]$，注意到此式把 β 消掉了，從此式中再用 $[a, b]$ 與其做交換子，則 $0 = [[a^2, b] + \alpha[a, b], [a, b]] = [[a^2, b], [a, b]] = (a^2b - ba^2)(ab - ba) - (ab - ba)(a^2b - ba^2)$，此恒等式與 α，β 無關了。

因此一個次數有界的代數性代數必滿足某個多項恒等式，Jacobson 注意到此，並將Weak Kurosh Problem 的結果，推廣爲：任一代數性代數若滿足一多項恒等式，則必爲局部有限。

滿足多項恒等式的環，我們可以把它看成是交換環與有限維代數的共同

推廣，它有相當完整的結構理論，已經成爲環論中極爲重要的一支，以上所談的，只不過是極粗淺的介紹而已，希望能讓同學們有點概念，時間有限，就此打住，謝謝各位的耐心！

數學的謬思

容風

阿基米德性質（Archimedean Property $a,b \in R^{+}, \exists n \in N \rightarrow na > b$

＝“龜兔賽跑”

＝“愚公移山”

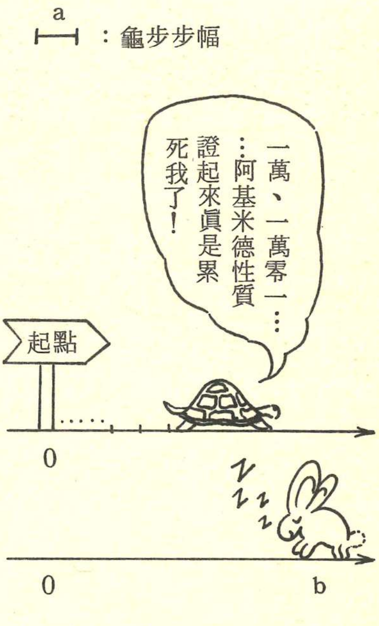
＝“有志者事竟成”

＝“Where there is a will, there is a way.”

龜兔賽跑：不管烏龜的步幅是多小！只要兔子睡著不動，烏龜一步一步的往前爬，總有一天趕過它。

愚公移山：不管山的體積有多大！愚公一天挖幾許，只要一天一天，一代一代挖下去。（山不長高，地球自轉不停，愚公香火不斷）。總有一天把山挖光的。

警惕不孝子：不管你老子多有錢，如果你不事生產，一天花它一點，也有一天會坐吃山空。



非線性分析

The Fourth Circle

作者：吳原榮

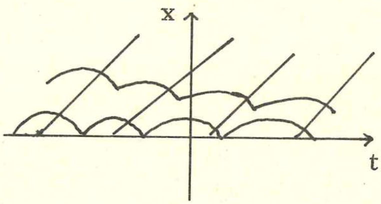
偏微分方程式於連續數學佔中心地位，和自然科學如物理、化學、生物以及數學其他科目，如幾何、泛函分析、調和分析、複變分析等皆有密切關係。而本文是劉太平教授於80.年7.月22.24.26.日於中央研究院的演講部份內容，限於本人能力，疏漏生澀在所難免，尚祈各位看官原諒。

最常見的P.D.E.是一階線性方程式，形如：

〔例1.〕：$\mu_t + C\mu_x = 0$…………(1)　其中μ是x，t的函數，C是常數

可以清楚地知道沿著 $\dfrac{dx}{dt} = C$ 這條線，$\dfrac{d\mu}{dt} = 0$ （即μ是常數）

如圖：



而此方程式的解是 $\mu(x, t) = f(x - ct)$

而 $\dfrac{dx}{dt} = C$　這些曲線，稱爲特徵線（characteristic line）

如果視 $f(x-ct)$ 爲一個波，則上面的意思是說這個波在特徵線上的傳遞是不變的。　接下來，看幾個例子：

〔例2.〕：D'Alembert's problem。 $\mu_{tt} - c^2\mu_{xx} = 0$………………(2)

$$\text{令}\quad \begin{aligned} v &= \mu_x \\ w &= \mu_t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_t - w_x &= 0 \\ w_t - c^2 u_x &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}_x = 0 \quad \cdots\cdots(3)$$

令 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix} = A$ (matrix)

可知A的特徵值是 c ，$-c$，所對應的特徵向量是 γ_1 ，γ_2
（即 $A\gamma_1 = c\gamma_1$ ，$A\gamma_2 = -c\gamma_2$ ）

$\because \gamma_1$, γ_2 is linear independent $\therefore$ 可令

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \alpha_1(x,t)\gamma_1 + \alpha_2(x,t)\gamma_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4),$$

其中 $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ ，$\alpha_1(x,t)$。

$\alpha_2(x,t)$ unknown

代入(3)式得

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}\gamma_1 + \frac{\partial\alpha_2}{\partial t}\gamma_2 + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial\alpha_1}{\partial x}\gamma_1 + \frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\gamma_2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\alpha_1}{\partial t}\gamma_1 + \frac{\partial\alpha_2}{\partial t}\gamma_2 + \frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}(c\gamma_1) + \frac{\partial\alpha_2}{\partial x_2}(-c\gamma_2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \dfrac{\partial\alpha_1}{\partial t} + c\dfrac{\partial\alpha_1}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial\alpha_2}{\partial t} - c\dfrac{\partial\alpha_1}{\partial x} = 0 \end{matrix} \qquad (\because \gamma_1, \gamma_2 \text{ linear independend})$$

這個式子就是〔例 1.〕之型式了。

∴接下來，談談雙曲線型（ Hyperbolic ）的函數性質

如果讓 t 代表時間，x 是一維空間座標，$\mu(x,y) \in R^m$，

我們考慮這個方程式

〔例3.〕：$U_t + A(x,t,u)U_x = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

其中A是 $m \times m$ 矩陣

讓 $U = \varphi(\xi)$，其 $\xi = \xi(x,t)$，假 ξ 保持常數，則U亦

是常數，所以這波 $u = \varphi(\xi)$ 傳遞的速度是 $c = \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{\xi_t}{\xi_x}$

把 $u=\varphi(\xi)$ 代入(5)式得

$$\varphi'\xi_t + A(x,t,u)\varphi'\xi_x = 0$$

$$\left[\frac{\xi_t}{\xi_x} I + A(x,t,u)\right]\varphi' = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

觀察(6)式，我們可以知道 φ' 是A的固有向量相對應的固有值是 $-\frac{\xi_t}{\xi_x}$

我們稱(5)式是hyperbolic $\Rightarrow$ 假如A有m個固有值，$\forall u$ 而在更大維度中

$$u_t + \sum_i A_i(x,t,u)\, u_{x_i} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

同樣地假設 $u(x,t)=\varphi(\xi(x,t))$ 代入(7)式

$$\varphi'\xi_t + \sum_i A_i\varphi'\xi_{x_i} = 0$$

令 $A(x,t,u,w)=\sum_i A_i(x,t,u)w_i$，其中 $w_i=\xi_{x_i}$

則上式可為 $[-\lambda I + A(w)]\varphi' = 0$

於此我們有個定義：

〔定義1.〕方程(7)是hyperbolic $\Rightarrow$ for any W, $A(w)$ has real eigenvalue。

接下來，來看看抛物型方程式（parabolic equation）

最著名的例子是熱方程（heat equation）

〔例4.〕：$u_t=\mu_{xx}$ for $t\geq 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$

首先我們可知經過變換 $x=cx$，$t=c^2t$

(8)式是不變的。所以我們要尋求一個特解而其初始條件經過此變換亦是不動的，而最簡單的初始資料就是 $\delta(x)$，根據定義

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx = 1$$

若 $\delta(cx) = k\,\delta(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(cx)\,dx = k$$

另一方面

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(cx)\,dx = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(cx)\,d(cx) = \frac{1}{c}$$

$\therefore k = \frac{1}{c}$　即 $\delta(cx) = \frac{1}{c}\delta(x)$

根據 linearity，我們有下列結果

$$u(cx, c^2 t) = \frac{1}{c} u(x, t)$$

若取 $c = \frac{1}{\sqrt{t}}$ 則可得 $u(x, t) = u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right) / \sqrt{t}$

這使得我們得到 $u(x, t) = \varphi(x/\sqrt{t}) / \sqrt{t}$ 亦是(8)式的解，具有初始條件

$$u(x, 0) = \delta(x)$$

代入(8)，我們得到

$$-\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} \varphi - \frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} \frac{x}{\sqrt{t}} \varphi' = t^{\frac{3}{2}} \varphi''$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\varphi' \xi = \varphi'' \quad \text{，其中 } \xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$$

兩邊積分可得　$-\frac{1}{2}\xi\varphi = \varphi' + A$

$\because \varphi(x, 0) = 0$　for　$x \neq 0$, $t = 0$

我們可以期待 φ , $\varphi' \to 0$ 當 $|x| \to \infty$ 或在任何時間 t ,

$|\xi| \to 0$, 所以A一定是零

$\therefore$再積分得

$$\varphi = ce^{-\xi\frac{2}{4}}$$

所以 $u(x,t)=\frac{c}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$

而 c 可以被 μ 的 conservation 決定

$$\because \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} u\,dx = u_x \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

$$而 \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2ce^{-y^2}\,dy = 2c\sqrt{\pi}$$

$$\therefore \quad c = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$\therefore 解 \quad u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

這被稱做 heat kernel

而一般的初始值問題

$$u_t = \mu_{xx} \quad , \ u(x,0) = f(x)$$

我們先處理

$$\mu_{i_t} = \mu_{i_{xx}}$$

$$\mu_i(x,0) = \delta(x-x_0)f(x_0)\triangle x$$

$$而 f(x) \cong \Sigma\,\delta(x-x_0)f(x_0)\triangle x$$

$$而每個 \mu_i(x,t) = \frac{f(x_0)}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\triangle x$$

把 μ_i 加起來再讓 $\triangle x \to 0$ 可得

$$\mu(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy$$

看完以上的例子，我們可先歸納出parabolic, hyperbolic equation之特性。

parabolic equation

$\Rightarrow$ ① infinite speed 產生

②不會消失的（ irreversible ）

而 hyperbolic equation

則 ① finite speed 產生

②會消失（ reversible ）

接下來，我們針對三個 equation：

甲：$\mu_t+c\mu_x=0$

乙：$\mu_t+\mu_{xx}=0$

丙：$\mu_t+\mu_{xxx}=0$

用 $\mu(x,t)=e^{i(kx+wt)}$ 代入是否為解？

若是解則有何行為？

甲：$iw+ick=0$, $w=-ck$ $\therefore$ speed $=-\dfrac{w}{k}=c$

乙：$iw=-k^2\Rightarrow\mu=e^{ikx-k^2t}=e^{-k^2t}\cdot e^{ikx}$

隨時間 decay

丙：$iw=-ik^3\Rightarrow$ speed $-\dfrac{w}{k}=k^2$ dispensis（發散）

現在，來看看Nonlinear 的一些例子

〔例5.〕： $u_t + \lambda(\mu)u_x = 0$

alone $\dfrac{dx}{dt} = \lambda(\mu)$, $\dfrac{du}{dt} = 0$

由上式我們得到 μ 在C上是常數

$\therefore$ $\lambda(\mu)$ 在C亦是常數

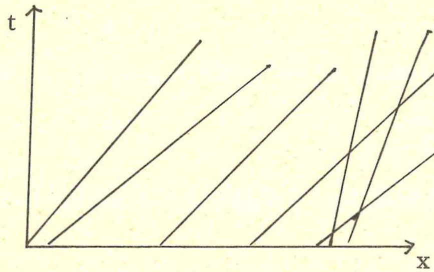
$\therefore$ 曲線C必定是直線在 (x , y) 平面

具有斜率 $\lambda(\mu)$

而一般解的情形必定亦是依賴這些C而得到

舉個例子 initial data

$$u = f(x) \quad \text{at} \quad t = 0 \quad -\infty < x < \infty$$



在 $t = 0$ 時， $\mu = f(\xi)$ 而斜率 $\lambda(f(\xi)) = F(\xi)$

而 ξ to vary

equation ： $x = \xi + F(\xi)t$

由上式① $\mu_t = f'(\xi)\xi_t$

② $\mu_x = f'(\xi)\xi_x$

③ $0 = F(\xi) + \{1 + F'(\xi)t\}\xi_t$

④ $1 = \{1 + F'(\xi)t\}\xi_x$

$$\therefore \quad u_t = -\frac{F(\xi)f'(\xi)}{1 + F'(\xi)t}, \quad \mu_x = \frac{f'(\xi)}{1 + F'(\xi)t}$$

$$\Rightarrow \quad u_t + \lambda(\mu)\mu_x = 0$$

這曲線C叫做特徵曲線，這在hyperbolic equation 中扮演了很重要的角色，要注意的是，並不是所有方程式的解在此特徵曲線上皆保持常數。

〔例6.〕：

考慮兩個式子 $\begin{array}{l} u_t + f(\mu)x = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \mu_t + f(\mu)x = \varepsilon\,\mu_{xx} \cdots\cdots\cdots (2) \end{array}$ $\mu \in R'$

在(2)式中，如果 μ_{xx} 不大，則(2)式可用(1)式作估計。

若 μ_{xx} 非常大，則 $\varepsilon\,\mu_{xx}$ 就不可忽略。

∴我們看看(2)式的行進波(trauelling werves)

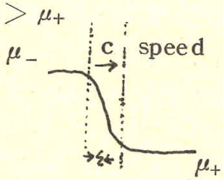
$$\mu(x,t)\ \varphi\left(\frac{x-ct}{\varepsilon}\right)$$

代入(2)式 $\Rightarrow$ $-c\varphi' + f(\varphi)' = \varphi''$

$$\varphi(\pm\infty) = \mu_\pm$$

其中 $\mu(x,y) = \begin{cases} \mu_+ & 當\ x > ct \\ \mu_- & 當\ x < ct \end{cases}$

若假設 $\mu_- > \mu_+$

用圖形表示 

積分 $-c\varphi + f(\varphi) + A = \varphi'$

$$\varphi(\pm\infty) = \mu_{\pm 1}$$

by O.D.E 的 Boundary Condition

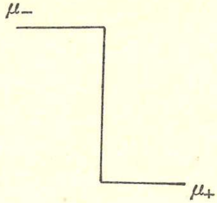
$\Rightarrow$ $A = c\,\mu_\pm - f(\mu_\pm)$

∴得到二個很重要的式子 $C = \dfrac{f(\mu_+) - f(\mu_-)}{\mu_+ - \mu_-} \cdots$ (R—H)

$$C < \frac{f(\mu) - f(\mu_-)}{\mu - \mu_-} \cdots\cdots \text{(E)}$$

$$\forall\quad \mu_+ < \mu < \mu_-$$

當然，很清楚地當 $\varepsilon=0$



於此，我們有個定義：

Def：A piecewise function $\mu(x,t)$ is a shock wave of

(1) iff[1] (1) is satisfied in usual sense wheneuer μ is smooth.

(2) Across discontinuity (E) & (R－H) satisfy。

在這截波上，我們主要有兩個影響

(1)穩定(stable)

(2) information lost（擾動被吸收）

底下舉個例子：

〔例7.〕：Burgers′ equution $u_t+\mu u_x=0$ …………（☆）

by chain rule that $u(cx, ct)$ 仍然是（☆）式的一個解，可知這個解是 invariant of scale。

給予初始資料

$$\mu=\begin{cases}\mu_+ & \text{when} \quad x>0\\ \mu_- & \text{when} \quad x<0\end{cases}$$

我們稱具有如此初始資料的問題爲 Ricmann Problem

可把解的形式寫成 $\mu(x,t)=\varphi(\frac{x}{t})$，代入（☆）得

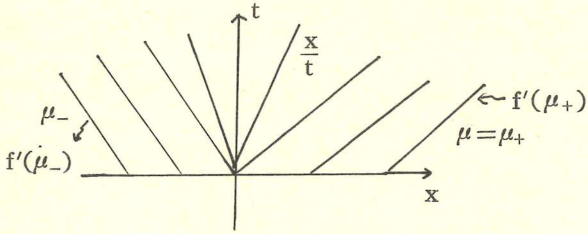
$$\varphi'\left[\left(-\frac{x}{t^2}\right)+f'(\varphi)\left(\frac{1}{t}\right)\right]=0$$

$$\Rightarrow \quad f'(\varphi)=\frac{x}{t}$$

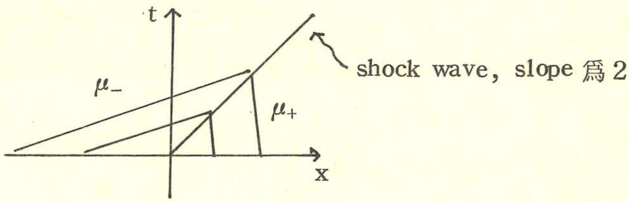
由（☆）式可看出 $\mu = \varphi = \dfrac{x}{t}$

這 Riemann problem的解可分成兩種情形。

(i) $\mu_+ > \mu_-$ $\because f'' = 1 > 0$ $\therefore f'(\mu_+) > f'(\mu_-)$

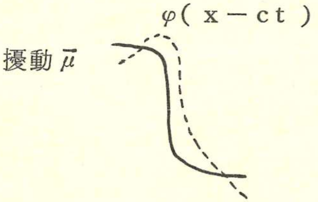


(ii) $\mu_- > \mu_+ \Rightarrow f'(\mu_+) < f'(\mu_-)$



〔定理 1〕Travelling wave for $\mu_t + (f(\mu))_x = \varepsilon u_{xx}$ is stable

說明：不妨假設 $\varepsilon = 1$ 即 $\mu_t + f(\mu)_x = \mu_{xx}$



一般擾動有兩種 波速度較慢 / 平移

現在 $\mu(x, 0) = \varphi(x) + \mu(x, 0)$

而當 $t \gg 1$ $\mu(x, t) = \varphi(x - ct) + \mu(x, t)$

而 φ is stable $\Rightarrow u \xrightarrow{L^{\infty}} \varphi$ as $t \to \infty$

現在 $u(x,t) = \varphi(x + x_0 - ct) + \phi_1(x,t) + \bar{\mu}(x,t)$

其中 $\phi_1(x,t)$ 是 berger's sol。

希望 x_0 適當選取使得 $\bar{u} \to 0$ as $t \to \infty$

而可得到結論 $u \to \varphi(x + x_0 - ct)$ in L^{∞} ($\phi_1 \to 0$ in L^{∞})

令 $\phi_1 = \theta_1 \gamma_1(\mu_-)$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(x,t)\,dx = \gamma_1(\mu_-)\int \theta_1\,dx = \alpha_1\gamma_1(\mu_-)$$

$$令\ f(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x + x_0 - ct) - \varphi(x - ct)]\,dx$$

$$\because f'(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} (x + x_0 - ct)\,dx = \varphi(\infty) - \varphi(-\infty) = \mu_+ - \mu_-$$

$\therefore$ 原式 $= x_0(\mu_+ - \mu_-)$

$$而 \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} [\mu - \varphi(x + x_0 - ct) - \phi_1]\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [u - \varphi(x - ct)]\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x - ct) - \varphi(x + x_0 - ct)]\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1\,dx$$

$$= \text{constant} = 0 \qquad t \geq 0$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)\,dx - x_0(\mu_+ - \mu_-) - \alpha_1\gamma_1(\mu_-)$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)\,dx = x_0(u_+ - u_-) + \alpha_1\gamma_1(\mu_-)$$

於是我們有下面的定理。

〔定理 2.〕可以適當選取 x_0 , α_1 $\ni$ $u \to 0$ in L^2 & L^∞ as $t \to \infty$

例 6.的(1)式可以重新寫成 $u_t + f'(\mu)\mu_x = 0$ ……………………(3)

其中 $f'(\mu)$ 是 $n \times n$ matrix。我們稱(3)爲 strictly hyperbolic

假如 $f'(\mu)$ 有 n 個不同的個有值 λ_1 , … λ_n for any u

設 γ_1 , … γ_n 爲其所對應的固有向量。

Hyperbolic conservation laws 有重要影響在熱傳導和黏度的損耗，這方程就變成 viscous conservation laws.

〔例 8.〕: $u_t + f(\mu)_x = (B(\mu)u_x)_x$ ……(1) for $u \in R^n$, $x, t \in R$

在上式中最重要的問題就是在黏度矩陣 $B(\mu)$ 改變時，一般解的行爲是如何？

特別地，當 $B(\mu)$ 非常小時，(1)式就變成例 6. 中的(1)式了。

$$u_t + f(\mu)_x = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

假設(2)式是嚴格雙曲型（ strictly hyperbolic ）具有特徵值

$$\lambda_1(\mu) < \lambda_2(\mu) < \cdots < \lambda_n(\mu)$$

所以，很多人在研究(1)式時，就採取了線性的技巧。

i.e. 用

$$u_t + f'(\mu_0)u_x = B(\mu_0)u_{xx} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

和(1)式比較。

接下來，我們將嘗試在一個特定的時間內用逼近的觀念去導得(1)式的非線性性質，就如同在(2)式中。

〔說明〕: 假設 $\lambda_i(\mu)$ 是 non-linear。 i.e. $\nabla\lambda_i \cdot \gamma_i \neq 0$ for μ

其中 γ_i 是 $f'(\mu)$ 之固有向量。

把它正規化可得 $\nabla\lambda_i \cdot \gamma_i = 1$

考慮一個(1)式的逼近解 $\phi = \phi(x, t)$

它有一個性質是 $\phi_i \in R_i(\mu_0)$

其中 $R_i(\mu_0)$ 是 γ_i 的積分曲線

使得

$$\phi_x = \alpha \gamma_i(\phi)$$
$$\phi_t = \beta \gamma_i(\phi)$$
$$\therefore \lambda_i(\phi)_x = \nabla \lambda_i \cdot \phi_x = \alpha \nabla \lambda_i \cdot \gamma_i = \alpha$$
$$\lambda_i(\phi)_t = \nabla \lambda_i \cdot \phi_t = \beta \nabla \lambda_i \cdot \gamma_i = \beta$$

得到 $\phi_x = \lambda_i(\phi)_x \gamma_i(\phi)$

$\phi_t = \lambda_i(\phi)_t \gamma_i(\phi)$

代入(1)式，我們發現

$$\phi_t + f(\phi)_x - (B(\phi)\phi_x)_x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$
$$= \lambda_i(\phi)_t \gamma_i(\phi) + f'(\phi)\lambda_i(\phi)_x \gamma_i(\phi) - [B(\phi)\lambda_i(\phi)_x \gamma_i(\phi)]_x$$
$$= [\lambda_i(\phi)_t + f'(\phi)\lambda_i(\phi)_x]\gamma_i(\phi) - \lambda_i(\phi)_{xx} B(\phi)\gamma_i(\phi) - \lambda(\phi)_x [B(\phi)\gamma_i(\phi)]_x$$
$$= 0$$

令 $B(\phi)\gamma_i(\phi) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(\phi)\gamma_j$

則(4)式變成

$$[\lambda_i(\phi)_t + f'(\phi)\lambda_i(\phi)_x - \alpha_{ii}(\phi)\lambda_i(\phi)_{xx}]\gamma_i(\phi)$$
$$- \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij}\lambda_i(\phi)_{xx}\gamma_j(\phi) - \lambda_i(\phi)_x [B(\phi)\gamma_i(\phi)]_x = 0$$

現在，讓 $\lambda_i(x, t) = \lambda(x, y)$ 而滿足 Burger's equation

$$\lambda_t + \lambda \lambda_x = \alpha_{ii} \lambda_{xx} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

可以證得在某一些條件下，ϕ 是(1)式的逼近解。

而其誤差是

$$- \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij}(\phi)\lambda_i(\phi)_{xx}\gamma_j(\phi) - \lambda_i(\phi)_x [B(\phi)\gamma_i(\phi)]$$

〔例 9.〕：gas dynamics。$u_t + f(\mu)_x = \mu_{xx}$ 　 $u \in R^n$

假設 $f'(\mu)\gamma_i(\mu) = \lambda_i(\mu)\gamma_i(\mu)$ 　 $i = 1, 2, \cdots n$

$$\uparrow$$

e.v.

且 $\lambda_1(\mu) < \lambda_2(\mu) < \cdots < \lambda_n(\mu)$ 　 for all u

$u(x,0)$ is compact suppont and small

現在的問題是：$u(x,t) \to ?$ 　 as $t \to \infty$

(1)′先考慮 $u_t + f'(0)u_x = u_{xx}$

而 $u(x,t) = \Sigma\, \alpha_i(x,t)\,\gamma_i(0)$

且 $(\alpha_i)_t + \lambda_i(0)(\alpha_i)_x = \alpha_{i_{xx}}$

by Duhamel's principle

$$\therefore \alpha_i(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{(x-y-\lambda_i(0)t)^2}{4t}}\, \alpha_i(y,0)\,dy$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{\frac{-(x-y-\lambda_i(0)t)^2}{4t}} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_v(y,0)\,dy$$

$$\therefore u(x,t) \sim \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{\frac{-(x-y-\lambda_i(0)t)^2}{4t}} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_i(y,0)\,dy \right] \gamma_i(0)$$

而(1)～(1)′（解相同）

而 $\|v\|_{L^2} \sim t^{-\frac{1}{4}}$ 　, 　 $\|v\|_{L^\infty} \sim t^{-\frac{1}{2}}$

所以我們有下面一個定理

〔定理 3.〕$\|u\|_{L^2(x)} \sim t^{-\frac{1}{4}}$, $\|\mu\|_{L^\infty(x)} \sim t^{-\frac{1}{2}}$

至於 $\|\mu\|_{L'(x)}\sim$？，則是個尚未解決的問題。

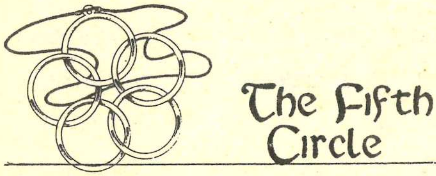
(*)在上面的粗淺整理中，發現在處理很多問題時，線性代數和高等微積分是很常用到的工具，所以，唸一些理論時，就要拿來用用，唯有實際操作，才會有多一層的體會，而數學是否需堅持純與應用的分野？則是一個顯然的答案了。

(*)劉教授說：「偏微分方程的形成可以千變萬化，必需考慮和其他科目或自然科學有關的特殊方程才有意義，所得的結果才會豐富。」所以，數學是不能獨立於其他門學科而孤芳自賞，當然，世界上樣樣精通的人很少，但每個人都應有本事對周圍的事稍有涉獵，也許，這番嘗試是很不錯的。

參考資料：

1. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equation ; Joel smoller.
2. Linear and Nonlinear Wave ; Whitham.
3. Partial Differential Equation ; Williams.
4. 1991, 7.22.24.26.劉太平於中研院之演講。

有趣的數學故事



指導老師：屠耀華
作　　者：王欣慈
陳向榮

開場白

前一陣子，看著大四學長姊們辛苦地編故事、擬稿本、拍幻燈片、配音，爲數學課程上某些特定單元製作教學輔助媒體。雖然還說不上是精心傑作，但總比死板的數學課本來的吸引人。

說課本死板，似乎有失公平。看看現行的國中數學課本，比起幾年前我們所讀的，實在是好太多了。除了整體結構上的大變革外，加入了生活上的實例，由操作、實測引入概念，另外有隨堂練習、另編的習作本。此外，拿課本的外觀來說，不僅是彩色印刷、圖文並茂，而且版面加大，字體、圖形較以往美觀、清晰多了。有這麼好的數學課本，自然數學的學習應該是會活潑、有趣些，但是，還是有太多的國中生，將數學列爲最不受歡迎的科目之一，他們無法明瞭數學的功用，而將日常生活中的數量問題與上課所學劃分的一清二楚，在心理上，已把數學當成純粹是應付考試的工具，更別提他們的思考、推理和創造能力，是否曾因數學的學習而增強了。當然，學習成果與課程目標間的差距，並不單是教科書好壞、或是教師教學品質上的問題，我們只有認眞思考一下，該如何引導學生進入數學領域來，能在其中更加自然地成長，學到該學的東西。

「引起趣味」是我們考慮的第一要素。讓教室成爲電影院，終究是個無法實現的夢，但，讓教室成爲一個“說書”的地方，那該會是怎樣的情景呢？試想想數學課不再只是老師孤單冷漠地唱獨角戲，不再只是些莫名其妙的符號文字在眼前浮動，像聽歷史故事一般有令人回味的情節，像講古典詩詞

一般，可以將情感、想像放進去，同學們不再迷惑課外讀物難道就只有文史類的而沒有數學的，也不用擔心數學硬得難以咀嚼，那是一個多美好的情景啊！

我們明白學數學並不在學人文素養、情感表達，但是一點點人文的味道、生活化的感覺，不失為一種吸引學生進入數學殿堂的好方法，我們何不試試呢？

就說說數學故事吧！

咦！什麼是數學故事呢？
—由兩個簡單的應用問題談起

將數學問題本身趣味化、具體化、實際化、應用化就是數學故事的本質。繁瑣的數學符號、推演過程常會把學生淹沒在茫茫大海中，所以我們可以用一些富有趣味性或實用性的數學故事去吸引學生，讓學生了解數學可以應用到許多層面上而不僅僅是紙面上的計算或理論的探討而已。以下舉出兩個例子，直接把日常生活中的一些有關數學的題材找出來並加以通俗化，形成有教學功效的數學故事。

例一：

阿銘是師大附中國中部一年級的學生。他沒想到自己因跑腿到合作社買文具，竟然會引起那麼多跟數學相關的事。

那天，數學老師在課堂上要大家將習題抄在作業本上作隨堂練習，班上幾個同學忘了帶本子和直尺。由於是上課時間，所以派阿銘作代表，到合作社買齊。阿銘跑到合作社買了四本作業本及二支直尺，合作社小姐跟他拿了二十二元。回到教室把東西分好之後，卻因為忘了問單價而又沒有人曉得價格，於是一群人就在底下吱吱喳喳了起來。老師聽到吵鬧聲，轉身問是發生了什麼事？阿銘連忙舉手說：「老師我要出去一下。」「什麼事？」「剛剛忘了問本子和直尺的價錢，現在不曉得如何跟同學們收錢。」老師想了想說：「上課時間出去總是不太好，或許我們可以試著把價錢湊出來。剛剛買了些什麼？」「四本簿子二支直尺，一共二十二塊錢。」一群同學回答。老師

說：「我們試著湊湊看，譬如說本子一本三元，尺一支五元，這樣剛好是二十二元。」說完老師期待似地看了同學好一會。終於阿美舉了手問：「如果本子四元，直尺三元，這樣也剛好二十二元啊！還有尺一支四元，本子一本三塊半也可以。」大家對這個猜謎似的問題於是好奇地起了興致。

老師在大家討論了幾分鐘之後開口說話了：「隔壁班前天也發生了一樣沒帶本子和尺的情形，他們到合作社買了三本本子和四支尺一共花了二十四元，或許可以提供你們作爲參考，看看是不是可以把錢算出來。」忽然有個同學很高興的舉手說：「老師，我知道了，本子是四元，尺是三元，算進我們班和隔壁班都剛剛好。」老師笑笑問怎麼算出來的。「湊的」同學答。「那好像只能算是運氣好，有沒有什麼比較好的方法可以萬無一失的算出來？」全班又沈靜了下來。「老師」大家都把頭擺向說話的人——金頭腦阿美開口了：「我覺得起先知道我們班的情況還不夠，因爲好像很多答案都可以。似乎應該再有其他的線索。」老師笑著說：「對了，是應該再有其他的條件，才能確定我們所要求的答案。我再給一個比較容易的條件，讓你們跟班上已知的線索連結起來，也許這個條件你們比較容易看出來——三本本子和二支尺一共十八元。有沒有誰看得出解法的規則？哦！對了，還有，這些敍述要寫這麼多字，在解題之前，我們先想看看能不能把這些式子改得簡單一點。譬如說把四本本子和二支尺共二十二元改成——四本子＋二尺＝二十二；同理把三本本子和二支尺共十八元改成——三本子＋二尺＝十八，你們還有沒有更好的方法？」「老師」阿美說：「我們可不可以照以前學過的一元一次方程式的方法把「本子」改成用符號「x」來代替，「尺」用「y」來代替？」「嗯！這樣很好」老師隨即在黑板上寫出

$4x + 2y = 22$ 和

$3x + 2y = 18$ 兩個式子

「來想想看，這二個式子有什麼關係？阿銘，問題是因你而起的，你有沒有看出什麼來了？」被老師點到名，阿銘覺得很不好意思。「老師，我看出來了。」阿美說：「$4x+2y$ 和 $3x+2y$ 之間只差了一個 x，錢多出了4元，

所以 x 應該等於 4。這樣一來，y 也可以算出來了。」「很好。又如果現在的問題是

$$4x+2y=22 \quad 與$$

$$3x+4y=24 \quad 呢？$$

怎麼辦？它不像前面二個式子只有 x 的個數不同，現在是 x、y 都不一樣了。」「老師，我有辦法了」阿銘卯足了勁想出了辦法：「我們可以讓其中一個未知數的個數一樣再去比較另外一個未知數的個數，像說把

$4x+2y=22$ 加倍成 $8x+4y=44$ 再和另一個式子

$3x+4y=24$ 作比較

多五個 x 多二十元，所以 x 就等於四，y 也就知道了。」「很好，阿銘也不簡單哦！我們可以解釋一下像這一類有二個未知數的式子，我們稱它為二元一次方程式，也誠如阿美所說的，這樣的聯立方程式必須要有二個條件給我們，我們才能把 x、y 這兩個未知數解出來，而像我們剛剛那樣先想辦法把其中一個未知數消掉來求得另一個未知數的答案，這樣的解法在數學上稱作「加減消去法」。這原來是比較後面的課程，因為今天恰巧碰到了這樣的問題，就說給你們知道，所以你們不要老認為數學只是一些生硬的理論，事實上，它對我們的日常生活也是相當有幫助的。」這時，恰好下課鐘響了。老師：「今天就講到這裡，下課。」

下課之後，大家都議論紛紛，最震撼的要算是阿銘了，他沒想到，只因為自己跑去買文具，竟會衍生出講了一節課的話題，這些東西都和數學有關，又都像在日常生活之中。

例二：

何家有三胞胎，二男一女，分別叫何必、何苦、何如，他們都長得活潑可愛、聰明伶俐。何伯伯、何媽媽為了教養他們不知費了多大的苦心，現在他們都已經唸國二了。三兄妹的感情很好，只是經常會搶東西吃，生怕別人比自己多吃一塊，自己比別人少吃一口。何媽媽為了分配東西的問題，眞是傷透了腦筋，最後終於想出一個一勞永逸的辦法：不管買什麼糖菓、餅乾，都是一式三份，一人一份。這才解決了這場永無休止的紛爭。但是，好戲還

在後頭呢!!

這天，隔壁的楊姐姐要訂婚了，送來了一盒喜餅，三兄妹眞是欣喜若狂，何苦迫不及待的打開了喜餅，一看竟是三角形的呢！大叫道：

「哎喲!!三角形的喜餅還眞少見呢!!他們不怕婚後會有第三者介入嗎？」

「才不呢！他們是想鬧三角戀愛。」何必說。

「少說廢話了，三角形不正好嗎？一人一角剛剛好。」何如說。

何必笑道：「別傻了，一人一角還有剩呢!!那剩下的那份就給我好了，誰叫我是老大呢？」

何苦說：「哼！你少臭美了，都怪何如想出這個笨方法。其實應該切三刀才對，大的歸我，何如年紀最小，當然只好吃最小的了。」

何如不依的向媽告狀：「媽，您看，哥哥們都欺負我啦！」

何媽媽道：「好了，好了，快別吵了，都先回房間做功課去，媽媽一定會公平的分配這塊喜餅的。」

三兄妹只好怏怏地回了房間，留下何媽媽一人，對著喜餅發呆，因爲何媽媽也正爲這形狀特異的喜餅頭痛著呢！她心想道：

「圓圓的喜餅象徵婚姻幸福圓滿不是很好嗎？弄個三角形的多累人啊！我該怎麼分配它呢？」

就在這時候，何伯伯回來了，看到發愁的何媽媽和桌上的喜餅，問明了原委，笑道：

「原來是這麼一回事啊！快別操心了，這還不簡單嗎？一切瞧我的！何必、何苦、何如快出來喔，爸爸回來啦！」

三兄妹七嘴八舌的爭著向爸爸告狀，何伯伯說：

「好，好，別吵了。爸爸現在要考考你們，如果你們答對了，不但有喜餅可吃，爸爸還要請他吃牛排。要是都沒人答對，那這塊喜餅就只好由我和媽媽吃掉囉!!」

何苦最貪吃，先問道：「什麼樣的題目啊？」

何伯伯說道：「別急，題目就在這塊喜餅上，有誰能把這塊三角形的喜

餅分成三個面積相同的小三角形喜餅，誰就可以得到獎品。」

兄妹三人，你看看我，我看看你，不約而同的說道：「那是不可能的，爸爸。」

何伯伯笑道：「哦！這麼說來，這塊喜餅你們是吃不到囉！」

何必說：「那好吧！我們再試試看。」

三兄妹回到房間，何苦頹喪的說道：

「哎喲，吃喜餅就吃喜餅嘛，還要考試，眞是煩人。」

說完看到何必、何如正坐在桌前振筆疾書，過去一看紙上是大大小小的三角形，他哈哈大笑道：

「你們還眞的在想啊？別傻了，想不出來的。」

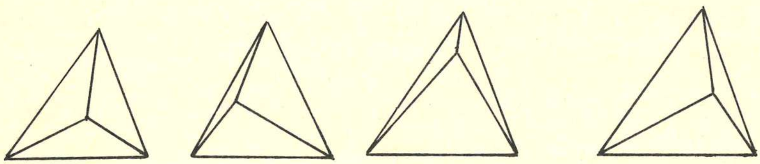
何如說：「你別在那煩人了，你不想吃餅嗎？」

何苦挨了罵之後，悻悻然地也坐到桌前畫了起來。

何必說道：「我們不如三個人一起想總比一個人自己想來得快些。」

何苦說：「對呀！三個臭皮匠勝過一個諸葛亮。」

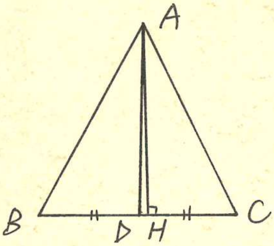
何必又說：「剛剛我已經得到了一個結論，就是若想把三角形分成三個大小面積相等的三角形，只要找出一個在三角形裏面的點就可以了，可是不知道這個點應該要在那裏，所得的小三角形的面積才會相等。你們看，這些都是我剛剛畫的。」



何如說：「不錯，我剛剛也是這麼想的。啊！有了，我們先試試看，如何把三角形平分。」

「那還不簡單嗎？你們看，取一邊的中點和它的頂點連起來就可以把三角形平分了。」何必道。

何如說：「爲什麼？」



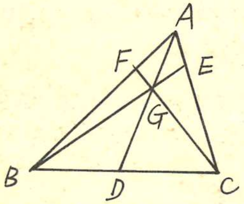
何苦說：「我知道，那是因爲△ABD 和△ACD 有相等的底和相同的高，所以面積就相等了。」

何如恍然大悟的說：「哦，原來如此，那我們再想辦法把這兩個三角形分成六等分就是啦！」

何必說：「難！就是難在這裡，因爲要把兩個三角形六等分就是要把一個三角形三等分，所以我們等於又回到起點了。」

何苦說：「那該怎麼辦？」

他邊說邊在三角形上亂畫，畫了一個像下面的圖形：



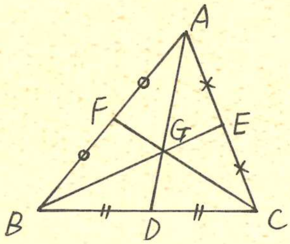
何如看了說：「你們看這個三角形裏有六個小三角形呢！」

何必說：「對啊，我們如果能夠找出G點在那裏就好了。」

三個人又苦苦思索，好一陣子沒出聲音，這時何如說道：「哥，我發現一個奇怪的現象。」

何必、何苦不約而同的說：「什麼現象？」

何如說：「很奇怪，好像不管怎麼畫，由三角形的頂點到對邊中點所連成的三條線總是會交於一點，眞是奇怪。」



何必、何苦自己畫了幾次，也覺得很奇怪，不知道爲什麼AD、BE、CF 都會交於一點。

這時，何如又有了新發現。

「你們看△BGF和△AGF的面積是相等的，而△AGE和△CGE，△BGD和△CGD也都相等呢！它們都有相等的底和相同的高。」

何苦說：「謎底好像就快揭曉了。如果我們用△ABD－△BGD應該會等於△ACD－△CGD。那麼△ABG就等於△ACG。」

「對！同樣的用△ABE－△AGE＝△CBE－△CGE，△ACF－△AGF＝△BCF－△BGF，所以△ABG＝△ACG，△ACG＝△BCG。△ABG＝△ACE＝△BCG，出來了，答案出來了。」何必說。

「哦！眞的，我看看。」何如搶過一看，沒錯，果然G點將△ABC均分成三個面積相同的三角形。

「太好了，我們有餅可以吃了。」何苦高興道。

「等等，先別高興，爲什麼AD、BE、CF會恰好相交於同一點，我們還是不知道啊。」何如憂愁的說。

何苦說：「管他的，反正我們已經想出答案了，這個問題就去問爸爸吧！」

三兄妹向何伯伯說明了答案及問題，何伯伯笑得合不攏嘴，好半天才說道：「嗯！你們眞聰明，眞不愧是我的好孩子。」

「其實，這個問題要等你們讀到國三了才會學到，但我先大略的說明一下，三角形頂點和對邊中點的連線有個名詞，我們稱它爲中線，一個三角形

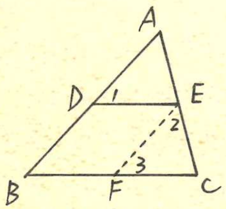
有三條中線。三中線會交於一點，這點我們稱它爲重心。」

何必問：「爸爸，那它們爲什麼會交於一點呢？」

何伯伯說：「要說明那題目之前首先要告訴你們一個觀念：三角形兩邊中點的連線會和第三邊平行；反之亦成立*。」

何苦說：「平行我們學過了，就是內錯角、同位角相等，同側內角互補。」

*①



已知：$\triangle ABC$ 中，D爲AB中點，E在AC上，$DE \parallel BC$

求證：E爲AC中點。

證明：過E作 $EF \parallel AB$ 交BC於F

則DEFB爲平行四邊形

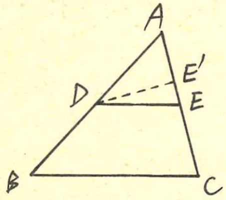
此時 $BD = EF$ 且 $\angle 1 = \angle B = \angle 3$

$\therefore \angle A = \angle 2$，$AD = EF$，$\angle 1 = \angle 3$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle EFC$（SAS）

$\therefore AE = CE$

②



已知：$\triangle ABC$ 中，D爲AB中點，E爲AC中點

求證：$DE \parallel BC$

證明：過D作 $DE' \parallel BC$ 交AC於E′

$\because$ D爲AB的中點，且 $DE' \parallel BC$

$\therefore$ E′ 爲AC的中點

$\because$ E、E′ 都是AC的中點

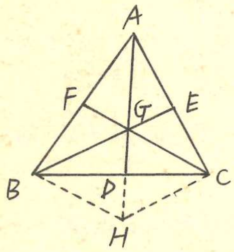
$\therefore$ E與E′ 重合

$\therefore$ 直線DE′ 與直線DE重合

即　$DE \parallel BC$

「答對了，何如，去拿紙和筆來，爸爸證明給你們看。你們已經知道BE和CF是中線，交於G，要證明AG和BC的交點D會剛好是BC的中點*。」

*



在AG上取點H使得CH＝AG，連接BH、CH

在△ABH中

∵ AF ＝ FB，AG ＝ GH

∴ FG // BH

⇒ GC // BH　　　①

在△ACH中

∵ AE ＝ EC，AG ＝ GH

∴ EG // CH

⇒ GB // CH　　　②

由①②得　BHCG爲一平行四邊形

∵平行四邊形的對角線互相平分

∴ BD ＝ DC，GD ＝ DH

∴ D爲BC中點

何必說：「哦，我懂了，而且AG 會剛好是DG 的兩倍。」

何伯伯說：「很好，很能擧一反三，這問題是你們三個共同想出來的，所以爸爸決定今天我們全家上館子吃牛排。」

三兄妹歡天喜地，何如說：

「眞好，不僅有餅可吃，還可以吃牛排，最重要的是學到了三角形的重心，眞是一擧三得。」

何苦說：「對啊！所以爭東西吃還是有好處的。」語畢，大家哄堂大笑。

我們可以很淸楚地看到，上頭第一個例子，其用意在介紹二元一次聯立方程式的解法之一——加減消去法。

整個故事由一課堂上的突發事件而起。買了不同的東西，只知道總共的錢數而不知道每件物品的價格，這類事件，可說是經常發生在日常生活之中，只是處理方式，因人、因環境而異罷了。

故事中，事件發生在教室裏，教師角色的扮演在此刻顯得相當重要。機會教育，自然地營造出全班性的共同討論氣氛。進度雖在教師控制之中，但仍須學生配合才能進行下去，可說是蠻寫實的一段過程，而不能歸在一般的故事之列。有國二的學生在看過這個例子之後表示，拿現今的學校教育來說，上正課都來不及了，那有可能用一堂課的時間藉機教學呢？但同時，他們也希望，故事中的情節眞的發生在班上呢！（註）

猜答案，應是每回拿到數學問題時，一種極自然的反應，可說是決定解題方向的基礎。但是一般學生，由於要應付考試，已學會機械式的反應，往往忽略了自己思考的一環，藉著故事的導引，喚起學生們對此種能力的重視。

故事中，由某位同學“湊”出正確答案，找出解二元一次聯立方程式的方法。首先是引入算式、代入符號以簡化問題敍述，再則以較爲容易的條件引導學生看出解法，學習以加減消去法解二元一次聯立方程式。以猜測開始，而以解決問題結束，可說是吾人理想中之學習方式。

此例的讀者，如果願意用心思考，學到的東西就不僅是加減消去法，而是面對數學問題時，該有勇氣嘗試，及以簡馭繁、鍥而不捨的解題精神。

通篇看來，是爲國中數學第二册第三章二元一次聯立方程式而設計。若給已習此一單元的同學閱讀，則太過簡單，甚至有過於繁瑣之嫌；若將此故事當作已習一元一次方程式同學們的預習材料，則再適宜也不過了。

例二，可說是個相當輕鬆、有趣的小故事。爲吃東西爭吵的三個兄妹、辛苦的何媽媽、與懂得孩子們心理的何伯伯，就這麼單純的五個角色，一同演出這段家庭生活中的溫馨小品。

三兄妹明白要切這塊喜餅得先找到三角形內部的一點，他們由平分一三角形出發，看出三角形中線的性質，進而發現三角形三中線居然會交於一點，沒想到這點即爲所求，也就是一般人所稱的三角形重心位置。

何伯伯爲三兄妹所作的說明，對國二尚未學習推理證明的同學來說，可能難了些，但三兄妹以最直觀的方式做“猜測”工作，此種精神，是每一個國中生在學習數學時應當具備的。或許有人會以爲，除非是資優生，否則不

可能做到，但，是不是資優生並不重要，只要能引起故事讀者一點點“有爲者亦若是”的心態，說故事的目的也就達到了。

「三個臭皮匠，勝過一個諸葛亮」眞是這故事的最佳描述。雖然三兄妹是爲了“吃”而合作，但那種一同研究解題的氣氛，令人羨慕。有國三的同學在讀完這個故事之後表示，如果能遇著像何伯伯一般會鼓勵孩子們的好老師，那該有多好(註)。其實，要學生們眞爲學數學而學習，實在是蠻難的一件事，就只有給予獎勵、稱讚，要他們在同學彼此間的互相激勵下學習，這個例子給了一個良好的典範。

整個故事，可以說看不出有任何教科書的味道。國中數學選修上冊第二章三角形中，2－3介紹三角形的重心，首先定義什麼是三角形的中線，再以兩個例題說明三角形的每一條中線把三角形分爲兩個等積的三角形，以及三角形的三中線共點，隨後，在隨堂練習中才提到三角形的三中線將此三角形分爲六個等績的三角形。而在例二當中，表面上，將目標擺在如何三等分一個三角形，實際上，則在不知不覺中引入了中線的概念、強調重心在三角形中的地位。由這個角度出發的好處是，不會使人只注意到一個個中線的性質而忽略了重心的意義。換句話說，例二中的教學，是純然爲解決問題而發展出來，雖然，解釋過程不似課本般條理明晰，但學習起來，就針對新觀念的接受而言，較了解課本自然地多。

例二，可以當作已接觸過推理證明的國三學生，關於三角形的重心一單元的預習教材。

嗯！編寫數學故事該從何動手呢？

上面舉了兩個日常生活中常見的例子，根據對學生的問卷調查顯示(註)，確實能提高他們的學習興趣，幫助他們把數學應用到實際生活之中，以解決各種問題。也許有人會提出疑問，打從他長這麼大，也沒見過那家採用了三角形的喜餅，何況圓形代表圓滿的含意，這種情況根本就不會發生。在此筆者必須澄清一點，引起興趣是我們的目的之一，其實用不著去苛求是否會有三角形的喜餅存在，重要的是數學故事的內容是否反映出它所要達到的教學目

標，使學生獲得該有的知識。作者藉由這個生活中的特例，不僅引出三角形的重心概念，且爲整個故事塑造出吸引人令人繼續讀下去的特質，算是一種匠心獨具的設計。因爲數學故事的編寫並不十分容易，一個或數個數學主題要在一個故事情節中全都顯現出來，其彼此的關聯性便十分重要，可說是一個數學故事的成敗所在。編寫者在這方面所要下的苦心，可用嘔心瀝血來形容也不爲過，實在是有夠瞧的了。

數學故事的編寫，從無到有的艱亘歷程，往往令人望而卻步，以至於鮮有人願意嘗試，這實在是學生們和數學教育的損失。不過，根據筆者的經驗，在此提供一種較爲經濟實惠的方法，但走捷徑總會有所缺失，容後再敍。筆者記得在大三上學期結束前一個多月，教材教法老師宣佈期末報告之中，包括必須撰寫一篇數學故事，這對筆者而言是一次前所未有的嶄新經驗，竟有手足無措之感。當時衡量自己的情況，由於期末考已迫在眉睫，在所剩不多的時間內，要自創一篇像小說題材的故事，自認無此能力，當時眞是憂心如焚。某一日下午下課後回到寢室，看看手錶距吃晚餐尚有一段時間，於是就隨手從書架上拿出趙文敏老師編著的「寓數學於遊戲」翻閱，當時，心中突然閃過一個念頭，既然自創不成，那麼擷取已有的東西，再稍加安排一下不就行了嗎？更何況編排正是自己的專長呢！原則既已確定，下起筆來就容易得多了。以下就實例來解說：

小榮、小珊歷險記

小榮和小珊是一對人人稱羨的情侶，他倆均是T大數學系裏的高材生。小榮擅長於分析學科，而小珊則以反應敏捷著名於校，兩人各具擅場，難分軒輊。

四年級開學前的那個暑假，兩人閒來無事，偶然知曉了由「宏杰旅行社」所舉辦的愛之船一南太平洋小島之旅，於是兩人就興高彩烈地報名參加了。

在碼頭上，兩人一眼看見雄偉壯碩的「愛之船」，「好大的一條船，船員應該很多吧？不知有多少人？」小榮心裏如此想著。恰巧一位叫大淵的旅客，在大家上船之時，向在入口處迎接旅客的船長詢問了此問題，那位船長並不明說，他只回答大淵說：「包括我在內，比兩百人多出一些，而且三個一數，五個一數和七個一數均不足一人。」這時小榮在一旁聽見了，馬上就不假思索地宣佈了答案：「總共有二百零九人」，此句話一出，馬上就吸引了大家的眼光，船長尤其驚奇，他没料到答案這麼快就出來了，大家都對小榮另眼相看，小珊在旁也覺得予有榮焉。

其實這是簡單的三個數之最小公倍數的運用，首先我們已知三個一數，五個一數和七個一數均不足一人，故總人數必爲三、五、七三個數的公倍數再少一，又因總人數只比兩百人多出一些，所以我們要先找出最靠近二百之三、五、七的公倍數，因爲 $\text{l.c.m}(3,5,7)=3\times5\times7=105$，故此數爲 $105\times2=210$，則 $210-1=209$ 即爲我們所欲求之總人數，不難吧！

在旅程中，小榮和小珊經歷了非常快樂的時光，到了好幾個風光綺旎的小島，增加了不少的見聞。後來，大家到達一個奇特的島上；奇怪的是，這個島上的居民分成兩派，我們稱之爲A派與B派。稱爲A派的人永遠說謊，而稱爲B派的人則永遠說實話，全島只有酋長一人是正常的一般人，他領導著這兩派的居民，在此小島上自給自足地過著與外界隔絕的生活。

旅客們在嚮導的介紹下了解這個島上的情形後，於是大淵先生在他上岸而遇見三位島民時，就問第一位島民說：「你是屬於A派或是屬於B派？」

第一位島民只會說島上的土語，所以，他雖然回答了，可是大淵卻聽不懂。於是，大淵就轉問身旁的第二位島民說：「他剛剛說什麼？」

第二位島民回答說：「他說他屬於B派，而他確實是屬於B派。」

第三位島民接著說：「錯了，第一個人屬於A派而我才是屬於B派。」

大淵先生聽了這些話後，由於本身智力有限，迷惑地搖搖頭。但是聰明美麗、反應靈敏的小珊馬上就推知第三位島民是說謊者了。

要了解這個問題的答案，我們得先知道一件事實，那就是：每一位島民都會說他是屬於B派。爲什麼呢？因爲如果他是屬於A派，那麼他是句句謊話，所以他不會說他是屬於A派，而會說他是屬於B派。如果他是屬於B派，則他永遠說實話，那麼他自然會說他是屬於B派。

了解這一件事實之後，我們就知道這個情況：儘管第一位島民所回答的話，大淵聽不懂，但是我們知道他所回答的話一定是「我是屬於B派」。他的回答既是如此，那麼第二位島民所說的「他說他是屬於B派」，就可以說明第二位島民並沒有說謊，也就是說，第二位島民是屬於B派。第二位島民既是屬於B派，那麼他所說的「他確實是屬於B派」，就是一句實話，也就是說，第一位島民是屬於B派。如此一來，我們就可以了解這三位島民中，只有第三位是說謊者了，因爲他說第一位島民是屬於A派。

接著，旅客一行人在成事不足，敗事有餘的大淵先生帶領之下，不幸誤入了該島上酋長所設置的禁地。進入禁地者，按著該島酋長所制定的律令，該處以絞刑。於是，酋長在盛怒之下，下令追捕所有的旅客。結果，連同小榮、小珊、大淵等四十四個人不幸被捕了，當然即將難逃被處死的厄運。而其他的人則安全地逃回船上，並且隨即開航逃跑了。

被捕的四十四位旅客被關在一座土牢裏，在這些人之中，大部分的人都決心寧死不屈，從容就義，有的則在商議著逃走的對策，而小榮和小珊則倚偎在一塊兒閉目養神，養精蓄銳。只有那位大淵先生仍在大哭大叫，呼天喊地，怨天尤人，眞是又可憐、又可笑。酋長被他搞得不耐煩了，就指定大淵爲第一號，並宣佈說：「從明天起，每天絞殺一人，現在你們圍成一個圓圈，以他（指大淵）爲第一號，從這個人依反時針方向算起，每次算到第三個人就是隔天要處死的。」大淵聽完之後，馬上絕望地昏倒在地上了，可是卻沒有人理會他的死活，只有小榮和小珊過去照顧他。

雖然處境惡劣，但是處變不驚的小榮卻早已胸有成竹。他在被捕押解回來的路途中，探知了一項對他和小珊的生死有極大關係的事，那就是從明天算起的第四十三天爲該島酋長的壽辰，小榮料想壽辰那天酋長應該會特赦死刑犯才對，所以他和小珊應該要排在絞殺行列的最後兩名，那麼才會有死裏逃生的機會。

故聰明的小榮早就運用他的排列天才預先算好了兩個位置，使得站在這兩個位置的小榮和小珊，在輪流順序中是最後的兩個人。

你知不知道他們兩人所站的位置是在那裏嗎？

要求出這個問題的答案，只要將1至44等整數寫成一個圓圈，然後，將1、4、7、10、13、16、19、22、25、28、31、34、37、40、43 等數劃掉。接著再將所剩下的二十九個數依序再寫成一個圓圈如下：

44 42 41 39 38 36 35 33 32 30 29 27 26 24

2 23

3 5 6 8 9 11 12 14 15 17 18 20 21

因爲前面所劃掉的最後一個數是43，所以，它後面的第三個數是3，於是，依序把3、8、12、17、21、26、30、35、39、44等數劃掉，剩下的十九個數再寫成一個圓圈如下：

42 41 38 36 33 32 29 27 24

2 23

5 6 9 11 14 15 18 20

因爲前面所劃掉的最後一個數是44，所以，後面的第三個數是6，於是，依序把6、14、20、27、33、41 等數劃掉。這時剩下的十三個數依序爲

2、5、9、11、15、18、23、24、29、32、36、38、42

仿上面的做法，依序把5、15、24、36、2、18、32、9、29、11、42等數劃掉，則剩下來的兩個數是23與38，因此，小榮和小珊所站的位置是23及38號。（當然被處死順序以數論列式就會更簡單）

如此一天絞殺一人，直到第四十三天，該輪到小榮了。不過，事情的轉

變果然如小榮所料。當天，酋長由於是自己的壽辰，故心情特別好，同時因爲已經處死了四十二人，氣也消得差不多了，但是如果要赦免他們不死，總覺得心有未甘，於是狡詐的酋長爲了使他們知難而退，死了逃生這條心，就絞盡腦汁想了兩個難題來爲難這兩個相愛的年輕人。

小榮和小珊是被關在一座有甲、乙兩門的土牢裏，這兩個門隨時都各有一位守衞監看著。於是酋長就對兩人提出了第一個問題：「如果你們想逃跑，這兩個門中，只有一個是正確的出路，另一個則通往一個土牢，裏面有一隻全島最凶猛的豹子，那時你們可就有死無生了。現在，你們可以向兩個守衞中任何一位提出一個問題，利用你們所得到的答案，自己判斷那一個門是正確的。如果你們只問一個問題，就可以找到正確的路，你們就可以再回答第二個問題。不過，你們只能問一個問題，而且兩位守衞中，一個是屬於A派，另一位則是屬於B派。你們必須要好好地想一想，該提出什麼問題。」

小榮和小珊聽了之後，心想這個問題可以說是救命的問題，因此，絕不能草率，必須要深思熟慮。兩人經過一番仔細地思索商量之後，小珊就去問看守甲門的守衞甲說：「請問你，那位看守乙門的守衞乙會不會告訴我這個甲門是正確的路？」

守衞甲回答說：「不會。」

於是，聰明的小珊就攜著小榮的手，滿臉幸福地共同走向甲門。

事實上，正確的路確實是甲門，爲什麼呢？假設正確的路是乙門而不是甲門，我們將說明：在這個假設之下，守衞甲對那個問題的答案必須是「會」而不是「不會」。

我們分兩種情形來說明：

⑴若守衞甲說謊而守衞乙說實話，則守衞乙不會告訴小珊說甲門是正確的路。但守衞甲要說謊，他明知乙不會這麼說，卻必須回答小珊說「會」。

⑵若守衞乙說謊而守衞甲說實話，則守衞乙會告訴小珊說甲門是正確的路。守衞甲要說實話，乙既然會這麼說，他自然是回答「會」。

俗語說「樂極生悲」，這句話眞是不錯。當小榮和小珊正暗中慶幸著問題十分簡單時，沒料到更惡毒的第二個問題正悄悄地屆臨於他們身上了。

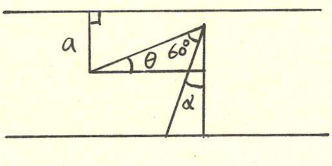
首先，酋長下令把小珊綁在木製的十字架上，四周堆滿了大量易燃的乾柴，小榮一見之下，暗中直呼「不妙」。然後在一個大霧迷濛、伸手不見五指的淸晨裏，酋長親自率領部下將已矇上眼睛的小榮，用船載到島上唯一的一條大河的河面上。當他得知小榮最多可游兩小時且至少可以游$\frac{2}{\sqrt{3}}$公里後，就以威脅性的口吻對著小榮說：「這條河的平均寬度爲1公里，如果你在兩小時之內無法上岸的話，不但你自己被淹死，死於非命，而你最心愛的人也會因受你的連累而被活活燒死。」說完之後，狠心的酋長就將小榮推進了河中。

但是小榮絕非省油的燈，他知道無法確定自己目前的位置，因此，不能決定向那個方向游，才能在限時內到達岸邊。不過，唯一的一件事對小榮十分有利，那就是當時的河水是靜止的，如此，可以使小榮的體力不致受到任何影響。

於是小榮先隨便選一個方向，看著自己的手錶游了一小時（$\frac{2}{\sqrt{3}}$ 公里）後，結果尙未到達岸邊，他就向右轉了個120° 角，然後朝前筆直游去，終於在兩小時之內到達岸邊，救了自己以及小珊的命。

爲什麼小榮會這麼做呢？我們用幾何學的方法來加以證明。

假設小榮從落水的位置向前游動的方向，與河岸所成的銳角是θ，而小榮向前游動所指向的河岸與他落水的位置之間的距離爲a（如下圖）



因他游了$\frac{2}{\sqrt{3}}$ 公里而未到達岸邊，故a $> \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$ ，而且他轉向後的方向與河岸間之垂線所成的銳角$\alpha = |\frac{\pi}{6} - \theta|$，顯然地，$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6}$，故$\cos\alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。另一方面，小榮轉向後必須游$(1 - a + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta)\sec\alpha$ 公里才能到達岸邊，因a $> \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$，$\sec\alpha \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$，故$(1 - a + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta)\sec\alpha < \frac{2}{\sqrt{3}}$ ，所以，小榮的體力可以支持他游到岸邊。

最後，小榮和小珊的智慧和勇氣終於使酋長折服了，不但將他們延為上賓，同時也履行了他的諾言，將他們用船搭載去和「愛之船」會合，結束了這段驚心動魄的神奇經歷。小榮回家之後，特將之記錄下來，以茲記念，並流傳於後世。

首先筆者挑選出一些覺得可用到的文章，如第一輯中第10.篇「是誰說謊」，第11.篇「該怎麼問」，第19.篇「溺水者的數學」。第二輯中第15.篇「自救奇術」。然後排定它們在故事中的先後次序，接下來便在腦海中勾畫出連接的前後文來。當然，這還是有賴於平日想像力的訓練及紮實的文學素養，方能辦到。但是，它的缺點在於有時無法與國中數學課程相結合，在效果上打了折扣；不過，若將它當成課外讀物，在數學思考的訓練上，倒是滿不錯的方式。像上例對一般國中生而言，難度是高了些，但從內容的聯貫性方面去著眼，希望對數學故事的編寫者，能帶來一些啓示。

後　　　　記

撰寫一篇有關數學教育的文章，一直是筆者多年來的願望，身爲師大數學系的一份子，總希望在離開學校前，能留下些許成果給後繼的學弟妹們享用。回想二年前筆者主編「師大數學」時，滿腹「數學教育專欄」的理想，被無力感一一蝕耗，當時頗有曲高和寡之慨，不過還是順利出刊，達成任務。時至今日，學術風氣依舊閉塞，不知是否∑人客氣，抑是漠不關心呢？如此造成無力感更是積重難返，後繼編者就有雄心壯志，也將莫可奈何。爲完成未竟的理想，筆者經過二年來之收集資料及準備，在志同道合者的協助下，終於跨出了第一步，以後是否會有後續動作，猶未可知，不過總算是出發了。特別感謝屠耀華老師撥空指導，增飾字句；也感謝與我同班之二位黃同學提供資料，使本篇文章能早日見世，祝她倆在淡水和基隆教書愉快；最後，對和我同甘共苦的伙伴獻上最高的敬意，並預祝未來合作更上層樓。値此付梓之際，援跋數語，聊堪慰藉。

參考資料：

1. 趙文敏老師：寓數學於遊戲，第一、二輯，九章出版社
2. 九章出版社：數學趣談
3. 九章出版社：數學悖論集錦

註：台中市立大德國中校長王朝庭先生協助進行問卷調查，謹此致謝。

附　　　　錄

問卷調查結果

本問卷是從台中市立大德國中二、三年級中各取一班接受調查。

- 您的數學老師看不到這份問卷，因此您可以放心作答。
- 希望您儘可能地填答每一個問題，我們由衷感激。
- 請您在問卷的任一個角落告訴我們，您是幾年級的同學。再一次謝謝您的配合！

二年級（57人）

一、關於數學

1. 你喜歡數學嗎？　非常喜歡13.人、喜歡24.人、沒感覺10.人、不喜歡 9.人、非常不喜歡 0 人
2. 你覺得數學難嗎？　很難 4.人、有點難34.人、沒感覺 6.人、蠻容易的11.人、太容易了 1.人。
3. 你認爲你的數學成績：　極佳 1.人、中上15.人、普通27.人、中下 9.人、很差 5.人。
4. 你喜歡上數學課嗎？　非常喜歡12.人、喜歡24.人、沒感覺11.人、不喜歡10.人、非常不喜歡 0 人。
5. 老師平時拿什麼上課呢？　課本56.人、筆記 1.人、講義56.人、參考書 6.人、測驗卷23.人。（可複選）
6. 除了在學校上數學課外，你有沒有參加校外數學補習呢？
   有37.人、沒有20.人。
7. 如果教室像電影院一樣，你喜歡嗎？
   非常喜歡18.人、喜歡23.人、沒感覺 3.人、不喜歡 9.人、非常不喜歡 3.人。

8. 如果老師在上數學課時，說些關於數學的故事，你認爲如何呢？

好極了35.人、還可以啦！14.人、沒意見8.人、不好啦！0人、堅決反對0人。

9. 如果寒假作業裏頭有一本數學的課外讀物，你覺得如何呢？

好極了21.人、還可以啦！23.人、沒意見9.人、不好吧！2人、堅決反對2.人。

10. 有沒有想過把你所學的數學編成一個故事？

曾經想過4.人、沒想過52.人。

11. 老師在上課時，有沒有講過故事呢？（關於數學的哦!!!）

有15.人、沒有40.人。

12. 你對學數學有話要說嗎？（下頭空白供你揮灑，也可寫到背面去。）

爲聯考而讀10.人、上課有趣些較好2.人、勤勞一些就沒問題10.人、老師教得好3.人、沒有感覺4.人、數學可訓練頭腦2.人、享受解出問題的快樂4.人、考試時間能否延長些1.人、考試題目過難8.人、又愛又恨3.人、參考書和測驗卷題目艱深5.人、數學是指日常生活的計算1.人、習作太簡易宜加强1.人、教材應依學生資質不同而異3.人、實際了解最重要3.人、偏難，日常生活用不到2.人、內容太多2.人、老師講太快2.人、課本太難2.人、課本、習作均不錯1.人、課本太容易5.人、功課作業太多1.人、考後應詳細檢討1.人、好抽象，沒什麼根據1.人、出一些數學遊戲讓我們破解1.人、數學課枯燥乏味，不像歷史有趣1.人。

Part 2. 關於「一個故事」

1. 看過「一個故事」，你認爲：

無聊，不值得一看1.人

沒什麼嘛！就是應用問題18.人

太過簡單，三兩下就看完了16.人

嗯……有的地方我 還要想一想12.人

花了不少時間，才知道故事在說什麼 0 人

故事裏 頭用的辦法太笨了，我有更好的 0 人。

其他11.人：

適合國一的同學看2.人

簡單了一點2.人

用在日常生活中2.人

不錯，但非每一個人皆可如此做 1.人

如能列入教材就太棒了 1.人

引起同學注意 1.人

如果課本內容也是以故事敍述的話，那就更好了 1.人。

2. 看「一個故事」，有沒有似曾相似的感覺？

好像在那兒看過還是聽過類似的故事28.人、沒什麼感覺27.人。

3. 以往在日常生活中，有沒有遇過與故事中類似的問題？

有35.人、沒有21.人。

4. 你覺得「一個故事」有趣嗎？　十分有趣 6.人、有趣 24.人、沒感覺 13.人、沒啥趣味13.人。

5. 看過這個故事，你對於 { 二元一次聯立方程式（國二的同學）/ 三角形的重心（國三的同學）} 有沒有增加一點印象？　有53.人、沒有 3. 人。

6. 你對於這「一個故事」，有沒有其他意見呢？希望你把心得以及任何批評寫在下面的空白裏。

三年級（47人）

Part 1. 關於數學

1. 你喜歡數學嗎？　非常喜歡 3.人、喜歡27.人、沒感覺 11.人、不喜歡 5.人、非常不喜歡 0 人。

2.你覺得數學難嗎？　很難０人、有點難26.人、沒感覺 8.人、蠻容易的11.人、太容易了2.人。

3.你認爲你的數學成績：　極佳 1.人、中上19.人、普通14.人、中下 8.人、很差 4.人。

4.你喜歡上數學課嗎？　非常喜歡3.人、喜歡19.人、沒感覺11.人、不喜歡14.人、非常不喜歡０人。

5.老師平時拿什麼上課呢？　課本47.人、筆記 2.人、講義46.人、參考書 6.人、測驗卷27.人。（可複選）

6.除了在學校上數學課外，你有沒有參加校外數學補習呢？

有 5.人、沒有42.人。

7.如果教室像電影院一樣，你喜歡嗎？

非常喜歡12.人、喜歡22.人、沒感覺 1.人、不喜歡10.人、非常不喜歡 2.人。

8.如果老師在上數學課時，說些關於數學的故事，你認爲如何呢？

好極了35.人、還可以啦！10.人、沒意見 2.人、不好啦！０人、堅決反對０人。

9.如果寒假作業裏頭有一本數學的課外讀物，你覺得如何呢？

好極了16.人、還可以啦！14.人、沒意見14.人、不好吧！ 2.人、堅決反對 1.人。

10.有沒有想過把你所學的數學編成一個故事？

曾經想過 5.人、沒想過40.人

11.老師在上課時，有沒有講過故事呢？

有23.人、沒有24.人

12.你對學數學有話要說嗎？（下頭空白供你揮灑，也可寫到背面去。）

①教學應生活化

②教材太簡單

③編輯數學教材時應注意趣味性

④如果以說故事的方法來講解數學公式或數學名詞，其作用會更好。

Part 2. 關於「一個故事」

1. 看過「一個故事」，你認為：　無聊，不值得一看 1. 人、沒什麼嘛！就是應用問題 18. 人、太過簡單，三兩下就看完了 11. 人、嗯……有的地方我還要想一想 14. 人、花了不少時間，才知道故事在說什麼 0 人、故事裏頭用的辦法太笨了，我有更好的 1. 人。

2. 看「一個故事」，有沒有似曾相識的感覺？

　好像在那兒看過還是聽過類似的故事 24. 人、沒什麼感覺 23. 人。

3. 以往在日常生活中，有沒有遇過與故事中類似的問題？

　有 21. 人、沒有 26. 人。

4. 你覺得「一個故事」有趣嗎？

　十分有趣 6. 人、有趣 23. 人、沒感覺 12. 人、沒啥趣味 6. 人。

5. 看過這個故事，你對於 { 二元一次聯立方程式（國二的同學）／三角形的重心（國三的同學）}

有沒有增加一點印象？有 45. 人、沒有 2. 人。

6. 你對於這「一個故事」，有沒有其他意見呢？希望你把心得以及任何任何批評寫在下面的空白裏。

①數學與生活關係甚微

②有為者亦若是

③數學可應用到生活上

④如果能將數學課本的內容都用此種方式來寫，更容易使同學接受。

⑤希望上課也能多利用此種方式

⑥知識之外，學到做人道理

⑦內容不錯、有趣，可提高同學興趣。

⑧我們學生所需要的就是這種生活化的教學

學習理論在數學教學上的使用

The Sixth Circle

洪誌陽譯

皮亞傑的智力發展理論

根據瑞士著名心理學家丁・皮亞傑的理論，人類智力發展過程按時間順序經過四個階段。這些階段發生的順序對任何人來說都是不變的；但是他們進入每一個較高層次的階段的年齡，則根據每個人個別的遺傳和環境特徵而有所改變。

感知一運動階段

智力發展的第一個階段，叫做感知一運動階段，是從人出生到大約兩歲左右。在這個階段，嬰兒的學習是將他（她）的外界的和心理的活動發展和整合爲一序列有意義的行爲，這些行爲就是所謂的圖式（ Schemas ）。從出生起到 2 歲的兒童學習協調他們的感知或動作，學習了解一個東西從視線中移開了，並不是就不存在，學習如何將字義符號應用到外界的物體上。例如，在這個階段末期的兒童能夠認識爸爸的關上前門去工作的聲音，可以搖晃的走到窗前看他坐上公車，而且了解不久他將會回來。在這個階段的兒童從只有反射運動的能力到 2 歲時已能夠走路和說話了。

註：這篇是從 Frederick H. Bell 的 Teading and Learning Mathematic (in Secondary Schools) 中的第二章節錄出來的，裏面提到七位心理學家理論，這裏只抽出 Jean Piaget 和 J.P Guilfind來做介紹。有興趣一覽全貌的讀者可以去閱讀全書。

前運思階段

第二階段，前運思階段，大約從 2 歲到 7 歲。這個階段的小孩非常自我中心；也就是他們將大部份的經驗充分的同化到由他們直接的環境和每件事都他們相關連的眼光所發展出來的圖式中。年輕的兒童相信他們所有的想法和經驗都跟其他的人一樣；非動物體也有動物的特徵，而且“一個”或“許多”數量的差別並沒有什麼重要性。這個解釋了兒童爲什麼不會對每個街角的不同的聖誕老人和每個百貨公司窗口中的聖誕老人模特兒產生疑問的原因。在具體運思期的兒童，對於逆向思考和重建動作都有困難，他們也不能夠同時用兩個觀點來考慮一個物體或是一種情況。他們也不能做演繹（從特殊情況到一般情況）和歸納（從一般情形到特殊情形）。年幼的兒童都是遞移（ transductively ）的做推論，也就是從特殊的情況到特殊的情況。在這個階段的兒童不能夠區別事實和幻想，所以他們的“謊言”並不是因爲他們缺少道德，而是由於他們沒有能力去辨別世界上的眞實事件和他們的想像。藉由身體上的成熟和與他（她）所在環境的互動，在前運思階段的兒童發展出了在較高的智力階段上需要應用的心理圖式。在這個階段結束之前的兒童已經能夠給他們的信任解釋出理由，能夠根據一個單一特別的特徵來對物體做分類，而且開始獲得一些眞實的概念。

具體運思階段

智力發展的具體運思階段是從人 7 歲一直到 12 、 13 歲或是更晚，在這個階段的開始，兒童的“自我中心主義”有相當程度的降低。和其他小朋友一起玩要已經代替了以前那種雖然有其他小朋友在,卻仍然離群或個別的玩要的情形。在這個階段，兒童能夠根據多種特徵將具有這些特徵的物體分類成集合或子集合。他們可以同時考慮一個物體的多種特徵。他們開始懂得開玩笑，然而他們在解釋諺語時仍然有困難，而且也不能看出隱含的意義。他們現在可以處理類與類之間較複雜的關係，能夠把一個運作和程序倒回去，而且也了解和想像一個轉換的中間過程，例如太陽的昇起和降落。在具體運思期

兒童變得能夠了解別人的觀點而且在接近結束的階段也開始能做演得性和歸納性的推論，然而許多兒童仍然容易把一般原則中漸進的例子看做是不相關的事件。

雖然這個階段的兒童已經發展出許多在成人上可發現的智力能力，但他們仍然在對於了解那些言語表現的抽像上面有困難。他們能夠執行很複雜的運演，例如逆向運演替換集合的交集和聯集，具體物的排序等，但不能在應用語言符號的情形下完成相同的運演。他們判斷跟邏輯推理能力不是很充分的發展，他們僅能夠解決像“珍比比爾高，珍比蘇珊矮，在這 3 個人裏面誰最矮？”這樣的問題，但是，在這個階段的兒童可以依最短到最長的順序把一捆棒子排列起來。在這個階段結束之前，很少有兒童能夠做出一個明確的、陳述性的定義，儘管他們能夠記得並說其他人的定義。在這個階段的兒童學習去分別有意的惡行和無意的過失。既使在已經發展出規則和道德的概念之後，他們仍然對這些規則、道德、法律和習俗的起源標上一層神秘的色彩，對姓名的起源也是如此。對前青年期的兒童而言，一朵玫瑰叫做玫瑰是因爲它的玫瑰，而不是因爲一些人把它叫做玫瑰。

這個發展階段之所以叫做具體運思階段是因爲心理學家已經發現在 7 歲到12歲的兒童在語言符號和抽象想法做智力運演上仍然有困擾，即使過了12歲，大部份的兒童對用智力來操作具體物已經變得非常老練了。在這個階段的兒童，喜歡去建構一些東西、操作物體和讓精巧的機械運轉起來。

形式運思階段

當青少年到了形式運思階段，他們不再靠著對重視或舉例的心理抽象物具體的運演。他們可以同時由許多的觀點，去看待他們客觀的行爲，而且去反省他們自己的思考程序。形式運思階段的思考者可以公式化定理，產生假設，並且可以檢爲不同的假設。已經到達形式運思階段的人可以正確地判斷好壞的程度，也可以在一個適當的、客觀的情形下去考慮、定義、規則和法律。他們也能夠演得地和歸納地思考而且可以從暗示中做推論（ ie. 如果 x

則 y ）。青少年能夠了解和應用複雜的概念，例如變換和合成、比例、相關和機率等，而且他們也能想像無限大和無限小。

智力發展中的因素

皮亞傑的理論把智力發展解釋爲將資訊同化和順化到心理結構的一個過程，同化是把新的資訊和經驗併入心理結構的過程，順化則是把新的資訊和經驗做爲心理結構重建的原因。心靈不單單只是接受新的資訊，它也重建舊的資訊，把它們順化到新的上。例如：關於一個人的政治人格的新資訊不光光只把它和這個人的一些心理上的舊資訊加在一起而已，這個資訊也改變了個人的政治觀點，政客和一般政府，而且也可能甚至改變了他（她）的心理和道德上的價值。學習不僅僅是把新的資訊加到一堆舊的資訊上，因爲每一些新的資訊都引起一堆舊的資訊被修改去調節新資訊的同化作用。

根據皮亞傑的理論，有幾個因素影響智力發展。第一，大腦和神經系統的生理成長是一般智力發展過程的重要因素，這個生長過程叫做“成熟”，皮亞傑同樣確認心理發展中經驗的重要性，而且定義了兩種經驗。物理經驗是每個人和他（她）環境中的物體的互動。而邏輯數學經驗則是由個人所執行的那些心理活動，根據他們的經驗來重建他們的心理圖式。另外一個因素，社會律動，是人和人的互動和合作，對兒童心理的邏輯發展相當重要。皮亞傑相信沒有在人們之間的觀念之交換和協調，是不可能在心理上達到形式運思階段的。最後的因素，平衡一是人的心理結構如何因爲新的經驗而喪失，又如何經由同化和順化程序重新達到平衡的一個過程。因爲平衡的作用，心理結構得以發展和成熟。皮亞傑相信這五種因素（成熟、物理經驗、邏輯、數學經驗、社會律動和平衡）說明了智力發展，而且在一個人在經歷這四個智力發展階段時，這些因素是全部存在的。

這四個階段的智力發展（感知一運動階段、前運思階段、具體運思階段、形式運思階段）有自然的順序性，但是沒有明確的起點和終點。從一個階段到下一個階段的進展過程超過一段時間，而且每個人在整個過渡期中，在

他（她）們展示較高層次的心理之間游移不定。即使一個人已經完成了由一個階段到下一個階段的轉移，他（她）仍然可以運用較低階段的心理作用。一位智力發展已達到形式運思階段的青少年，擁有去完成形式運演所必經的那些心理結構，但他們不會都這樣做。許多形式運思的成人經常用手指在數數兒，那是一種前運演階段的特徵。一位已經進入形式運思的青年人，在以後的許多年裏仍會繼續改進他（她）的形式運演技巧。

皮亞傑的理論和數學教學

幾年前和一個年輕的數學老師在討論教學方法時，她指出她因爲即使是一個簡單的證明大部份七年級的學生也不能了解而被嚇到了，我問她在大學裏是否讀皮亞傑的理論，她回答說，她看不出來這個問題和她的七年級學生做數學證明有什麼關聯？這件事說明了老師去了解他們在大學裏面所學的教學理論的應用，和培養老師的教育者爲未來的老師們表現學習理論應用的需要。

因爲七年級學生的年紀是 12 或 13 歲，他們其中一些人仍然處於具體運思的階段，一些人才剛剛進入形式運思的階段，其他的人則仍然介於這兩個智力發展階段的轉移當中。因此，許多七年級學生的智力發展根本還沒有建構抽象數學證明所需要的心理結構，一些學生尙不能看到在一般原則的一個例子和那個原則的證明有什麼差別。這並不是說對七年級的學生老師不應該出現直觀的和形式的數學證明本　給他們，而是說，老師應該了解到，一位12.歲大的青少年和22歲的老師比較起有不同的心理結構（同樣地，也有明顯不同的身體結構）。

因爲，中等學校的數學老師被期望能夠去教導中學生（國中生、高中生）他們必須準備去教從 11 歲到 19 歲的學生。6、7、8 級的老師可以期待在他們班上找到許多在具體運思階段的學生，即使在高中一、二年級仍然有一些學生停留在這個階段。因此，去找出那些在中等學校的學生中沒有，但

在完成許多學校標準數學學習活動卻需要的智力表徵是很恰當的。

一位老師應該初期在形式運思階段的學生有一些複雜的能力、技巧和行爲，如果形式運演的心理作用沒有出現也應該要關心。然而，在中等學校的每個年級，總是有學生還沒有完全進入形式運思階段，教師應該要小心注意可以從這些學生身上期待的行爲。這樣的學生僅是說明了人在不同年齡上，心理成熟的情形和我們所期待生理成熟的不同比率相類似的這個事實。老師不會把一個比他的同年齡層小的七年級學生當作是生理殘廢者，也沒有老師會把一位智力發展較慢的小孩當作是心理障礙。每一個數學老師，特別是那些教6年級到9年級的老師，應該要知道許多學生是在具體運思階段，應該在了解在這個階段的學生無法具備的心理能力，也應該對具體運演提供適當的學習策略，而且應該設計一些活動幫助學生過渡到形式運演階段。

6～9年級的學生比較難教，因爲當他們進入形式運思階段的時候，仍然一直在試驗他們最近才察覺的具體運演能力。具體運演階段的學生已經發現規則不是絕對，但卻是任意的。這些學生正嘗試著建立自己的規則和挑戰老師的規則，這些引起了我們所謂的紀律問題。在這一階段的小孩子，需要和其他小孩聯合和交談，做爲一種經由社會律動的過程進入形式運思時期的目的。所以國中學生對老師而言就顯得愛說話、吵鬧、粗暴和沒有紀律。從成人觀點來看，在學生身上似乎是游手好閒的那部份是部份有培養他們智力發展的意義在。這些學生不會接受只奠基在教師權威下的陳述，也不設法接受他們能想像和具像化能力之外的概念。因此，他們旣不喜歡相信或接受不同無限次序的概念，也不相信或接受自然數的基數和自然數適當的子集的基數是一樣的。事實上，大部份作具體運思的學生，在接受無限和將一成數無限次分割成任意小的線數的概念時，總是有困難的。

國中學生喜歡玩一些圖表、模型和其他物理裝置；他們需要將新的抽象概念聯結到物體實在性或他們本身的經驗上。新的數學子題應該經由具體的實例來介紹；而且直覺和經驗應該在對新的原則和概念的教學策略上佔大部份。在幾何學上應該要想像很多學生在具像化三維度物體和物體間的關係時

有困難。他們需要建立和操作幾何圖形的模型。幾何學在國中階段應該以非正式的、和直覺性的方式呈現，而正式的幾何證明應該等到學生已經達到形式運思的階段再說。對一些學生而言，可能再延遲到大一、大二才能達到。

雖然具體運思的學生能夠正確地公式化和使用概念，他們在運用數學和言語符號來解釋概念時仍然有困難。因爲這個缺陷，許多學生（甚至可能是大部份較年輕的學生）不能解答數學文字問題，只好求助於記憶類型，試驗和錯誤的解題。他們的試驗和錯誤嘗試那麼沒有系統以致於他們可能一直在重覆錯誤的試驗。如我們能夠想像的一樣，許多年輕的中學學生不能夠做出有意義的數學事項的定義而僅僅是記著定義。

具體思考者不能被預期能解決邏輯謎題或是分析數學悖論。同樣的他們也不容易從一些相似的例子達到一般化。例如，他們不會從 $2+3=3+2$，$8+11=11+8$ 等例子得到加法的交換原則，$a+b=b+a$，這些小孩不能同時處理幾個變數，而且例如比例和多變數函數這樣複雜的關係也不適合許多中學生。數學符號和操作形式運思，許多學生不了解代數技23的意義，只靠著記憶合併和操作符號的規則來學習代數。例如 $(x+y)^2=x^2+y^2$，$\frac{a+b}{a}=b$ 和 $\sqrt{x^2+y^2}=x+y$ 對許多學代數的學生而言，是完全合理的陳述。對這些僅僅根據　意的規則操作 $x's$，$y's$，$a's$ 和 $b's$ 的學生而言，即使例用數字的反例來說明這些陳述的錯誤，仍然沒有意義。

總之，應該指出皮亞傑和他的親密同伴對人類思想的本質和發展已經做了研究和定義，而且没有嘗試對改進教與學提出特定的方法。它留給其他人去應用理論和他們的發現到課堂教學上。在那些用來發展決定智力階段的許多實驗裏包含著觀察和記錄著許多當給兒童一些數學本質的問題時他們的回答。因此，在不同年齡和智力階段的兒童能夠處理的一些數學問題的類型，已經由皮亞傑　群指出來了。儘管有關皮亞傑　智力發展的理論仍有許多的工作要做，他的理論已被心理學家們、學習理論家和教育家所接受。每一位數學老師都應該熟悉皮亞傑　的工作而且應用他的關於各種學習工作的心理預備狀態的發現他（她）自己的教學上。請留意剛開始這段題時的那位是知

道理論但從未想過要如何應用在他班上的老師。在這章做後面的習題和參考資料將會幫助你學習更多皮亞傑理論在數學教學上的應用。

J.P.基爾富的智力模型結構

當Piaget 和其他人在研究智力發展的階段時，J.P. Guilford 和他的同事已經發展出一個三維度，包含120個不同形態的智力傾向。這120個智力因素似乎已經包括了人類心理能力中可指出和測量的大部份。在確立這個模型時，Guilford 和他的同事已經嘗試去定義和建構一般的智力為特殊心理傾向的配合，他們的發現證明了許多觀察入微的老師們已經觀察到的：即使是非常聰明的學生仍然很難完成某些智力課題；另一方面，一些在一般智力測驗上得分不高的學生可能在某些類型的智力活動上做的出奇的好。去了解個別的學生所擁有的智力長處和弱點的配合，對一位老師而言是相當重要的。已經設計了試驗去測量這些智力傾向，而且可以選擇適當的方式去幫助人們加強他們認知上特別不良的部份。

當一位老師發現一位學生似乎沒有辦法在某些技能上，甚至連精通的最低水平都無法達到，這時，學校心理學者可以決定那個學生在那些智力傾向上發展較少，而且可以建議一些活動來增進這些傾向。即使老師服務的學校沒有心理學家的服務，或是只能得到學生嚴重的智力上或情感上的障礙，也可以辨認一些學生上沒有得到適當發展的一些技能而且幫助他們去發展它們。教師們在每一位學生自我圖像的組成上有重要且正向的影響，每一位老師應該認出和鼓勵每一個人擁有的唯一的才能。老師也可以負面的影響學生。有一些老師藉由一些隱藏和公開的行動暗示那些在老師的專長上並不是特別有成就和有興趣的學生，沒有希望能過一個有用和快樂的生活。每一位數學老師應該正確的判斷數學的價值，而且應該鼓勵學生去學習和欣賞數學；然而，每位老師必須客觀的去了解數學在許多成功的人的生活只有少少的，在一些情況下是不重要的影響。

智力變因

智力模型Guilford's　的智力傾向模型，叫做智力模型結構。它是在加利福尼亞大學使用因素分析法來認知和分類不同的智力傾向。這個模型是藉由試驗得2歲到成人而具體化的。曾經被研究智力變因的研究者拿來做為工具的智力模型結構，顯示出學習和智力發展是由三個變因所合成。第一個變因，運演，是在學習中被使用的智力過程的集合，第二個變因，內容，是確定已學習事物本質的範疇；生產一智力的第三個變因提供一個資訊在心裏怎麼被有組織化的方法。

心靈的運演

Guilford已經確認智力運演中五個形態，他把它們稱為記憶、認知、評價、聚夠思考和擴散思考。記憶是在心中貯藏資訊和叫出已經貯藏的資訊來回應某些刺激的能力。認知是辨認各種形式的認訊和理解它們的能力。評價是為了做判斷、下結論而達成決定所做的處理資訊的能力。聚斂思考是從已給的資訊中得出一組特殊的資訊，而且得到一般可接受的結論。擴散思考利用一種新的方式去看已給的資料，而得到獨特的、非預期的結論的創造能力。一個學生被要求給出 sin 30° 的值時回答½是利用他（她）的記憶，一個兒童能夠把一堆混著的三角形或正方形分開成一堆正方形和一堆三角形，就是在做認知的練習。當一個陪審團團員在審判中和其他成員商議，而且下結論說被告有罪，那個人他（她）正在使用它評價的能力。一位學代數的學生從含三個未知數的三個線性方程式解出了正確的答案，他（她）在使用他（她）的聚斂性思考，一位數學家發現和證明了一個新的而且重要的數學定理，他所表現的是擴散思考的思維能力。

學習的內容

Guilford 在他的智能結構論中，確認了 4 個關於學習內容的向度。他把它們稱作：圖形的，符號的，語意的，和行爲的內容。圖形的內容就是形狀和模式，例如三角形、立方體、拋物線等。符號的內容是指表示具體物或抽象物的符號或暗碼，例如學習+是一個做加法運算的數學符號。♀是女人的符號表示。而語意的學習內容是指那些做爲刺激時，可以引起心理圖像的字或想法。3、狗、太陽、戰爭、恐懼和紅色等字，當人們聽到或是讀到它們時，都會在人的心裏引起想像。學習的行爲內容是刺激的表明和人們的回應。也就是說是由人們自己的願望和其他人的行動，而引起人們活動的方法。具體的圖和形（圖形），記號的說明（符號），說的話和寫的字（語意的）和人的動作（行爲）聯合爲我們能認識的資訊。

學習的產物

在 Guilford 的模型裏，這六個學習的產物（資訊在心中確認和組織化的方法）是單位、類別、關係、系統、轉換和應用。單位是一個單一的符號、圖形、字、物體或是想法。單位的集合叫做類別，而一種智力能力就是對單位做分類。關係是單位和類別之間的關聯。在我們的心裏將單位和類別組織化爲互相關連的結構，所以我們應該注意到關於這兩種學習產物的關係。一個系統是單位、類別和關係合成所形成較大、較有意義的結構。轉換是把已存在的資訊調節、重新解釋、和重新建構，爲新的資訊的一種過程。轉換的能力通常被認爲是有創造力的人的一種特徵。應用是一種關於單位、類別、關係、系統和轉換間互動結果的預測或猜測。現在用實數系建構的方法來舉例說明心靈如何把資訊有機化成六種學習的產生。每一個實數可以認爲是一個單位。而整個實數的集合就是一個類別，相等和不等是實數集合的關係。實數集合再加上加、減、乘、除和其他代數運算性質就形成一個數學系統、定義在實數上的函數就是轉換，而每個有關函數的理論在實數系上都是一個應用。

定義在Guilford的智能結構論中的120（5×4×6）種不同的智力能力是5種運演、4種內容、6種產生的所有可能的組合。例如，一個智力能力一圖形單位的記憶一是一個人記憶他（她）曾看過的圖形能力。這個能力在數學上的一個例子就是在展示一個特別的圖形給他（她）看過之後，他（她）能再重新畫出那個圖形的能力。下列所列的運演、內容、和產物表現出120種能力如何由結合任意的一個運演，任意的一個內容，和任意的一個產物形成。這三個東西構成一組有序的數對。

Guilford's的智力能力的因素

運思	內容	產物
1. 記憶	1. 圖形的	1. 單位
2. 認知	2. 符號的	2. 類別
3. 評價	3. 語意的	3. 關係
4. 聚斂思考	4. 行爲的	4. 系統
5. 擴散思考		5. 轉換
		6. 應用

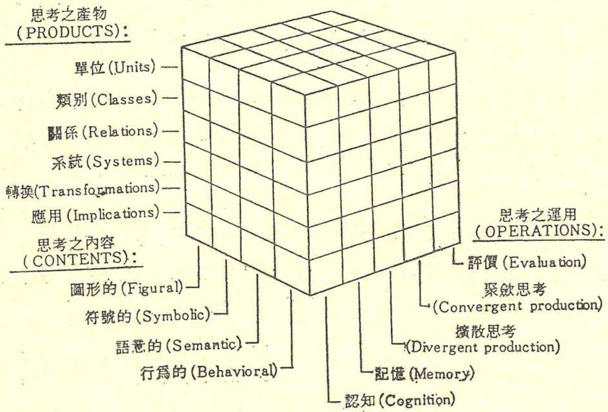


圖 7-4　戈爾福氏智能結構論圖示
(採自 Guilford, 1967)

雖然這個人類智力的模型在確認學習的變因和幫助解釋不同的學習傾向和能力上很有用，但有一個“智能結構論”的限制應該要指出來。任何一個要把複雜的人類能力建構成一個模型的嘗試，都會變成對眞實的過於簡化。大部份的老師教的和學生學的事實、技藝、原則和概念，都要求各種智力能力的複雜的整合。當一個學生沒有辦法在平面幾何中做出證明，要決定那一個智力能力（或能力的集合）引起這個學習問題可能相當困難。在平面幾何中證明定理可能須要這120個智力能力中一個很大的子集合所形成的一個獨特的組合，而大部份的數學老師旣沒有技巧也沒有資源去確認和測量每一位學生的特殊智力變因。卽使一個受過訓練的心理學家所提供的服務可能卽使我們可以要求一個正確地決定在一個特別學生上的智力障礙而且指定補救的活動，每個老師還是應該學習確認一些一般學習的不足而幫助學生克服一些他們學習上的問題。運用這些人類天生的智力的變量的第一個步驟是去認識到每個學生的智力許多不同的因素所構成的，這些因素在每個人身上都有不同程度的表現。第二個步驟是觀察每個學生在數學特定的領域中個人的行爲而且嘗試去指出他（她）的不同的長處和短處。第三個步驟是按照學生的需要和時間允許，提供學生一些個人的習作使得他們能夠在學習數學時應用他們較佳的智力能力及改進增强他們較弱的部份。這個步驟是建議2種途徑去克服學習障礙。一個方法是讓每個學習者在每個課題上應用他（她）智力上的長處，而規避他較弱的部份。另一個方法是嘗試去加强他智力上的不足之處。這兩種對付智力上弱點的方法是很有用的，而且可以在課堂上同時使用。最後，每位老師應該藉由閱讀專業期刊和參加在職研討會，大學課程，努力的學習更多有關智力本質和學習的知識。

關於進一步研讀 Guilford 智能結構論和其在教學上的解釋及應用有一本很好的參考書—這是Mary Meeker寫的(1969)—The Structure of Intelleet。在這本書裏Meeker博士對這120個智力因素下了定義，運用試驗來測量大部份的因素而且對於每個智力變因，都提供了對於增强它們很有用的課堂上的活動和經驗。爲了舉例說明 Meeker 博士呈現每個智力變因的型式，我們把她對符號類別的認知的討論列在下面。符號類別的認知（CSC）是在符號資訊的集

合中，確認一般性質的能力。

試驗（ Test ）

數群的命名	說出已給的三個數所共同有的是什麼？
數的分類	從 5 個次序混亂的數字中選出一個來配合它，對每個由三個
最佳的數對	已給的數且所組成的類別，從 3 個數對中選出一個，讓他變成最獨特（好）的類別。

課程建議

使用上面的試驗做模型，在任何一年級的老師都能夠在他們數學的課題上發展出練習來。在代數上的種類和在乘法或幾何上的種類將會不同。我們最主要的目的應該是在主題事件上一般性的質的認知。例如主要由符號資訊所組成的化學，是根據一種模型來做預測的，但即使在這裏，這些符號仍然可以用其他獨特的方法來重新分類。第 38 — 39 頁的練習中得到加强、和達成。

1991 年
亞太數學奧林匹亞競試
暨參考解答

The Seventh Circle

整理：楊青育

第三屆亞太數學奧林匹亞競試，共計有澳洲、哥倫比亞、香港、馬來西亞、墨西哥、紐西蘭、菲律賓、中華民國、韓國、泰國、加拿大、新加坡等十二個國家參與APMO 競試。今年我國是第一次參加，邀請國內數學才能特殊優異之高中生參與講習與競試活動，並已於三月十五日在本校理學院中正堂完成一九九一年中華民國奧林匹亞競試，經過統計，前十名將代表我國參加一九九一APMO 競試之同學表現優異。根據會員國得獎規定，我國十位學生代表已獲得各國所能獲獎總數及獎別的最高上限（1金，2銀，4銅，3榮譽獎），而且平均總分20.2，在十二個參與國的絕對成績中位居第二，在統計上與排名第一的韓國沒有差別，同等優異，但與其他十國比較，則有顯著的差距。在五道試題中有二道試題，我國十位學生代表得到近滿分的平均成績，尤其第一道題平均成績獲得滿分，居各參與國之冠，最為出色。

中華民國今年第一次參加國際中學學科競試，籌備期間頗短，仍有此佳績，顯示我國中學生數學能力的優越水準。往後，廣泛宣導國際數學競試規則與命題趨向，加强數學輔導，及培養自學能力、解題訓練，應可獲得更優異的成績。若能進軍國際奧林匹亞數學競試（IMO），對培育激發數學資優學生的數學能力和潛能，當可獲得極高的效益，並可進一步提昇我國數學教育在國際上的聲望。

以下是此次競試試題及參考解答：

1991年亞太數學奧林匹亞試題卷

1991年3月15日

注意事項：

(1)時間分配：4小時

(2)配分：每題7分，總計 35 分

(3)不可使用計算器

1.在△ABC中，G爲其重心，M爲BC的中點，設X在AB上，Y在AC上，使得X，G，Y三點共線且XGY與BC平行，若XC與GB相交於Q，YB與GC相交於P，試證△MPQ與△ABC 相似（見附圖）。

2.設平面上有997點，將每兩點的連接線段的中點以紅點標示，試證所得的紅點至少有1991個。

您能否找到一個特例使紅點恰有1991個？

3.設 a_1，a_2，…… a_n，b_1，b_2 ……，b_n都是正實數，且

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

試證

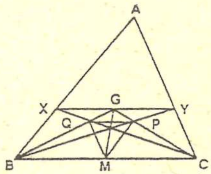
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k)^2}{a_k+b_k} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

4.在學校下課休息時，n位學生繞著老師圍成一圓圈玩遊戲，老師根據下述規則沿順時針方向走過每一位學生面前分給某些學生糖果：他先選定一位學生給他一塊糖，然後跳過一位再給下一位學生一塊，接著跳過兩位再給下一位學生一塊，然後跳過三位……等等。

試求所有可能的n值，使得每位學生至少都能拿到一塊糖（老師可能要繞許多圈）。

5. 設 C_1 與 C_2 爲兩個相切的圓，而P點在此兩圓的根軸上，試以尺規作圖作出通過P點且與 C_1，C_2 都相切的所有圓C。（所謂 C_1 與 C_2 的根軸，乃是 C_1 與 C_2 的公切線，此直線與 C_1 與 C_2 的連心線垂直）。

附圖



參考解答：

1. 延伸 $\overrightarrow{BG}$ 使其交於 $\overline{AC}$ 之中點N（因爲G爲△ABC 的重心），則 $\overline{NG}:\overline{GB}=1:2$

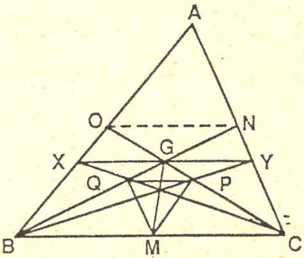
因爲XGY ∥ BC，∴ CY : YN = 2 : 1

設NP交BC於一點M′

考慮三角形△BCN，由Ceva′s 定理（通過P點）

$$\frac{BM'}{M'C}\cdot\frac{CY}{YN}\cdot\frac{NG}{GB}=\frac{BM'}{M'C}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{BM'}{M'C}=1$$



⇒M′ = M⇒MP ∥ AB（M，N各爲BC，AC之中點）

同理可證MQ ∥ AC

最後，我們將證明PQ ∥ BC

因爲△CAB ∼△CNM⇒ P爲MN之中點，同理Q爲MO之中點

故在△MNO中，PQ ∥ NO，又NO ∥ BC，⇒ PQ ∥ BC

△MPQ與△ABC之邊平行，故相似。

2.（解法一）

在所有的點中，選擇兩點M. N爲距離最遠的兩點，分別以M，N爲圓心，

$\frac{MN}{2}$為半徑作二圓C_M, C_N，則對其他995個點中任意一點P，我們有$MP \leqslant MN$，因此$\frac{1}{2}MP \leqslant \frac{1}{2}MN$，故MP之中點必須落在$C_M$之中，或之上，

同理，NP之中點落在圓C_N之中或上面

因此，至少各有995個（中）點落在C_M和C_N內部或上面，加上MN之中點，共有$2 \times 995 + 1 = 1991$個紅點，故至少有1991個紅點在平面上。

特例為：當P_1, P_2, …, P_{997}這997個點共線，且$P_1P_2 = P_2P_3 = \cdots = P_{996}P_{997}$，此時$P_{i-1}P_i$（$i = 2, 3, \cdots 997$）有996個中點，而$P_i$（$i = 2, 3, \cdots 996$）本身卻是$P_{i-1}P_{i+1}$之中點，其餘之中點均與這些（1991）點重覆，故在這種特例下共有1991個紅點。

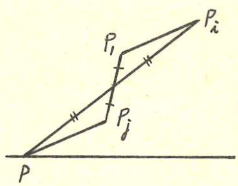
※（解法二）

選擇任意點P，設ℓ為過P點但不含其它點的直線。（直線ℓ存在，否則任意過P之直線必包含其中一點，則有無限多點，產生矛盾）

設在直線ℓ的一邊有x個點，且P_1為這些點中與直線ℓ距離最遠的點，在直線ℓ的另一邊有y個點且P_2為這些點中與直線ℓ距離最遠的點，不失一般性，我們可以假設$x > 0$，如此可知：

由P點及其它996個點所產生之996個中點，一定相異於由P_1點與其它與P_1同一邊的$x-1$個點所產生之中點。否則，設P_i, P_j為與P_1同一邊之二相異點而使得PP_i之中點與P_1P_j之中點重合，如圖所示：

顯然可以看出P_i與ℓ之距離必大於P_1與ℓ之距離，產生矛盾。



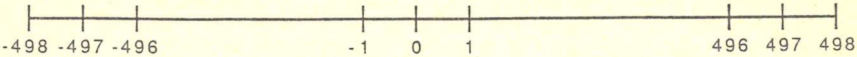
1° 若$x = 996$，（$y = 0$），則共有$996 + 995 = 1991$個紅點。

2° 若$x + y = 996$，且x, $y > 0$，則因由P_2與其它與P_2同一邊的$y-1$個點所產生之中點必相異於上述之中點。

得到$996 + x - 1 + y - 1 = 1990$個相異（紅）點。

考慮Q_1為與P_1同一邊且與ℓ距離最近的點，Q_2為與P_2同一邊且與ℓ距離最近的點，則Q_1Q_2之中點又相異於上述各中點，得到共$1990+1=1991$個中點。

特例與解法一相同。



3. 因為$(a_k-b_k)^2\geq 0$，$A_k=1,2,\cdots,n$

$\Rightarrow (a_k+b_k)^2\geq 4a_kb_k$，

$$\Rightarrow \frac{a_kb_k}{a_k+b_k}\leq\frac{1}{4}(a_k+b_k)\text{，}A_k=1,2,\cdots,n$$

$$\text{故}\ \sum_{k=1}^{n}\frac{a_kb_k}{a_k+b_k}\leq\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$$\left(\text{因為}\ \sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}b_k\right)$$

$$\text{如此一來，}\ \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2+a_kb_k-a_kb_k}{a_k+b_k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_kb_k}{a_k+b_k}\geq\sum_{k=1}^{n}a_k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k\text{，得證}$$

4. 首先，先將學生編號，拿到第一塊糖的學生為1號，然後沿順時針方向逐次編為2號，3號，…，等等。

其次，對正整數k，設拿到第k塊糖的學生是a_k號，則可得

$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=6$，…等等。一般而言，可得

$$a_k\equiv\frac{k(k+1)}{2}\pmod{n}$$

下面幾個簡單的性質有助於解本題：

(1) $\frac{(n-1)n}{2} \equiv \frac{n(n+1)}{2} \pmod{n}$，這表示 $a_{n-1} = a_n$，因此，當老師給完前 n 塊糖時，a_n 號學生已得到至少四塊，由此可知，其他學生中至少有一人沒拿到糖。

(2)對每個正整數 k，$\frac{(2n+k)(2n+k+1)}{2} \equiv \frac{k(k+1)}{2} \pmod{n}$ 恒成立，這表示 $a_{2n+k} = a_k$。因此，當老師給完前 2n 塊糖後，即使遊戲繼續進行，在前 2n 塊糖中沒拿到糖的學生一定都拿不到糖了。

(3)對每個整數 k，$1 \leq k \leq 2n-2$，$\frac{(2n-k-1)(2n-k)}{2} \equiv \frac{k(k+1)}{2}$ $\pmod{n}$ 恒成立，這表示 $a_{2n-k-1} = a_k$。（a_k 號學生在第 k 及 $2n-k-1$ 次中均拿到糖）

(4) $\frac{(2n-1)(2n)}{2} \equiv \frac{2n(2n+1)}{2} \pmod{n}$，這表示 $a_{2n-1} = a_{2n}$

於是，前 2n 個糖的獲得者有下述狀況：

$$
\begin{array}{ll}
a_1 = a_{2n-2} & a_{2n-1} = a_{2n} \\
a_2 = a_{2n-3} & \\
\vdots & \\
a_{n-2} = a_{n+1} & \\
a_{n-1} = a_n &
\end{array}
$$

由上述結果可知，每個學生都能拿到糖的充要條件是 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_{2n-1}$ 兩兩相異，且每個學生在老師給完前 2n 塊糖時均剛好拿到 2 塊糖。對任意二正整數 k，ℓ 而言，

$$
\begin{aligned}
a_k = a_l &\Rightarrow \frac{k(k+1)}{2} \equiv \frac{\ell(\ell+1)}{2} \pmod{n} \\
&\Rightarrow (k-\ell)(k+\ell+1) \equiv 0 \pmod{2n} \\
&\Rightarrow (2n) \mid (k-\ell)(k+\ell+1)
\end{aligned}
$$

CASE Ⅰ，設 $n=2^m$，即 n 是 2 的乘冪。

若 $a_k=a_\ell$，$1\le k<\ell\le 2n$，則因爲 $k-\ell$ 與 $k+\ell+1$ 必是一奇一偶，而奇數必與 $2n\ (=2^{m+1})$ 互質，所以，由 $(2n)\mid(k-\ell)(k+\ell+1)$ 可知 $k-\ell$ 與 $k+\ell+1$ 兩者之一是 2n 的倍數。因爲 $1\le\ell-k<2n$，可知 $k-\ell$ 不是 2n 的倍數。

於是，$k+\ell+1$ 是 2n 的倍數，再由 $k+\ell+1\le 4n$ 可知 $k+\ell+1=2n$ 或 $k+\ell+1=4n$。

因爲集合 $\{1,2,\cdots,n-2,n-1,2n-1\}$ 中任意二相異元素 k 與 ℓ 都不滿足 $k+\ell+1=2n$ 或 $k+\ell+1=4n$，所以，可見 a_1，a_2，⋯，a_{n-2}，a_{2n-1} 兩兩相異。於是每位學生都能拿到糖。

CASE Ⅱ，設 $n=2^m p$，其中 m 是非負整數，p 是大於 1 的奇數

令　r 表示滿足 $2^r<p<2^{r+1}$ 的正整數，令

$$k=2^{m+r}+\frac{p-1}{2},\quad \ell=2^{m+r}-\frac{p+1}{2}$$

則得　$k-\ell=p$，$k+\ell+1=2^{m+r+1}$，

$(2n)\mid(k-\ell)(k+\ell+1)$

(i)若 $\ell\not\in N$，則因爲 $1\le k$，$\ell\le 2n-1$ 而且 $k+\ell=2^{m+r+1}-1\ne 2n-1$，所以得知 k，$\ell$，$2n-k-1$，$2n-\ell-1$ 是 $\{1,2,\cdots,2n-2\}$ 中四個相異元素。

因爲 $a_k=a_\ell=a_{2n-k-1}=a_{2n-\ell-1}$，所以，$a_1$，$a_2$，⋯，$a_{n-2}$，$a_{n-1}$，$a_{2n-1}$ 中並非兩兩相異。於是，不是每位學生都能拿到糖。

(ii)若 $\ell=0$，則 $2^{m+r}=\dfrac{p+1}{2}\ \Rightarrow\ p=2^{m+r+1}-1$

$\Rightarrow\ 2^r<2^{m+r+1}-1<2^{r+1}$　我們得到 $m=0$

故　$n=p=2^{r+1}-1$ 是一個奇數

此時 $a_n=a_{n-1}=a_{2n-1}=a_{2n}$，亦非每位學生均能拿到糖。

由上討論知，當 n 爲 2 的乘冪時，此題有解。

PS：此題解答來自趙文敏教授。

5.設圓 C_1 與圓 C_2 之切點爲Q，以P爲圓心，PQ 爲半徑作一圓 C_3 ，則 C_3 必正交於 C_2 與 C_1 。

設 C_1 與 C_2 之兩條公切線爲 L_1 ，L_2 ，且 L_1 切 C_1 於 A_1 切 C_2 於 A_2 ，L_2 切 C_1 於 B_1 ，切 C_2 於 B_2 。

然後，我們以圓 C_3 爲反轉圓，則 C_1 與 C_2 因與 C_3 正交，故在反轉作用下不改變，然而 L_1 與 L_2 轉爲兩個圓 O_1 與 O_2 ，作法如下：

延伸 PA_1 交 C_1 於另一點 A_1'，延伸 PA_2 交 C_2 於另一點 A_2'

以P，A_1'，A_2' 三點構成的圓，即爲 L_1 之反轉像，圓 O_1 。

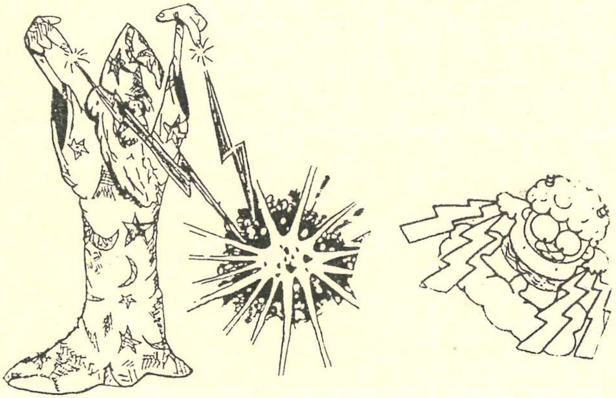
則以P，B_1'，B_2' 三點構成的圓，即爲 L_2 之反轉像，圓 O_2 。

因爲 L_1 與 L_2 均與 C_1，C_2 相切，故圓 O_1，O_2 亦於 C_1，C_2 相切。

設另有一圓異於 O_1，O_2 且通過P點與 C_1，C_2 相切，則我們將它對圓 C_3 作反轉變換得到一切於 C_1，C_2 之直線，則我們得到三條切於圓 C_1，C_2 之直線，且沒有一條爲其根軸，得到矛盾。

故只有圓 O_1，O_2 爲我們所求。

註：以上資料由陳昭地系主任提供，特此感謝。



嘯虎之訪

The Eight Circle

撰稿人：陳玦瑜

筆者應師大數學總編輯之請，爲他訪問了系上新上任助教陳嘯虎學長，讓系上同學知道學長一些心中的話，更揭開學長與同學間的神秘之紗。以下便是訪談的過程：

問：當初爲何要選數學系？

答：（作害羞狀）這是因爲我的數學成績一向來都不錯。我所唸的高中是桃園武陵高中，數學成績在班上一直都在前三名內，所以就培養了對數學的興趣，更以第一志願考上師大數學系。

問：在師大唸了四年的數學，現在又要繼續唸研究所，有什麼感想或心得嗎？

答：我覺得師大數學系和台大數學系相比，有些差別。台大的讀書風氣較盛，也有較好的讀書環境，這是第一點。其次是，台大數學系教得比較多，或許這是兩校要求不同的原因。至於台大數學系讀書風氣較盛的原因之一，是因爲師大出來的學生的工作是鐵飯碗，不必再爲工作煩惱，而台大學生必須爭取好成績以爭取好工作，所以也就造就了較盛的讀書風氣。

問：對於數學系的科目，有那些科目唸起來較有興趣，或是唸起來較爲吃力的？

答：（稍露爲難之色）我對每一科都有興趣，分不出那一科最有興趣。數學科的科目都不會很難，所以沒有特別吃力的科目。

問：當初爲何想唸師大研究所？

答：唸研究所是我一直以來的心願，高中的數學老師也鼓勵我唸研究所，他們認爲有能力就應繼續唸下去。

問：上研究所後，會選擇那一個方向來唸？

答：可能會唸統計方面，因爲統計和電腦的關連性較高，個人也很喜歡電腦。

問：有什麼對學弟妹們的建議嗎？

答：（沉思一陣）希望學弟妹能學好電腦，因爲目前電腦資訊是必備的基本常識。

問：這幾屆的學弟妹的數學基礎如何？表現又如何？

答：都相當不錯，也比較用功。事實上，聯考的成績和在大學的表現並不呈正比關係，只要肯努力，都會有好的表現。

問：對於目前讀書風氣不盛的情況，有何改善之道？

答：很難。其實讀書是個人的事，有心要唸書的人自然會把書唸好。若要改善讀書風氣，除非受到外來的壓力，就像如果教師職位開放給其他大學的數學系學生，自然而然同學會較用功些。

問：師大的原意是要培養中學教師，爲何系上又要開研究所呢？

答：師大原意的確是要培養中學教師，但是系上老師都很希望我們能多唸一些，所以開了研究所以方便系上同學。但，我想如果不想繼續深造，也不必唸太多理論。

問：還有需要補充的嗎？

答：沒有了。

訪談就此結束。

附記：陳嘯虎學長是個和藹可親的助教，系上同學可以多親近親近。

編後語

COUNT YOUR BLESSINGS

when there are dark and cloudy days
think about the sun
when you have work you need to do
think of it as having fun
when there's a long, hard road to travel
think about the end
when you feel lost and all alone
think abont a friend
when things are going badly
think of when they're going best
when you feel blue
just think of all
the happy ways you're blessed.

楊青育
趙國欽　謹啓
許技江

發 行 人：陳昭地

出 版 者：國立台灣師範大學數學學會

編　　輯：楊青育、趙國欽、許技江

封　　面：楊青育

印 刷 者：梅枝圖書印刷電腦排版有限公司

地　　址：台北市羅斯福路三段二七三號二A

電　　話：(02)3637091·3626764

出版日期：中華民國八十年十月七日

師大訓課刊登字第 136 號

統一編號
06385750370